# 2020 年臺灣國際科學展覽會
# 優勝作品專輯

作品編號　010043

參展科別　數學

作品名稱　正三角形的最小拼接

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　國立新竹女子高級中學

指導教師　邱士珊、鐘培碩

作者姓名　劉筱玟、程奕璇

關鍵詞　正三角形、鑲嵌、正整數解

# 作者簡介

我是劉筱玟（左），目前就讀新竹女子高級中學二年級。平時喜歡閱讀，而最喜歡的科目就是數學了，從小就對數學很感興趣，升上高中後開始做數學專題研究，雖然遇到許多困難，但在數學技巧、報告能力，又或是和同學的相處上，都有收穫。很高興能參加國際科展，希望能透過這次參展，和大家多方交流也能學習到更多。

我是程奕璇（右），目前就讀國立新竹女子高級中學二年級。個性活潑開朗，有點迷糊，常常忘東忘西。喜歡閱讀、唱歌、跳舞，也喜歡不需要考試的數學，經常被理解數學的喜悅包圍。一年多的數學專題生活，一路上有挫折也有驚喜，很幸運能夠參加今年的台灣國際科展，將作品分享給大家！

# 摘要

眾所周知，「如何使用三種不同邊長的正三角形，去拼出邊長最小的正三角形？」這個問題是困難的。本文限縮在分層或拼接的拼法下，探討此問題，並得到了答案。解決過程中牽涉到正整數解的存在性問題——如何找最小的正整數 $z$ ，使得方程式 $ax+by=cz$ 有正整數解，其中 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 為三種正三角形的邊長。

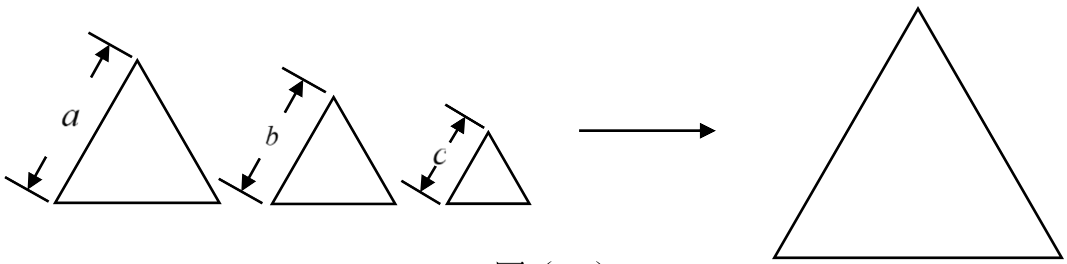
# Abstract

It is well known that the problem of combining three different kinds of regular triangles to make another regular triangle having the shortest side length is difficult. By restricting the combining method to "layering" and "piecing," we are able to solve this problem. The process involves the existence of positive integer solution of an equation： How to find the smallest positive integer $z$ of the equation "$ax+by=cz$", where $a$, $b$, $c$ are the side lengths of the three different kinds of regular triangles.

# 壹、前言

一、題目

給定三種大小不同的正三角形，邊長由大至小分別為正整數$a$、$b$、$c$，使用這三種正三角形拼出另一個正三角形（如下圖（一）)，請問可以拼出的正三角形的最小邊長為何？（規定每種三角形皆需使用。）




圖（一）

二、研究動機

在高一的數學課堂中，老師提出上述問題作為我們專題研究的參考題材：「給邊長分別為７、5、3的三種正三角形，如何使用這三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小？」我們對此問題甚感興趣，除了找出此問題的解外，也嘗試把「７、5、3」轉換成「$a$、$b$、$c$三數兩兩互質」作為研究題目，投稿中學生網站小論文《‘try angle’組合的奧妙》。在此篇小論文的文章中，我們有了一些研究結果，節錄如下：

| |
|---|
| 若邊長分別為$a$、$b$、$c$三數兩兩互質的正三角形且$a>b>c$，利用規則與不規則排列的拼法：<br>若$\frac{a}{b}-\left[\frac{a}{b}\right]>1-\frac{a-b}{bc}$，則最小邊長為$\min\left\{\left(\left[\frac{a}{b}\right]+1\right)bc+b, bc+az\right\}$，其中$z\in\mathbb{N}$且滿足方程式$bx+cy=az$有正整數解的最小正整數。 |

在研究過程中，我們曾嘗試用 python 撰寫程式後（見附錄一)，發現最小邊長皆為$bc+az$，但卻未能找到數學方法證明，於是我們著手處理此問題。並希望能將$a$、$b$、$c$轉換為任意三種正整數邊長的正三角形，且推得此三數所能拼出之最小正三角形的一般化結論。

三、研究目的

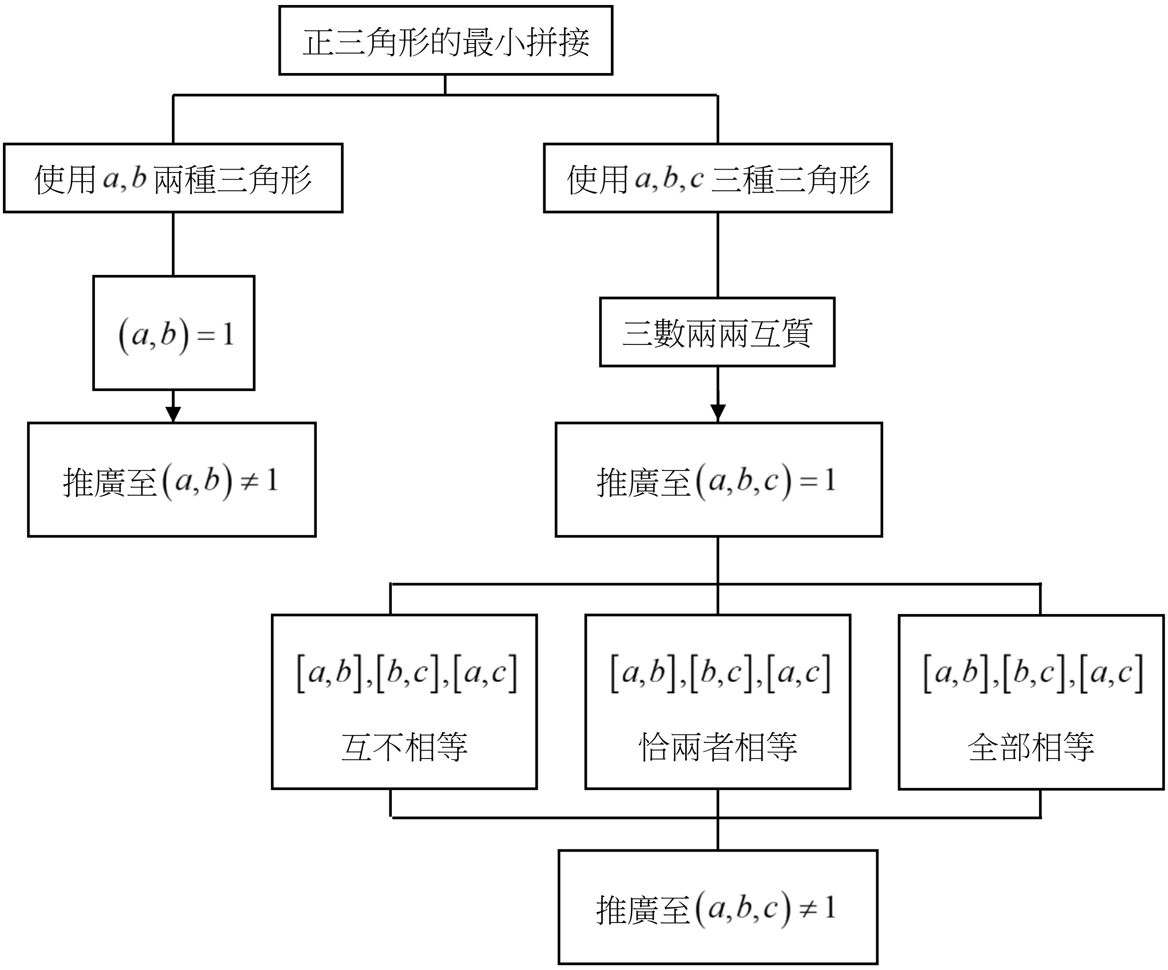
（一）使用兩種不同邊長的正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

（二）使用三種邊長兩兩互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

（三）使用三種邊長互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

（四）使用三種任意正整數邊長的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

四、研究架構



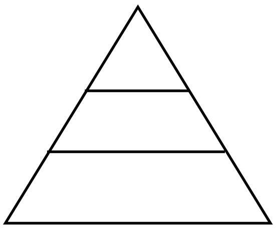
# 貳、研究方法與過程

一、名詞定義與先備知識

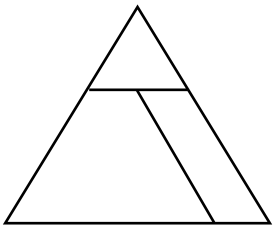
（一）分層：三種正三角形分成三層的排列方式，其中每層只有一種邊長的正三角形，如圖（二）。

（二）基本拼接：三種正三角形分成上下兩層，上層為一個區塊，下層又切割成兩個區塊的排列方式，其中下層的兩個區塊分別為一個平行四邊形和一個梯形，且每個區塊只有一種正三角形，如圖（三）。

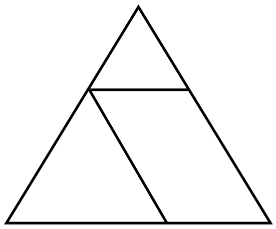
（三）特殊拼接：三種正三角形分成上下兩層，上層為一個區塊，下層又切割成兩個區塊的排列方式，其中下層的兩個區塊分別為一個平行四邊形和一個正三角形，且每個區塊只有一種正三角形，如圖（四）。



圖（二）



圖（三）



圖（四）

（四）拼接：基本拼接與特殊拼接的總稱。

（五）分割線：將不同邊長的正三角形所組成的區塊分開的直線。

（六）$S(b,c,a)=\{z\in\mathbb{N} \mid 方程式bx+cy=az有正整數解\}$。

（七）$S(a,c,b)=\{z\in\mathbb{N} \mid 方程式ax+cy=bz有正整數解\}$。

（八）$S(a,b,c)=\{z\in\mathbb{N} \mid 方程式ax+by=cz有正整數解\}$。

（九）$[a,b]$表示$a$、$b$二正整數的最小公倍數。

（十）$(a,b)$表示$a$、$b$二正整數的最大公因數。

（十一）　$(a,b,c)$表示$a$、$b$、$c$三正整數的最大公因數。

（十二）　$\lceil a\rceil$表示不小於$a$的最小整數。

（十三）　$\lfloor a \rfloor$表示不大於$a$的最大整數。

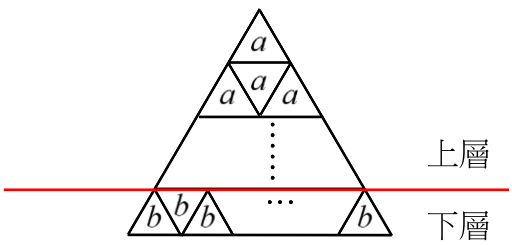
二、研究過程

本文先思考：「對於不同邊長的正三角形，什麼樣的拼法能拼出另一個三角形？」、「這些拼法中，哪一種拼法所拼出的三角形，其邊長最小？」於是，本文先思考一個簡化的問題如下，以觀察拼法：

**若只使用邊長分別為$a,b$（$a>b$，$a,b\in\mathbb{N}$）的兩種正三角形拼出另一正三角形，該如何使其邊長達到最小？**

假設$(a,b)=k,k\in\mathbb{N}$，$a=a'k$、$b=b'k$，且$(a',b')=1$。若以$a',b'$為邊長的兩種正三角形可以拼出的另一個最小正三角形邊長為$c'$，則分別以$a,b$為邊長的正三角形所拼成的最小正三角形邊長必為$c'k$。故將問題簡化，只需討論$(a,b)=1$的情形。

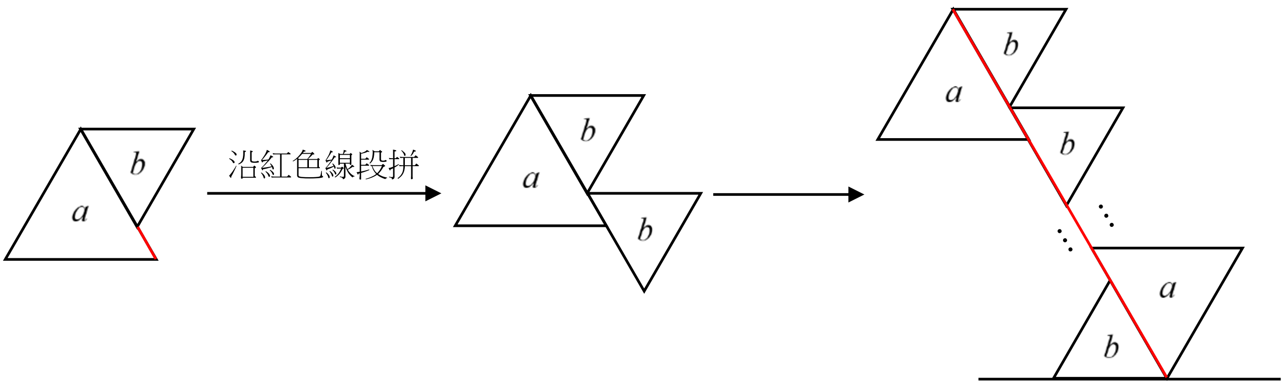
可以找到最小拼法如圖（五），即兩種正三角形分成上下兩層，其中每層皆只考慮一種邊長的正三角形的排列方式。在此種拼法中，邊長為分割線的長度和下層正三角形邊長的和，即為$[a,b]+b=ab+b$。



圖（五）

【說明】

當邊長為$a$的正三角形接觸到邊長為$b$的正三角形時，則至少會出現一條線（其中包含一條以上的分割線），其中該線的開始及結束都是兩個正三角形的頂點。其原因為兩三角形的邊長不同，因此需沿著凸出部分的邊長繼續拼正三角形，直到該線兩邊的正三角形邊長和相等為止，如圖（六）。




圖（六）

因為該線左右長度相等，因此可將該線用$ax_1+by_1=ax_2+by_2 \Leftrightarrow a\left(x_1-x_2\right)=b\left(y_2-y_1\right)$表示，其中$x_1$代表該線左邊邊長為$a$的正三角形個數，$y_1$代表該線左邊邊長為$b$的正三角形個數，$x_2$代表該線右邊邊長為$a$的正三角形個數，$y_2$代表該線右邊邊長為$b$的正三角形個數。並將其分成兩類：

1. $x_1 \neq x_2$

$\because a\left(x_1-x_2\right)=b\left(y_2-y_1\right) \therefore y_1 \neq y_2$。

此時$y_2-y_1$是$a$的倍數，即$y_2-y_1=ak \Leftrightarrow y_2=ak+y_1, k \in \mathbb{N}$，則

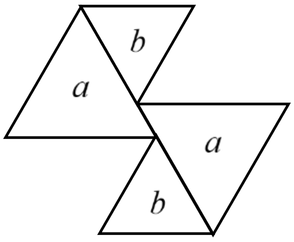
$ax_2+by_2=ax_2+b\left(ak+y_1\right)=abk+ax_2+by_1 \geq ab$，該線長度大於等於$ab$。

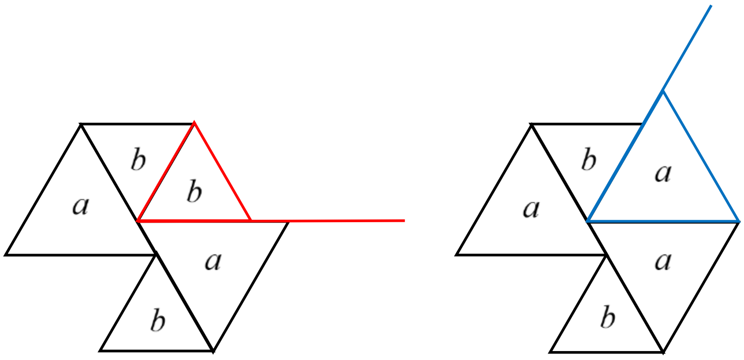
2. $x_1=x_2$

$\because a\left(x_1-x_2\right)=b\left(y_2-y_1\right)=0 \therefore y_1=y_2$

（$x_1, x_2$不可能同時為$0$，因為若此條件發生，則代表線的兩邊都沒有邊長為$a$的正三角形，則不符合上述該線出現的條件，同理$y_1, y_2$也不可能同時為$0$）

此時該線左右兩邊邊長為$a$的正三角形個數和邊長為$b$的正三角形個數相等，如圖（七）。代表同一側同時出現邊長為$a$的正三角形和邊長為$b$的正三角形。而當邊長為$a$的正三角形接觸到邊長為$b$的正三角形時會出現另一條線，如圖（八），而這條線可分成相同的兩類，直到同一側只出現邊長為$a$的正三角形或邊長為$b$的正三角形，而此情況只有可能在第一類。




圖（七）:

以 $x_1 = x_2 = 1, y_1 = y_2 = 1$ 為例

圖（八）

因此，拼出的正三角形內必有一條線的長度大於 $ab$ ，又因為只有 $ab$ 長無法拼出一個正三角形，因此最小邊長為 $ab+b$ 。

綜合上述，若 $(a,b)=1$ ，則以 $a$ 、 $b$ 兩種正三角形拼出的另一正三角形中，其最小邊長為 $ab+b$ ；若 $(a,b)\neq 1$ ，則以 $a$ 、 $b$ 兩種正三角形拼出的另一正三角形中，其最小邊長為 $\dfrac{ab}{(a,b)}+b$ 。

從上述討論過程中觀察到：使用兩種正三角形拼出另一正三角形，邊長達到最小時，此時拼法圖形裡只有一條分割線。所以，如果深入研究此問題：「使用邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ （ $a>b>c$ ）的三種正三角形拼出另一正三角形，該如何使其邊長達到最小？」本文會先從圖形中只有兩條分割線的情況：分層、基本拼接、特殊拼接這三種情形做討論。而分層的拼法為中學生網站小論文《‘try angle’組合的奧妙》此文章中的規則拼法；基本拼接的拼法為《‘try angle’組合的奧妙》此文章中的不規則拼法。

接著，本文想探討的問題為：「在分層、基本拼接、特殊拼接的拼法下，使用邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ （ $a>b>c$ ）的三種正三角形拼出另一正三角形，該如何使其邊長達到最小？」於是，將問題特殊化，先探討「邊長 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 兩兩互質」的情形，再深究「邊長 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 三數互質」的情形，最後解決「 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 為任意三種不同正整數」的情形。

（一） $a$ 、 $b$ 、 $c$ 兩兩互質

1. 在分層、基本拼接的拼法下，《‘try angle’組合的奧妙》此篇文章已有此結論，如下：

（1）若 $\dfrac{a}{b}-\left\lfloor \dfrac{a}{b}\right\rfloor > 1-\dfrac{a-b}{bc}$ ，則最小邊長為 $\min\left\{bc\left\lceil \dfrac{a}{b}\right\rceil + b, bc+az_0\right\}$ ，其中 $z_0=\min\left\{z \,\middle|\, z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

（2）若$\dfrac{a}{b}-\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor \le 1-\dfrac{a-b}{bc}$，則最小邊長為$\min\{ac+a, bc+az_0\}$，其中

$z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$。

本文在定理 1-1 中，將《‘try angle’組合的奧妙》此文章內容深入探討。

定理 1-1：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，其中$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$a$、$b$、$c$兩兩互質，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或基本拼接的拼法，

若$\dfrac{a}{b}-\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor+\dfrac{a-b}{bc}>1$，則最小邊長為$bc+az_0$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$。

【證明】

(1)先考慮方程式$bx+cy=az$的正整數解為$\begin{cases} bx+cy=at_1 \\ az=at_1 \end{cases}, t_1\in\mathbb{N}$（式一）。

因為$(b,c)=1$，所以存在$\alpha$、$\beta$為正整數且滿足$b\alpha-c\beta=1 \Rightarrow (b\alpha-c\beta)at_1=at_1$，將此式改寫成$b(a\alpha t_1)+c(-a\beta t_1)=a(t_1)$。

因此，（式一）的正整數解通式為$\begin{cases} x=a\alpha t_1-ct_2 \\ y=-a\beta t_1+bt_2 \\ z=t_1 \end{cases}, t_1,t_2\in\mathbb{N}$，

因為$x>0$且$y>0$，所以$t_2\in\left(\dfrac{a\beta t_1}{b}, \dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$。

當$t_1=\left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil$時，則區間$\left(\dfrac{a\beta t_1}{b}, \dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$的長度為

$\dfrac{a\alpha t_1}{c}-\dfrac{a\beta t_1}{b}=\dfrac{(b\alpha-c\beta)at_1}{bc}=\dfrac{a}{bc}t_1>\dfrac{a}{bc}\times\dfrac{bc}{a}=1$，

即至少存在一個$t_2\in\mathbb{N}$，也就是（式一）必有正整數解。可推得

$t_1=\left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil\in S(b,c,a)$。

因為$z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$，所以$t_1=\left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil\ge z_0$。

(2)以下將證明：「若$\dfrac{a}{b}-\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor+\dfrac{a-b}{bc}>1$，則最小邊長為

$\min\left\{bc\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil+b, bc+az_0\right\}=bc+az_0$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$。」

（i）若$a>bc$，則$\left\lceil \frac{bc}{a} \right\rceil=1$。即$z_0=1$。

$$\left(bc\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil+b\right)-\left(bc+az_0\right)>\left(ac+b\right)-\left(bc+a\right)=(a-b)(c-1)\ge 0$$，

可推得$bc\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil+b>bc+az_0$。

（ii）若$a<bc$，且$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor\ge 2$

$$\frac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+b}{a}\ge\frac{2bc+b}{a}>\frac{bc+a}{a}=\frac{bc}{a}+1\Rightarrow\left\lfloor \frac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+b}{a} \right\rfloor\ge\left\lceil \frac{bc}{a} \right\rceil\ge z_0$$

$$\Rightarrow\left\lfloor \frac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+b}{a} \right\rfloor\ge z_0\Rightarrow bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+b\ge az_0\Rightarrow bc\left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+1\right)+b\ge bc+az_0$$

可推得$bc\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil+b\ge bc+az_0$。

（iii）若$a<bc$，且$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor=1$，即$a=b+r$，其中$0<r<b$

$$\frac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+b}{a}=\frac{bc+b}{a}>\frac{bc+b}{2b}=\frac{c+1}{2}$$

可得到$\left\lfloor \frac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+b}{a} \right\rfloor\ge\left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor=\begin{cases}\frac{c+1}{2},\text{若}c\text{為奇數}\\ \frac{c}{2}\quad,\text{若}c\text{為偶數}\end{cases}$

（iv）承（iii）的條件，以下過程將證明$\left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor\in S(b,c,a)$

因為$\frac{a}{b}-\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+\frac{a-b}{bc}>1$，

所以$\frac{r}{b}+\frac{r}{bc}>1\Rightarrow rc+r>bc\Rightarrow r>\frac{c}{c+1}b\Rightarrow a=b+r>\frac{2c+1}{c+1}b\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{2c+1}{c+1}$

Case1：當$c$為奇數時，$t_1=\left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor=\frac{c+1}{2}$，且$t_2\in\left(\frac{a\beta t_1}{b},\frac{a\alpha t_1}{c}\right)$，

則區間$\left(\frac{a\beta t_1}{b},\frac{a\alpha t_1}{c}\right)$長度為

$$\frac{a\alpha t_1}{c}-\frac{a\beta t_1}{b}=\frac{\left(b\alpha-c\beta\right)at_1}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{t_1}{c}>\frac{2c+1}{c+1}\times\frac{c+1}{2c}>1$$，

所以必至少存在一個$t_2 \in \mathbb{N}$，也就是（式一）必有正整數解。

即$t_1 = \left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor \in S(b,c,a)$ 。

Case2：當$c$為偶數時，$t_1 = \left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor = \dfrac{c}{2}$ ，且$t_2 \in \left( \dfrac{a\beta t_1}{b}, \dfrac{a\alpha t_1}{c} \right)$ ，

則區間$\left( \dfrac{a\beta t_1}{b}, \dfrac{a\alpha t_1}{c} \right)$長度為

$\dfrac{a\alpha t_1}{c} - \dfrac{a\beta t_1}{b} = \dfrac{(b\alpha - c\beta) a t_1}{bc} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{t_1}{c} > \dfrac{2c+1}{c+1} \times \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}$ ，

且$\dfrac{a\alpha t_1}{c} = \dfrac{a\alpha}{2}$ 。因為$(a,c)=1$ ，$b\alpha - c\beta = 1$，所以$a$ 、 $\alpha$ 皆為奇數。

因此，$\dfrac{a\alpha}{2} - \left\lfloor \dfrac{a\alpha}{2} \right\rfloor = \dfrac{1}{2}$ ，則區間$\left( \left\lfloor \dfrac{a\alpha t_1}{c} \right\rfloor, \dfrac{a\alpha t_1}{c} \right)$長度為$\dfrac{1}{2}$ ，

即$\left\lfloor \dfrac{a\alpha t_1}{c} \right\rfloor \in \left( \dfrac{a\beta t_1}{b}, \dfrac{a\alpha t_1}{c} \right)$ ，所以存在$t_2 = \left\lfloor \dfrac{a\alpha t_1}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a\alpha}{2} \right\rfloor$ ，

即$t_1 = \left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor \in S(b,c,a)$ 。

（ⅴ）綜合上述，承（iii）和（iv），可得$\left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor$且

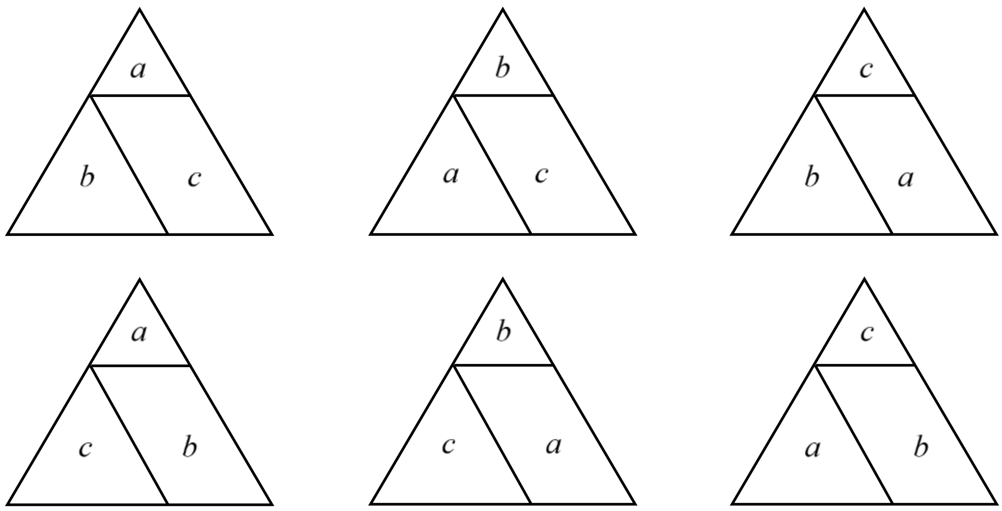
$\left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor \in S(b,c,a)$ ，又因為$z_0 = \min\{ z | z \in S(b,c,a) \}$ ，

故$\left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor \geq z_0 \Rightarrow \left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \geq z_0 \Rightarrow bc\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + b \geq az_0$ 。

可推得$bc\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil + b = bc\left( \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + 1 \right) + b \geq bc + az_0$ 。

綜合（1）、（2）（i）到（2）（v）的分類討論，證明了定理 1-1。 Q.E.D.

2. 特殊拼接的六類拼法中，最小邊長有三種：$ac+bc$ 、 $ab+bc$ 、 $ab+ac$ ，如圖（九）。



圖（九）

明顯地，$ac+bc<ab+bc<ab+ac$，故特殊拼接的最小邊長為$ac+bc$。

而定理 1-1 的證明過程中可推得$\left\lceil \frac{bc}{a} \right\rceil \ge z_0 \Rightarrow c \ge z_0 \Rightarrow ac+bc \ge bc+az_0$。

可知特殊拼接的最小邊長不小於$bc+az_0$。因此，可將《‘try angle’組合的奧妙》的結論與定理 1-1，進化為以下敘述。在此，稱為定理 1-2。

定理 1-2：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$a$、$b$、$c$兩兩互質，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接（含基本拼接與特殊拼接）的拼法，

（1） 若$\frac{a}{b}-\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+\frac{a-b}{bc}>1$，則最小邊長為$bc+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$。

（2） 若$\frac{a}{b}-\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor+\frac{a-b}{bc}\le 1$，則最小邊長為$\min\left\{ac+a,bc+az_0\right\}$，其中

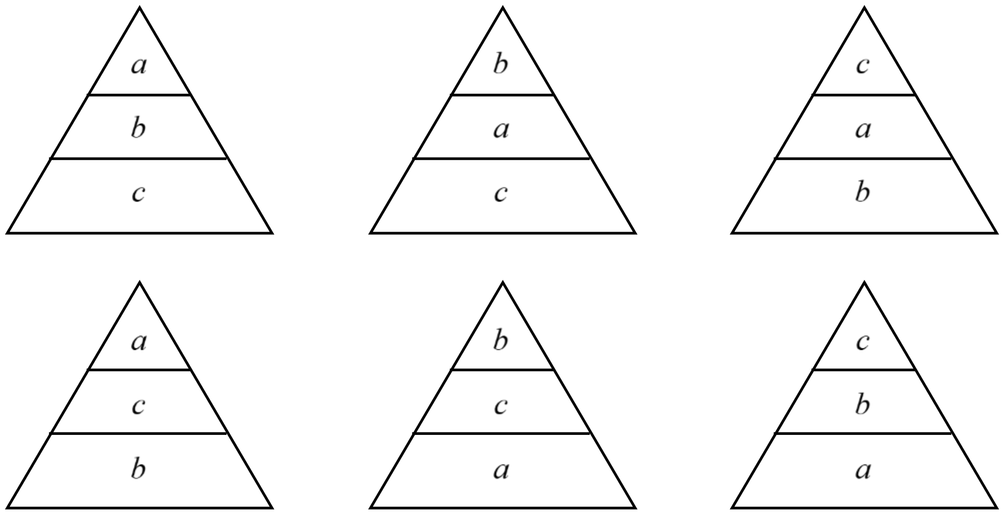
$z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$。

接著，本文將條件「$a$、$b$、$c$兩兩互質」放寬為「$(a,b,c)=1$」，想在分層和拼接的拼法中，使用邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

（二）$(a,b,c)$=1

1. 首先，列出分層、基本拼接與特殊拼接的拼法如下：

六種分層的拼法，如圖（十）：



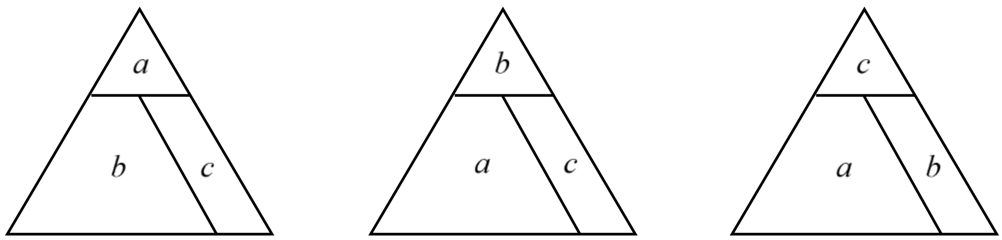

圖（十）

三種基本拼接的拼法，如圖（十一），其最小邊長分別為：

(1) $\left[b,c\right]+az_0$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$ ；

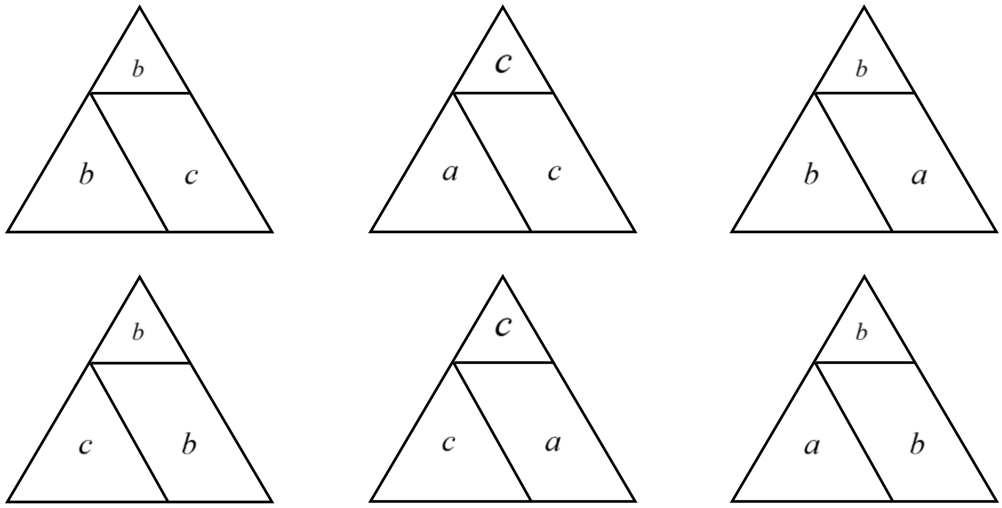
(2) $\left[a,c\right]+bz_0$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,c,b)\right\}$ ；

(3) $\left[a,b\right]+cz_0$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$ 。




圖（十一）

六種特殊拼接的拼法，其最小邊長有$[a,c]+[b,c]$、$[a,b]+[b,c]$、$[a,b]+[a,c]$，如圖（十二）：




圖（十二）

2. 以$[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$的大小次序分類，在不同次序下討論：如何在分層或拼接的拼法下，使用邊長分別為$a$、$b$、$c$（$a>b>c$）的三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。以下先分別討論$[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$三數兩兩皆不相同的情況。

> 定理 2-1：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，若$[b,c]>[a,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

【證明】

(1)六種分層的拼法中，其最小邊長有$[b,c]+c$、$[b,c]+b$、$[a,c]+c$、

$$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a\text{、}[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b\text{、}[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a\text{。}$$

明顯地，$[b,c]+b>[b,c]+c>[a,c]+c$。

因為$\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1>\frac{[b,c]}{[a,c]}$，所以$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a>[b,c]+a>[a,c]+c$。

同理，$[a,b]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b>[a,c]+c$，且$[a,b]\left(\left\lfloor\dfrac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a>[a,c]+c$。

因此，六種分層的拼法中，最小邊長為$[a,c]+c$。

(2)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，

明顯地，

$[a,c]+bz_0>[a,c]+b>[a,c]+c$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$。

$[b,c]+az_0\geq[b,c]+a>[a,c]+c$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

因此，綜合六種分層與三種基本拼接的拼法中，最小邊長為$\min\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

(3)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，

明顯地，$[a,c]+[b,c]>[a,b]+[b,c]>[a,b]+[a,c]>[a,c]+c$。

綜合（1）、（2）、（3），可推得利用分層或拼接的拼法，若$[b,c]>[a,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。 Q.E.D.

例一：$a=15$，$b=10$，$c=9$，且滿足$[b,c]>[a,c]>[a,b]$

分層拼出最小邊長為$[a,c]+c=[15,9]+9=54$；特殊拼接拼出最小邊長為$[a,b]+[a,c]=75$；基本拼接的拼法，為了找出$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。先考慮哪些$z$可以使方程式$15x+10y=9z$有正整數解。明顯地，$z=5k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$15x+10y=45k\Rightarrow 3x+2y=9k$，$(x,y,k)=(1,3,1)$是最小的一組解，即$z_0=5$，此時$[a,b]+cz_0=[15,10]+9\times5=75$。因此，最小邊長為54。

例二：$a=20$，$b=15$，$c=14$，且滿足$[b,c]>[a,c]>[a,b]$

分層拼出最小邊長為$[a,c]+c=154$；特殊拼接拼出最小邊長為

$[a,b]+[a,c]=200$；基本拼接的拼法，先考慮哪些$z$可以使方程式

$20x+15y=14z$有正整數解。明顯地，$z=5k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為

$4x+3y=14k$，$(x,y,k)=(2,2,1)$是最小的一組解，即$z_0=5$，此時

$[a,b]+cz_0=130$。因此，最小邊長為130。

> 定理 2-2：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，若$[a,c]>[b,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\{[b,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(a,b,c)\}$。

（其證明手法如定理 2-1，證明過程與例子詳見附錄二。）

> 定理 2-3：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，若$[a,b]>[b,c]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\{[b,c]+b,[a,c]+bz_0\}$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(a,c,b)\}$。

【證明】

(1)六種分層的拼法中，其最小邊長有$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c$、$[b,c]+b$、

$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c$、$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a$、$[a,b]+b$、$[a,b]+a$。

明顯地，$[a,b]+a>[a,b]+b>[b,c]+b$。

因為$\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1>\frac{[b,c]}{[a,c]}$，所以$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a>[b,c]+a>[b,c]+b$

考慮

$$\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\right\}-\{[b,c]+b\}>\{[a,b]+c\}-\{[b,c]+b\}=\{[a,b]-[b,c]-b\}+c>0$$

即$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c>[b,c]+b$。

同理$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c>[b,c]+b$。

因此，六種分層的拼法中，最小邊長為$[b,c]+b$。

(2)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，

明顯地，

$[b,c]+az_0\geq[b,c]+a>[b,c]+b$，其中$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

$[a,b]+cz_0>[a,b]+b>[b,c]+b$，其中$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,b,c)\}$。

因此，綜合六種分層與三種基本拼接的拼法中，最小邊長為$\min\{[b,c]+b,[a,c]+bz_0\}$，

其中$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,c,b)\}$。

(3)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，

明顯地，$[a,b]+[b,c]>[a,b]+[a,c]>[b,c]+[a,c]>[b,c]+b$。

綜合（1）、（2）、（3），可推得利用分層或拼接的拼法，若$[a,b]>[b,c]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\{[b,c]+b,[a,c]+bz_0\}$，其中$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,c,b)\}$。（例子見附錄五）

Q.E.D.

定理 2-4：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，若$[b,c]>[a,b]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\{[a,b]+b,[a,c]+bz_0\}$，其中$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,c,b)\}$。

（其證明手法如定理 2-3，證明過程與例子詳見附錄三。）

| |
|---|
| 定理 2-5-1：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在$[a,c]>[a,b]>[b,c]$的條件下，<br>（1） 若$\dfrac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-c}{[b,c]}>1$，則最小邊長為<br>$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$，其中$z_0=\min\{z\mid z\in S(b,c,a)\}$。<br>（2） 若$\dfrac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-c}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長為$\min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$，其中$z_0=\min\{z\mid z\in S(b,c,a)\}$。 |

【證明】

(1)六種分層的拼法中，其最小邊長有$[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c$、$[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b$、$[a,c]+c$、$[a,c]+a$、$[a,b]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b$、$[a,b]+a$。

明顯地，$[a,c]+a>[a,c]+c>[a,b]+a$。

考慮

$$\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\right\}-\{[a,b]+a\}\ge\{[a,c]+b\}-\{[a,b]+a\}=\{[a,c]-[a,b]-a\}+b>0$$

即$[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b>[a,b]+a$。同理$[a,b]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b>[a,b]+a$。

因此，在分層的拼法中，最小邊長為$\min\left\{[a,b]+a,[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\right\}$。

(2)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，

明顯地，

$\left[a,c\right]+bz_0>\left[a,c\right]+a>\left[a,b\right]+a$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,c,b)\right\}$ ，

$\left[a,b\right]+cz_0>\left[a,b\right]+a$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$ 。

因此，在三種基本拼接的拼法中，

若想要拼出最小邊長只需考慮邊長為 $\left[b,c\right]+az_0$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

(3)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，明顯地，

$\left[a,b\right]+\left[a,c\right]>\left[a,c\right]+\left[b,c\right]>\left[a,b\right]+\left[b,c\right]$ 。

因此在六種特殊拼接的拼法中，若想要拼出最小邊長只需考慮邊長為 $\left[a,b\right]+\left[b,c\right]$ 。

(4)考慮方程式 $bx+cy=az$ 的正整數解的問題，為了方便討論，重新改寫 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 為

$\begin{cases}a=g_1g_2A\\b=g_1g_3B\\c=g_2g_3C\end{cases}$ ，其中 $\begin{cases}g_1=(a,b)\\g_2=(a,c)\\g_3=(b,c)\end{cases}$ ，由 $(a,b,c)$=1可知： $g_1$ 、 $g_2$ 、 $g_3$ 兩兩互質，

$A$ 、 $B$ 、 $C$ 兩兩互質，$(A,g_3)$=1 、$(B,g_2)$=1 、$(C,g_1)$=1 。

改寫方程式如下：

$$(g_1g_3B)x+(g_2g_3C)y=(g_1g_2A)z\Rightarrow\begin{cases}x=g_2x'\\y=g_1y'\\z=g_3z'\end{cases}，\quad x',y',z'\in\mathbb{N}\ 。$$

重新改寫成 $Bx'+Cy'=Az'$（式二），且 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 兩兩互質。

由定理 1-1 中證明的（1），可以知道（式二） 的正整數解通式為

$\begin{cases}x'=A\alpha t_1-Ct_2\\y'=-A\beta t_1+Bt_2\\z'=t_1\end{cases}$ $,t_1,t_2\in\mathbb{N}$ ，且 $\dfrac{A\beta\,t_1}{B}<t_2<\dfrac{A\alpha\,t_1}{C}$ ，其中 $\alpha$ 、 $\beta$ 為正整數且滿足

$B\alpha-C\beta=1$ ，且 $\left\lceil\dfrac{BC}{A}\right\rceil\in S\left(B,C,A\right)\Rightarrow g_3\left\lceil\dfrac{BC}{A}\right\rceil\in S\left(b,c,a\right)$ ，即 $g_3\left\lceil\dfrac{BC}{A}\right\rceil\geq z_0$ 。

另一方面，因為 $\left[a,c\right]>\left[a,b\right]>\left[b,c\right]$，所以 $A>C>B$ ，

可以推得 $\frac{[a,b]}{a}=\frac{g_1g_2g_3AB}{g_1g_2A}=g_3B\geq g_3\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil\geq z_0$ ，也就是

$[a,b]\geq az_0\Rightarrow[b,c]+[a,b]\geq[b,c]+az_0$ ，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。

(5)若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$ ，

則 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1\Rightarrow\frac{[a,b]}{[b,c]}+\frac{a-c}{[b,c]}>\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\Rightarrow\frac{[a,b]+a-c}{[b,c]}>\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1$

即 $[a,b]+a-c>[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)$ ，可推得 $[a,b]+a>[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c$ 。

反之，若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\leq1$ ，則 $[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\geq[a,b]+a$ 。

綜合（1）、（2）、（3）、（4）、（5），可推得利用分層或拼接的拼法，

在 $[a,c]>[a,b]>[b,c]$ 的條件下，

若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$ ，則最小邊長為 $\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$ ，

其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。

若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\leq1$ ，則最小邊長為 $\min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$ ，

其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。 Q.E.D.

在 $[a,c]>[a,b]>[b,c]$ 下，分層拼出的最小邊長有二種可能，於是本文將定理 2-5-1 再分成 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$ 與 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\leq1$ 兩種情形。並猜想：「定理 2-5-1

會不會與定理 1-1 有類似的結果？」於是利用 python 撰寫程式碼發現（結果見附錄六）：

「滿足定理 2-5-1（1）的兩種最小邊長：$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c$ 和 $[b,c]+az_0$ 皆可能發生。」但從數據中發現：「若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 滿足 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 是偶數此條件時，則最小邊長必為 $[b,c]+az_0$ ；反之，則兩種最小邊長皆有可能發生。」證明如下，並結合定理 2-5-1 的證明，寫成定理 2-5-2。

定理 2-5-2：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形， $a,b,c\in\mathbb{N}$ ， $a>b>c$ 且 $(a,b,c)=1$ ，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在 $[a,c]>[a,b]>[b,c]$ 的條件下，則

（1） 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$ ，且 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為偶數時，則最小邊長為 $[b,c]+az_0$ ，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$ 。

（2） 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$ ，且 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為奇數時，則最小邊長為 $\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$ ，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$ 。

（3） 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\le 1$ ，則最小邊長為 $\min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$ ，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$ 。

【證明】

(1)定理 2-5-2（2）、（3）的證明部分已在定理 2-5-1 已證得，只需再證明定理 2-5-2（1）。

因為 $\dfrac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為偶數，即表示定理 2-5-1 證明過程（4）的 $B$ 為偶數。

(2)沿用定理 2-5-1 證明過程（4）中的符號，證明定理 2-5-2（1），並分成三種狀況說明。

首先，以「$A$、$B$、$C$」改寫定理 2-5-2（1）的敘述：

$$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1 \Leftrightarrow \frac{A}{C}-\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{g_1A-g_3C}{g_1g_3BC}>1$$，且 $B$ 為偶數。

證明：$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\geq[b,c]+az_0$，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$

$$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\geq[b,c]+az_0 \Leftrightarrow [b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor\right)+c\geq az_0$$

$$\Leftrightarrow g_3\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{g_3C}{g_1A}\geq z_0 \Leftrightarrow \frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}\geq\frac{z_0}{g_3}$$ 。

Case1：若 $A>BC$，則 $\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil=1$。即 $z_0=g_3$。

$$\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}>\frac{BC}{A}\left(\frac{A}{C}-1\right)+\frac{C}{g_1A}=B-\frac{BC}{A}+\frac{C}{g_1A}>B-1\geq1$$

也就是 $\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}\geq\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\geq[b,c]+az_0$

Case2：若 $A<BC$ 且 $\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor\geq2$，則 $\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}>\frac{2BC}{A}>\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil$。

定理 2-5-1 證明過程（4）中可知 $\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil\geq\frac{z_0}{g_3}$，

可以推得 $\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}>\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c>[b,c]+az_0$。

Case3：若 $A<BC$ 且 $\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor=1$，則 $A=C+r$，$0<r<C$。

（i）改寫條件：$\frac{A}{C}-\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor+\frac{g_1A-g_3C}{g_1g_3BC}>1 \Leftrightarrow \frac{r}{C}+\frac{g_1\left(C+r\right)-g_3C}{g_1g_3BC}>1$

$$\Leftrightarrow g_1g_3Br+g_1C+g_1r-g_3C>g_1g_3BC \Leftrightarrow \left(g_1g_3B+g_1\right)r>\left(g_1g_3B+g_3-g_1\right)C$$

$$\Leftrightarrow r>\left(\frac{g_1g_3B+g_3-g_1}{g_1\left(g_3B+1\right)}\right)C$$

即$\left(\frac{2g_1g_3B+g_3}{g_1g_3B+g_1}\right)C<A<2C$，可推得$\frac{A}{C}>\left(\frac{2g_1g_3B+g_3}{g_1g_3B+g_1}\right)$以及$\frac{1}{A}>\frac{1}{2C}$。

（ii）說明：$Bx'+Cy'=A\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$有正整數解。

定理 2-5-1 證明過程（4）中，$\frac{A\alpha\ t_1}{C}-\frac{A\beta\ t_1}{B}=\frac{A(B\alpha-C\beta)\ t_1}{BC}=\frac{A\ t_1}{BC}$

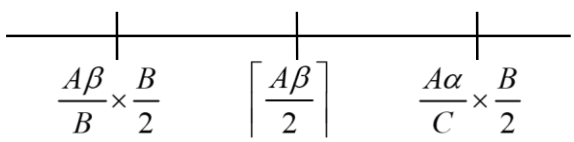
當$t_1=\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$，因為 $B$ 為偶數，所以，

$$\frac{A}{BC}\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor=\frac{A}{BC}\times\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{A}{C}>\frac{1}{2}\left(\frac{2g_1g_3B+g_3}{g_1g_3B+g_1}\right)>\frac{1}{2}\text{。}$$

且$\frac{A\beta\ t_1}{B}=\frac{A\beta}{B}\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor=\frac{A\beta}{B}\times\frac{B}{2}=\frac{A\beta}{2}$，

因為$\left(A,B\right)=1$、$B\alpha-C\beta=1$，所以$A$、$\beta$為奇數，所以

$\left\lceil \frac{A\beta}{2} \right\rceil-\frac{A\beta}{2}=\frac{1}{2}$，也就是必存在正整數$t_2=\left\lceil \frac{A\beta}{2} \right\rceil$，如下圖（十三）：




圖（十三）

證得$Bx'+Cy'=A\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$有正整數解，可以得知：

$$\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor \in S(B,C,A) \Rightarrow \frac{z_0}{g_3} \le \left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$$

（iii）

$$\frac{BC}{A}\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor + \frac{C}{g_1A} = \frac{BC}{A} + \frac{C}{g_1A} = \frac{g_1BC+C}{g_1A} > \frac{g_1BC+C}{2g_1C} = \frac{g_1B+1}{2g_1} > \frac{B}{2} = \left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$$

再由（ii）$\Rightarrow \frac{BC}{A}\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor + \frac{C}{g_1A} \ge \frac{z_0}{g_3} \Rightarrow [b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + c \ge [b,c] + az_0$

(3)由 Case1,Case2,Case3 可證得定理 2-5-2（1）（例子見附錄五） Q.E.D.

定理 2-6-1：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形，$a,b,c \in \mathbb{N}$ ，$a>b>c$ 且 $(a,b,c)=1$ ，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在 $[a,b]>[a,c]>[b,c]$ 的條件下，則

（1） 若 $\frac{[a,c]}{[b,c]} - \left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + \frac{a-b}{[b,c]} > 1$，則最小邊長為

$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + b, [b,c] + az_0\right\}$ ，其中 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(b,c,a)\}$ 。

（2） 若 $\frac{[a,c]}{[b,c]} - \left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + \frac{a-b}{[b,c]} \le 1$，則最小邊長 $\min\{[a,c]+a, [b,c]+az_0\}$ ，

其中 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(b,c,a)\}$ 。

【證明】

(1)六種分層的拼法中，其最小邊長有 $[b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + c$ 、 $[b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + b$ 、

$[a,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[a,c]} \right\rfloor + 1\right) + c$ 、 $[a,c]+a$ 、 $[a,b]+b$ 、 $[a,b]+a$ 。

明顯地， $[a,b]+a > [a,b]+b > [a,c]+a$ 。

考慮

$$\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\right\}-\{[a,c]+a\}\geq\{[a,b]+c\}-\{[a,c]+a\}=\{[a,b]-[a,c]-a\}+c>0$$

即 $[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c>[a,c]+a$ 。

同理，$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c>[a,c]+a$ 。

因此，在分層的拼法中，最小邊長為 $\min\left\{[a,c]+a,[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\right\}$ 。

(2)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，

$[a,c]+bz_0>[a,c]+a$ ，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$ ，

$[a,b]+cz_0>[a,c]+a$ ，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$ 。

再由上述得知，在三種基本拼接的拼法中，若想要拼出最小邊長只需考慮邊長為

$[b,c]+az_0$ ，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 的狀況。

(3)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，明顯地，

$[a,b]+[a,c]>[a,b]+[b,c]>[a,c]+[b,c]$ 。

因此在六種特殊拼接的拼法中，若想要拼出最小邊長只需考慮邊長為 $[a,c]+[b,c]$ 。

(4)考慮方程式 $bx+cy=az$ 的正整數解的問題，

由定理 2-5-1 證明過程中（4）裡中可以得知 $z_0\leq g_3\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil$，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。

因為 $[a,b]>[a,c]>[b,c]$，所以 $A>B>C$ ，

可以推得

$$\frac{[a,c]}{a}=\frac{g_1g_2g_3AC}{g_1g_2A}=g_3C\ge g_3\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil\ge z_0\Rightarrow[a,c]\ge az_0\Rightarrow[b,c]+[a,c]\ge[b,c]+az_0$$，

其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(5)若 $\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，

則 $\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1\Rightarrow\frac{[a,c]}{[b,c]}+\frac{a-b}{[b,c]}>\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\Rightarrow\frac{[a,c]+a-b}{[b,c]}>\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1$，

即 $[a,c]+a-b>[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)$，可推得 $[a,c]+a>[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b$。

反之，若 $\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}\le 1$，則 $[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\ge[a,c]+a$。

綜合（1）、（2）、（3）、（4）、（5），可推得利用分層或拼接的拼法，

在 $[a,b]>[a,c]>[b,c]$ 的條件下，

若 $\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，則最小邊長為 $\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$，

其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

若 $\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長為 $\min\{[a,c]+a,[b,c]+az_0\}$，

其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。 Q.E.D.

接著，本文猜測在定理 2-6-1（1）的條件下，會和定理 2-5-2（1）有相似的結果，於是利用 python 撰寫程式碼發現（結果見附錄七）:「若 $a$、$b$、$c$ 滿足 $\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$ 是偶數此條件時，則最小邊長必為 $[b,c]+az_0$；反之，則兩種最小邊長皆有可能發生。」證明如

下，並結合定理 2-6-1 的證明，寫成定理 2-6-2。

定理 2-6-2：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形， $a,b,c\in\mathbb{N}$ ， $a>b>c$ 且 $(a,b,c)=1$ ，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在 $[a,b]>[a,c]>[b,c]$ 的條件下，則

（1） 若 $\dfrac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{[b,c]}>1$，且 $\dfrac{c}{(a,c)\times(b,c)}$ 為偶數時，則最小邊長為 $[b,c]+az_0$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

（2） 若 $\dfrac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{[b,c]}>1$，且 $\dfrac{c}{(a,c)\times(b,c)}$ 為奇數時，則最小邊長為

$$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$$

，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

（3） 若 $\dfrac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長 $\min\left\{[a,c]+a,[b,c]+az_0\right\}$ ，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

【證明】

(1)定理 2-6-2（2）、（3）的證明部分已在定理 2-6-1 已證得，只需再證明定理 2-6-2（1）。

因為 $\dfrac{c}{(a,c)\times(b,c)}$ 為偶數，即表示定理 2-5-1 證明過程（4）的 $C$ 為偶數。

(2)沿用定理 2-5-1 證明過程（4）中的符號，證明定理 2-6-2（1），並分成三種狀況說明。

首先，以「 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 」改寫定理 2-6-2（1）的敘述：

$$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1\Leftrightarrow\frac{A}{B}-\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{g_2A-g_3B}{g_2g_3BC}>1$$

， $C$ 為偶數

證明：$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\geq[b,c]+az_0$ ，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$

$$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\geq[b,c]+az_0\Leftrightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor\right)+b\geq az_0$$

$$g_3\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{g_3B}{g_2A}\geq z_0\Leftrightarrow\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}\geq\frac{z_0}{g_3}$$

Case1：若 $A>BC$ ，則 $\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil=1$。即 $z_0=g_3$。

$$\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}>\frac{BC}{A}\left(\frac{A}{B}-1\right)+\frac{B}{g_2A}=C-\frac{BC}{A}+\frac{B}{g_2A}>C-1\geq1$$

也就是 $\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}\geq\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\geq[b,c]+az_0$。

Case2：若 $A<BC$ 且 $\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor\geq2$ ，則 $\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}>\frac{2BC}{A}>\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil$。

再由定理 2-5-1 證明過程中（4）中可知 $\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil\geq\frac{z_0}{g_3}$ ，

可以推得 $\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}>\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b>[b,c]+az_0$。

Case3：若 $A<BC$ 且 $\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor=1$，則 $A=B+r$ ，$0<r<B$。

（i）改寫條件：$\frac{A}{B}-\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{g_2A-g_3B}{g_2g_3BC}>1\Leftrightarrow\frac{r}{B}+\frac{g_2(B+r)-g_3B}{g_2g_3BC}>1$

$$\Leftrightarrow g_2g_3Cr+g_2B+g_2r-g_3B>g_2g_3BC\Leftrightarrow(g_2g_3C+g_2)r>(g_2g_3C+g_3-g_2)B$$

$$\Leftrightarrow r>\left(\frac{g_2g_3C+g_3-g_2}{g_2g_3C+g_2}\right)B$$

即 $\left(\frac{2g_2g_3C+g_3}{g_2g_3C+g_2}\right)B<A<2B$ ，可推得 $\frac{A}{B}>\left(\frac{2g_2g_3C+g_3}{g_2g_3C+g_2}\right)$ 以及 $\frac{1}{A}>\frac{1}{2B}$。

（ii）說明：$Bx'+Cy'=A\left\lfloor \dfrac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor$有正整數解。

由定理 2-5-1 證明過程中（4）中，

$$\frac{A\alpha\ t_1}{C}-\frac{A\beta\ t_1}{B}=\frac{A(B\alpha-C\beta)\ t_1}{BC}=\frac{A\ t_1}{BC}\ 。$$

當$t_1=\left\lfloor \dfrac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor$，因為$C$為偶數，所以，

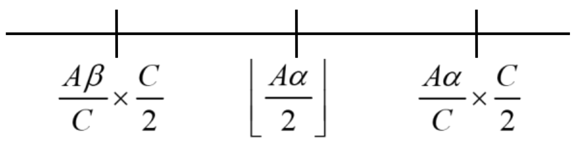
$$\frac{A}{BC}\left\lfloor \frac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor=\frac{A}{BC}\times\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{A}{B}>\frac{1}{2}\times\left(\frac{2g_2g_3C+g_3}{g_2g_3C+g_2}\right)>\frac{1}{2}\ 。$$

考慮$\dfrac{A\alpha\ t_1}{C}=\dfrac{A\alpha}{C}\left\lfloor \dfrac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor=\dfrac{A\alpha}{C}\times\dfrac{C}{2}=\dfrac{A\alpha}{2}$，

因為$(A,C)=1$、$B\alpha-C\beta=1$，所以$A$、$\alpha$為奇數，所以，

$$\frac{A\alpha}{2}-\left\lfloor \frac{A\alpha}{2} \right\rfloor=\frac{1}{2}\ ，$$

也就是必存在正整數$t_2=\left\lfloor \dfrac{A\alpha}{2} \right\rfloor$，如下圖（十四）：




圖（十四）

證得$Bx'+Cy'=A\left\lfloor \dfrac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor$有正整數解，可以得知：

$$\left\lfloor \frac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor\in S(B,C,A)\Rightarrow\frac{z_0}{g_3}\le\left\lfloor \frac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor\ 。$$

（iii）

$$\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}=\frac{BC}{A}+\frac{B}{g_2A}=\frac{g_2BC+B}{g_2A}>\frac{g_2BC+B}{2g_2B}=\frac{g_2C+1}{2g_2}>\frac{C}{2}=\left\lfloor\frac{g_3C+1}{2g_3}\right\rfloor$$

再由（ii）$\Rightarrow \frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}\ge\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\ge[b,c]+az_0$。

(3)由 Case1,Case2,Case3 可證得定理 2-6-2（1）。（例子見附錄五） **Q.E.D.**

3. 本文於此部分討論$[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$恰好有兩數相同的情況，共有六種情況，但其中若$[a,c]>[a,b]=[b,c]$的情況發生時，則$C=A>B$。又因為$(A,C)=1$，故此條件不可能發生。同理，$[a,b]>[a,c]=[b,c]$的情況與$[b,c]>[a,b]=[a,c]$的情況皆不可能發生。

故只需討論三種情況時，利用分層或拼接的拼法下，使用邊長分別為$a$、$b$、$c$（$a>b>c$）的三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

證明於定理 3-1、定理 3-2、定理 3-3。

定理 3-1：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$且$(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在$[a,b]=[b,c]>[a,c]$的條件下，則最小邊長為$[b,c]+b$。

【證明】

(1)重新改寫條件如下：$[a,b]=[b,c]>[a,c]\Leftrightarrow B>A=C$，又因為$(A,C)=1$，

因此，$B>A=C=1$，則$\begin{cases}a=g_1g_2\\b=g_1g_3B\\c=g_2g_3\end{cases}$，其中$\begin{cases}g_1=(a,b)\\g_2=(a,c)\\g_3=(b,c)\end{cases}$，

由$(a,b,c)=1$可知：$g_1$、$g_2$、$g_3$兩兩互質，$(B,g_2)=1$，且$a>b>c\Rightarrow\begin{cases}g_2>g_3B\\g_1B>g_2\end{cases}$。

(2)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，其邊長大小關係為

$[a,b]+[b,c]>[a,c]+[b,c]=[a,b]+[a,c]$，

故特殊拼接的最小邊長為$\left[a,c\right]+\left[b,c\right]=\left[a,b\right]+\left[a,c\right]=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3B$。

(3)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，其邊長分別為：

（i）$\left[b,c\right]+az_0=g_1g_2g_3BC+g_1g_2Az_0=g_1g_2g_3B+g_1g_2z_0$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(b,c,a\right)\right\}$

$bz+cy=az\Leftrightarrow\left(g_1g_3B\right)x+\left(g_2g_3\right)y=\left(g_1g_2\right)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_2x'\\y=g_1y'\\z=g_3z'\end{cases}$，化簡為

$Bx'+y'=z'$，$\left(x',y',z'\right)=\left(1,1,B+1\right)$是最小的一組正整數解，則

$z_0=g_3\left(B+1\right)>g_3$。

故其邊長$\left[b,c\right]+az_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3B$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(b,c,a\right)\right\}$。

（ii）$\left[a,c\right]+bz_0=g_1g_2g_3AC+g_1g_3Bz_0=g_1g_2g_3+g_1g_3Bz_0$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(a,c,b\right)\right\}$

$ax+cy=bz\Leftrightarrow\left(g_1g_2\right)x+\left(g_2g_3\right)y=\left(g_1g_3B\right)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_3x'\\y=g_1y'\\z=g_2z'\end{cases}$，化簡$x'+y'=Bz'$，

$z'=1$是最小的正整數解，則$z_0=g_2$。

故其邊長$\left[a,c\right]+bz_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3B$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(a,c,b\right)\right\}$。

（iii）$\left[a,b\right]+cz_0=g_1g_2g_3AB+g_2g_3Cz_0=g_1g_2g_3B+g_2g_3z_0$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(a,b,c\right)\right\}$

$ax+by=cz \Leftrightarrow (g_1g_2)x+(g_1g_3B)y=(g_2g_3)z \Leftrightarrow \begin{cases} x=g_3x' \\ y=g_2y' \\ z=g_1z' \end{cases}$，化簡為

$x'+By'=z'$，$(x',y',z')=(1,1,B+1)$是最小的一組正整數解，則

$z_0=g_1(B+1)>g_1$。

其邊長$[a,b]+cz_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3B$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

故基本拼接的最小邊長為$[a,c]+bz_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3B$，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$。

(4)在六種分層的最小邊長中，其邊長分別為$2[a,b]+c$、$[b,c]+b$、

$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c$、$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a$、$[a,b]+b$、$2[a,b]+a$。

明顯地，$2[a,b]+a>2[a,b]+c>[a,b]+b=[b,c]+b=g_1g_2g_3B+b$、

$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c=g_1g_2g_3(B+1)+c$、$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a=g_1g_2g_3(B+1)+a$，

明顯地，$g_1g_2g_3(B+1)+a>g_1g_2g_3(B+1)+c$。

由$g_2>g_3B\ge B \Leftrightarrow g_1g_2g_3>g_1Bg_3=b$，可推得$g_1g_2g_3(B+1)+c>g_1g_2g_3B+b$。

故分層的最小邊長為$g_1g_2g_3B+b=[a,b]+b=[b,c]+b$。

(5)明顯地，$g_1g_2g_3+g_1g_2g_3B>g_1g_2g_3B+b$。

綜合（1）、（2）、（3）、（4）、（5），可推得利用分層或拼接的拼法，

若$[a,b]=[b,c]>[a,c]$，則最小邊長為$[a,b]+b=[b,c]+b=g_1g_2g_3B+b$。

Q.E.D.

定理 3-2：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形， $a,b,c\in\mathbb{N}$ ， $a>b>c$ 且 $(a,b,c)=1$ ，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在 $[b,c]=[a,c]>[a,b]$ 的條件下，則最小邊長為 $[a,c]+c$ 。

（其證明手法如定理 3-1，過程詳見附錄四。）

定理 3-3：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形， $a,b,c\in\mathbb{N}$ ， $a>b>c$ 且 $(a,b,c)=1$ ，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在 $[a,b]=[a,c]>[b,c]$ 的條件下，則

（1） 若 $(b,c)>\dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$ ，則最小邊長為 $[a,b]+a$ 。

（2） 若 $(b,c)<\dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$ ，則最小邊長為 $[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]$ ，

其中 $z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

【證明】

(1)為了方便討論，重新改寫條件如下： $[a,b]=[a,c]>[b,c]\Leftrightarrow A>B=C$ ，

又因為 $(B,C)=1$ ，因此， $A>B=C=1$ ，則 $\begin{cases}a=g_1g_2A\\b=g_1g_3\\c=g_2g_3\end{cases}$ ，其中 $\begin{cases}g_1=(a,b)\\g_2=(a,c)\\g_3=(b,c)\end{cases}$ ，

由 $(a,b,c)$=1可知： $g_1$ 、 $g_2$ 、 $g_3$ 兩兩互質， $(A,g_3)$=1 ，且 $a>b>c\Rightarrow\begin{cases}g_2A>g_3\\g_1>g_2\end{cases}$ 。

(2)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，其邊長大小關係為

$[a,b]+[a,c]>[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]$ ，

故特殊拼接的最小邊長為 $[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]=g_1g_2g_3A+g_1g_2g_3$ 。

(3)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，其邊長分別為：

（i）$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3BC+g_1g_2Az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2Az_0$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(b,c,a\right)\right\}$

$bx+cy=az\Leftrightarrow\left(g_1g_3\right)x+\left(g_2g_3\right)y=\left(g_1g_2A\right)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_2x'\\y=g_1y'\\z=g_3z'\end{cases}$，化簡為

$x'+y'=Az'$，$z'=1$是最小的正整數解，則$z_0=g_3$。

故其邊長$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(b,c,a\right)\right\}$。

（ii）$[a,c]+bz_0=g_1g_2g_3AC+g_1g_3Bz_0=g_1g_2g_3A+g_1g_3z_0$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(a,c,b\right)\right\}$

$ax+cy=bz\Leftrightarrow\left(g_1g_2A\right)x+\left(g_2g_3\right)y=\left(g_1g_3\right)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_3x'\\y=g_1y'\\z=g_2z'\end{cases}$，化簡為

$Ax'+y'=z'$，$\left(x',y',z'\right)=\left(1,1,A+1\right)$是最小的一組正整數解，則

$z_0=g_2\left(A+1\right)>g_2$。

故其邊長$[a,c]+bz_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(a,c,b\right)\right\}$。

（iii）$[a,b]+cz_0=g_1g_2g_3AB+g_2g_3Cz_0=g_1g_2g_3A+g_2g_3z_0$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(a,b,c\right)\right\}$

$ax+by=cz\Leftrightarrow\left(g_1g_2A\right)x+\left(g_1g_3\right)y=\left(g_2g_3\right)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_3x'\\y=g_2y'\\z=g_1z'\end{cases}$，化簡為

$Ax'+y'=z'$，$\left(x',y',z'\right)=\left(1,1,A+1\right)$是最小的一組正整數解，則

$z_0=g_1(A+1)>g_1$。

其邊長$[a,b]+cz_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(a,b,c\right)\right\}$。

故基本拼接的最小邊長為$\left[b,c\right]+az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S\left(b,c,a\right)\right\}$。

(4)在六種分層的最小邊長中，其邊長分別為$\left[b,c\right]\left(\left\lfloor\frac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]}\right\rfloor+1\right)+c$、

$\left[b,c\right]\left(\left\lfloor\frac{\left[a,c\right]}{\left[b,c\right]}\right\rfloor+1\right)+b$、$2\left[a,c\right]+c$、$\left[a,c\right]+a$、$2\left[a,b\right]+b$、$\left[a,b\right]+a$。

明顯地，$2\left[a,b\right]+b>2\left[a,c\right]+c>\left[a,c\right]+a=\left[a,b\right]+a=g_1g_2g_3A+a$、

$\left[b,c\right]\left(\left\lfloor\frac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]}\right\rfloor+1\right)+c=g_1g_2g_3\left(A+1\right)+c$、$\left[b,c\right]\left(\left\lfloor\frac{\left[a,c\right]}{\left[b,c\right]}\right\rfloor+1\right)+b=g_1g_2g_3\left(A+1\right)+b$，

明顯地，$g_1g_2g_3\left(A+1\right)+b>g_1g_2g_3\left(A+1\right)+c$。

故分層的最小邊長為$\min\left\{g_1g_2g_3\left(A+1\right)+c,g_1g_2g_3A+a\right\}$。

又因為$g_1g_2g_3\left(A+1\right)+c>g_1g_2g_3\left(A+1\right)$。

即若想要討論拼接與分層的拼法下，拼出最小的正三角形只需要考慮邊長為

$g_1g_2g_3A+g_1g_2g_3$和$g_1g_2g_3A+a$的狀況。

(5)若$g_3>A$，則$g_1g_2g_3A+g_1g_2g_3>g_1g_2g_3A+g_1g_2A$，

即$\left[b,c\right]+az_0=\left[a,b\right]+\left[b,c\right]=\left[a,c\right]+\left[b,c\right]>\left[a,b\right]+a=\left[a,c\right]+a$。

反之，若$g_3\le A$，則$\left[b,c\right]+az_0=\left[a,b\right]+\left[b,c\right]=\left[a,c\right]+\left[b,c\right]\le\left[a,b\right]+a=\left[a,c\right]+a$。

綜合（1）、（2）、（3）、（4）、（5），可推得利用分層或拼接的拼法，

在$\left[a,b\right]=\left[a,c\right]>\left[b,c\right]$的條件下，則

(1)若$\left(b,c\right)>\frac{a}{(a,b)(a,c)}$，則最小邊長為$\left[a,b\right]+a=\left[a,c\right]+a$。

(2)若$\left(b,c\right)<\frac{a}{(a,b)(a,c)}$，則最小邊長為$\left[b,c\right]+az_0=\left[a,b\right]+\left[b,c\right]=\left[a,c\right]+\left[b,c\right]$，

其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。（例子見附錄五） Q.E.D.

4. 最後，本文於此部分討論 $[a,b]=[b,c]=[a,c]$ 的情況下，利用分層或拼接的拼法下，使用邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ （ $a>b>c$ ）的三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。證明於定理 4-1。

> 定理 4-1：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形， $a,b,c\in\mathbb{N}$ ， $a>b>c$ 且 $(a,b,c)=1$ ，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在 $[a,b]=[b,c]=[a,c]$ 的條件下，則最小邊長為 $2[a,b]$ 。

【證明】

(1)重新改寫條件如下： $[a,b]=[b,c]=[a,c]\Leftrightarrow A=B=C$ ，

因為 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 兩兩互質，因此， $A=B=C=1$ ，則 $\begin{cases}a=g_1g_2\\b=g_1g_3\\c=g_2g_3\end{cases}$ ，其中 $\begin{cases}g_1=(a,b)\\g_2=(a,c)\\g_3=(b,c)\end{cases}$ 。

(2)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，其邊長大小關係為

$[a,c]+[b,c]=[a,b]+[b,c]=[a,b]+[a,c]$ 。

故特殊拼接的最小邊長為 $[a,b]+[b,c]=2g_1g_2g_3$ 。

(3)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，其邊長分別為：

（i） $[b,c]+az_0=g_1g_2g_3BC+g_1g_2Az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2z_0$ ，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。

又 $bx+cy=az\Leftrightarrow(g_1g_3)x+(g_2g_3)y=(g_1g_2)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_2x'\\y=g_1y'\\z=g_3z'\end{cases}$ ，化簡為

$x'+y'=z'$ ， $(x',y',z')=(1,1,2)$ 是最小的一組正整數解，則 $z_0=2g_3$ 。

故其邊長$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3+2g_1g_2g_3=3g_1g_2g_3$，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

（ii）同理，$[a,c]+bz_0=3g_1g_2g_3$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$；

$[a,b]+cz_0=3g_1g_2g_3$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

故基本拼接的最小邊長為$[a,b]+cz_0=3g_1g_2g_3$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

(4)在六種分層的最小邊長中，其邊長分別為$2[b,c]+c$、$2[b,c]+b$、$2[a,c]+c$、$2[a,c]+a$、$2[a,b]+b$、$2[a,b]+a$。明顯地，最小值為$2[a,b]+c$。

綜合（1）、（2）、（3）、（4），可推得利用分層或拼接的拼法，若$[a,b]=[b,c]=[a,c]$，則最小邊長為$2[a,b]=2g_1g_2g_3$。 Q.E.D.

（三）$a$、$b$、$c$為任意三種不同正整數，且$a>b>c$

若$(a,b,c)=k$，可先將$a$、$b$、$c$皆除以$k$，即$\begin{cases} a'=\dfrac{a}{k} \\ b'=\dfrac{b}{k} \\ c'=\dfrac{c}{k} \end{cases}$，則$(a',b',c')=1$。

接著從（二）中，可以求出分別以$a'$、$b'$、$c'$為邊長的三種正三角形所拼成的最小正三角形邊長，再將其邊長乘以$k$倍，即為分別以$a$、$b$、$c$為邊長的三種正三角形所拼成的最小正三角形邊長。

# 參、研究結果

一、給定兩種不同邊長的正三角形，邊長分別為 $a$ 和 $b$ ，其中 $a,b\in\mathbb{N}$ 且 $a>b$ ，使用這兩種正三角形拼出另一個大正三角形，則大正三角形的最小邊長為 $\dfrac{ab}{(a,b)}+b$ 。

二、給定三種不同邊長的正三角形，邊長分別為 $a$ 、 $b$ 和 $c$ ，其中 $a,b,c\in\mathbb{N}$ 且 $a>b>c$ ， $a$ 、 $b$ 、 $c$ 兩兩互質，利用分層或拼接的拼法，使用這三種正三角形拼出另一個大正三角形，則大正三角形的最小邊長為

【定理 1-2】（1） 若 $\dfrac{a}{b}-\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{bc}>1$ ，則最小邊長為 $bc+az_0$ ，其中

$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

（2） 若 $\dfrac{a}{b}-\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{bc}\le 1$ ，則最小邊長為 $\min\left\{ac+a,bc+az_0\right\}$ ，其中

$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

三、給定三種不同邊長的正三角形，邊長分別為 $a$ 、 $b$ 和 $c$ ，其中 $a,b,c\in\mathbb{N}$ 且 $a>b>c$ ， $(a,b,c)$=1，利用分層或拼接的拼法，使用這三種正三角形拼出另一個大正三角形，則大正三角形的最小邊長於定理 2-1 到定理 2-4、定理 2-5-2、定理 2-6-2、定理 3-1 到定理 3-3、定理 4-1。

【定理 2-1】若 $[b,c]>[a,c]>[a,b]$ ，則最小邊長為 $\min\left\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\right\}$ ，

其中 $z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(a,b,c)\right\}$ 。

【定理 2-2】若 $[a,c]>[b,c]>[a,b]$ ，則最小邊長為 $\min\left\{[b,c]+c,[a,b]+cz_0\right\}$ ，

其中 $z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(a,b,c)\right\}$ 。

【定理 2-3】若 $[a,b]>[b,c]>[a,c]$ ，則最小邊長為 $\min\left\{[b,c]+b,[a,c]+bz_0\right\}$ ，

其中 $z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(a,c,b)\right\}$ 。

【定理 2-4】若$[b,c]>[a,b]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\{[a,b]+b,[a,c]+bz_0\}$，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$。

【定理 2-5-2】在$[a,c]>[a,b]>[b,c]$的條件下，

(1) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$，且$\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$為偶數時，

則最小邊長為$[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(2) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$，且$\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$為奇數時，

則最小邊長為$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(3) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長為$\min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

【定理 2-6-2】在$[a,b]>[a,c]>[b,c]$的條件下，

(1) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，且$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$為偶數時，

則最小邊長為$[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(2) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，且$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$為奇數時，

則最小邊長為$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(3) 若 $\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}\le 1$ ，則最小邊長 $\min\{[a,c]+a,[b,c]+az_0\}$ ，

其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。

【定理 3-1】若 $[a,b]=[b,c]>[a,c]$ ，則最小邊長為 $[b,c]+b$ 。

【定理 3-2】若 $[b,c]=[a,c]>[a,b]$ ，則最小邊長為 $[a,c]+c$ 。

【定理 3-3】在 $[a,b]=[a,c]>[b,c]$ 的條件下，

（1） 若 $(b,c)>\frac{a}{(a,b)(a,c)}$ ，則最小邊長為 $[a,b]+a$ 。

（2） 若 $(b,c)<\frac{a}{(a,b)(a,c)}$ ，則最小邊長為

$[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]$ ，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。

【定理 4-1】若 $[a,b]=[b,c]=[a,c]$ ，則最小邊長為 $2[a,b]$ 。

四、給定三種不同邊長的正三角形，邊長分別為 $a$ 、 $b$ 和 $c$ ，其中 $a,b,c\in\mathbb{N}$ 且 $a>b>c$ ，使用這三種正三角形拼出另一個大正三角形，則大正三角形的最小邊長為？其方法如下：

先將三種正三角形縮小為 $\frac{1}{(a,b,c)}$ 倍，使其邊長分別為 $\frac{a}{(a,b,c)},\frac{b}{(a,b,c)},\frac{c}{(a,b,c)}$ 。依上述二、或三、的各種情況求出所能拼成的最小正三角形邊長，再將該正三角形放大，邊長乘以 $(a,b,c)$ 倍，即為答案。

# 肆、討論

一、證明定理 2-5-2 的過程中，發現在（2）-Case1 的過程僅需要條件 $B \geq 2$，即 $B \neq 1$。好奇若 $B = 1$時，其邊長最小為何？本文深入討論證明為：「若 $B = 1$時，則拼出另一正三角形，其邊長最小為 $[b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + c$ 。」（證明如下）

【證明】

由定理 2-5-1 的證明過程（4）中得知 $z_0 \leq g_3 \left\lceil \frac{BC}{A} \right\rceil = g_3 \left\lceil \frac{C}{A} \right\rceil$，

因為 $b > c \Rightarrow g_1 > g_3 C$ ，即 $g_1 > C$ 。

考慮 $A = Cg + r$ ，$0 < r < C$ ，$g, r \in \mathbb{N}$ ，$g_1 > C \Rightarrow r \geq 1 > \frac{C}{g_1}$

$$\Rightarrow \frac{A}{C} - \left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor = \frac{r}{C} > \frac{1}{g_1} \Rightarrow g_1 A - g_1 C \left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor > C \Rightarrow g_1 A g_2 g_3 - g_1 g_2 g_3 BC \left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor > g_2 g_3 C$$

改寫成 $az_0 - [b,c]\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor > c \Rightarrow az_0 > [b,c]\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + c$ ，

即 $[b,c] + az_0 > [b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + c$ 。

Q.E.D.

且在定理 2-5-2 證明之過程中亦不需要 $B$ 為偶數，

因此，本研究在 $\frac{[a,b]}{[b,c]} - \left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + \frac{a-c}{[b,c]} > 1$的情況下將其再細分並重新整理如下：

- 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\le 1 \rightarrow \min\left\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\right\}$
- 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}> 1$
  - $\boxed{B=1} \rightarrow [b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c$
  - $\boxed{B\neq 1}$
    - $\boxed{A>BC} \rightarrow [b,c]+az_0$
    - $\boxed{A<BC}$
      - $\boxed{B\text{ 為偶數}} \rightarrow [b,c]+az_0$
      - $\boxed{B\text{ 為奇數}} \rightarrow \min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$

以上 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$ 。

二、證明定理 2-6-2 的過程中也發現其狀況和定理 2-5-2 一樣，

因此，本研究在$\dfrac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{[b,c]}>1$的情況下將其再細分並重新整理如下：

- 若$\dfrac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{[b,c]}\le 1 \;\rightarrow\; \min\{[a,c]+a,[b,c]+az_0\}$
- 若$\dfrac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{[b,c]}>1$
  - $\boxed{C=1} \;\rightarrow\; \min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$
  - $\boxed{C\neq 1}$
    - $\boxed{A>BC} \;\rightarrow\; [b,c]+az_0$
    - $\boxed{A<BC}$
      - $\boxed{C\text{ 為偶數}} \;\rightarrow\; [b,c]+az_0$
      - $\boxed{C\text{ 為奇數}} \;\rightarrow\; \min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$

以上 $z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$ 。

但發現定理 2-6-2 和定理 2-5-2 不同之處在於$C=1$時，並未有固定的最小邊長。

# 伍、結論

本研究探討問題為：「在分層或拼接的拼法下，如何使用邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，$a,b,c \in \mathbb{N}$ ， $a > b > c$ 的三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小？」

本文給了拼法原則為：

Step1：先算任意二數的最小公倍數 $[a,b]$ 、 $[b,c]$ 、 $[a,c]$ 。

Step2：若 $[a,b],[b,c],[a,c]$ 全部相等，則最小邊長必為 $2[a,b]$ ；

若 $[a,b],[b,c],[a,c]$ 並不完全相等，則將 $[a,b],[b,c],[a,c]$ 依大小排序，並接續 Step3。

Step3：先考慮分層的此種拼法為圖（十五），

且滿足 $\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數，

$\overline{RS}$ 長為三個最小公倍數之中第二大的數。

Step4：再考慮拼接的此種拼法為圖（十六），

且滿足 $\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數。

Step5：

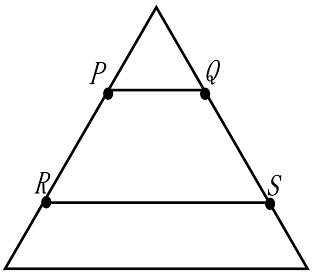
Case1：若圖（十五）最下層為邊長 $a$ ，則需多考慮分層的拼法為圖（十七），

且滿足 $\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中第二大的數，

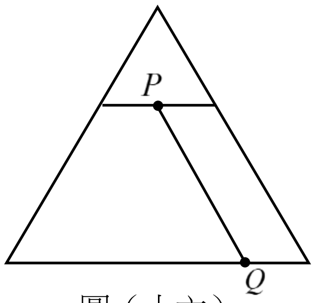
$\overline{RS}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數的 $n$ 倍，其中 $n = \left\lfloor \dfrac{\overline{PQ}}{\text{最小的最小公倍數}} \right\rfloor + 1$ 。

且必可從圖（十五）、圖（十六）及圖（十七）三種拼法中找到最小。

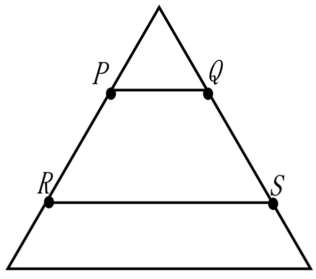
Case2：若圖（十五）最下層為邊長 $b$ 或 $c$ ，則必可從圖（十五）及圖（十六）兩種拼法中找到最小。




圖（十五）




圖（十六）




圖（十七）

若要了解每種不同分類下確切的最小邊長，則可參見「**參、研究結果**」與「**肆、討論**」。

# 陸、未來展望

在研究的過程中，我們認為拼成最小邊長的拼法必為「分割線數最少」的拼法，因此將拼法限縮為分層和拼接兩種。我們希望未來能夠證明，若想使用三種不同邊長的正三角形，去拼出邊長最小的正三角形，只需考慮分層和拼接兩種方法。

# 柒、參考文獻


一、John Mason, Kaye Stacey, Leone Burton　數學思考　一版　台北市　九章出版社　216 頁　民 87（臺北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學　合譯）。

二、潘承洞、潘承彪　簡明數論　一版　台北市　九章出版社　329 頁　民 91。

三、本文作者、黃欣茹　民 108　‘try angle’組合的奧妙　全國高級中等學校小論文 1080331　7 頁。

附錄一　中學生網站小論文《‘try angle’組合的奧妙》部分結論之 python 程式碼

```
#最大公因數
def GCD（aa,bb）：
    r=1
    g=1
    if bb>aa：
        x=bb
        y=aa
    elif aa>=bb：
        x=aa
        y=bb
    while r!=0：
        r=x%y
        if r==0：
            g=y
        else：
            x=y
            y=r
    return（int（g））
#最小公倍數
def LCM （aaa,bbb）：
    f=（aaa*bbb）/GCD（aaa,bbb）
    return（int（f））
#b 倍+c 倍=a 倍， a 的倍數      （a 的倍數,b 的倍數,c 的倍數）
def checka（a,b,c）：
    for r in range （1,2*b*c+1）：
```

```
        t=int（a*r/b）
        for i in range （1,t+1）:
            s=a*r-b*i
            if s%c==0：
                h=int（s/c）
                return（int（r））
            else：
                continue
    return（0）
print（"輸入 a 的範圍,小、大"）
n=int（input（））
m=int（input（））
for a in range （n,m）:
    for b in range（2,a）:
        if GCD（a,b）==1 ：
            for c in range（1,b）:
                if GCD（a,c）==1 and GCD（b,c）==1 ：
                    z=checka（a,b,c）
                    if a/b-int（a/b）+（a-b）/b*c >1 ：
                        if b*c*（int（a/b）+1）+b >b*c+a*z：
                            print（"bc+az 小"）
                        else：
                            print（"bc（int（a/b）+1）+b 小"）
```

附錄二　定理 2-2 之證明過程與例子

定理 2-2：給邊長分別為$a$、$b$、$c$的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$，$a>b>c$， $(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，若$[a,c]>[b,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\{[b,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

【證明】

(1)六種分層的拼法中，其最小邊長有$[b,c]+c$、$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b$、$[a,c]+c$、

$[a,c]+a$、$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b$、$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a$。

明顯地，$[a,c]+a>[a,c]+c>[b,c]+c$。

因為$\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1>\frac{[a,c]}{[b,c]}$，所以$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b>[a,c]+b>[b,c]+c$。

同理，$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b>[b,c]+c$，且$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a>[b,c]+c$。

因此，六種分層的拼法中，最小邊長為$[b,c]+c$。

(2)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，

$[b,c]+az_0\geq[b,c]+a>[b,c]+c$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

$[a,c]+bz_0>[a,c]+b>[b,c]+c$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$。

因此，綜合六種分層與三種基本拼接的拼法中，最小邊長為$\min\{[b,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

(3)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，

$[a,c]+[b,c]>[a,c]+[a,b]>[b,c]+[a,b]>[b,c]+c$。

綜合（1）、（2）、（3），可推得利用分層或拼接的拼法，若$\left[a,c\right]>\left[b,c\right]>\left[a,b\right]$，

則最小邊長為$\min\left\{\left[b,c\right]+c,\left[a,b\right]+cz_0\right\}$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$。 Q.E.D.

例一：$a=8$，$b=4$，$c=3$，且滿足$\left[a,c\right]>\left[b,c\right]>\left[a,b\right]$

分層的最小邊長為$\left[b,c\right]+c=15$；特殊拼接的最小邊長為$\left[a,b\right]+\left[b,c\right]=20$；

基本拼接的拼法，先考慮哪些$z$可以使方程式$8x+4y=3z$有正整數解，

明顯地，$z=4k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$2x+y=3k$，$(x,y,k)=(1,1,1)$是最小的一組解，即$z_0=4$，此時$\left[a,b\right]+cz_0=20$。因此，最小邊長為15。

例二：$a=12$，$b=8$，$c=5$，且滿足$\left[a,c\right]>\left[b,c\right]>\left[a,b\right]$

分層的最小邊長為$\left[b,c\right]+c=45$；特殊拼接的最小邊長為$\left[a,b\right]+\left[b,c\right]=64$；

基本拼接的拼法，先考慮哪些$z$可以使方程式$12x+8y=5z$有正整數解，

明顯地，$z=4k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式$3x+2y=5k$，$(x,y,k)=(1,1,1)$是最小的一組解，即$z_0=4$，此時$\left[a,b\right]+cz_0=44$。因此，最小邊長為44。

附錄三　定理 2-4 之證明過程與例子

> 定理 2-4：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形， $a,b,c\in\mathbb{N}$ ， $a>b>c$ ， $(a,b,c)=1$ ，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，若 $[b,c]>[a,b]>[a,c]$ ，則最小邊長為 $\min\{[a,b]+b,[a,c]+bz_0\}$ ，其中 $z_0=\min\{z\mid z\in S(a,c,b)\}$ 。

【證明】

(1)六種分層的拼法中，其最小邊長有 $[b,c]+c$ 、 $[b,c]+b$ 、 $[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c$ 、

$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a$ 、 $[a,b]+b$ 、 $[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a$ 。

明顯地， $[b,c]+b>[b,c]+c>[a,b]+b$ 。

因為 $\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1>\frac{[b,c]}{[a,b]}$ ，所以 $[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a>[b,c]+a>[a,b]+b$ 。

同理 $[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a>[a,b]+b$ 。

考慮 $\left\{[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c\right\}-\{[a,b]+b\}\geq\{[a,b]+a+c\}-\{[a,b]+b\}>a+c-b>0$ ，

即 $[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+c>[a,b]+b$ 。

因此，六種分層的拼法中，最小邊長為 $[a,b]+b$ 。

(2)在三種基本拼接拼法的最小邊長中，

$[b,c]+az_0\geq[b,c]+a>[a,b]+b$ ，其中 $z_0=\min\{z\mid z\in S(b,c,a)\}$ 。

$[a,b]+cz_0>[a,b]+a>[a,b]+b$ ，其中 $z_0=\min\{z\mid z\in S(a,b,c)\}$ 。

因此，綜合六種分層與三種基本拼接的拼法中，最小邊長為 $\min\{[a,b]+b,[a,c]+bz_0\}$ ，

其中 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(a,c,b)\}$ 。

(3)在六種特殊拼接拼法的最小邊長中，

$[a,b]+[b,c]>[b,c]+[a,c]>[a,b]+[a,c]>[a,b]+b$ 。

綜合（1）、（2）、（3），可推得利用分層或拼接的拼法，若 $[b,c]>[a,b]>[a,c]$ ，則最小邊長為 $\min\{[a,b]+b,[a,c]+bz_0\}$ ，其中 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(a,c,b)\}$ 。 Q.E.D.

例一： $a=12$ ， $b=9$ ， $c=8$ ，且滿足 $[b,c]>[a,b]>[a,c]$

分層的最小邊長為 $[a,b]+b=45$ ；特殊拼接的最小邊長為 $[a,b]+[a,c]=60$ ；

基本拼接的拼法下，先考慮哪些 $z$ 可以使方程式 $12x+8y=9z$ 有正整數解，

明顯地， $z=4k$ ， $k \in \mathbb{N}$ ，則方程式為 $3x+2y=9k$ ， $(x,y,k)=(1,3,1)$ 是最小的一組解，即 $z_0=4$ ，此時 $[a,c]+bz_0=60$ 。因此，最小邊長為 45 。

例二： $a=12$ ， $b=10$ ， $c=9$ ，且滿足 $[b,c]>[a,b]>[a,c]$

分層的最小邊長為 $[a,b]+b=70$ ；特殊拼接的最小邊長為 $[a,b]+[a,c]=96$ ；

基本拼接的拼法下，先考慮哪些 $z$ 可以使方程式 $12x+9y=10z$ 有正整數解，

明顯地， $z=3k$ ， $k \in \mathbb{N}$ ，則方程式為 $4x+3y=10k$ ， $(x,y,k)=(1,2,1)$ 是最小的一組解，即 $z_0=3$ ，此時 $[a,c]+bz_0=66$ 。因此，最小邊長為 66 。

附錄四　定理 3-2 之證明過程與例子

| |
|---|
| 定理 3-2：給邊長分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 的三種正三角形，$a,b,c\in\mathbb{N}$ ，$a>b>c$ ，$(a,b,c)=1$，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接的拼法，在 $[b,c]=[a,c]>[a,b]$ 的條件下，則最小邊長為 $[a,c]+c$ 。 |

【證明】

(1)為了方便討論，重新改寫條件如下：$[b,c]=[a,c]>[a,b]\Leftrightarrow C>A=B$ ，

又因為 $(A,B)=1$ ，因此，$C>A=B=1$，則 $\begin{cases}a=g_1g_2\\ b=g_1g_3\\ c=g_2g_3C\end{cases}$ ，其中 $\begin{cases}g_1=(a,b)\\ g_2=(a,c)\\ g_3=(b,c)\end{cases}$ ，

由 $(a,b,c)$=1 可知：$g_1$ 、 $g_2$ 、 $g_3$ 兩兩互質，$(C,g_1)$=1，且 $a>b>c\Rightarrow\begin{cases}g_2>g_3\\ g_1>g_2C\end{cases}$ 。

(2)在特殊拼接下有六種拼法，其邊長大小關係為 $[a,c]+[b,c]>[a,b]+[b,c]=[a,b]+[a,c]$ ，

故特殊拼接的最小邊長為 $[a,b]+[b,c]=[a,b]+[a,c]=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3C$ 。

(3)在基本拼接下有三種拼法，其邊長分別為：

（i）$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3BC+g_1g_2Az_0=g_1g_2g_3C+g_1g_2z_0$ ，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$

又 $bz+cy=az\Leftrightarrow(g_1g_3)x+(g_2g_3C)y=(g_1g_2)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_2x'\\ y=g_1y'\\ z=g_3z'\end{cases}$ ，化簡為 $x'+Cy'=z'$ ，

$(x',y',z')=(1,1,C+1)$ 是最小的一組正整數解，則 $z_0=g_3(C+1)>g_3$ 。

故其邊長 $[b,c]+az_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3C$ ，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$ 。

（ii）$[a,c]+bz_0=g_1g_2g_3AC+g_1g_3Bz_0=g_1g_2g_3C+g_1g_3z_0$ ，其中

$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,c,b)\}$

又 $ax+cy=bz \Leftrightarrow (g_1g_2)x+(g_2g_3C)y=(g_1g_3)z \Leftrightarrow \begin{cases} x=g_3x' \\ y=g_1y' \\ z=g_2z' \end{cases}$，化簡為 $x'+Cy'=z'$，

$(x',y',z')=(1,1,C+1)$是最小的一組正整數解，則 $z_0=g_2(C+1)>g_2$。

故其邊長 $[a,c]+bz_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3C$，其中 $z_0=\min\{z \mid z\in S(a,c,b)\}$。

（iii）$[a,b]+cz_0=g_1g_2g_3AB+g_2g_3Cz_0=g_1g_2g_3+g_2g_3Cz_0$，其中

$z_0=\min\{z \mid z\in S(a,b,c)\}$

又 $ax+by=cz \Leftrightarrow (g_1g_2)x+(g_1g_3)y=(g_2g_3C)z \Leftrightarrow \begin{cases} x=g_3x' \\ y=g_2y' \\ z=g_1z' \end{cases}$，化簡為

$x'+y'=Cz'$，$z'=1$是最小的正整數解，則 $z_0=g_1$。

其邊長 $[a,b]+cz_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3C$，其中 $z_0=\min\{z \mid z\in S(a,b,c)\}$。

故基本拼接的最小邊長為 $[a,b]+cz_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3C$，其中

$z_0=\min\{z \mid z\in S(a,b,c)\}$。

(4)在分層下有六種拼法，其邊長分別為 $[b,c]+c$、$2[b,c]+b$、$[a,c]+c$、$2[a,c]+a$、

$[a,b]\left(\left\lfloor \frac{[a,c]}{[a,b]} \right\rfloor+1\right)+b$、$[a,b]\left(\left\lfloor \frac{[b,c]}{[a,b]} \right\rfloor+1\right)+a$。

$2[a,c]+a>2[b,c]+b>[b,c]+c=[a,c]+c=g_1g_2g_3C+c$、

$[a,b]\left(\left\lfloor \frac{[a,c]}{[a,b]} \right\rfloor+1\right)+b=g_1g_2g_3(C+1)+b$、$[a,b]\left(\left\lfloor \frac{[b,c]}{[a,b]} \right\rfloor+1\right)+a=g_1g_2g_3(C+1)+a$，

$g_1g_2g_3(C+1)+a>g_1g_2g_3(C+1)+b>g_1g_2g_3C+c$。

故分層的最小邊長為 $g_1g_2g_3C+c=[b,c]+c=[a,c]+c$。

（5)最後由 $g_1 > g_3C \geq C$ ，可推得 $g_1g_2g_3C + g_1g_2g_3 > g_1g_2g_3C + g_2g_3C = g_1g_2g_3C + c$ 。

綜合（1）、（2）、（3）、（4）、（5），可推得利用分層或拼接的拼法，

若 $\left[b,c\right] = \left[a,c\right] > \left[a,b\right]$ ，則最小邊長為 $\left[b,c\right] + c = \left[a,c\right] + c = g_1g_2g_3C + c$ 。 Q.E.D.

附錄五　定理 2-3、定理 2-5-2、定理 2-6-2 和定理 3-3 之例子

（一）　以下是定理 2-3 的例子：

例一：$a=20$，$b=6$，$c=5$，且滿足$[a,b]>[b,c]>[a,c]$。

分層的最小邊長為$[b,c]+b=36$；特殊拼接的最小邊長為$[a,c]+[b,c]=50$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$20x+5y=6z$有正整數解，明顯地，$z=5k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$4x+y=6k$，明顯地，$(x,y,k)=(1,2,1)$是最小的一組解，即$z_0=5$，此時$[a,c]+bz_0=50$。因此，最小邊長為$36$。

例二：$a=21$，$b=16$，$c=9$，且滿足$[a,b]>[b,c]>[a,c]$。

分層的最小邊長為$[b,c]+b=160$；特殊拼接的最小邊長為$[b,c]+[a,c]=207$；基本拼接的拼法下，先考慮哪些$z$可以使方程式$21x+9y=16z$有正整數解，明顯地，$z=3k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$7x+3y=16k$，明顯地，$(x,y,k)=(1,3,1)$是最小的一組解，即$z_0=3$，此時$[a,c]+bz_0=111$。因此，最小邊長為$111$。

（二）　以下是定理 2-5-2 的例子：

例一：$a=10$，$b=4$，$c=3$，且滿足定理 2-5-2 的（1）。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c=27$；特殊拼接的最小邊長為$[a,b]+[b,c]=32$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$4x+3y=10z$有正整數解，明顯地，$y=2k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$2x+3k=5z$，明顯地，$(x,k,z)=(1,1,1)$是最小的一組解，即$z_0=1$，此時$[b,c]+az_0=22$。因此，最小邊長為$22$。

例二：$a=65$，$b=15$，$c=8$，且滿足定理 2-5-2 的（2）。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c=248$；特殊拼接的最小邊長為

$[a,b]+[b,c]=315$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$15x+8y=65z$有正整數解，明顯地，$y=5k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$3x+8k=13z$，明顯地，$(x,k,z)=(6,1,2)$是最小的一組解，即$z_0=2$，此時$[b,c]+az_0=250$。因此，最小邊長為$248$。

例三：$a=21$，$b=9$，$c=4$，且滿足定理 2-5-2 的（2）。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c=76$；特殊拼接的最小邊長為

$[a,b]+[b,c]=99$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$9x+4y=21z$有正整數解，明顯地，$y=3k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$3x+4k=7z$，明顯地，$(x,k,z)=(1,1,1)$是最小的一組解，即$z_0=1$，此時$[b,c]+az_0=57$。因此，最小邊長為$57$。

例四：$a=9$，$b=6$，$c=4$，且滿足定理 2-5-2 的（3）。

分層的最小邊長為$[a,b]+a=27$；特殊拼接的最小邊長為$[a,b]+[b,c]=30$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$6x+4y=9z$有正整數解，明顯地，$z=2k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$3x+2y=9k$，明顯地，$(x,y,k)=(1,3,1)$是最小的一組解，即$z_0=2$，此時$[b,c]+az_0=30$。因此，最小邊長為$27$。

例五：$a=14$，$b=8$，$c=5$，且滿足定理 2-5-2 的（3）。

分層的最小邊長為$[a,b]+a=70$；特殊拼接的最小邊長為$[a,b]+[b,c]=96$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$8x+5y=14z$有正整數解，明顯地，$y=2k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$4x+5k=7z$，明顯地，$(x,k,z)=(1,2,2)$是最小的一組解，即$z_0=2$，此時$[b,c]+az_0=68$。因此，最小邊長為$68$。

（三） 以下是定理 2-6-2 的例子：

例一：$a=9$，$b=5$，$c=2$，且滿足理 2-6-2 的（1）。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b=25$；特殊拼接的最小邊長為

$[a,c]+[b,c]=28$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$5x+2y=9z$有正整數解，明顯地，$(x,y,z)=(1,2,1)$是最小的一組解，即$z_0=1$，此時

$[b,c]+az_0=19$。因此，最小邊長為19。

例二：$a=46$，$b=13$，$c=6$，且滿足理 2-6-2 的（2）。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b=169$；特殊拼接的最小邊長為

$[a,c]+[b,c]=216$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$13x+6y=46z$有正整數解，明顯地，$x=2k$，$k\in\mathbb{N}$，則方程式為$13k+3y=23z$，明顯地，

$(k,y,z)=(1,11,2)$是最小的一組解，即$z_0=2$，此時$[b,c]+az_0=170$。因此，最小邊長為169。

例三：$a=11$，$b=4$，$c=3$，且滿足理 2-6-2 的（2）。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b=40$；特殊拼接的最小邊長為

$[a,c]+[b,c]=45$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方$(k,y,z)=(1,11,2)$程式$4x+3y=11z$有正整數解，明顯地，$(x,y,z)=(2,1,1)$是最小的一組解，即$z_0=1$，

此時$[b,c]+az_0=23$。因此，最小邊長為23。

例四：$a=5$，$b=3$，$c=2$，且滿足定理 2-6-2 的（3）。

分層的最小邊長為$[a,c]+a=15$；特殊拼接的最小邊長為$[a,c]+[b,c]=16$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$3x+2y=5z$有正整數解，明顯地，$(x,y,z)=(1,1,1)$是最小的一組解，即$z_0=1$，此時$[b,c]+az_0=11$。因此，最小邊長為$11$。

例五：$a=5$，$b=4$，$c=3$，且滿足定理 2-6-2 的（3）。

分層的最小邊長為$[a,c]+a=20$；特殊拼接的最小邊長為$[a,c]+[b,c]=27$；基本拼接的拼法下先考慮哪些$z$可以使方程式$4x+3y=5z$有正整數解，明顯地，$(x,y,z)=(1,2,2)$是最小的一組解，即$z_0=2$，此時$[b,c]+az_0=22$。因此，最小邊長為$20$。

（四） 以下是定理 3-3 的例子：

例一：$a=18$，$b=15$，$c=10$，且滿足$[a,b]=[a,c]>[b,c]$和$(b,c)>\dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c=130$或$[a,b]+a=[a,c]+a=108$；拼接的最小邊長為$[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]=120$。因此最小邊長為$108$。

例二：$a=4$，$b=2$，$c=1$，且滿足$[a,b]=[a,c]>[b,c]$和$(b,c)\leq\dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$。

分層的最小邊長為$[b,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c=7$或$[a,b]+a=[a,c]+a=8$；拼接最小邊長為$[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]=6$。因此最小邊長為$6$。

附錄六　利用 python 程式碼找出定理 2-5-1（1）加上條件 $\dfrac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為偶數之結果

以下是 $a$ 介於 3 到 35 之間的所有結果，及其利用基本拼接和分層所能拼出的最小正三角形的邊長。

| $a$ | $b$ | $c$ | 基本拼接 | | 分層 | $a$ | $b$ | $c$ | 基本拼接 | | 分層 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 4 | 3 | 27 | > | 22 | 28 | 16 | 5 | 165 | > | 136 |
| 14 | 4 | 3 | 39 | > | 26 | 28 | 24 | 9 | 225 | > | 156 |
| 14 | 8 | 5 | 85 | > | 68 | 30 | 8 | 7 | 175 | > | 86 |
| 14 | 12 | 9 | 117 | > | 78 | 30 | 16 | 11 | 363 | > | 236 |
| 18 | 8 | 5 | 85 | > | 58 | 33 | 6 | 5 | 95 | > | 63 |
| 20 | 8 | 3 | 51 | > | 44 | 33 | 12 | 5 | 185 | > | 126 |
| 21 | 6 | 5 | 65 | > | 51 | 33 | 12 | 7 | 175 | > | 117 |
| 21 | 12 | 5 | 125 | > | 102 | 33 | 12 | 10 | 190 | > | 126 |
| 21 | 12 | 10 | 130 | > | 102 | 33 | 18 | 7 | 259 | > | 225 |
| 22 | 4 | 3 | 51 | > | 34 | 33 | 24 | 10 | 370 | > | 252 |
| 22 | 8 | 5 | 125 | > | 84 | 33 | 24 | 14 | 350 | > | 234 |
| 22 | 8 | 7 | 119 | > | 78 | 33 | 24 | 20 | 380 | > | 252 |
| 22 | 12 | 7 | 175 | > | 150 | 33 | 30 | 25 | 475 | > | 315 |
| 22 | 12 | 9 | 153 | > | 102 | 34 | 4 | 3 | 75 | > | 46 |
| 22 | 20 | 15 | 255 | > | 170 | 34 | 8 | 5 | 165 | > | 74 |
| 25 | 10 | 3 | 63 | > | 55 | 34 | 8 | 7 | 175 | > | 124 |
| 25 | 20 | 6 | 126 | > | 110 | 34 | 12 | 7 | 259 | > | 152 |
| 26 | 4 | 3 | 63 | > | 38 | 34 | 12 | 9 | 225 | > | 138 |
| 26 | 8 | 5 | 125 | > | 66 | 34 | 12 | 11 | 275 | > | 166 |
| 26 | 8 | 7 | 119 | > | 108 | 34 | 16 | 9 | 297 | > | 178 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 12 | 7 | 175 | > | 110 | 34 | 16 | 11 | 363 | > | 278 |
| 26 | 12 | 9 | 189 | > | 114 | 34 | 16 | 13 | 429 | > | 276 |
| 26 | 16 | 9 | 297 | > | 196 | 34 | 20 | 11 | 451 | > | 322 |
| 26 | 20 | 15 | 315 | > | 190 | 34 | 20 | 15 | 375 | > | 230 |
| 26 | 24 | 15 | 375 | > | 198 | 34 | 24 | 13 | 637 | > | 414 |
| 26 | 24 | 21 | 357 | > | 324 | 34 | 24 | 15 | 495 | > | 222 |
| 27 | 6 | 5 | 65 | > | 57 | 34 | 24 | 21 | 525 | > | 372 |
| 27 | 12 | 5 | 125 | > | 87 | 34 | 28 | 21 | 525 | > | 322 |
| 27 | 12 | 10 | 130 | > | 114 | 35 | 10 | 3 | 93 | > | 65 |
| 27 | 24 | 10 | 250 | > | 174 | 35 | 14 | 3 | 87 | > | 77 |
| 27 | 24 | 20 | 260 | > | 228 | 35 | 20 | 6 | 186 | > | 130 |
| 28 | 8 | 3 | 75 | > | 52 | 35 | 28 | 6 | 174 | > | 154 |
| 28 | 8 | 5 | 85 | > | 68 | 35 | 30 | 9 | 279 | > | 195 |

附錄七　利用 python 程式碼找出定理 2-6-1（1）加上條件 $\dfrac{c}{(a,c)\times(b,c)}$ 為偶數之結果

以下是 $a$ 介於 3 到 28 之間的所有結果，及其利用基本拼接和分層所能拼出的最小正三角形的邊長。

| $a$ | $b$ | $c$ | 基本拼接 | | 分層 | $a$ | $b$ | $c$ | 基本拼接 | | 分層 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 5 | 2 | 25 | > | 19 | 23 | 5 | 2 | 55 | > | 33 |
| 11 | 3 | 2 | 27 | > | 17 | 23 | 5 | 4 | 105 | > | 43 |
| 11 | 6 | 4 | 54 | > | 34 | 23 | 6 | 4 | 102 | > | 58 |
| 13 | 3 | 2 | 33 | > | 19 | 23 | 7 | 2 | 63 | > | 37 |
| 13 | 5 | 2 | 35 | > | 23 | 23 | 9 | 2 | 63 | > | 41 |
| 13 | 7 | 2 | 35 | > | 27 | 23 | 9 | 6 | 153 | > | 87 |
| 13 | 7 | 4 | 63 | > | 54 | 23 | 10 | 4 | 110 | > | 66 |
| 17 | 3 | 2 | 39 | > | 23 | 23 | 12 | 8 | 204 | > | 116 |
| 17 | 5 | 2 | 45 | > | 27 | 23 | 13 | 2 | 65 | > | 49 |
| 17 | 6 | 4 | 78 | > | 46 | 25 | 3 | 2 | 57 | > | 31 |
| 17 | 7 | 2 | 49 | > | 31 | 25 | 6 | 4 | 114 | > | 62 |
| 17 | 9 | 2 | 45 | > | 35 | 25 | 7 | 2 | 63 | > | 39 |
| 17 | 9 | 4 | 81 | > | 53 | 25 | 7 | 4 | 119 | > | 53 |
| 17 | 9 | 6 | 117 | > | 69 | 25 | 9 | 2 | 63 | > | 43 |
| 18 | 5 | 4 | 45 | > | 38 | 25 | 9 | 4 | 117 | > | 61 |
| 19 | 3 | 2 | 45 | > | 25 | 25 | 9 | 6 | 171 | > | 93 |
| 19 | 5 | 2 | 45 | > | 29 | 25 | 13 | 2 | 65 | > | 51 |
| 19 | 5 | 4 | 85 | > | 39 | 25 | 13 | 4 | 117 | > | 77 |
| 19 | 6 | 4 | 90 | > | 50 | 25 | 13 | 6 | 169 | > | 103 |
| 19 | 7 | 2 | 49 | > | 33 | 25 | 13 | 8 | 221 | > | 154 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 4 | 91 | > | 47 |
| 19 | 10 | 4 | 90 | > | 58 |
| 19 | 10 | 8 | 170 | > | 78 |
| 19 | 11 | 2 | 55 | > | 41 |
| 21 | 5 | 2 | 55 | > | 31 |
| 21 | 11 | 2 | 55 | > | 43 |
| 21 | 11 | 4 | 99 | > | 86 |
| 21 | 11 | 8 | 187 | > | 151 |
| 22 | 5 | 4 | 65 | > | 42 |
| 22 | 7 | 4 | 63 | > | 50 |
| 23 | 3 | 2 | 51 | > | 29 |
| 26 | 5 | 4 | 65 | > | 46 |
| 26 | 7 | 4 | 63 | > | 54 |
| 27 | 5 | 2 | 65 | > | 37 |
| 27 | 5 | 4 | 125 | > | 47 |
| 27 | 7 | 2 | 63 | > | 41 |
| 27 | 7 | 4 | 119 | > | 55 |
| 27 | 10 | 4 | 130 | > | 74 |
| 27 | 11 | 2 | 77 | > | 49 |
| 27 | 14 | 4 | 126 | > | 82 |
| 27 | 14 | 8 | 238 | > | 110 |
| 27 | 15 | 2 | 75 | > | 57 |

## 【評語】010043

本作品是限制在分層或拼接兩種方法下，利用三種不同邊長的正三角形拼出邊長最小的正三角形。處理手法為分類討論。作法是利用第 8 頁的定理 1-1 與第 12 頁的定理 1-2，探討在某拼法下所使用三角形邊長需滿足的條件，方可得到大三角形邊長之最小值，過程中用到求方程式正整數解之方法，但係引用《'try angle' 組合的奧妙》之小論文結果，但未詳述為何使用方程式正整數解。整個作品內容完整，可考慮朝「最大」拼接的方式去思考。