# 2020 年臺灣國際科學展覽會
# 優勝作品專輯

作品編號　010038

參展科別　數學

作品名稱　布洛卡點相關性質探討

得獎獎項　大會獎：四等獎


就讀學校　臺北市立麗山高級中學

指導教師　洪明譽

作者姓名　劉詠筑



關鍵詞　布洛卡點、布洛卡多邊形、紐伯格圓

# 作者簡介


我是劉詠筑，目前就讀臺北市立麗山高中 307 班。

從小就對數學蠻有興趣的我，升上高中二話不說就選擇了數學專題，雖然研究過程一路上是跌跌撞撞的，但是經過無數文獻的洗禮、日夜苦思後，最後終於產出了這個作品，我最要感謝的是我的專題老師，一個人做專題工作量真的很大，同時又需要顧及課業，老師總是在過程中為我指點迷津、為我加油，如果沒有他我可能沒辦法走到今天。

很高興能參與這場盛會，做了兩年多的專題研究，除了研究之外，往往讓人感到喜悅的莫過於和人交流成果，相信這次的科展活動我也能受益良多。

# 摘　要

三角形的布洛卡點及布洛卡角是經常被探討的主題。本研究突破過往研究中布洛卡點僅存在於三角形中的侷限性並推廣至 n 邊形，發現並非所有 n 邊形都存在布洛卡點，並得到 n 邊形存在布洛卡點的充要條件，這個條件各 n 邊(角)互相獨立地等於布洛卡角的 cot 值，同時這條件亦等價於**所有存在正、負布洛卡點的 n 邊形，其頂點皆為正 n 邊形的頂點在反演變換下的反形**。當 n=4 時，即為調和四邊形。接著將文獻中三種布洛卡三角形的變換整併為一種更具數學風味的旋轉與伸縮變換，基於這種變換，發現了許多布洛卡點與外心之間的幾何性質，從而推廣至多邊形。其中美妙的結果是：從**任意布洛卡 n 邊形出發的 n 條全等的等角螺線皆收斂至布洛卡點**。最後，由投影的角度看，**發現布洛卡 n 邊形是正 n 邊形的投影，由布洛卡 n 邊形的 n 個邊所延伸的多邊形，其頂點是共圓錐曲線的。**

# Abstract

Triangles of Brocard point and Brocard angle are often the subject of discussion. This research breaks through the limitations of the current Brocard points in triangles and expands them to polygon. It finds the necessary and sufficient condition for the existence of the Brocard point in the polygon, whose cotangent value is equal to the sides and angles of polygon respectively. That is, Brocard points don't exist in every polygon. At the same time, this condition is equivalent to all polygons with positive and negative Brocard points, and their vertices are the inverse of the vertices of the regular polygon under the inversion transformation. If n=4, the polygon is a harmonic quadrilateral. Then I integrated the transformation of the three Brocard triangles in the documents into rotation and expansion. Based on this transformation, I discovered multiple geometric properties between many Brocard points and circumcenters, and then extended to polygon. The fabulous result is that those identical equiangular spirals from any vertices of the Brocard polygon converge to the Brocard point. Finally, from the perspective of projection, it is found that Brocard polygon is a projection of a regular polygon, and the vertices of Brocard polygon formed by the extension of Brocard polygon have a common conic curve.

# 壹、前言

## 一、研究動機：

我發現布洛卡點的文獻皆只提及布洛卡點在三角形中的情形，並且文獻中的垂線、圓心、投影布洛卡三角形的性質皆僅止於相似與共布洛卡點關係，所以我好奇：若是將三角形推廣至四邊形、甚至多邊形，會有甚麼結果？而垂線、圓心、投影布洛卡三角形又有哪些幾何性質還未被發現呢？除此之外，文獻中布洛卡三角形的一頂點在紐伯格圓上環繞的動畫也讓我感興趣，於是我嘗試將其推廣至多邊形進行探討。

## 二、研究目的：

一、 探討一般 $n$ 邊形在存在布洛卡點的情形、並探討特例。

二、 將垂線、圓心、投影布洛卡三角形一般化推廣，並推廣至 $n$ 邊形、探討其布洛卡點、外心(外接圓圓心)、頂點連線段等之間的幾何性質。

三、 探討布洛卡三角形的紐伯格圓推廣至布洛卡多邊形的情形。

四、 探討布洛卡多邊形的尺規作圖法。

五、 探討布洛卡多邊形在投影變換下的性質。

## 三、研究設備及器材：

紙、筆、大腦、電腦、動態幾何軟體 GSP 與 Geogebra。

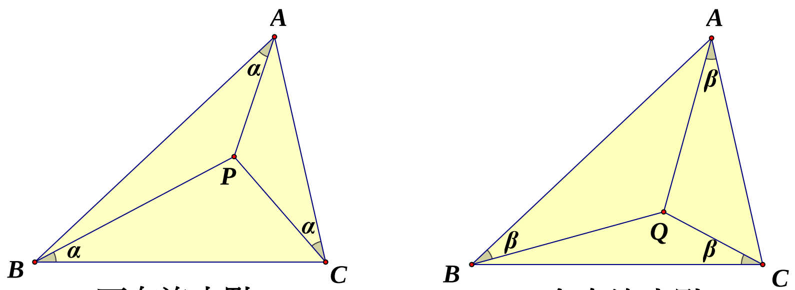
# 貳、研究過程或方法

## 一、 文獻探討

### (一)布洛卡點、布洛卡角、其存在性、唯一性及尺規作圖法

【定義】三角形的布洛卡點與布洛卡角

1. 如圖 1-1，給定的$\triangle ABC$，若存在一點 $P$，滿足$\angle BAP = \angle CBP = \angle ACP = \alpha$，且$\overline{AB}$旋轉至$\overline{AP}$為**逆時針方向**，則稱 $P$ 為$\triangle ABC$的「**正布洛卡點**」，$\alpha$ 稱「**正布洛卡角**」
2. 類似地，給定的$\triangle ABC$，若存在一點 $Q$，滿足$\angle CAQ = \angle ABQ = \angle BCQ = \beta$，且$\overline{BA}$旋轉至$\overline{BQ}$為**順時針方向**，則稱 $Q$ 為$\triangle ABC$的「**負布洛卡點**」，$\beta$ 稱「**負布洛卡角**」。




正布洛卡點　　負布洛卡點

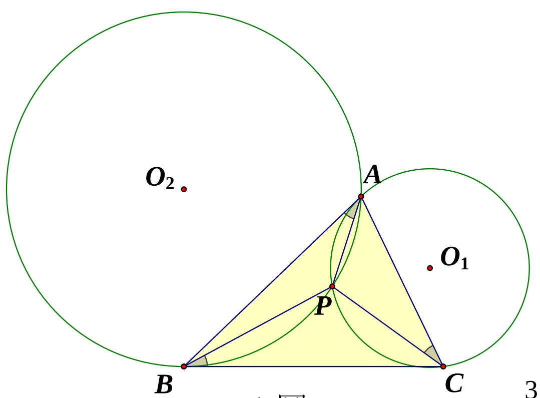
▲圖 1-1

【存在性】從作圖即可確認布洛卡點的存在性，如下：

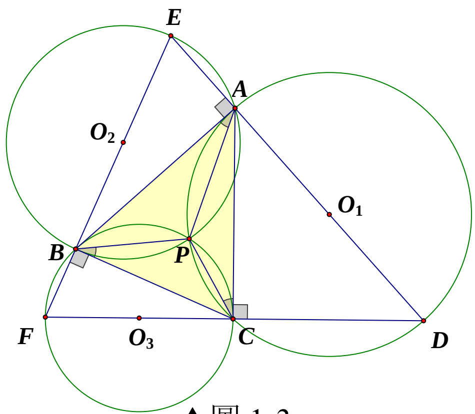
如圖 1-2，作圓$O_1$通過 $A$、$C$ 兩點，且與$\overline{AB}$相切於 $A$ 點、作圓$O_2$通過 $A$、$B$ 兩點，且與$\overline{BC}$相切於 $B$ 點，兩圓$O_1$、$O_2$交於 $P$ 點。根據弦切角定理，$\angle BAP = \angle ACP$且$\angle CBP = \angle BAP$，因此 $P$ 點滿足$\angle BAP = \angle CBP = \angle ACP$，$P$ 點即為$\triangle ABC$的正布洛卡點。至於負布洛卡點的情形與正布洛卡點類似，在此略去。

【唯一性】

如圖 1-2，設 $P$ 為$\triangle ABC$的正布洛卡點，作$\triangle APC$的外接圓$O_1$，則由弦切角定理的逆定理知圓$O_1$必與$\overline{AB}$相切於 $A$ 點，再作$\triangle BPA$的外接圓$O_2$，則圓$O_2$也必與$\overline{BC}$相切於 $B$ 點，由此可知，$P$ 點就是$\triangle ABC$唯一的正布洛卡點，同理，負布洛卡點也是唯一的。




▲圖 1-2




▲圖 1-3

【尺規作圖法】圖 1-2 說明了布洛卡點的尺規作圖法，以下作法精簡了圖 1-2 的方法：

如圖 1-3，過△$ABC$ 的三個頂點 $A$、$B$、$C$ 依次作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 的垂線 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FD}$ ，以 $\overline{AD}$ 為直徑作圓 $O_1$ ，以 $\overline{BE}$ 為直徑作圓 $O_2$ ，兩圓交於 $P$ 點即為所求。

**[證明]**

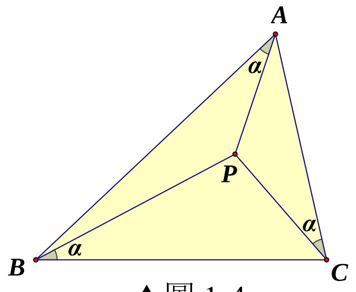
因為 $\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$ ，所以圓 $O_1$ 必過 $C$ 點，又因為 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$ ，所以圓 $O_1$ 與 $\overline{AB}$ 相切於 $A$ 點，因此 $\angle BAP=\angle ACP$ 。同理，圓 $O_2$ 必過 $A$ 點，且與 $\overline{BC}$ 相切於 $B$ 點，因此 $\angle CBP=\angle BAP$ 。由 $\angle BAP=\angle CBP=\angle ACP$ 可知 $P$ 點為△$ABC$ 的布洛卡點。 ∎

## （二）布洛卡點的基本性質

【**定理 1-1**】如圖 1-4，若 $P$ 為△$ABC$ 的正布洛卡點，其相應的正布洛卡角為 $\alpha$ ，則：

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ ,$$

$$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C\ 。$$




▲圖 1-4

**[證明]**

1. 如圖 1-4，由三角形面積關係知 $S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PBC}+S_{\Delta PAC}=S_{\Delta ABC}$ ，

則 $\dfrac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta ABC}}+\dfrac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABC}}+\dfrac{S_{\Delta PAC}}{S_{\Delta ABC}}=1$ ，即

$$\frac{\frac{1}{2}\overline{PA}\cdot\overline{AB}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin A}+\frac{\frac{1}{2}\overline{PB}\cdot\overline{BC}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\sin A}+\frac{\frac{1}{2}\overline{PC}\cdot\overline{AC}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AC}\sin C}=1 \tag{1-1}$$

亦即 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AC}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}+\dfrac{\overline{PB}}{\overline{AB}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin B}+\dfrac{\overline{PC}}{\overline{BC}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin C}=1$ ，又在△$ABC$ 中，由正弦定律得

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle APC}=\dfrac{\overline{PA}}{\sin\alpha}$ ，即 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\angle APC}$ ，而 $\angle APC=180°-\alpha-\angle CAP=180°-A$ ，則

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\angle APC}=\frac{\sin\alpha}{\sin A} \tag{1-2}$$

同理可得

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\alpha}{\sin B},\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}=\frac{\sin\alpha}{\sin C} \tag{1-3}$$

由(1-1)、(1-2)、(1-3)得$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 C}=1$，即$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ 。

2. 由定理 1-1，有$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$，則$\csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$即

$$\cot^2\alpha=\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2 \tag{1-4}$$

又$A+B=\pi-C\Rightarrow\cot(A+B)=\cot(\pi-C)\Rightarrow\frac{\cot B\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$，即

$$\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C=1 \tag{1-5}$$

由(1-4)、(1-5)得$\cot^2\alpha=(\cot A+\cot B+\cot C)^2$，即$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$ 。 ■

**【推論 1】**若 $Q$ 為△$ABC$ 的負布洛卡點，其相應的負布洛卡角為$\beta$，則：

$$\frac{1}{\sin^2\beta}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C},$$

$$\cot\beta=\cot A+\cot B+\cot C$$

因推論 1 的證明完全類似於定理 1-1，故此略去。

**【推論 2】**對於任意給定的三角形，其正布洛卡角與負布洛卡角相等。

**[證明]**

由定理 1-1 與推論 1 得$\sin^2\alpha=\sin^2\beta$，又因為$0°<\alpha<60°$、$0°<\beta<60°$，所以$\alpha=\beta$。■

**【定理 1-2】**設$\alpha$為△$ABC$ 的布洛卡角，$S$ 為△$ABC$ 的面積，則：

$$\cot\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S},$$

$$\sin\alpha=\frac{2S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

**[證明]**

如圖 1-4，設$\overline{PA}=x,\overline{PB}=y,\overline{PC}=z$，在$\Delta PAB$中，由餘弦定律得$\cos\alpha=\frac{c^2+x^2-y^2}{2cx}$，又

$\sin\alpha=\frac{2S_{\Delta PAB}}{cx}$，則$\cot\alpha=\frac{c^2+x^2-y^2}{4S_{\Delta PAB}}$，即$4S_{\Delta PAB}\cdot\cot\alpha=c^2+x^2-y^2$，

同理可得$4S_{\Delta PBC}\cdot\cot\alpha=a^2+y^2-z^2$、$4S_{\Delta PCA}\cdot\cot\alpha=b^2+z^2-x^2$，

上述三式相加，可得$4(S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PBC}+S_{\Delta PCA})\cdot\cot\alpha=a^2+b^2+c^2$，即得$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$，

又由三角形面積公式與餘弦定理，

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B\Rightarrow 4S^2=a^2c^2\sin^2 B=a^2c^2(1-\cos^2 B)=a^2c^2\left(1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2=4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2$$

則有：

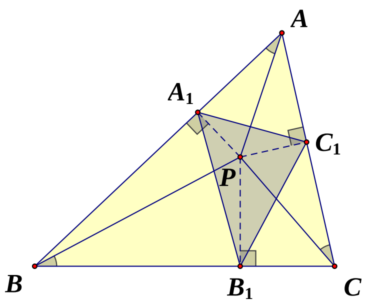
$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot\alpha}}=\frac{4S}{\sqrt{16S^2+(c^2+a^2-b^2)^2}}=\frac{2S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

$$\cos\alpha=\sin\alpha\cot\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$ ■

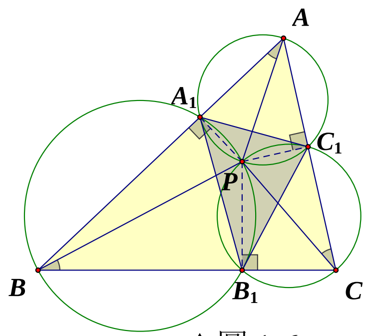
### （三）布洛卡三角形的變換：投影、垂線、圓心布洛卡三角形

**【定義】投影布洛卡三角形：**

如圖 1-5，設 $P$ 為△$ABC$ 的布洛卡點，自 $P$ 點向三邊作垂線得垂足點 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，則△$A_1B_1C_1$ 稱為△$ABC$ 的**正投影布洛卡三角形**。任意三角形相對於正、負布洛卡點各有一個投影布洛卡三角形。



▲圖 1-5



▲圖 1-6

**【定理 1-3】投影布洛卡三角形的相似與共布洛卡點關係**

設△$ABC$ 的布洛卡點為 $P$，布洛卡角為 $\alpha$ ，若△$A_1B_1C_1$ 是△$ABC$ 的投影布洛卡三角形，則：

△$A_1B_1C_1$ 的布洛卡點亦為 $P$，布洛卡角亦為 $\alpha$ ；

△$A_1B_1C_1\sim$△$ABC$，相似比為 $\sin\alpha$ 。

**[證明]**

1. 如圖 1-6，由 $A$、$A_1$、$P$、$C_1$ 四點共圓可知 $\angle PC_1A_1=\angle PAB=\alpha$ 。同理，由 $B$、$B_1$、$P$、$A_1$ 四點共圓，可知 $\angle PA_1B_1=\angle PBC=\alpha$ ；由 $C$、$C_1$、$P$、$B_1$ 四點共圓，可知 $\angle PB_1C_1=\angle PCA=\alpha$ 。因此 $\angle PC_1A_1=\angle PA_1B_1=\angle PB_1C_1=\alpha$ ，亦即 $P$ 為△$A_1B_1C_1$ 的布洛卡點。
2. $\angle B_1A_1C_1=\angle B_1A_1P+\angle PA_1C_1=\alpha+\angle PAC=\angle A$ ，同理，$\angle C_1B_1A_1=\angle C_1B_1P+\angle PB_1A_1=\alpha+\angle PBA=\angle B$ ，且 $\angle A_1C_1B_1=\angle A_1C_1P+\angle PC_1B_1=\alpha+\angle PCB=\angle C$ ，從而△$A_1B_1C_1\sim$△$ABC$。兩者的相似比為 $\dfrac{PA_1}{PA}=\sin\alpha$ 。 ■

**【推論 3】**若給定任意布洛卡三角形，則其正、負投影布洛卡三角形全等。

**【定義】垂線布洛卡三角形：**

如圖 1-7，過△$ABC$ 的三個頂點 $A$、$B$、$C$ 作三邊的垂線 $\overline{DF}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{DE}$ ，則△$DEF$ 稱為

△$ABC$ 的**正垂線布洛卡三角形**。對於任意給定的三角形都有其正、負垂線布洛卡三角形。

**[說明]**

由前述【尺規作圖法】可知垂線布洛卡三角形與布洛卡點的尺規作圖相關，故有正負之分。

**【定理 1-4】垂線布洛卡三角形的相似與共布洛卡點關係**

如圖 1-8，若△$ABC$ 的三邊長分別為 $a$、$b$、$c$，外接圓半徑為 $R$，$P$ 為其布洛卡點，△$DEF$ 為其相應的垂線布洛卡三角形，布洛卡角 $\alpha=\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$，則：

$P$ 亦為△$DEF$ 的布洛卡點，$\alpha$ 亦為△$DEF$ 的布洛卡角；

△$ABC\sim$△$DEF$，相似比為 $\dfrac{abc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)R}=\tan\alpha$ 。

**[證明]**

1. 以 $\overline{AD}$ 為直徑作圓 $O_1$，以 $\overline{BE}$ 為直徑作圓 $O_2$，以 $\overline{CF}$ 為直徑作圓 $O_3$，三圓交於△$ABC$ 的布洛卡點 $P$。由於 $\angle ADP=\angle ACP=\alpha$，$\angle CFP=\angle CBP=\alpha$ 且 $\angle BEP=\angle BAP=\alpha$，故知 $P$ 點為△$DEF$ 的布洛卡點，$\alpha$ 為△$DEF$ 的布洛卡角。
2. 因為

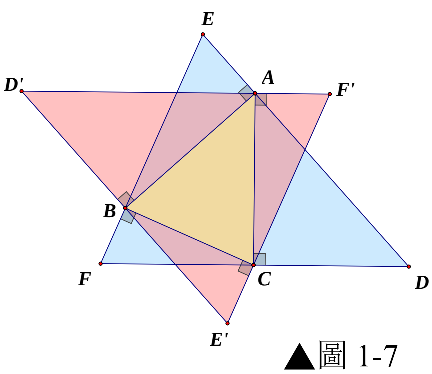
$$\angle EDF=\angle ADP+\angle PDC=\alpha+\angle PAC=\angle A\text{，}$$

$$\angle DFE=\angle CFP+\angle PFB=\alpha+\angle PCB=\angle C\text{，}$$

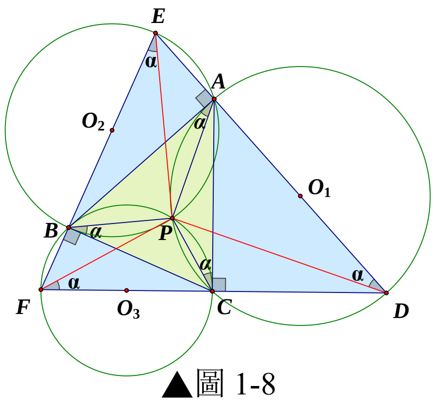
故知△$ABC\sim$△$DEF$，相似比為

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}=\tan\alpha=\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}=\frac{4\cdot\dfrac{abc}{4R}}{a^2+b^2+c^2}=\frac{abc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)R}$$ ■

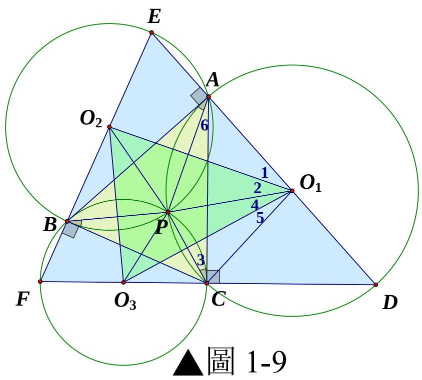
**【推論 4】**若給定任意布洛卡三角形，則其正、負垂線布洛卡三角形全等。



▲圖 1-7



▲圖 1-8



▲圖 1-9

**【定義】圓心布洛卡三角形：**

如圖 1-9，設△$DEF$ 為△$ABC$ 的垂線布洛卡三角形，$\overline{AD}$、$\overline{CF}$、$\overline{BE}$ 的中點分別為 $O_1$、$O_2$、$O_3$，則△$O_1O_2O_3$ 稱為△$ABC$ 的**正圓心布洛卡三角形**。任意三角形相對應其正、負布洛卡點都各有一個圓心布洛卡三角形。

**【定理 1-5】圓心布洛卡三角形的相似與共布洛卡點關係**

如圖 1-9，設△$ABC$ 的三邊長分別為 $a$、$b$、$c$，外接圓半徑為 $R$，$P$ 為其布洛卡點，△$O_1O_2O_3$ 為其相應的圓心布洛卡三角形，布洛卡角 $\alpha=\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$，則：

$P$ 亦為△$O_1O_2O_3$ 的布洛卡點， $\alpha$ 亦為△$O_1O_2O_3$ 的布洛卡角；

△$ABC\sim$△$O_1O_2O_3$，相似比為 $2\sin\alpha=\dfrac{abc}{\sqrt{\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}R}$ 。

**[證明]**

1. 在圓 $O_1$、$O_2$ 中，連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 將圓 $O_1$、$O_2$ 切割成互相對稱的兩半，因此 $\angle 1=\angle 2$ 。

   在圓 $O_1$ 中，$AP$ 所對應的圓心角 $\angle AO_1P=2\angle 3$，即 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\alpha$ 。

   同理，$\angle PO_2O_3=\angle PO_3O_1=\alpha$ ，故 $P$ 為△$O_1O_2O_3$ 的布洛卡點。

   又在圓 $O_1$、$O_3$ 中，連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 將圓 $O_1$、$O_3$ 切割成互相對稱的兩半，因此 $\angle 4=\angle 5$ 。

   在圓 $O_1$ 中，$CP$ 所對應的圓心角 $\angle CO_1P=2\angle 6$ ，

   即 $\angle 4=\angle 6$ 。因此 $\angle O_2O_1O_3=\angle 2+\angle 4=\alpha+\angle 6=\angle A$ ，

   同理，$\angle O_1O_3O_2=\angle B$ 且 $\angle O_1O_2O_3=\angle C$ ，這說明了△$ABC$~△$O_1O_2O_3$ 。

2. 最後計算△$ABC$ 和△$O_1O_2O_3$ 的相似比：

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PO_1}}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2\sin\alpha$$

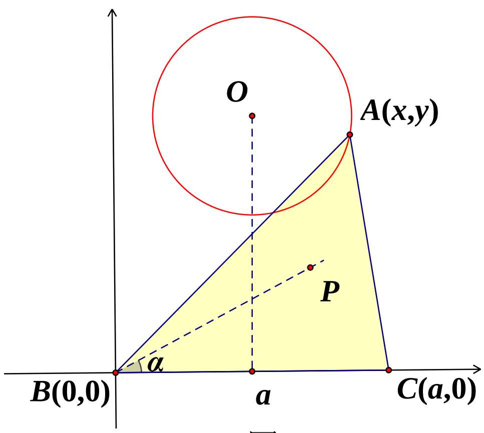
   又根據定理 1-2，$\sin\alpha=\dfrac{2S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$ ，可得相似比：

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PO_1}}=2\sin\alpha=\frac{4S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}R}$$ ■

**【推論 5】**若給定任意布洛卡三角形，則其正、負圓心布洛卡三角形全等。

### （四）布洛卡三角形的紐伯格圓(參見文獻[4])

**【定理 1-6】**如圖 1-10，給定角 $\alpha$ 及 $B$、$C$ 兩定點，設 $\overline{BC}=a$ ，若△$ABC$ 布洛卡角為 $\alpha$ ，則 $A$ 點的軌跡為一圓，圓心 $O$ 在 $\overline{BC}$ 的中垂線上，與 $\overline{BC}$ 相距 $\frac{a}{2}\cot\alpha$ ，半徑為 $\frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha-3}$ 。




▲圖 1-10

**[證明]**

先證明點 $A$ 的軌跡是一圓。

設 $B(0,0)$、$C(a,0)$、$A(x,y)$，又由定理 1-2 知 $\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ ，

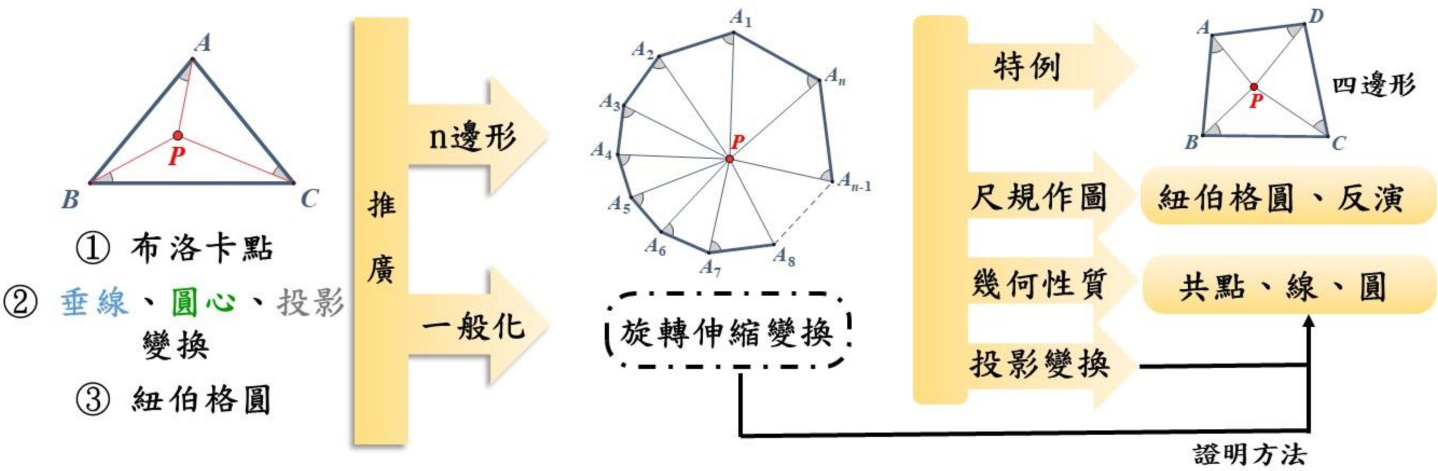
因為 $b^2=\left(a-x\right)^2+y^2$ 、 $c^2=x^2+y^2$ ，

$\Rightarrow 4S\cot\alpha=a^2+\left(a-x\right)^2+y^2+x^2+y^2=2x^2+2y^2+2a^2-2ax$

$\Rightarrow 4\cdot\dfrac{1}{2}ay\cdot\cot\alpha=2x^2+2y^2+2a^2-2ax\Rightarrow ay\cot\alpha=x^2+y^2+a^2-ax$ ，即 $x$、$y$ 滿足圓方程式。

整理式子後得 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{a\cot\alpha}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha-3}\right)^2$ ，

故證得 $A$ 的軌跡為一圓，其圓心為 $O\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\cot\alpha\right)$ ，半徑為 $\frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha-3}$ 。 ∎




## 二、研究架構與方法

# 參、研究結果與討論

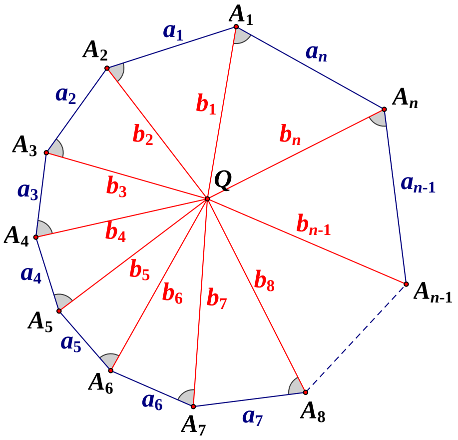
## 一、 $n$ 邊形存在布洛卡點的充要條件、幾何定理及其一般化推廣

### (一)存在正、負布洛卡點的 $n$ 邊形之充要條件

文獻中所呈現的布洛卡點的相關研究都僅只於三角形，以下的研究則嘗試著突破至多邊形，從作圖中可以發現並非所有 $n$ 邊形皆存在布洛卡點，即使有正布洛卡點也不一定有負布洛卡點，以下的定理給出了 $n$ 邊形存在布洛卡點的充要條件：

> **【定理 2-1】** 如圖 2-1，若給定 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ， $\overline{A_1A_2}=a_1$ ， $\overline{A_2A_3}=a_2$ ，……， $\overline{A_nA_1}=a_n$ ， $\beta$ 為負布洛卡角，則其存在負布洛卡點 $Q$ 的充要條件為：
>
> $$\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n}=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}$$

[證明]




▲圖 2-1

設$\overline{QA_1}=b_1$，$\overline{QA_2}=b_2$，……，$\overline{QA_n}=b_n$。在$\triangle QA_1A_2$中，

$\angle A_1QA_2=\pi-\angle QA_1A_2-\beta=\pi-A_1$，由正弦定律，$\dfrac{a_1}{\sin\left(\pi-A_1\right)}=\dfrac{b_1}{\sin\beta}=\dfrac{b_2}{\sin\left(A_1-\beta\right)}$，即

$$\frac{a_1}{\sin A_1}=\frac{b_1}{\sin\beta}=\frac{b_2}{\sin\left(A_1-\beta\right)} \tag{2-1}$$

同理，在$\triangle QA_2A_3$與$\triangle QA_3A_4$中，由正弦定律可得

$$\frac{a_2}{\sin A_2}=\frac{b_2}{\sin\beta}=\frac{b_3}{\sin\left(A_2-\beta\right)} \tag{2-2}$$

$$\frac{a_3}{\sin A_3}=\frac{b_3}{\sin\beta}=\frac{b_4}{\sin\left(A_3-\beta\right)} \tag{2-3}$$

由(2-1)式可得

$$b_1\sin\left(A_1-\beta\right)=b_2\sin\beta\Rightarrow b_1\left(\sin A_1\cos\beta-\cos A_1\sin\beta\right)=b_2\sin\beta$$

兩邊同除以$\sin A_1\sin\beta$，可得

$$b_1\left(\cot\beta-\cot A_1\right)=\frac{b_2}{\sin A_1}\Rightarrow\cot\beta-\cot A_1=\frac{b_2}{b_1\sin A_1} \tag{2-4}$$

另由(2-1)、(2-2)式可得

$$\begin{cases}b_1\sin A_1=a_1\sin\beta\\ b_2\sin A_2=a_2\sin\beta\end{cases}\Rightarrow\frac{b_1\sin A_1}{b_2\sin A_2}=\frac{a_1}{a_2}\Rightarrow\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2\sin A_1}{a_1\sin A_2}$$

代入(2-4)式，得到

$$\cot\beta-\cot A_1=\frac{a_2}{a_1\sin A_2}\Rightarrow\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2} \tag{2-5}$$

同理，由(2-2)式可得

$$\cot\beta-\cot A_2=\frac{b_3}{b_2\sin A_2} \tag{2-6}$$

再由(2-2)、(2-3)式可得

$$\begin{cases} b_2\sin A_2 = a_2\sin\beta \\ b_3\sin A_3 = a_3\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \frac{b_2\sin A_2}{b_3\sin A_3} = \frac{a_2}{a_3} \Rightarrow \frac{b_3}{b_2} = \frac{a_3\sin A_2}{a_2\sin A_3}$$

代入(2-6)式，得到

$$\cot\beta = \cot A_2 + \frac{a_3}{a_2\sin A_3} \tag{2-7}$$

由此類推可知，若 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的布洛卡點存在，必滿足

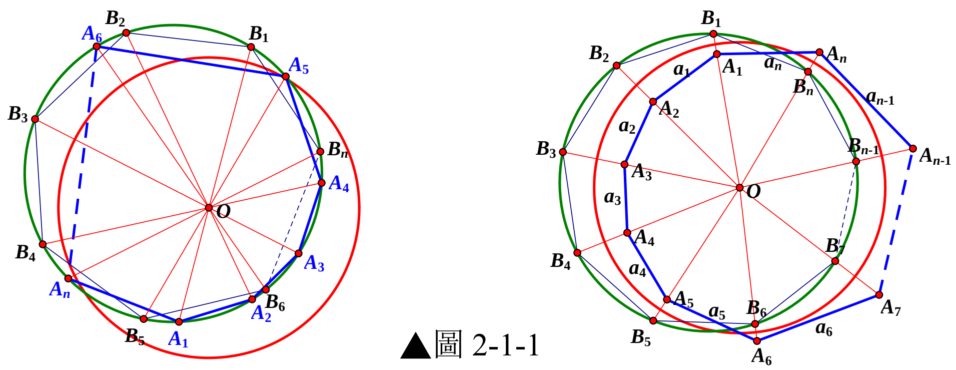
$$\cot\beta = \cot A_1 + \frac{a_2}{a_1\sin A_2} = \cot A_2 + \frac{a_3}{a_2\sin A_3} = \cdots = \cot A_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n} = \cot A_n + \frac{a_1}{a_n\sin A_1}$$

其次，從 $Q$ 點的作圖中可看出，滿足上式的 $Q$ 點也必滿足布洛卡點的定義，這說明了它的充分性。 ■

【**定理 2-2**】多邊形同時存在正、負布洛卡點的充要條件為：

該多邊形的每個頂點是正多邊形的頂點在某個反演變換下的反形。

**[證明]**




▲圖 2-1-1

如圖 2-1-1，設 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的 $n$ 個頂點是正 $n$ 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的 $n$ 個頂點關於反演變換 $I(O,r)$ 的反形，$n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的邊長分別為 $a_1$、$a_2$、$a_3$、…、$a_n$，正 $n$ 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的外接圓半徑為 $R$，由前面的定理，我們只需證明 $\cot A_1 + \dfrac{a_2}{a_1\sin A_2}$ 是個與 $\angle A_1$、$\angle A_2$、$a_1$、$a_2$ 無關的定值，即證明了

$$\cot A_1 + \frac{a_2}{a_1\sin A_2} = \cot A_2 + \frac{a_3}{a_2\sin A_3} = \cot A_3 + \frac{a_4}{a_3\sin A_4} = \cdots = \cot A_n + \frac{a_1}{a_n\sin A_1}。$$

又因為 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的 $n$ 個頂點共圓，那就證明了 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 同時具有正、負布洛卡點。

不失其一般性地，設正 $n$ 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的邊長為 1，則 $R = \dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$，且

$$\cot A_1 + \frac{a_2}{a_1\sin A_2} = \frac{\cos A_1}{\sin A_1} + \frac{a_2}{a_1\sin A_2} = \frac{\frac{a_1^2+a_n^2-\overline{A_2A_n}^2}{2a_1a_n}}{\frac{\overline{A_2A_n}}{2R}} + \frac{a_2}{a_1\cdot\frac{\overline{A_1A_3}}{2R}} = \frac{R\left(a_1^2+a_n^2-\overline{A_2A_n}^2\right)}{a_1a_n\cdot\overline{A_2A_n}} + \frac{2Ra_2}{a_1\cdot\overline{A_1A_3}} \tag{2-8}$$

因為

$$\triangle OA_1A_2 \sim \triangle OB_2B_1 \Rightarrow \frac{a_1}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}\cdot\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2} \Rightarrow a_1 = \frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2} \text{ ,}$$

同理

$$a_2 = \frac{\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_3}}{r^2} \text{ , } a_n = \frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_n}}{r^2} \text{ ,} \tag{2-9}$$

$$\overline{A_2A_n} = \frac{\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\overline{B_2B_n} = \frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\sin\frac{(n-2)\pi}{2n} = \frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\overline{A_1A_3} = \frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cdot\overline{B_1B_3} = \frac{2\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cdot\sin\frac{(n-2)\pi}{2n} = \frac{2\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

將上式代入(2-8)式，得到

$$\begin{aligned}
\cot A_1 + \frac{a_2}{a_1\sin A_2} &= \frac{R\left(\left(\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\right)^2 - \left(\frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\right)}{\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}\cdot\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cos\frac{\pi}{n}} + \frac{2R\cdot\frac{\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}}{\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}\cdot\frac{2\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cos\frac{\pi}{n}} \\
&= \frac{R}{2r^2\cos\frac{\pi}{n}}\left(\frac{r^4}{\overline{OA_n}^2} + \frac{r^4}{\overline{OA_2}^2} - 4\frac{r^4}{\overline{OA_1}^2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}\right) + \frac{R}{r^2\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{r^4}{\overline{OA_1}^2} \\
&= \frac{R}{2r^2\cos\frac{\pi}{n}}\left(\overline{OB_n}^2 + \overline{OB_2}^2 + \overline{OB_1}^2\left(2 - 4\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\right) \\
&= \frac{R}{2r^2\cos\frac{\pi}{n}}\left(\overline{OB_n}^2 + \overline{OB_2}^2 - 2\overline{OB_1}^2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \\
&= \frac{1}{4r^2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\left(\overline{OB_n}^2 + \overline{OB_2}^2 - 2\overline{OB_1}^2\cos\frac{2\pi}{n}\right)
\end{aligned} \tag{2-10}$$

接著我們說明$\overline{OB_n}^2 + \overline{OB_2}^2 - 2\overline{OB_1}^2\cos\frac{2\pi}{n}$是定值。將正 $n$ 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 置於坐標平面上，其外接圓圓心置於原點，並設 $B_1(R,0)$ ， $B_2\left(R\cos\frac{2\pi}{n}, R\sin\frac{2\pi}{n}\right)$ ，

$B_n\left(R\cos\frac{2\pi}{n}, -R\sin\frac{2\pi}{n}\right)$ ，則

$$\begin{aligned}
&\overline{OB_n}^2 + \overline{OB_2}^2 - 2\overline{OB_1}^2\cos\frac{2\pi}{n} \\
&= \left(x - R\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \left(y - R\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \left(x - R\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \left(y + R\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 - 2\left((x-R)^2 + y^2\right)\cos\frac{2\pi}{n} \\
&= 2x^2 - 4Rx\cos\frac{2\pi}{n} + 2y^2 + 2R^2 - 2\left(x^2 - 2Rx + y^2 + R^2\right)\cos\frac{2\pi}{n} \\
&= 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)x^2 + 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)y^2 + 2R^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) = 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(x^2+y^2+R^2\right) \\
&= 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(2R^2 - r^2\right) = 4\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(2R^2 - r^2\right)
\end{aligned} \tag{2-11}$$

將(2-11)式代入(2-10)式，得到

$$\cot A_1 + \frac{a_2}{a_1\sin A_2} = \frac{1}{4r^2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\cdot 4\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(2R^2 - r^2\right) = \left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right)\tan\frac{\pi}{n}$$

因此我們證得：正 $n$ 邊形的各個頂點 $B_1$、$B_2$、$B_3$、…、$B_n$ 經反演變換 $I(O,r)$ 後，其反形為 $A_1$、$A_2$、$A_3$、…、$A_n$ ，則 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 必有正、負布洛卡點與布洛卡角 $\alpha$ ，且

$$\cot\alpha = \left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right)\tan\frac{\pi}{n} \text{ 。} \tag{2-12}$$

反之，若 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 同時有正、負布洛卡點與布洛卡角 $\alpha$，則由(2-9)式，可得 $\frac{a_1}{a_n}=\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_n}}$，故知反演中心 $O$ 位於以 $A_2$、$A_n$ 為定點，$\frac{a_1}{a_n}$ 為定比的阿波羅尼斯圓 $O_1$ 上，同理由 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\overline{OA_3}}{\overline{OA_1}}$ 可知 $O$ 點位於以 $A_3$、$A_1$ 為定點，$\frac{a_2}{a_1}$ 為定比的阿波羅尼斯圓 $O_2$ 上，兩圓的交點即為反演中心 $O$，再由 $\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$ 可求出反演半徑 $r$，則正 $n$ 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 即可作出。

∎

**【推論 6】** 若給定存在正、負布洛卡點的布洛卡 $n$ 邊形，則：

其布洛卡角 $\alpha\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$，且當布洛卡角 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ 時，此布洛卡 $n$ 邊形為正 $n$ 邊形。

**[證明]**

由定理 2-2 可推論出：$\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$，

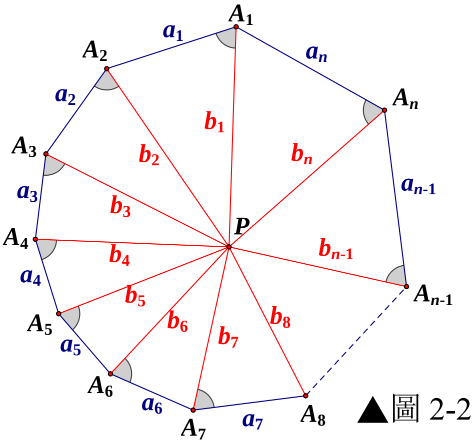
因為 $\left(\frac{R}{r}\right)^2\ge 1$，所以 $\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}\ge\tan\frac{\pi}{n}=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\quad\Rightarrow\alpha\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$，

又正 $n$ 邊形的布洛卡角 $=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ (為其內角的一半)，

故當 ”=” 成立時，此布洛卡 $n$ 邊形即為正 $n$ 邊形。 ∎

### (二)布洛卡 $n$ 邊形的幾何定理

**【定理 2-3】** 如圖 2-2，若 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的布洛卡角為 $\alpha$，面積為 $S$，且 $\overline{A_1A_2}=a_1,\overline{A_2A_3}=a_2,\cdots\cdots,\overline{A_nA_1}=a_n$，則： $\cot\alpha=\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{4S}.$




▲圖 2-2

**[證明]**

設 $\overline{PA_1}=b_1,\overline{PA_2}=b_2,\cdots\cdots,\overline{PA_n}=b_n$，在 $\Delta PA_1A_2$ 中，由餘弦定律，$\cos\alpha=\dfrac{a_1^2+b_1^2-b_2^2}{2a_1b_1}$，又

$S_{\Delta PA_1A_2}=\dfrac{1}{2}a_1b_1\sin\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2S_{\Delta PA_1A_2}}{a_1b_1}$，因此 $\cot\alpha=\dfrac{a_1^2+b_1^2-b_2^2}{4S_{\Delta PA_1A_2}}$，即

$$4S_{\Delta PA_1A_2}\cdot\cot\alpha=a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}-b_2^{\ 2}$$

同理可得

$$4S_{\Delta PA_2A_3}\cdot\cot\alpha=a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}-b_3^{\ 2},\cdots\cdots,4S_{\Delta PA_{n-1}A_n}\cdot\cot\alpha=a_{n-1}^{\ \ 2}+b_{n-1}^{\ \ 2}-b_n^{\ 2},4S_{\Delta PA_nA_1}\cdot\cot\alpha=a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}-b_1^{\ 2}$$

將上述等式相加，得

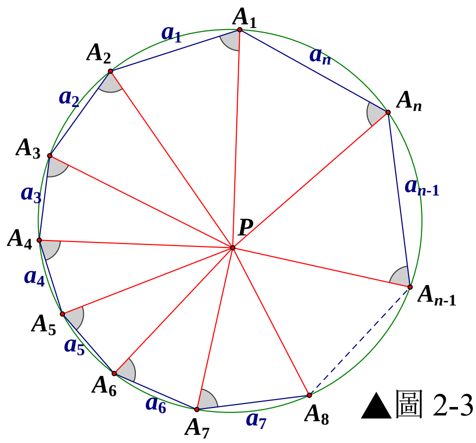
$$4\left(S_{\Delta PA_1A_2}+S_{\Delta PA_2A_3}+\cdots+S_{\Delta PA_{n-1}A_n}+S_{\Delta PA_nA_1}\right)\cot\alpha=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_{n-1}^{\ \ 2}+a_n^{\ 2}$$

其中 $S_{\Delta PA_1A_2}+S_{\Delta PA_2A_3}+\cdots+S_{\Delta PA_{n-1}A_n}+S_{\Delta PA_nA_1}=S$ ，故得到

$$\cot\alpha=\frac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{4S}$$ ■

**【定理 2-4】**如圖 2-3，若 $n$ 邊形同時具有正、負布洛卡點，則：

$n$ 邊形的 $n$ 個頂點共圓，且正、負布洛卡角相等。




▲圖 2-3

**[證明]**

1. 先證明正、負布洛卡角相等：設 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負布洛卡角分別為 $\alpha$ 、 $\beta$ ，面積為 $S$，且 $\overline{A_1A_2}=a_1$ ， $\overline{A_2A_3}=a_2$ ， …… ， $\overline{A_nA_1}=a_n$ ，由定理 2-3，

$\cot\alpha=\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{4S}$ ，同理， $\cot\beta=\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{4S}$ ，故 $\alpha=\beta$ 。

2. 其次證明 $n$ 個頂點共圓：

由定理 2-3，若 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有負布洛卡點，則

$$\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n}=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}\qquad(2\text{-}13)$$

同理，若 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有正布洛卡點，則

$$\cot\alpha=\cot A_1+\frac{a_{n-1}}{a_n\sin A_n}=\cot A_2+\frac{a_n}{a_1\sin A_1}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}\sin A_{n-2}}=\cot A_n+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}\sin A_{n-1}}\qquad(2\text{-}14)$$

在 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，由餘弦定律，

$$\cos\angle A_2A_1A_3=\frac{a_1^{\ 2}+\overline{A_1A_3}^{\,2}-a_2^{\ 2}}{2a_1\cdot\overline{A_1A_3}}=\frac{a_1^{\ 2}+\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}-2a_1a_2\cos A_2\right)-a_2^{\ 2}}{2a_1\cdot\overline{A_1A_3}}=\frac{2a_1^{\ 2}-2a_1a_2\cos A_2}{2a_1\cdot\overline{A_1A_3}}=\frac{a_1-a_2\cos A_2}{\overline{A_1A_3}}$$

又由正弦定律，$\dfrac{\overline{A_1A_3}}{\sin A_2}=\dfrac{a_2}{\sin\angle A_2A_1A_3}\Rightarrow\overline{A_1A_3}=\dfrac{a_2\sin A_2}{\sin\angle A_2A_1A_3}$，代入上式得

$$\cos\angle A_2A_1A_3=\frac{a_1-a_2\cos A_2}{\overline{A_1A_3}}=\frac{\left(a_1-a_2\cos A_2\right)\sin\angle A_2A_1A_3}{a_2\sin A_2}\Rightarrow\cot\angle A_2A_1A_3=\frac{a_1}{a_2\sin A_2}-\cot A_2$$

再由(2-14)式，$\cot\alpha=\cot A_3+\dfrac{a_1}{a_2\sin A_2}$，可得

$$\cot\angle A_2A_1A_3=\cot\alpha-\cot A_3-\cot A_2 \tag{2-15}$$

同理，在$\Delta A_2A_3A_4$中，由餘弦定律，

$$\cos\angle A_2A_4A_3=\frac{a_3^{\ 2}+\overline{A_2A_4}^{\,2}-a_2^{\ 2}}{2a_3\cdot\overline{A_2A_4}}=\frac{a_3^{\ 2}+\left(a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}-2a_2a_3\cos A_3\right)-a_2^{\ 2}}{2a_3\cdot\overline{A_2A_4}}=\frac{2a_3^{\ 2}-2a_2a_3\cos A_3}{2a_3\cdot\overline{A_2A_4}}=\frac{a_3-a_2\cos A_3}{\overline{A_2A_4}}$$

又由正弦定律，$\dfrac{\overline{A_2A_4}}{\sin A_3}=\dfrac{a_2}{\sin\angle A_2A_4A_3}\Rightarrow\overline{A_2A_4}=\dfrac{a_2\sin A_3}{\sin\angle A_2A_4A_3}$，代入上式得

$$\cos\angle A_2A_4A_3=\frac{a_3-a_2\cos A_3}{\overline{A_2A_4}}=\frac{\left(a_3-a_2\cos A_3\right)\sin\angle A_2A_4A_3}{a_2\sin A_3}\Rightarrow\cot\angle A_2A_4A_3=\frac{a_3}{a_2\sin A_3}-\cot A_3$$

再由(2-13)式，$\cot\beta=\cot A_2+\dfrac{a_3}{a_2\sin A_3}$，可得

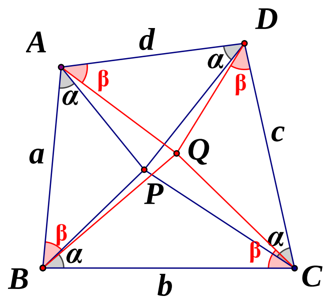
$$\cot\angle A_2A_4A_3=\cot\beta-\cot A_2-\cot A_3 \tag{2-16}$$

因為$\alpha=\beta$，因此由(2-15)式與(2-16)式得$\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_4A_3$，這說明了$A_1,A_2,A_3,A_4$四點共圓，同樣的方法也能類推至$A_1,A_2,A_3,A_n$四點共圓，由於通過$A_1,A_2,A_3$三點的圓是唯一的，表示$A_1,A_2,A_3,A_4,\ A_n$都落在$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓上，因此$A_1,A_2,A_3,A_4,A_n$等五點共圓，而當然這就證明了$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$等$n$點共圓。 ■

**【定理 2-5】特例：調和四邊形**

| |
|---|
| 若給定同時具有正、負布洛卡點的布洛卡四邊形，則：<br>此四邊形的四個頂點共圓且對邊乘積相等，即為調和四邊形。 |

**[證明]**




▲圖 2-4

如圖 2-5，設四邊形$ABCD$的四個邊$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DA}=d$，正布洛卡角為$\alpha$，負布洛卡角$\beta$，則由定理 2-4 可知$\alpha=\beta$。

再由定理 2-1，$\cot\beta=\cot A+\dfrac{b}{a\sin B}=\cot B+\dfrac{c}{b\sin C}=\cot C+\dfrac{d}{c\sin D}=\cot D+\dfrac{a}{d\sin A}$，

$$\cot\alpha=\cot A+\frac{c}{d\sin D}=\cot B+\frac{d}{a\sin A}=\cot C+\frac{a}{b\sin B}=\cot D+\frac{b}{c\sin C}$$

兩式相減得

$$\frac{b}{a\sin B}-\frac{c}{d\sin D}=\frac{c}{b\sin C}-\frac{d}{a\sin A}=\frac{d}{c\sin D}-\frac{a}{b\sin B}=\frac{a}{d\sin A}-\frac{b}{c\sin C}=0$$

整理後可得

$$\begin{cases} bd\sin D=ac\sin B \\ ac\sin D=bd\sin B \end{cases} \text{且} \begin{cases} ac\sin A=bd\sin C \\ bd\sin A=ac\sin C \end{cases}$$

再整理後可得

$$bd=ac\text{ ， }\sin A=\sin C\text{ ， }\sin B=\sin D$$

因此證得對邊乘積相等。

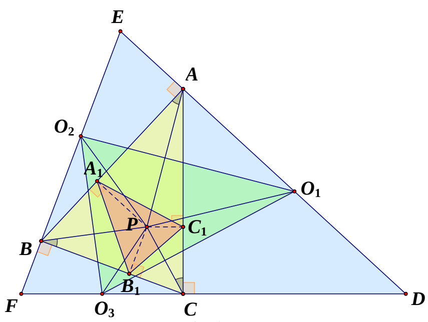
另外，由定理 2-4 可知其四個頂點共圓，即符合調和四邊形的定義。 ■

## (三)布洛卡多邊形的一般化推廣

文獻提及了三種布洛卡三角形的變化：垂線、圓心及投影布洛卡三角形，它們皆相似且共布洛卡點，所以可藉旋轉伸縮變換將其一般化推廣；其中，垂線、圓心及投影布洛卡 $n$ 邊形同樣是由任意布洛卡 $n$ 邊形旋轉伸縮變換後而得，從而三角形的結論推廣 $n$ 邊形也會成立，為免複雜化，以下只針對布洛卡三角形作討論。

如圖 2-5，給定任意 $\triangle ABC$，若 $P$ 為其正布洛卡點，$\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle DEF$、$\triangle A_1B_1C_1$ 分別是 $\triangle ABC$ 的正圓心布洛卡三角形、正垂線布洛卡三角形、正投影布洛卡三角形，則：

1. $\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle ABC$ 可分別視為將 $\triangle DEF$ 以 $P$ 點為中心逆時針方向適當角度旋轉，再縮放至各頂點分別位在 $\triangle DEF$ 的邊(的延長線)上而得。
2. $\triangle A_1B_1C_1$ 可視為將 $\triangle ABC$ 以 $P$ 點為中心逆時針方向適當角度旋轉，再縮放至各頂點分別位在 $\triangle ABC$ 的邊(的延長線)上而得。



▲圖 2-5

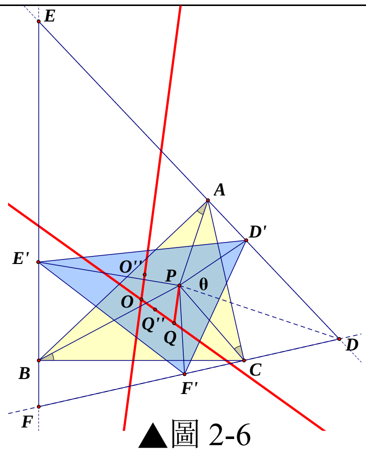
**【定義】旋轉與伸縮變換**

給定 $P$、$Q$ 兩點及布洛卡角 $\alpha$，

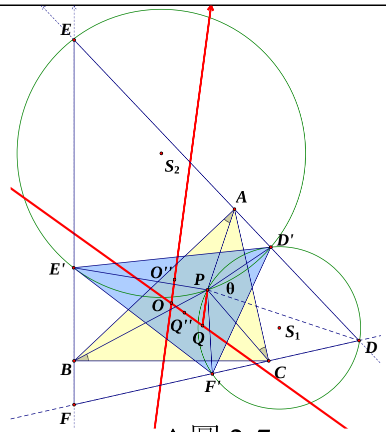
1. 若平面上一點 $M$ 以 $P$ 點為中心旋轉有向角 $\theta$ 並縮放 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$，得到點 $M'$，則記做 $B_\alpha^+(\theta,M)=M'$。
2. 若平面上一點 $M$ 以 $Q$ 點為中心旋轉有向角 $-\theta$ 並縮放 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$，得到點 $M''$，則記做 $B_\alpha^-(\theta,M)=M''$。

**【定理 2-6】** 如圖 2-6、圖 2-10，給定 $\triangle ABC$ 及其正、負布洛卡點 $P$、$Q$，布洛卡角 $\alpha$，外心 $O$，若 $\triangle DEF$、$\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle A_1B_1C_1$ 分別為 $\triangle ABC$ 的正垂線布洛卡三角形、正圓心布洛卡三角形、正投影布洛卡三角形，且 $B_\alpha^+(\theta,\triangle DEF)=\triangle D'E'F'$、$B_\alpha^+(\theta,\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$， $\triangle A'B'C'$ 的負布洛卡點與外心分別為 $Q'$、$O'$，$\triangle DEF$ 的負布洛卡點與外心分別為 $Q''$、$O''$，則：

1. $\triangle D'E'F' \sim \triangle ABC$，且 $\triangle D'E'F'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同的正布洛卡點與布洛卡角(如圖 2-6)。
2. $\left\{B_\alpha^+(\theta,Q'')\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}$ 和 $\left\{B_\alpha^+(\theta,O'')\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}$ 為相交於 $O$ 點的兩直線，較小的夾角為 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，且 $\left\{B_\alpha^+(\theta,O'')\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}//\overline{PQ}$(如圖 2-6)。
3. $\left\{B_\alpha^+(\theta,Q)\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}$ 和 $\left\{B_\alpha^+(\theta,O)\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}$ 皆為直線(如圖 2-10)。
4. $B_\alpha^+(\frac{\pi}{2},\triangle DEF)=\triangle ABC$、$B_\alpha^+(\alpha,\triangle DEF)=\triangle O_1O_2O_3$、$B_\alpha^+(\frac{\pi}{2}-\alpha,\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$。



▲圖 2-6



▲圖 2-7

**[證明]**

1. 我們從 $\triangle D'E'F'$ 的作圖說明 $\triangle D'E'F'$ 與 $\triangle ABC$ 相似且共用布洛卡點。

   如圖 2-7，分別以 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$、$\overline{BE}$ 為直徑作圓，則三圓交於 $\triangle ABC$ 的布洛卡點 $P$，且布洛卡角 $\alpha=\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$。在 $\overleftrightarrow{DE}$ 上取一點 $D'$，作 $\angle PD'E'=\alpha$，其中 $E'$ 在 $\overleftrightarrow{EF}$ 上，再作圓 $S_1$ 通過 $D'$、$P$ 兩點，並使圓 $S_1$ 和 $\overline{D'E'}$ 相切於 $D'$，則圓 $S_1$ 與 $\overleftrightarrow{DF}$ 的交點即為 $F'$。

   首先證明 $\triangle PAC \sim \triangle PD'F'$：由定理 1-5 可知，$\angle D'DP=\alpha$，另外，圓 $S_1$ 中，由弦切角定

理知 $\angle PD'E' = \angle D'F'P = \alpha$，由 $\angle D'DP = \angle D'F'P$ 可知 $P$ 點在圓 $S_1$ 上；又由 $\angle PAC = \angle PDC = \angle PDF' = \angle PD'F'$ 可推得

$$\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \alpha + \angle PD'F' = \angle E'D'C，$$

以及

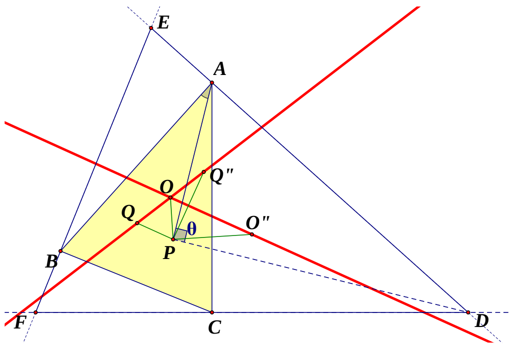
$$\angle APC = \pi - \angle BAC = \pi - \angle E'D'F' = \angle D'PF'，$$

因此 $\triangle PAC \sim \triangle PD'F'$，於是可視為將 $\triangle PAC$ 繞著 $P$ 點旋轉 $\theta$ 角，再以 $P$ 點為中心縮放至 $\triangle DEF$ 的兩邊，得到 $\triangle PD'F'$。

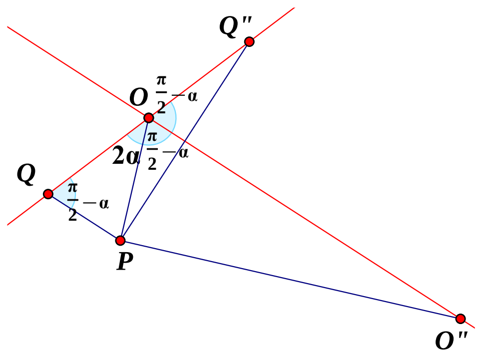
其次說明 $\triangle PAB \sim \triangle PD'E'$：

作 $\triangle PD'E'$ 的外接圓 $S_2$，由定理 1-5 可知 $\angle E'EP = \alpha = \angle BAP$，故 $\angle E'EP = \angle E'AP = \alpha$，即 $E$ 點在圓 $S_2$ 上；又由 $\angle PE'D' = \angle PED' = \angle PBA$ 可推得 $\triangle PAB \sim \triangle PD'E'$。

這說明了 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PBA$ 在相同角的旋轉與相等比例的縮放後，得到 $\triangle PD'F'$ 和 $\triangle PE'D'$，當然 $\triangle PBC$ 也跟著變換為 $\triangle PE'F'$，這說明了 $\triangle D'E'F' \sim \triangle ABC$，且 $\triangle D'E'F'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同的正布洛卡點與正布洛卡角。

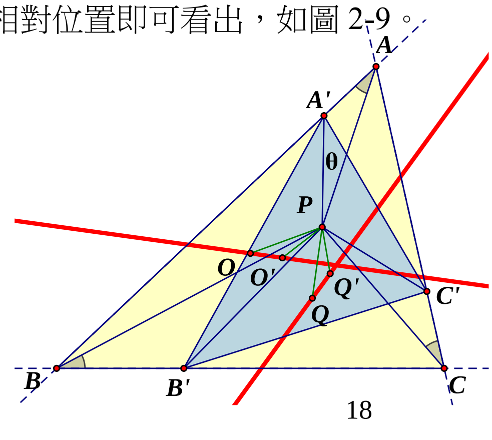



▲圖 2-8




▲圖 2-9

2. 如圖 2-8，考慮 $\triangle PAD$ 和 $\triangle POO''$，由於圖形旋轉時，相對應的點、線也跟著旋轉，$\overline{PD}$ 旋轉 $\theta$ 角再縮放後，變換為 $\overline{PA}$，當然 $\overline{PO''}$ 也旋轉 $\theta$ 角再縮放相同比例，變換為 $\overline{PO}$，換言之，$\triangle POO'' \sim \triangle PAD$，由 $\angle POO'' = \angle PAD' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 且 $O$、$P$ 為定點可知，當 $B_\alpha^+(\theta, D)$ 沿著 $\overleftrightarrow{DE}$ 而動時，$B_\alpha^+(\theta, O'')$ 點也沿著和 $\overline{OP}$ 保持著固定角度 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的直線方向移動，這說明了 $B_\alpha^+(\theta, O'')$ 點的軌跡為一直線。同理，由 $\triangle PQQ'' \sim \triangle PAD$ 可知，$B_\alpha^+(\theta, Q'')$ 點也沿著和 $\overline{QP}$ 保持著固定角度 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的直線方向移動，故知 $B_\alpha^+(\theta, Q'')$ 點的軌跡亦為一直線。
由定理 3-1 知，$B_\alpha^+(\theta, Q'')$ 點的軌跡經過 $O$ 點，故 $O$ 點為這兩條軌跡線的交點，另由定理 3-2 可知，$\angle PQO = \frac{\pi}{2} - \alpha$，因此這兩條軌跡線與 $P$、$Q$ 的邊角關係藉著觀察 $O$、$P$、$Q$、$Q''$、$O''$ 這些點的相對位置即可看出，如圖 2-9。




▲圖 2-10

3. 如圖 2-10，因為 $\angle APA' = \angle OPO'$ 且 $\overline{PA}:\overline{PO} = \overline{PA'}:\overline{PO'} \Rightarrow \triangle APA' \sim \triangle OPO'$，且 $O$、$P$ 為定點，故當 $A'$ 沿著 $\overline{AB}$ 而動時，$O'$ 點也沿著與 $\overline{OP}$ 保持著固定角度 $\alpha$ 的直線方向移動，這說明了 $O'$ 點軌跡為一直線，同理 $Q'$ 的軌跡亦為一直線。

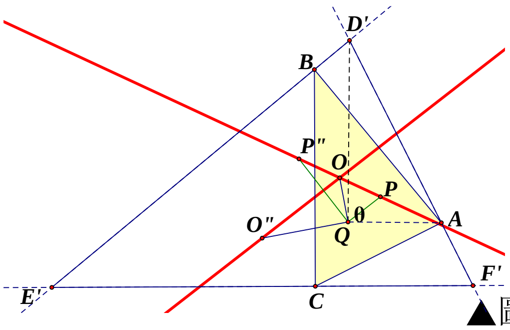
4. 參考圖 1-9，$\angle DPO_1 = \alpha$，亦即 $\triangle O_1O_2O_3$ 的旋轉量為 $\alpha$ (順時針為負)；
由圖 1-8 很明顯看出，$\angle APD = \frac{\pi}{2}$，亦即 $\triangle ABC$ 的旋轉量為 $\frac{\pi}{2}$；
參考圖 1-5，很明顯看出，$\angle APA_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$，亦即 $\triangle A_1B_1C_1$ 的旋轉量為 $\frac{\pi}{2} - \alpha$。 ∎

**對照定理 2-6，相類似的情形也發生在負布洛卡三角形，而有以下的推論：**

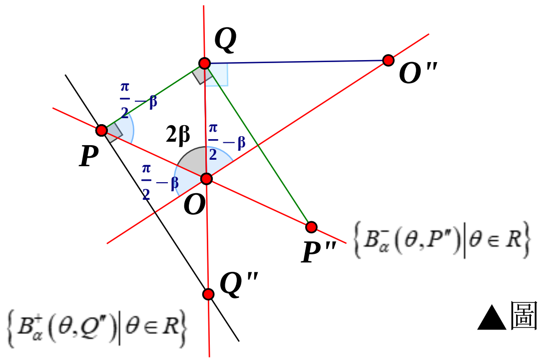
**【推論 7】**如圖 2-11、圖 2-13，給定 $\triangle ABC$ 及其正、負布洛卡點 $P$、$Q$，布洛卡角 $\alpha$，外心 $O$，若 $\triangle D'E'F'$、$\triangle O_1'O_2'O_3'$、$\triangle A_1'B_1'C_1'$ 分別為 $\triangle ABC$ 的負垂線布洛卡三角形、負圓心布洛卡三角形、負投影布洛卡三角形，且 $B_\alpha^-(\theta, \triangle D'E'F') = \triangle D''E''F''$、$B_\alpha^-(\theta, \triangle ABC) = \triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C'$ 的正布洛卡點與外心分別為 $P'$、$O'$，$\triangle D'E'F'$ 的正布洛卡點與外心分別為 $P''$、$O''$，則：

1. $\triangle D''E''F'' \sim \triangle ABC$，且 $\triangle D''E''F''$ 與 $\triangle ABC$ 有相同的負布洛卡點與布洛卡角；
2. $\left\{B_\alpha^-(\theta, P'') \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$ 和 $\left\{B_\alpha^-(\theta, O'') \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$ 為相交於 $O$ 點的兩直線，
   較小的夾角為 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (如圖 2-11)；
3. $\left\{B_\alpha^-(\theta, P) \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$ 和 $\left\{B_\alpha^-(\theta, O) \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$ 皆為直線(如圖 2-13)；
4. $B_\alpha^-(\frac{\pi}{2}, \triangle D'E'F') = \triangle ABC$、$B_\alpha^-(\alpha, \triangle D'E'F') = \triangle O_1'O_2'O_3'$、$B_\alpha^-(\frac{\pi}{2} - \alpha, \triangle A'B'C') = \triangle A_1'B_1'C_1'$。

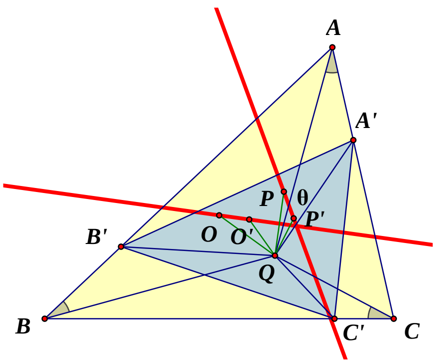
證明與定理 2-6 幾乎相同，故略去。



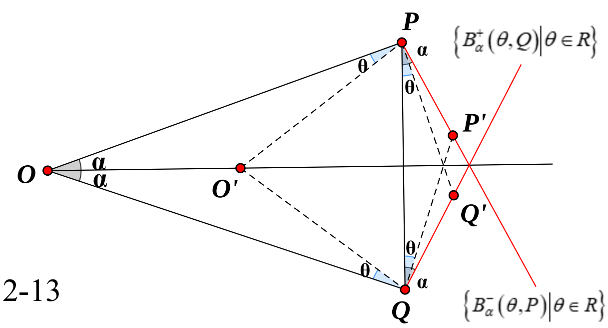
▲圖 2-11



▲圖 2-12



▲圖 2-13



▲圖 2-14

綜合定理 2-6 與推論 7，得到圖 2-12、圖 2-14 的示意圖

### （四） 旋轉伸縮變換與等角螺線

將平面上的定點 $M$，經由一連串的 $B_{\alpha}^{+}$ 變換，得到一連串的點列：

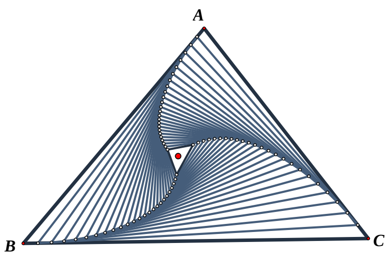
$$M, B_{\alpha}^{+}(\theta, M), B_{\alpha}^{+(2)}(\theta, M), B_{\alpha}^{+(3)}(\theta, M), \cdots$$

則這些點落在一等角螺線上，同理，若平面上的$\triangle ABC$，經由一連串的 $B_{\alpha}^{+}$ 變換，得到一連串的三角形：

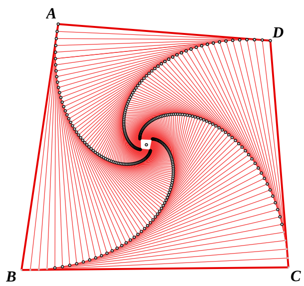
$$\triangle ABC, B_{\alpha}^{+}(\theta, \triangle ABC), B_{\alpha}^{+(2)}(\theta, \triangle ABC), B_{\alpha}^{+(3)}(\theta, \triangle ABC), \cdots$$

則這些三角形都是繞著共同的正布洛卡點旋轉，而相對應的頂點各自落在一等角螺線上，這三條等角螺線是全等的，見圖 2-15。

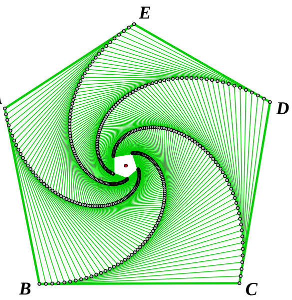
同理可類推至 $B_{\beta}^{-}$ 變換與 $n$ 邊形(如圖 2-16、圖 2-17)。




▲圖 2-15




▲圖 2-16




▲圖 2-17

## 二、 圓心、垂線、投影布洛卡多邊形的幾何定理及性質

### （一） 圓心布洛卡多邊形

| |
|---|
| **【定理 3-1】**如圖 3-1，若$\triangle O_1O_2O_3$是$\triangle ABC$的正圓心布洛卡三角形，則：<br>$\triangle O_1O_2O_3$的負布洛卡點 $O$ 是$\triangle ABC$的外心。 |

**[證明]**

1. 由$\triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle ABC$ (定理 1-5)，可知$\angle O_1O_3O_2 = \angle ACB$。

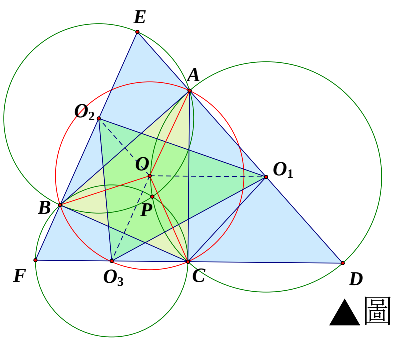
   在$\triangle OCO_3$中，$\angle O_3AC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$，又因為$\overline{OO_1} // \overline{O_3C}$，

   可知$\angle O_3CO = \angle COO_1$(內錯角相等)$= \frac{1}{2}\angle COA = \angle CBA$

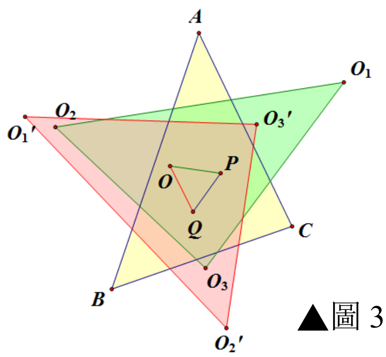
   故$\triangle OCO_3 \sim \triangle ABC$，因此$\angle OO_3C = \angle ACB$。

2. 由$\angle OO_3C = \angle O_1O_3O_2 \Leftrightarrow \angle OO_3O_1 + \angle O_1O_3C = \angle OO_3O_1 + \angle OO_3O_2$ (內錯角相等)

   同理可得，$\angle OO_2O_1 = \angle OO_3O_2$，故證得 $O$ 為$\triangle O_1O_2O_3$的負布洛卡點。 ∎




▲圖 3-1




▲圖 3-2

【**推論 8**】任意$\triangle ABC$，其負圓心布洛卡三角形的正布洛卡點為$\triangle ABC$的外心 $O$。

推論 8 的證明很容易由定理 3-1 推得，在此略去。

【**推論 9**】若給定具有正、負布洛卡點的布洛卡 $n$ 邊形，則其外接圓圓心是負圓心布洛卡 $n$ 邊形的正布洛卡點、正圓心布洛卡 $n$ 邊形的負布洛卡點。

證明與定理 3-1 完全相同，在此略去。

【**定理 3-2**】如圖 3-2，設$\triangle ABC$的正、負布洛卡點分別為 $P$、$Q$，布洛卡角為$\alpha$，外心為 $O$，則$\overline{OP}=\overline{OQ}$且$\angle POQ=2\alpha$。

**[證明]**

分別作$\triangle ABC$的正、負圓心布洛卡三角形$\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle O_1'O_2'O_3'$，由定理 3-1 可知，$\triangle O_1O_2O_3$的正、負布洛卡點分別為 $P$、$O$，又由推論 8 可知，$\triangle O_1'O_2'O_3'$的正、負布洛卡點分別為 $O$、$Q$，再由推論 5 知，$\triangle O_1O_2O_3\cong\triangle O_1'O_2'O_3'$，故$\overline{OP}=\overline{OQ}$；另由定理 1-5，$\triangle ABC$和$\triangle O_1O_2O_3$的相似比為$2\sin\alpha$，故有，

$$2\sin\alpha=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=2\frac{\frac{1}{2}\overline{PQ}}{\overline{OP}}=2\sin\frac{\angle POQ}{2}$$，由上式即可推得$\angle POQ=2\alpha$。 ■

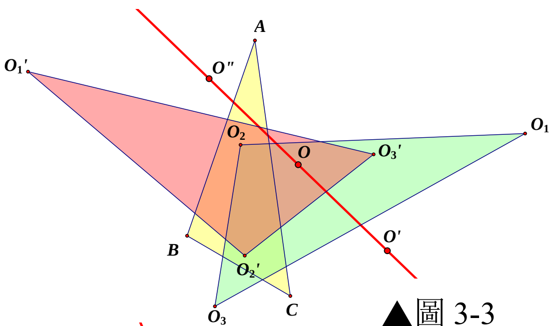
【**定理 3-3**】如圖 3-3，給定$\triangle ABC$，若 $P$、$Q$、$O$ 分別是$\triangle ABC$的正、負布洛卡點與外心，$\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle O_1'O_2'O_3'$分別是$\triangle ABC$的正、負圓心布洛卡三角形，其外心分別為$O'$、$O''$，則：

$O$、$O'$、$O''$共線且 $O$ 是$\overline{O'O''}$中點；

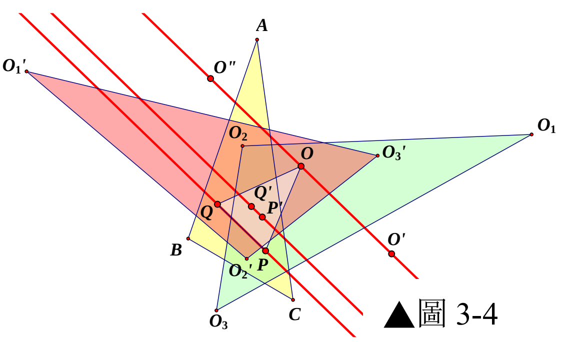
若$\triangle OPQ$的正、負布洛卡點分別是$P'$、$Q'$，則：

$\overleftrightarrow{O'O''}//\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{P'Q'}$ (如圖 3-4)；

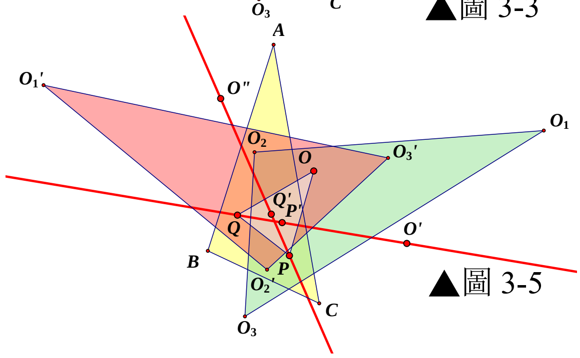
$P$、$Q'$、$O''$共線、$Q$、$P'$、$O'$共線(如圖 3-5)。



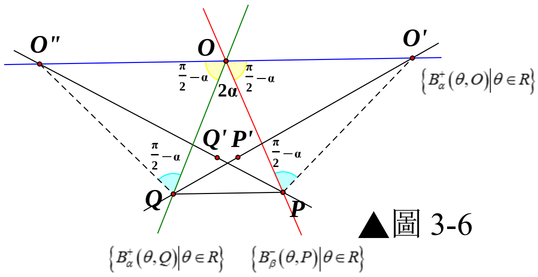
▲圖 3-3



▲圖 3-4



▲圖 3-5



▲圖 3-6

**[證明]**

1. $O$、$O'$、$O''$ 三點共線且 $O$ 是 $\overline{O'O''}$ 中點的證明可由定理 2-6 簡單推出，故略去。

2. 參考圖 2-9，因為 $\overline{OP}=\overline{OQ}$，故 $\angle OPQ=\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\angle POO'$，由內錯角相等推得 $\overleftrightarrow{O'O''}\,//\,\overleftrightarrow{PQ}$。

   再由於 $\triangle OPQ$ 為等腰三角形，由其對稱性知 $\overleftrightarrow{P'Q'}$ 必平行底邊，因此得證 $\overleftrightarrow{O'O''}\,//\,\overleftrightarrow{PQ}\,//\,\overleftrightarrow{P'Q'}$。

3. 如圖 3-5，設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle OPQ$ 的布洛卡角分別為 $\alpha$ 和 $\omega$，我們將 $O$、$O'$、$O''$、$P$、$Q$、$P'$、$Q'$ 的邊角關係標示如圖 3-6，由於 $P'$ 為 $\triangle OPQ$ 的正布洛卡點，只需證明 $\angle PQO'=\omega$ 即證明 $Q$、$P'$、$O'$ 三點共線。由 $\triangle OPQ\sim\triangle O'PO\Rightarrow\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PO}}=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{PO'}}=2\sin\alpha$，不失其一般性地，設 $\overline{PO'}=1$，則 $\overline{PO}=2\sin\alpha$，$\overline{PQ}=4\sin^2\alpha$，在 $\triangle PQO'$ 中，由餘弦定律：

$$\overline{QO'}^2=\left(4\sin^2\alpha\right)^2+1-2\cdot4\sin^2\alpha\cos\left(\pi-2\alpha\right)=1+8\sin^2\alpha$$

   另外，由正弦定律：

$$\frac{\overline{PO'}}{\sin\angle PQO'}=\frac{\overline{QO'}}{\sin\angle QPO'}\Rightarrow\frac{1}{\sin\angle PQO'}=\frac{\sqrt{1+8\sin^2\alpha}}{\sin\left(\pi-2\alpha\right)}\Rightarrow\frac{1}{\sin^2\angle PQO'}=\frac{1+8\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

   又由定理 1-1，在 $\triangle OPQ$ 中，

$$\frac{1}{\sin^2\omega}=\frac{1}{\sin^2 O}+\frac{1}{\sin^2 P}+\frac{1}{\sin^2 Q}=\frac{1}{\sin^2 2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin^2 2\alpha}+\frac{2}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2 2\alpha}=\frac{8\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2 2\alpha}=\frac{8\sin^2\alpha+1}{\sin^2 2\alpha}$$

   因此 $\angle PQO'=\omega$，從而 $Q$、$P'$、$O'$ 三點共線。同理可證得 $P$、$Q'$、$O''$ 三點共線。 ■

**【推論 10】** 若給定存在正、負布洛卡點 $P$、$Q$ 的布洛卡 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，$O$ 是其外接圓圓心，$n$ 邊形 $O_1O_2\cdots O_n$、$n$ 邊形 $O'_1O'_2\cdots O'_n$ 分別是 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負圓心布洛卡 $n$ 邊形，其外接圓圓心分別為 $O'$、$O''$，則：

$O$、$O'$、$O''$ 三點共線且 $O$ 是 $\overline{O'O''}$ 中點；

若 $\triangle OPQ$ 的正、負布洛卡點是 $P'$、$Q'$，則：

$\overleftrightarrow{O'O''}\,//\,\overleftrightarrow{PQ}\,//\,\overleftrightarrow{P'Q'}$；

$P$、$Q'$、$O''$ 共線、$Q$、$P'$、$O'$ 共線。

推論 10 的證明完全相同於定理 3-3，故在此略去。

## （二） 垂線布洛卡多邊形

**【定理 3-4】**如圖 3-7~圖 3-10，若給定$\triangle ABC$，$P$、$Q$、$O$ 分別是其正、負布洛卡點與外心，$\triangle DEF$、$\triangle D'E'F'$ 分別是$\triangle ABC$ 的正、負垂線布洛卡三角形，其外心分別是$O'$、$O''$，且$\triangle D'E'F'$ 的正布洛卡點為 $P'$ 、$\triangle DEF$ 的負布洛卡點為$Q'$，則：

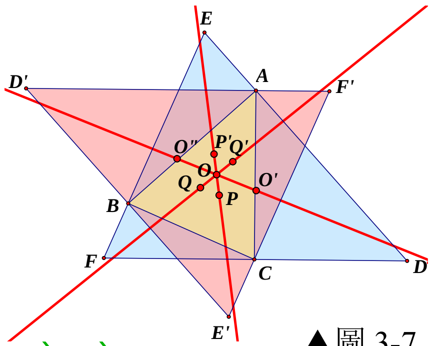
$O$、$O'$、$O''$ 共線、$O$、$P$、$P'$ 共線、$O$、$Q$、$Q'$ 共線(如圖 2-7)；

$\overline{O'O''}$ 、$\overline{PP'}$ 、$\overline{QQ'}$ 共點於點 $O$，且互相平分(如圖 3-7)；

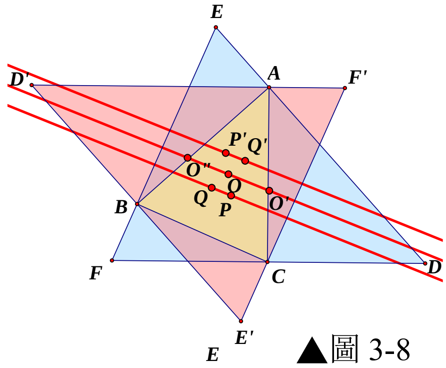
$\overleftrightarrow{O'O''}//\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{P'Q'}$ (如圖 3-8)；

$\overleftrightarrow{PO'}//\overleftrightarrow{P'O''}$ 且 $\overleftrightarrow{QO''}//\overleftrightarrow{Q'O'}$ (如圖 3-9)；

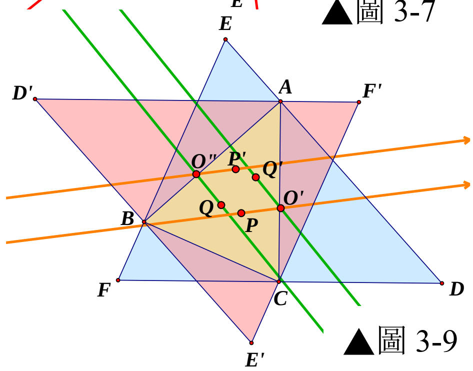
$P$、$Q$、$P'$、$Q'$ 共圓、$P$、$Q'$、$O$、$O'$ 共圓、$P'$、$Q$、$O$、$O''$ 共圓(如圖 3-10)。



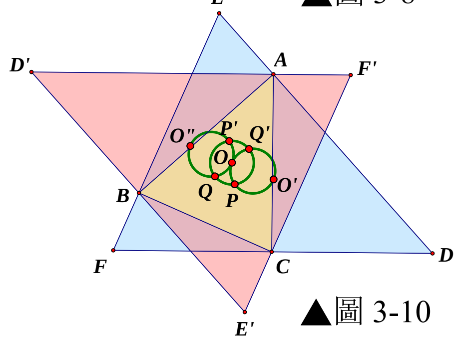
▲圖 3-7



▲圖 3-8



▲圖 3-9



▲圖 3-10

**[證明]**

1. $O$、$O'$、$O''$ 共線且 $O$ 是$\overline{O'O''}$的中點由定理 2-6 與推論 7 可知，故省略，只證明$\overline{PP'}$和$\overline{QQ'}$互相平分且交於 $O$。

   因為$\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$且$\overline{PP'}$ 、$\overline{QQ'}$和$\overline{O'O''}$三線交於$\triangle ABC$的外心 $O$，因此可看成將$\triangle DEF$ 連帶 $P$、$Q'$，繞 $O$ 點旋轉180度，得到$\triangle D'E'F'$，故四邊形 $PQ'P'Q$ 的對邊$\overline{PQ'}$、$\overline{P'Q}$平行且等長，是為平行四邊形，其對角線互相平分。

2. $\overleftrightarrow{O'O''}//\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{P'Q'}$的證明從圖 2-12 可以輕易看出，故略去。

3. 由 1.得$\overline{PP'}$ 、$\overline{QQ'}$和$\overline{O'O''}$三線互相平分，且交於$\triangle ABC$的外心 $O$，因此四邊形 $PO''P'O'$ 的兩條對角線互相平分，是為平行四邊形，從而$\overleftrightarrow{PO'}//\overleftrightarrow{P'O''}$ ，同理可推至$\overleftrightarrow{QO''}//\overleftrightarrow{Q'O'}$ 。

4. 因 $O$ 至 $P$、$Q$、$P'$、$Q'$ 四點等距，故 $P$、$Q$、$P'$、$Q'$ 四點共圓。

   由定理 3-2 及$\triangle ABC \sim \triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$可知，$\angle POQ = \angle PO'Q' = \angle P'O''Q$ ，又因為$\overline{PP'}$

和 $\overline{QQ'}$ 互相平分，交點為 $\triangle ABC$ 的外心 $O$，因此 $\angle POQ$ 和 $\angle POQ'$ 互補 $\Rightarrow \angle PO'Q'$ 和 $\angle POQ'$ 互補且 $\angle P'O''Q$ 和 $\angle POQ'$ 互補 $\Rightarrow P$、$Q'$、$O$、$O'$ 共圓、$P'$、$Q$、$O$、$O''$ 共圓。█

**【推論 11】** 若給定存在正、負布洛卡點 $P$、$Q$ 的布洛卡 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，$O$ 是其外接圓圓心，$n$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$、$n$ 邊形 $B_1'B_2'\cdots B_n'$ 分別是 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負垂線布洛卡 $n$ 邊形，其外接圓圓心分別是 $O'$、$O''$，且 $P'$ 是 $n$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的正布洛卡點、$Q'$ 是 $n$ 邊形 $B_1'B_2'\cdots B_n'$ 的負布洛卡點，則：

$O$、$O'$、$O''$ 共線、$O$、$P$、$P'$ 共線、$O$、$Q$、$Q'$ 共線；

$\overline{O'O''}$、$\overline{PP'}$、$\overline{QQ'}$ 且共點於點 $O$，且互相平分；

$\overleftrightarrow{O'O''} // \overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{P'Q'}$；

$\overleftrightarrow{PO'} // \overleftrightarrow{P'O''}$ 且 $\overleftrightarrow{QO'} // \overleftrightarrow{Q'O''}$；

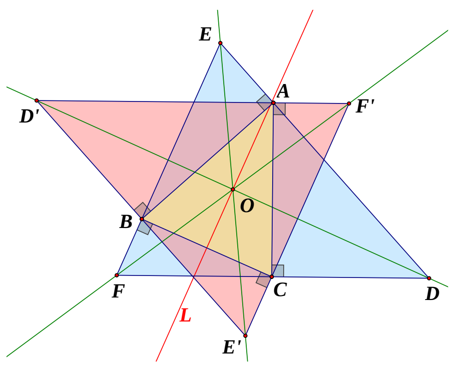
$P$、$Q$、$P'$、$Q'$ 共圓、$P$、$Q'$、$O$、$O'$ 共圓、$P'$、$Q$、$O$、$O''$ 共圓。

推論 11 的證明完全相同於定理 3-4，故在此略去。

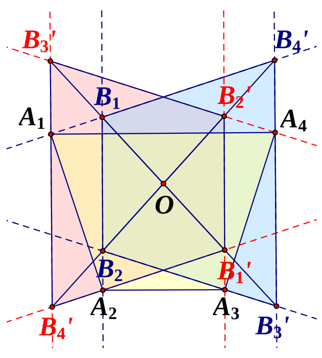
**【定理 3-5】三線共點定理**

如圖 3-11，若 $\triangle ABC$ 的正、負垂線布洛卡三角形分別為 $\triangle DEF$、$\triangle D'E'F'$，且點 $O$ 為 $\triangle ABC$ 的外心，則：

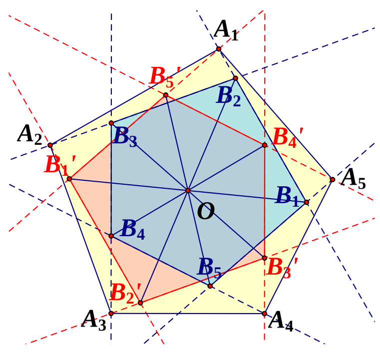
$\overline{DD'}$、$\overline{EE'}$、$\overline{FF'}$ 三線共點於點 $O$ 且互相平分。



▲圖 3-11



▲圖 3-12



▲圖 3-13

**[證明]**

1. 先證明 $\overline{DD'}$、$\overline{EE'}$、$\overline{FF'}$ 三線共點且互相平分：

   由推論 4 知 $\triangle DEF \cong \triangle D'E'F' \Rightarrow \overline{DE} = \overline{D'E'}$，又因為 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 且 $\overline{D'E'} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{DE} // \overline{D'E'}$，故四邊形 $DED'E'$ 為平行四邊形，且其對角線 $\overline{DD'}$、$\overline{EE'}$ 互相平分。

   同理可推得 $\overline{DD'}$、$\overline{EE'}$、$\overline{FF'}$ 三線共點且互相平分。

2. 其次說明 $O$ 點即為 $\triangle ABC$ 的外心：

   在 $\triangle FCF'$ 中，過 $\overline{FF'}$ 的中點 $O$ 作直線 $L // \overline{CF'}$，則直線 $L$ 與 $\overline{FC}$ 的交點 $W$ 為 $\overline{FC}$ 的中點；

在直角△$BCF$ 中，直線 $L$ 必垂直平分 $\overline{BC}$。同理，過 $O$ 點作 $\overline{AD'}$ 的平行線必垂直平分 $\overline{AC}$，過 $O$ 點作 $\overline{BE'}$ 的平行線必垂直平分 $\overline{AB}$，這說明了 $O$ 點是△$ABC$ 三邊的中垂線交點，即外心。 ■

**【推論 12】*n* 線共點定理**

如圖 3-12、圖 3-13，若給定具有正、負布洛卡點 $P$、$Q$ 的布洛卡 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，$O$ 是其外接圓圓心，且 $n$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$、$n$ 邊形 $B_1'B_2'\cdots B_n'$ 分別是 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負垂線布洛卡 $n$ 邊形，則：

$$\overline{B_1B_1'},\overline{B_2B_2'},\cdots,\overline{B_nB_n'} \text{ 等 } n \text{ 線共點於點 } O \text{ 且互相平分。}$$

推論 12 的證明完全與定理 3-5 相同，在此略去。

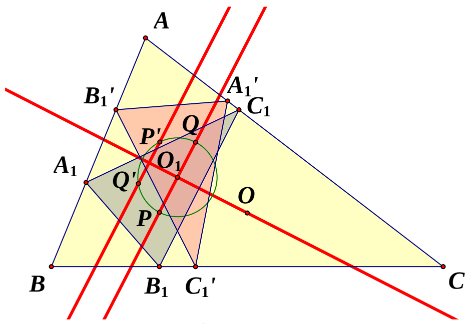
## （三） 投影布洛卡多邊形

**【定理 3-6】**如圖 3-14，若給定△$ABC$，$O$ 是外心，其正、負布洛卡投影布洛卡三角形分別為△$A_1B_1C_1$、△$A_1'B_1'C_1'$，且△$A_1B_1C_1$ 的負布洛卡點是 $Q'$、△$A_1'B_1'C_1'$ 的正布洛卡點是 $P'$，$O_1$ 為 $\overline{PQ}$ 中點，則：

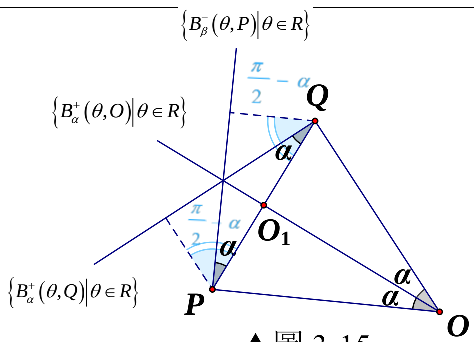
$$\overline{PQ}\,//\,\overline{P'Q'}\text{；}$$

$$\overleftrightarrow{OO_1} \text{ 垂直平分 } \overline{PQ}\text{、}\overline{P'Q'}\text{；}$$

$$P\text{、}Q\text{、}P'\text{、}Q' \text{ 共圓，圓心是 } O_1\text{。}$$




▲圖 3-14




▲圖 3-15

**[證明]**

由定理 2-6，當 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 時，得到的三角形即為△$ABC$ 的正投影布洛卡三角形△$A_1B_1C_1$；由推論 7，當 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ 時，得到的三角形即為△$ABC$ 的負投影布洛卡三角形△$A_1'B_1'C_1'$。我們將 $O$、$O_1$、$P$、$Q$、$P'$、$Q'$ 的相關邊角關係標示如圖 3-15，其中 $\overline{OP}=\overline{OQ}$，相對的性質就不證自明。 ■

**【推論 13】**若給定存在正、負布洛卡點 $P$、$Q$ 的布洛卡 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，$O$ 是其外接圓圓心，$n$ 邊形 $C_1C_2\cdots C_n$、$n$ 邊形 $C_1'C_2'\cdots C_n'$ 分別為 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負投影布洛卡 $n$ 邊形，且 $n$ 邊形 $C_1C_2\cdots C_n$ 的負布洛卡點是 $Q'$、$n$ 邊形 $C_1'C_2'\cdots C_n'$ 的正布洛卡點是 $P'$，

則：

$$\overline{PQ}\,//\,\overline{P'Q'}\text{；}$$

$$\overleftrightarrow{OO_1}\text{ 垂直平分 }\overline{PQ}\text{、}\overline{P'Q'}\text{；}$$

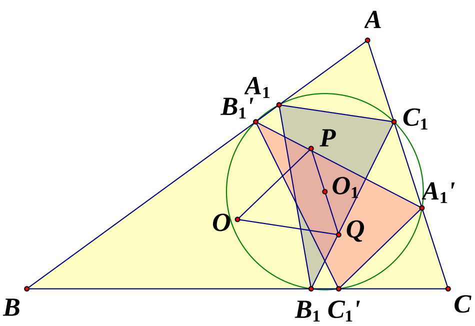
$$P\text{、}Q\text{、}P'\text{、}Q'\text{ 共圓，圓心是 }O_1\text{。}$$

推論 13 的證明完全相同於定理 3-6，在此略去。

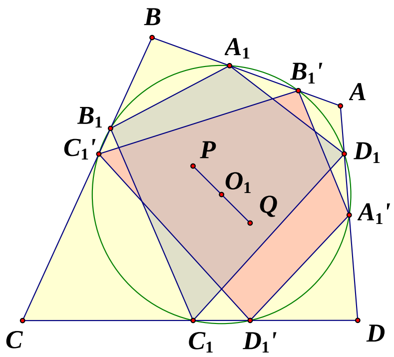
**【定理 3-7】六點共圓定理**

如圖 3-16，若給定 $\triangle ABC$，$P$、$Q$、$O$ 分別為其正、負布洛卡點和外心，且 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_1'B_1'C_1'$ 分別是 $\triangle ABC$ 的正、負投影布洛卡三角形，則：

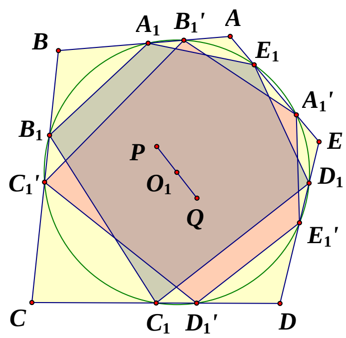
$$A_1\text{、}B_1\text{、}C_1\text{、}A_1'\text{、}B_1'\text{、}C_1'\text{ 六點共圓，圓心為 }\overline{PQ}\text{ 中點 }O_1\text{。}$$



▲圖 3-16



▲圖 3-17



▲圖 3-18

**[證明]**

參考圖 2-4 可知，當 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 時，正、負投影三角形共用同一外心，且外心位於 $\overline{PQ}$ 中點，即得證。 ■

**【推論 14】2*n* 點共圓定理**

如圖 3-17、圖 3-18，若給定存在正、負布洛卡點 $P$、$Q$ 的布洛卡 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，且 $n$ 邊形 $C_1C_2\cdots C_n$、$n$ 邊形 $C_1'C_2'\cdots C_n'$ 分別為 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負投影布洛卡 $n$ 邊形，則：

$$C_1,C_2,\cdots,C_n,C_1',C_2',\cdots,C_n'\text{ 等 }2n\text{ 點共圓，且圓心 }O\text{ 為 }\overline{PQ}\text{ 中點}$$

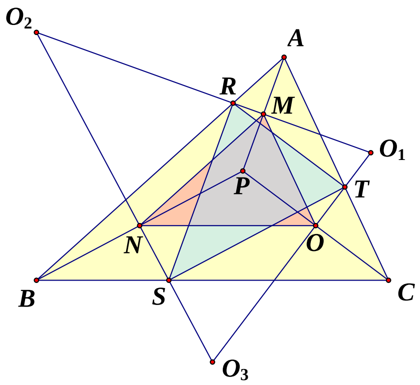
推論 14 的證明與定理 3-7 同，在此略去。

### （四）對應邊交點建構三角形

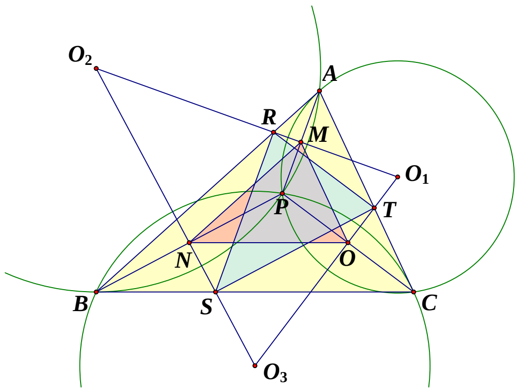
**【定理 3-8】**如圖 2-19，給定 $\triangle ABC$，$P$ 為正布洛卡點，布洛卡角為 $\alpha$，$\triangle O_1O_2O_3$ 是對應點 $P$ 的圓心布洛卡三角形，$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_1}$ 分別交 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 於 $R$、$S$、$T$、交 $\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$ 於 $M$、$N$、$O$。則：

$$\triangle RST\sim\triangle MNO\text{，相似比為 }\sec\alpha\text{；}$$

$$\triangle RST\text{ 的正布洛卡點為 }P\text{。}$$



▲圖 3-19



▲圖 3-20

**[證明]**

1. 先證明 $\angle APR = \angle BPS = \angle CPT$，如圖 3-20，$\overline{BC}$ 與圓 $O_2$ 相切於 $B$ 點，故 $\angle BAP = \angle PBC$，又因為 $\angle BAP = \angle RAP = \angle RPA$ 且 $\angle PBC = \angle NBS = \angle BPS$，因此 $\angle APR = \angle BPS$，同理可證得 $\angle APR = \angle BPS = \angle CPT$，這表示將 $\triangle ABC$ 經由定理 2-6 的變換，可得 $\triangle RST$，故 $\triangle RST \sim \triangle ABC$，且 $\triangle RST$ 的正布洛卡點為 $P$。

2. 因 $M$、$N$、$O$ 分別是 $\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$ 中點的連線，故 $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{NO} = \frac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{CA}$，從而 $\triangle MNO \sim \triangle ABC$。

   因此 $\triangle RST \sim \triangle MNO$，相似比為 $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AM}} = \sec\alpha$。 ■

**【推論 15】** $\triangle RST$ 的垂線布洛卡三角形為 $\triangle O_1O_2O_3$，$\triangle O_1O_2O_3$ 的投影布洛卡三角形為 $\triangle MNO$，見圖 3-19。

證明略去。

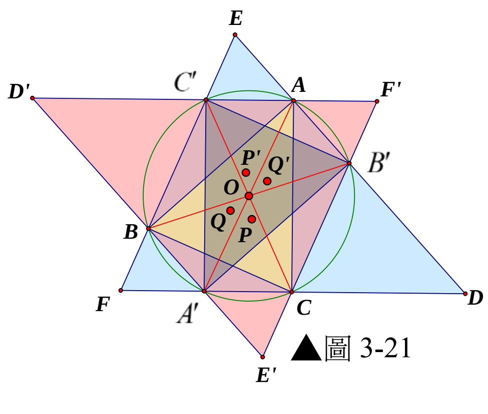
**【定理 3-9】** 如圖 3-21，若給定 $\triangle ABC$，$P$、$Q$ 是正、負布洛卡點，$\triangle DEF$、$\triangle D'E'F'$ 是 $\triangle ABC$ 的正、負垂線布洛卡三角形，$P'$ 是 $\triangle D'E'F'$ 的正布洛卡點、$Q'$ 是 $\triangle DEF$ 的負布洛卡點，且 $\overline{FD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$ 分別交 $\overline{D'E'}$、$\overline{E'F'}$、$\overline{D'F'}$ 於 $A'$、$B'$、$C'$，則：

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC\text{；}$$

$$A\text{、}B\text{、}C\text{、}A'\text{、}B'\text{、}C' \text{ 六點共圓；}$$

$$P'\text{、}Q' \text{ 分別是 } \triangle A'B'C' \text{ 的正、負布洛卡點。}$$

定理 3-9 的證明可由定理 2-6 簡單推出，在此略去。



▲圖 3-21

## 三、 布洛卡多邊形的紐伯格圓

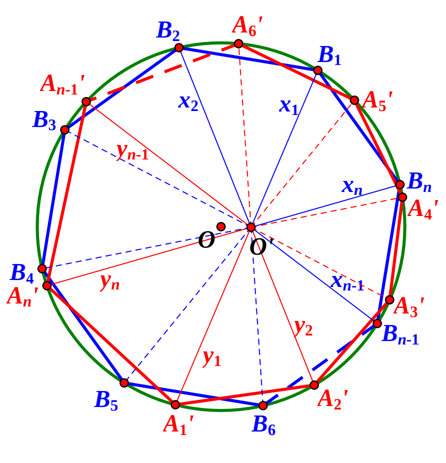
定理 1-6 提到，固定三角形 $ABC$ 的其中一邊 $\overline{BC}$ 及其布洛卡角 $\alpha$ ，則 $A$ 點的軌跡是一個圓，稱為紐伯格圓。以下的研究將三角形的紐伯格圓推廣至多邊形，發現存在正、負布洛卡點的多邊形，只要固定其中一邊及其布洛卡角，則多邊形的其他頂點的軌跡也是圓，依序稱之為第一紐伯格圓、第二紐伯格圓、第三紐伯格圓、…、第 $n-2$ 紐伯格圓。

**【定理 3-10】**若給定存在正、負布洛卡點的 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的布洛卡角 $\alpha$ 及 $A_1$、$A_2$ 兩點，設 $\overline{A_1A_2}=a$ ，則：

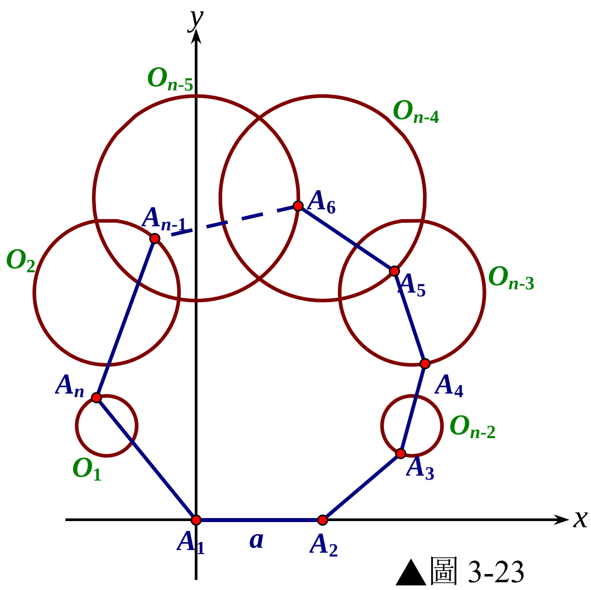
1. 點 $A_n$ 的軌跡是一圓，稱為第一紐伯格圓 $O_1$ ，其半徑 $r_1=a\sqrt{\left(\cot\alpha\cot\frac{\pi}{n}\right)^2-1}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$ ；
2. 點 $A_{n-1}$ 的軌跡是一圓，稱為第二紐伯格圓 $O_2$ ，其半徑 $r_2=2a\sqrt{\left(\cot\alpha\cot\frac{\pi}{n}\right)^2-1}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$ ；
3. 依次類推，點 $A_{n-1}$、$A_{n-2}$、…、$A_3$ 的軌跡都是圓，分別稱為第三紐伯格圓 $O_3$ 、第四紐伯格圓 $O_4$ 、…、第 $n-2$ 紐伯格圓 $O_{n-2}$ 。
4. 第一紐伯格圓和第 $n-2$ 紐伯格圓是全等，它們對稱於 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線上；第二紐伯格圓和第 $n-3$ 紐伯格圓是全等，它們也對稱於 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線上；…；第 $k$ 紐伯格圓和第 $n-k-1$ 紐伯格圓是全等，它們也對稱於 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線上。

**[證明]**

我們以紐伯格圓的作圖概念證明此定理。給定一圓 $O$，其半徑為 $R$，若圓 $O$ 的內接 $n$ 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 相似於 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ，則由定理 2-2 知，$n$ 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 的各頂點必為某正 $n$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的頂點所反演，又因為 $\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$ ，故知其外接圓半徑 $R$ 與反演半徑 $r$ 的比值 $\frac{R}{r}$ 為定值，亦即反演半徑 $r$ 為定值，當然反演中心 $O'$ 與外接圓圓心 $O$ 的距離 $d$ 亦為定值。因此，我們先作圓 $O$ 的內接正 $n$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ ，再將正 $n$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 反演為圓 $O$ 的內接 $n$ 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ ，再作 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 相似於 $n$ 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ ，當正 $n$ 邊形




▲圖 3-22




▲圖 3-23

$B_1B_2\cdots B_n$的頂點在圓 $O$ 上移動時，$n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 也跟著動，但 $A_1$、$A_2$ 兩點是固定的，$n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的布洛卡角 $\alpha$ 也是固定的，以下我們先證明點 $A_n$ 的軌跡是一圓，稱為第一紐伯格圓 $O_1$。

如圖 3-22，設坐標平面上 $\overrightarrow{OO'}=(d,0)$，$\angle B_1OB_2=\angle B_2OB_3=\cdots=\angle B_nOB_1=\theta$，$\overline{O'B_1}=x_1$，$\overline{O'B_2}=x_2$，…，$\overline{O'B_n}=x_n$，$\overline{O'A_1'}=y_1$，$\overline{O'A_2'}=y_2$，…，$\overline{O'A_n'}=y_n$，

$\overrightarrow{OB_1}=(R\cos t,R\sin t)$，$\overrightarrow{OB_2}=\left(R\cos(t+\theta),R\sin(t+\theta)\right)$，$\overrightarrow{OB_n}=\left(R\cos(t-\theta),R\sin(t-\theta)\right)$，

其中 $\theta=\dfrac{2\pi}{n}$，則

$\overrightarrow{O'B_2}=\left(R\cos(t+\theta)-d,R\sin(t+\theta)\right)$，$\overrightarrow{O'B_n}=\left(R\cos(t-\theta)-d,R\sin(t-\theta)\right)$，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'B_2}\cdot\overrightarrow{O'B_n}&=\left(R\cos(t+\theta)-d\right)\left(R\cos(t-\theta)-d\right)+R^2\sin(t+\theta)\sin(t-\theta)\\&=R^2\left(\cos(t+\theta)\cos(t-\theta)+\sin(t+\theta)\sin(t-\theta)\right)-dR\left(\cos(t+\theta)+\cos(t-\theta)\right)+d^2\\&=R^2\cos2\theta-2dR\cos t\cos\theta+d^2\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{A_n'A_1'}}{\overline{A_1'A_2'}}=\frac{y_n}{y_2}=\frac{x_2}{x_n},$$

$$\begin{aligned}\angle A_n'A_1'A_2'&=2\pi-\angle A_n'O'A_2'-\angle A_1'A_n'O'-\angle A_1'A_2'O'\\&=2\pi-\angle A_n'O'A_2'-\angle A_1'B_1B_n-\angle A_1'B_1B_2=2\pi-\angle B_2O'B_n-\left(\angle A_1'B_1B_n+\angle A_1'B_1B_2\right)\\&=2\pi-\angle B_2O'B_n-(\pi-\theta)=\pi-\angle B_2O'B_n+\theta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\cos\angle A_n'A_1'A_2'=-\cos\left(\angle B_2O'B_n-\theta\right)\text{ 且 }\sin\angle A_n'A_1'A_2'=\sin\left(\angle B_2O'B_n-\theta\right)$$

我們在另外一個坐標上，設 $A_1(0,0)$，$A_2(a,0)$，$A_n(x,y)$，則

$$\begin{aligned}x&=\overline{A_1A_n}\cdot\cos\angle A_nA_1A_2=a\cdot\frac{\overline{A_1'A_n'}}{\overline{A_1'A_2'}}\cos\angle A_n'A_1'A_2'=-a\cdot\frac{x_2}{x_n}\cdot\cos\left(\angle B_2O'B_n-\theta\right)\\&=-a\cdot\frac{x_2}{x_n}\cdot\left(\cos\angle B_2O'B_n\cos\theta+\sin\angle B_2O'B_n\sin\theta\right)\\&=-a\left(\frac{x_2x_n}{x_n^2}\cos\angle B_2O'B_n\cos\theta+\frac{x_2x_n}{x_n^2}\sin\angle B_2O'B_n\sin\theta\right)=-\frac{a}{x_n^2}\left(\overrightarrow{O'B_2}\cdot\overrightarrow{O'B_n}\cos\theta+2S_{\Delta O'B_2B_n}\sin\theta\right)\\&=-\frac{a}{x_n^2}\left(\left(R^2\cos2\theta-2dR\cos t\cos\theta+d^2\right)\cos\theta+\begin{vmatrix}R\cos(t-\theta)-d&R\sin(t-\theta)\\R\cos(t+\theta)-d&R\sin(t+\theta)\end{vmatrix}\sin\theta\right)\\&=-\frac{a}{x_n^2}\left(\left(R^2\cos2\theta-2dR\cos t\cos\theta+d^2\right)\cos\theta+\left(R^2\sin2\theta-2dR\sin\theta\cos t\right)\sin\theta\right)\\&=-\frac{a}{x_n^2}\left(R^2\left(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta\right)-2dR\cos t+d^2\cos\theta\right)\\&=-\frac{a}{x_n^2}\left(R^2\cos\theta-2dR\cos t+d^2\cos\theta\right)=-\frac{a\left(R^2\cos\theta-2dR\cos t+d^2\cos\theta\right)}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}\\&=-a\cos\theta-\frac{2adR\left(\cos(t-\theta)\cos\theta-\cos t\right)}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}=-a\cos\theta-\frac{adR\left(\cos t+\cos(t-2\theta)-2\cos t\right)}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}\\&=-a\cos\theta-\frac{adR\left(\cos(t-2\theta)-\cos t\right)}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}=-a\cos\theta-\frac{2adR\sin(t-\theta)\sin\theta}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}\end{aligned}\tag{3-1}$$

$$y=\overline{A_1A_n}\cdot\sin\angle A_nA_1A_2=a\cdot\frac{\overline{A_1'A_n'}}{\overline{A_1'A_2'}}\cdot\sin\angle A_n'A_1'A_2'=a\cdot\frac{x_2}{x_n}\cdot\sin\left(\angle B_2O'B_n-\theta\right)$$

$$=a\cdot\frac{x_2}{x_n}\cdot\left(\sin\angle B_2O'B_n\cos\theta-\cos\angle B_2O'B_n\sin\theta\right)$$

$$=a\left(\frac{x_2x_n}{x_n^2}\sin\angle B_2O'B_n\cos\theta-\frac{x_2x_n}{x_n^2}\cos\angle B_2O'B_n\sin\theta\right)$$

$$=\frac{a}{x_n^2}\left(\begin{vmatrix}R\cos(t-\theta)-d & R\sin(t-\theta)\\ R\cos(t+\theta)-d & R\sin(t+\theta)\end{vmatrix}\cos\theta-\left(R^2\cos2\theta-2dR\cos t\cos\theta+d^2\right)\sin\theta\right)$$

$$=\frac{a}{x_n^2}\left(\left(R^2\sin2\theta-2dR\sin\theta\cos t\right)\cos\theta-\left(R^2\cos2\theta-2dR\cos t\cos\theta+d^2\right)\sin\theta\right)$$

$$=\frac{a}{x_n^2}\left(R^2\left(\sin2\theta\cos\theta-\cos2\theta\sin\theta\right)-d^2\sin\theta\right)=\frac{a}{x_n^2}\left(R^2\sin\theta-d^2\sin\theta\right)$$

$$=\frac{a\left(R^2-d^2\right)\sin\theta}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}=a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta+\frac{a\left(R^2-d^2\right)\sin\theta}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}-a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta$$

$$=a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta+a\sin\theta\cdot\left(\frac{R^2-d^2}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}-\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\right)$$

$$=a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta+a\sin\theta\cdot\left(\frac{R^2-d^2}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}-\frac{R^2+d^2}{R^2-d^2}\right)$$

$$=a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta+a\sin\theta\cdot\frac{\left(R^2-d^2\right)^2-\left(R^2+d^2\right)\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)}{\left(R^2-d^2\right)\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)}$$

$$=a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta+a\sin\theta\cdot\frac{-4d^2R^2+2dR\left(R^2+d^2\right)\cos(t-\theta)}{\left(R^2-d^2\right)\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)}$$

$$=a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta+2adR\sin\theta\cdot\frac{-2dR+\left(R^2+d^2\right)\cos(t-\theta)}{\left(R^2-d^2\right)\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)}\qquad(3-2)$$

由(3-1)與(3-2)式可推得

$$\left(x+a\cos\theta\right)^2+\left(y-a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta\right)^2$$

$$=\left(2adR\sin\theta\right)^2\left[\left(\frac{\sin(t-\theta)}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}\right)^2+\left(\frac{-2dR+\left(R^2+d^2\right)\cos(t-\theta)}{\left(R^2-d^2\right)\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)}\right)^2\right]$$

$$=\left(2adR\sin\theta\right)^2\cdot\frac{\left(R^2-d^2\right)^2\sin^2(t-\theta)+\left(2dR\right)^2-4dR\left(R^2+d^2\right)\cos(t-\theta)+\left(R^2+d^2\right)^2\cos^2(t-\theta)}{\left(R^2-d^2\right)^2\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)^2}$$

$$=\left(2adR\sin\theta\right)^2\cdot\frac{\left(R^4+d^4\right)+2d^2R^2\left(\cos^2(t-\theta)-\sin^2(t-\theta)\right)+\left(2dR\right)^2-4dR\left(R^2+d^2\right)\cos(t-\theta)}{\left(R^2-d^2\right)^2\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)^2}$$

$$=\left(2adR\sin\theta\right)^2\cdot\frac{\left(R^2+d^2\right)^2+4d^2R^2\cos^2(t-\theta)-4dR\left(R^2+d^2\right)\cos(t-\theta)}{\left(R^2-d^2\right)^2\left(R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2adR\sin\theta\right)^2}{\left(R^2-d^2\right)^2}\cdot\frac{\left(\left(R^2+d^2\right)-2dR\cos(t-\theta)\right)^2}{R^2-2dR\cos(t-\theta)+d^2}=\left(\frac{2adR\sin\theta}{R^2-d^2}\right)^2=4a^2\left(\frac{R^4-r^2R^2}{r^4}\right)\sin^2\theta$$

$$=a^2\left[\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)^2-1\right]\sin^2\theta$$

故知第一紐伯格圓方程式為$\left(x+a\cos\theta\right)^2+\left(y-a\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\theta\right)^2=a^2\left[\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)^2-1\right]\sin^2\theta$

又$\theta=\frac{2\pi}{n}$，且布洛卡角$\alpha$滿足$\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$，第一紐伯格圓方程式為

$$\left(x+a\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2+\left(y-2a\cot\alpha\cos^2\frac{\pi}{n}\right)^2=a^2\left[\left(\cot\alpha\cot\frac{\pi}{n}\right)^2-1\right]\sin^2\frac{2\pi}{n}\qquad(3\text{-}3)$$

接著證明$A_{n-1}$的軌跡也是圓，稱為第二紐伯格圓，

設$\overrightarrow{O'B_{n-1}}=\left(R\cos(t-2\theta)-d,\,R\sin(t-2\theta)\right)$，先計算$\angle A'_{n-1}A'_1A'_2$與$\frac{\overline{A'_1A'_{n-1}}}{\overline{A'_1A'_2}}$之值：

$$\begin{aligned}\angle A'_{n-1}A'_1A'_2&=2\pi-\angle A'_{n-1}O'A'_2-\angle O'A'_{n-1}A'_1-\angle O'A'_2A'_1\\&=2\pi-\angle B_2O'B_{n-1}-\angle B_{n-1}A'_{n-1}A'_1-\angle B_2A'_2A'_1\\&=2\pi-\angle B_2O'B_{n-1}-\left(\angle B_{n-1}B_1A'_1+\angle B_2B_1A'_1\right)\\&=2\pi-\angle B_2O'B_{n-1}-\angle B_2B_1B_{n-1}=2\pi-\angle B_2O'B_{n-1}-\left(\pi-\tfrac{3}{2}\theta\right)\\&=\pi+\tfrac{3}{2}\theta-\angle B_2O'B_{n-1}\end{aligned}$$

又因為$\frac{\overline{A'_1A'_{n-1}}}{y_1}=\frac{\overline{B_1B_{n-1}}}{x_{n-1}}$ 且 $\frac{\overline{A'_1A'_2}}{y_1}=\frac{\overline{B_1B_2}}{x_2}$

$$\Rightarrow\frac{\overline{A'_1A'_{n-1}}}{\overline{A'_1A'_2}}=\frac{\overline{B_1B_{n-1}}}{\overline{B_1B_2}}\cdot\frac{x_2}{x_{n-1}}=\frac{2R\sin(\pi-\theta)}{2R\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{x_2}{x_{n-1}}=2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{x_2}{x_{n-1}}$$

設$A_{n-1}(x,y)$，則

$$x=\overline{A_1A_{n-1}}\cos\angle A_{n-1}A_1A_2=a\cdot\frac{\overline{A'_1A'_{n-1}}}{\overline{A'_1A'_2}}\cos\angle A_{n-1}A_1A_2$$

$$=2a\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{x_2}{x_{n-1}}\cos\left(\pi+\frac{3}{2}\theta-\angle B_2O'B_{n-1}\right)=-2a\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{x_2}{x_{n-1}}\cos\left(\angle B_2O'B_{n-1}-\frac{3}{2}\theta\right)$$

$$y=\overline{A_1A_{n-1}}\sin\angle A_{n-1}A_1A_2=a\cdot\frac{\overline{A'_1A'_{n-1}}}{\overline{A'_1A'_2}}\sin\angle A_{n-1}A_1A_2$$

$$=2a\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{x_2}{x_{n-1}}\sin\left(\pi+\frac{3}{2}\theta-\angle B_2O'B_{n-1}\right)=2a\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{x_2}{x_{n-1}}\sin\left(\angle B_2O'B_{n-1}-\frac{3}{2}\theta\right)$$

和第一紐伯格圓相類似的推導，我可以得到$A_{n-1}$點的軌跡方程式為

$$\left(x+2a\cos\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{3\theta}{2}\right)^2+\left(y-2a\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\sin\tfrac{3\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\right)^2=4a^2\left[\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)^2-1\right]\sin^2\tfrac{3\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}$$，又因

$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ 且 $\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\dfrac{\pi}{n}$，更可進一步化簡為

$$\left(x+2a\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\right)^2+\left(y-2a\sin\frac{3\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{n}\cot\alpha\right)^2=4a^2\left[\left(\cot\alpha\cot\frac{\pi}{n}\right)^2-1\right]\sin^2\frac{3\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}$$

同理亦可證得 $A_{n-2}$、$A_{n-3}$、…、$A_3$ 的軌跡都是圓。

另外，由於 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 同時具有正、負布洛卡點，從作圖中可看出這些紐伯格圓的對稱性。█

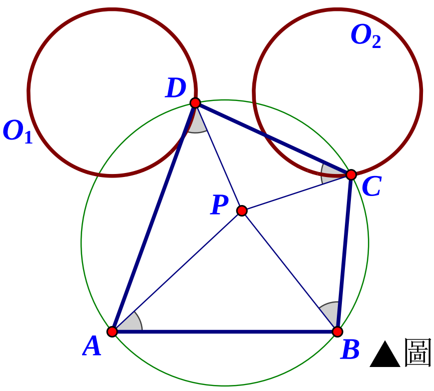
一個饒富趣味的結果，那就是 $O_2$ 和 $O_1$ 的半徑比是定值，即

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}=3-4\sin^2\frac{\pi}{n}=3-2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)=1+2\cos\frac{2\pi}{n}，$$

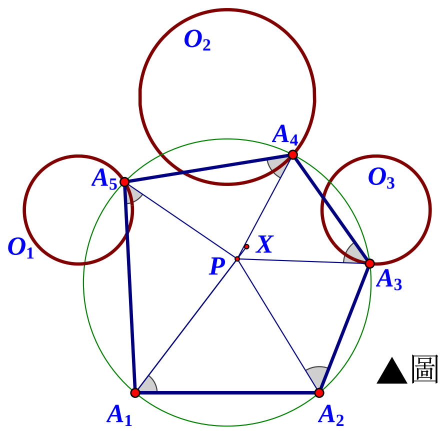
接著以定理 3-10 為基礎，討論 $n=4$ 和 $n=5$ 的特殊情形(即四邊形與五邊形的紐伯格圓)，而有推論 16、推論 17：

**【推論 16】**如圖 3-24，若給定存在正、負布洛卡點的四邊形 $ABCD$ 的布洛卡角 $\alpha$ 及 $A$、$B$ 兩點，設 $\overline{AB}=a$，則：

1. 點 $D$、$C$ 的軌跡分別是四邊形 $ABCD$ 的第一、第二紐伯格圓 $O_1$、$O_2$，其半徑 $r_1=r_2=a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$；
2. 四邊形 $ABO_2O_1$ 為矩形，其中 $\overline{AB}=\overline{O_1O_2}=a$，$\overline{AO_1}=\overline{BO_2}=a\cot\alpha$。



▲圖 3-24



▲圖 3-25

**【推論 17】**如圖 3-25，若給定存在正、負布洛卡點的五邊形 $ABCDE$ 的布洛卡角 $\alpha$ 及 $A$、$B$ 兩點，設 $\overline{AB}=a$，則：

1. 點 $E$、$C$ 的軌跡分別是五邊形 $ABCDE$ 的第一、第三紐伯格圓 $O_1$、$O_3$，其半徑 $r_1=r_3=a\sin\dfrac{2\pi}{5}\sqrt{\left(\cot\alpha\cot\dfrac{\pi}{5}\right)^2-1}$；
2. $D$ 點的軌跡是五邊形 $ABCDE$ 的第二紐伯格圓 $O_2$，其半徑

$$r_2 = 2a\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sqrt{\left(\cot\alpha\cot\frac{\pi}{5}\right)^2 - 1}\ ;$$

3. $\dfrac{r_2}{r_1} = \phi$，其中 $\phi$ 是黃金比值 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

## 四、布洛卡多邊形的尺規作圖法

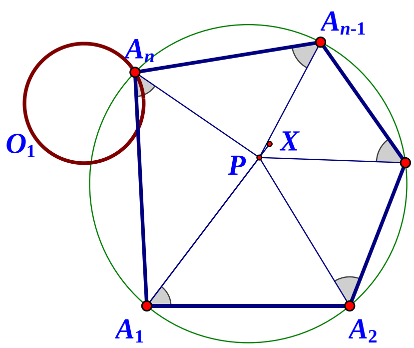
如何用尺規作圖作一個布洛卡 $n$ 邊形？以下歸納出兩種方法：

**【布洛卡 $n$ 邊形的作圖】(由紐伯格圓推論出)：**

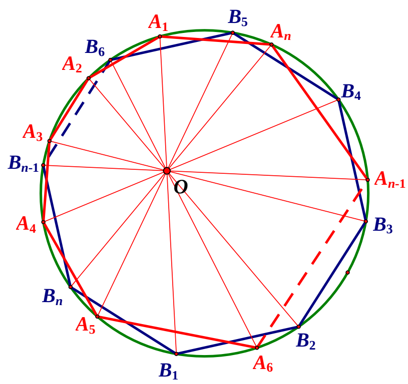
給定存在正、負布洛卡點的 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的一邊 $\overline{A_1A_2}$ 及布洛卡角 $\alpha$，求作此 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$。

**[作法]**

1. 如圖 3-26，由第一紐伯格圓的方程式作圓 $O_1$，並在 $O_1$ 上任取一點 $A_n$。
2. 作 $\triangle A_1A_2A_n$ 的外接圓 $C$。
3. 圓 $C$ 內取一點 $X$ 使 $\angle XA_1A_2 = \alpha$，$\overrightarrow{A_1X}$ 上取一點 $P$ 使 $\angle PA_nA_1 = \alpha$，$P$ 點即為布洛卡點。
4. 圓 $C$ 上取一點 $A_{n-1}$ 使 $\angle PA_{n-1}A_n = \alpha$，依次即可取出 $A_{n-2}$、$A_{n-3}$、…、$A_3$




▲圖 3-26




▲圖 3-27

**【布洛卡 $n$ 邊形的作圖】(由反演推論出)：**

給定存在正、負布洛卡點的 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的外接圓半徑，求作 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$。

**[作法]**

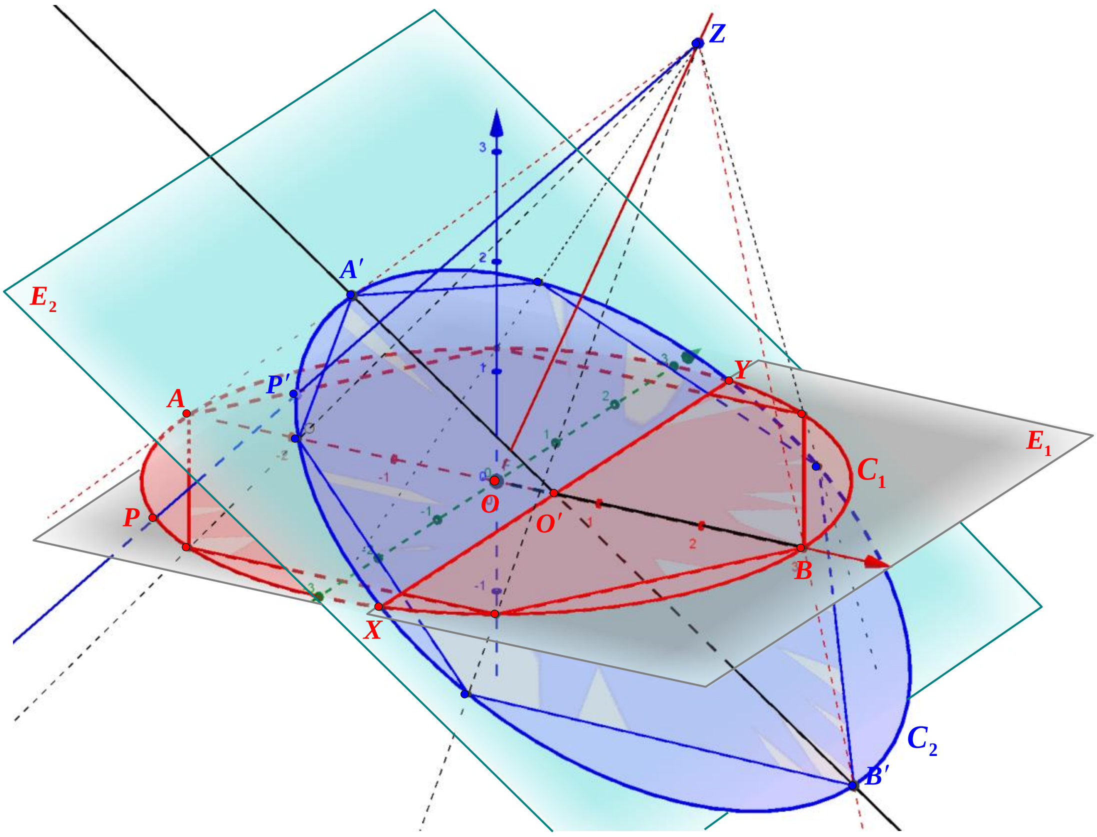
1. 如圖 3-27，作圓內接正 $n$ 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 及圓內或圓外任一點 $O$。
2. 作 $\overleftrightarrow{B_1O}, \overleftrightarrow{B_2O}, \overleftrightarrow{B_3O}, \cdots, \overleftrightarrow{B_nO}$ 等 $n$ 條線交圓於 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，則 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 即為所求。相關證明如定理 2-2。

## 五、投影與布洛卡多邊形

空間中，圓$C_1$在平面$E_1$上，圓心為 $O$，$E_1$外任取一點 $Z$，使 $Z$ 與圓$C_1$決定一個斜圓錐，過 $O$、$Z$ 作平面 $E'$ 與$E_1$垂直，$E'$ 與圓$C_1$交於 $A$、$B$ 兩點，當然$\overline{AB}$是圓$C_1$的直徑。

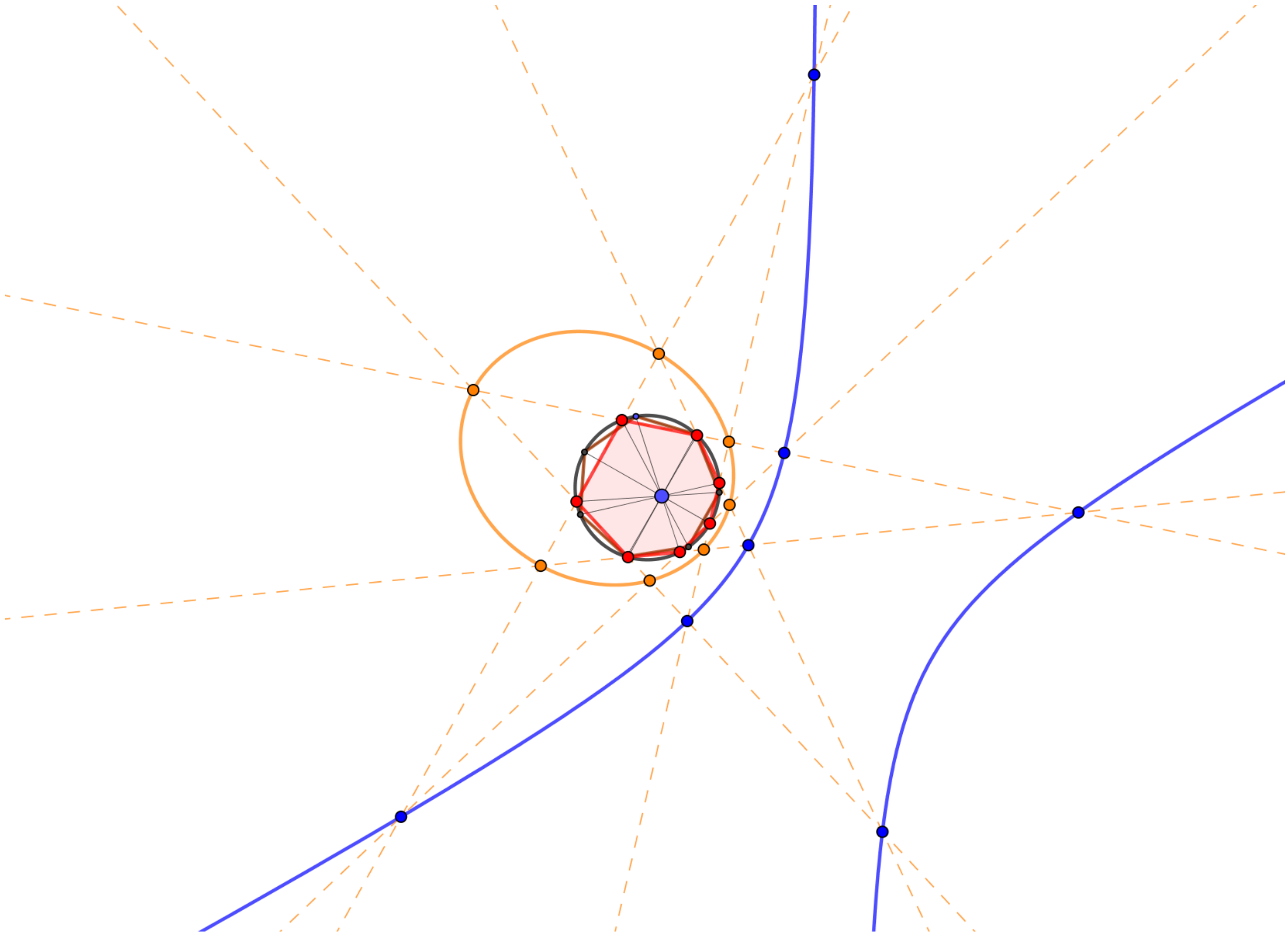
在$\overrightarrow{ZA}$、$\overrightarrow{ZB}$上各取一點$A'$、$B'$，使$\overline{ZA'}=\overline{ZB}$且$\overline{ZB'}=\overline{ZA}$，過$A'$、$B'$作平面$E_2$與$E'$垂直，平面$E_2$與圓$C_1$交於 $X$、$Y$ 兩點。

在平面$E_2$上，以$\overline{A'B'}$為直徑作圓$C_2$，當然圓$C_1$與圓$C_2$是半徑相等的兩圓。




▲圖 3-28

在圓$C_1$上任一點 $P$，都恰存在圓$C_2$上一點$P'$，使 $Z$、$P$、$P'$ 三點共線，若假設 $Z$ 點是個點光源，則圓$C_1$在平面$E_2$上的投影即為圓$C_2$，而圓$C_1$的內接正 $n$ 邊形投影至平面$E_2$即為布洛卡 $n$ 邊形，如圖 3-28。由於正 $n$ 邊形的 $n$ 個邊經延伸後，各交點仍然共圓，因此我們得知，布洛卡 $n$ 邊形的 $n$ 個邊經延伸後，各交點是共圓錐曲線的，如圖 3-29。



▲圖 3-29

## 肆、結　　論

**一、 布洛卡 $n$ 邊形有以下性質：**

（一） 並非給定任意 $n$ 邊形皆存在布洛卡點，$n$ 邊形存在負布洛卡點的**充要條件**為：

$$\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n}=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}$$

（二） **同時存在正、負布洛卡點的 $n$ 邊形其頂點皆是正 $n$ 邊形頂點反演變換之下的反形，且其布洛卡角 $\alpha\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$，當 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ 時，此 $n$ 邊形為正 $n$ 邊形，其中 $\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$ ( $R$、$r$ 分別為 $n$ 邊形的接圓及反演半徑)。**

（三） 若給定 $n$ 邊形的 $n$ 個邊與面積 $S$，則可藉 $\cot\alpha=\dfrac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2}{4S}$ 得布洛卡角 $\alpha$ 。

（四） 若 $n$ 邊形存在正、負布洛卡點，則此 $n$ 邊形為**圓內接 $n$ 邊形**且正、負布洛卡角相等。

**（五） 特例：若四邊形存在正、負布洛卡點，則此四邊形為調和四邊形。**

**二、 將垂線、圓心、投影布洛卡多邊形一般化後，有以下結論(定理 2-6)：**

（一） 若 $B_\alpha^+(\theta,\triangle DEF)=\triangle D'E'F'$ ，則 $\triangle DEF\sim\triangle D'E'F'$ 且 $\triangle DEF$ 、 $\triangle D'E'F'$ 共用正布洛卡點。

（二） $\left\{B_\alpha^+(\theta,Q'')\middle|\theta\in R\right\}$和$\left\{B_\alpha^+(\theta,O'')\middle|\theta\in R\right\}$為相交於點 $O$ 的兩直線，較小的夾角為 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，且$\left\{B_\alpha^+(\theta,O'')\middle|\theta\in R\right\}//\overline{PQ}$。

（三） $\left\{B_\alpha^+(\theta,Q)\middle|\theta\in R\right\}$和$\left\{B_\alpha^+(\theta,O)\middle|\theta\in R\right\}$皆為直線。

（四） $B_\alpha^+\left(\frac{\pi}{2},\triangle DEF\right)=\triangle ABC$、$B_\alpha^+\left(\alpha,\triangle DEF\right)=\triangle O_1O_2O_3$、$B_\alpha^+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\triangle ABC\right)=\triangle A_1B_1C_1$。

（五） 布洛卡多邊形經過多次 $B_\alpha^+$ 變換後，其頂點會分別形成全等的**等角螺線**且**收斂至布洛卡點**。

**三、 垂線、圓心、投影布洛卡多邊形有以下性質：**

（一） 正圓心布洛卡多邊形的負布洛卡點為原布洛卡多邊形的外接圓圓心。

（二） $\triangle PQO$ 為等腰三角形，且頂角為 $2\alpha$。

（三） 正、負垂線布洛卡多邊形對應頂點相連線 $n$ 線共點於點 $O$ (**$n$ 線共點定理**)。

（四） 正、負投影布洛卡多邊形的 $2n$ 個頂點共圓，且圓心為 $\overline{PQ}$ 中點(**$2n$ 點共圓定理**)。

（五） 垂線、圓心、投影布洛卡多邊形的正、負布洛卡點與外接圓圓心間的幾何性質詳見推論 10、推論 11、推論 13、定理 3-8、定理 3-9。

**四、 固定一邊長為 $a$ 的布洛卡 $n$ 邊形有 $n-2$ 個紐伯格圓，第一、二紐伯格圓的半徑分別為** $r_1=a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{\left(\cot\alpha\cot\frac{\pi}{n}\right)^2-1}$、$r_2=2a\sin\frac{3\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\cot\alpha\cot\frac{\pi}{n}\right)^2-1}$**，其中** $\frac{r_2}{r_1}=1+2\cos\frac{2\pi}{n}$ **(定理 3-10)。**

**五、 布洛卡 $n$ 邊形的作圖法有二：反演法與紐伯格圓法。**

**六、 由布洛卡 $n$ 邊形的 $n$ 個邊所延伸的各組交點共圓錐曲線。**

# 伍、參考資料


1. 沈文選、楊清桃(2010)。幾何瑰寶。哈爾濱：哈爾濱工業大學出版社。
2. Weisstein, Eric W.(n.d.). Brocard Points. Retrive December 20,2018, from http://mathworld.wolfram.com/BrocardPoints.html
3. Weisstein, Eric W.(n.d.). Brocard Angle. Retrive December 20,2018, from http://mathworld.wolfram.com/布洛卡 Angle.html
4. Weisstein, Eric W.(n.d.). Neuberg Circles. Retrive April 1,2019, from http://mathworld.wolfram.com/NeubergCircles.html
5. 楊天禹、王震、於鵬飛。調和四邊形的性質及應用。中等數學，2012 年 03 期，5~9 頁。
6. 貝克馬恩(1974)。反演(一版)(王敬庚譯)。臺北市：九章。(1998 年)

# 【評語】010038

布洛卡點在歷年科展已經研究很多，本作品的亮點是將其推廣到 n 邊形，並給出正負布洛卡點存在的充分必要條件。但由於這個性質並不難，基本上就是對各個角去做同樣限制，角度和角度之間並沒有互為作用（數學上來看就是沒有交錯項）。其他的旋轉伸縮變形等角螺線之類的結果，感覺起來就比較特意，沒那麼自然。作品說明書裡面，有一些不精確的地方。比如，垂線布洛卡三角形的定義，通過角 A 與三邊垂線（一個角有兩個邊，到底這條垂線跟哪個邊垂直？）；n 邊形布洛卡點的 n 邊形需要凸 n 邊形嗎？定理 2.2，同時存在正負布洛卡點的充分必要條件為：存在「某個」反演變化，重點是，這個存在性如何驗證？作者似乎應該對其充分必要條件加以舉例，作品會比較完整。