

2020 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010036

參展科別 數學

作品名稱 平面封閉折線上構造多邊形之有向面積定
值

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 新北市立文山國民中學

指導教師 蕭偉智

作者姓名 游星閱

關鍵詞 測量師公式、跳點、面積定值

作者簡介



我是游星閱，我的興趣十分廣泛，例如：數學、英文、程式、下棋、閱讀以及運動等。我曾經在新北市 106 年小學運動會女童甲組田徑 3000 公尺競走獲得第一名，並代表新北市參加全國小學運動會的競走項目，增強了我的耐力及意志力。我對數學的興趣一直十分濃厚，目前就讀新北市文山國中數理資優班。在這裡，大家從不計較、感情融洽，且因為具有相近興趣常一起討論；還有可以自己思考設計實驗的理化課，以及具有挑戰性問題的數學課。課堂上，大家的參與度都十分的高，對於老師或同學所提的問題都會積極的解決，並且針對同一個問題給出各種不同的解法，我也從中增進自己的邏輯推理能力以及數學知識。

先前偶然看到全國科展的作品¹，發現這篇研究所探究的主題十分有意思！從拿破崙三角形這個看似簡單的主題就可以延伸出那麼多新結論，想要針對這個主題繼續深究，於是與指導老師討論後，我便以這件作品作延伸探究，過程中發現了許多美麗的規律，於是決定報名參加這次的國際科展。

這次的比賽，是我國中生涯中最後一次的科展。透過這次的臺灣國際科展，我學到了更多有關數學的知識以及研究的經驗，我也希望能認識更多與我志同道合的朋友，可以互相切磋琢磨，在良性競爭中一起進步。最後，也要感謝指導老師以及家長，如果沒有你們的支持，我絕對不可能得到這個機會！

摘要

本研究探討以封閉折線 $P_1P_2 \dots P_n$ 的邊為對角線構造平行四邊形或箏形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 。考慮兩種構圖。首先，取任一動點 Q 構造三角形 $\triangle QM_kN_k$ ，這些三角形的重心 G_k 形成「重心多邊形 $G_1G_2 \dots G_k$ 」。第二，對所有點 M_k 與點 N_k 取 $\text{mod } r$ ，分別連接同餘 a 的點構造全外（全內）的「跳點多邊形」，共有 r 種。透過純幾何與解析幾何研究此二類多邊形與原多邊形的有向面積不變量。

研究發現（1）重心多邊形的剛體運動、平行性與相似性與面積不變量。（2）設定多邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ 的 $n = rk + h + a$ ，則可一般化 $\text{mod } r$ 下的 r 種跳點多邊形的有向面積定值，這是重要的突破！這樣的假設解決了分類數量龐大的問題，只需要分成兩種。我們也給出定值關係式中頂點跳點規律，本研究完整解決平面封閉折線上構造特殊多邊形之面積問題。

Abstract

For a given plane closed folding $P_1P_2 \dots P_n$, we constructed similar parallelograms or kites $P_iM_iP_{i+1}N_i$ using the sides of polygon $P_1P_2 \dots P_n$ as their diagonals. We explored two different geometrical constructions.

Firstly, we constructed the triangles $\triangle QM_iN_i$ with Q being a moving point on the plane. Considering the centroid G_i of these triangles $\triangle QM_iN_i$, we constructed the polygon $G_1G_2 \dots G_n$. We got the following results: (1) the rigid body motion. (2) the parallel relation and the similarity properties of polygon $G_1G_2 \dots G_n$, and the area invariants between polygon $G_1G_2 \dots G_n$ and polygon $P_1P_2 \dots P_n$.

Secondly, we connected all the points M_i (N_i) to form the “congruence-polygons”, here i is congruent to a modulo r , with a and r being positive integers. Using $rk + h + a$ to express n in polygon $P_1P_2 \dots P_n$, we generalized the area invariants between the r kinds of “congruence-polygons” and $P_1P_2 \dots P_n$. The approach was an important breakthrough.

1. 簡介

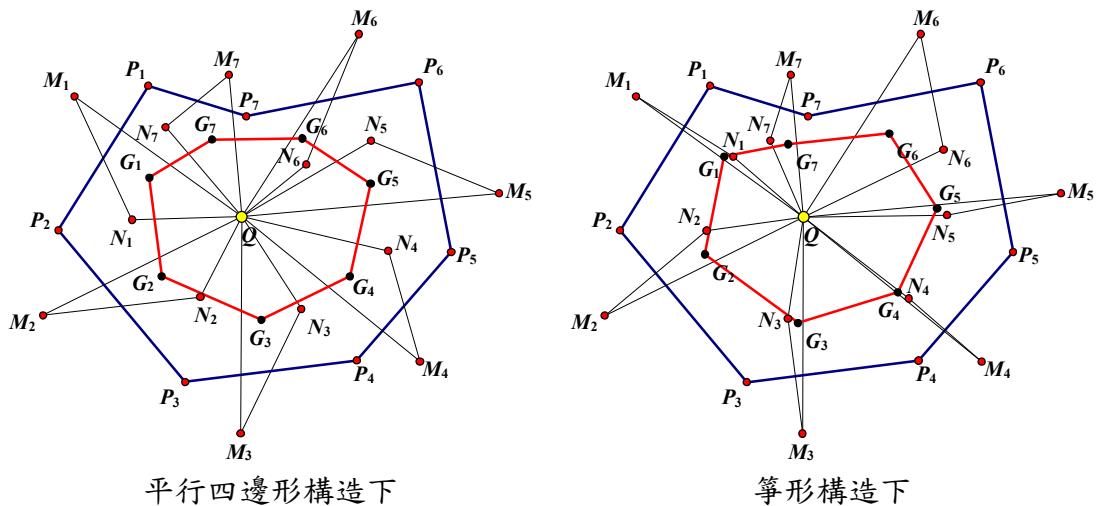
1.1 原始問題

2015 年，有篇全國科展數學作品〈內外有致—類拿破崙多邊形性質及其有向面積定值〉，主要探討給定封閉凸、凹多邊形，內外交錯（或外內交錯）依序將頂點而構成新的封閉多邊形，他們主要研究新多邊形與原始多邊形的定量關係[1]。

當時全國科展比賽評審教授給予的評語是「未來可考慮取 $\text{mod } r$ ，看是否能走出此類研究的新路」[1]。我們蒐尋之後的歷屆科展比賽資料，結果發現這幾年來並沒有人針對「 $\text{mod } r$ 」進行推廣研究，於是我們好奇詢問指導老師此研究沒有被人繼續探討的原因。指導老師告訴我們「 $\text{mod } r$ 」的跳點多邊形難度很高且分類就有 r 種，要進行一般化推廣非常困難。

這個具有挑戰性的研究議題激發了我們想要一探究竟並完整解決這個問題的決心，因此，我們設定了新的條件—— $\text{mod } r$ ，而展開以下研究工作。

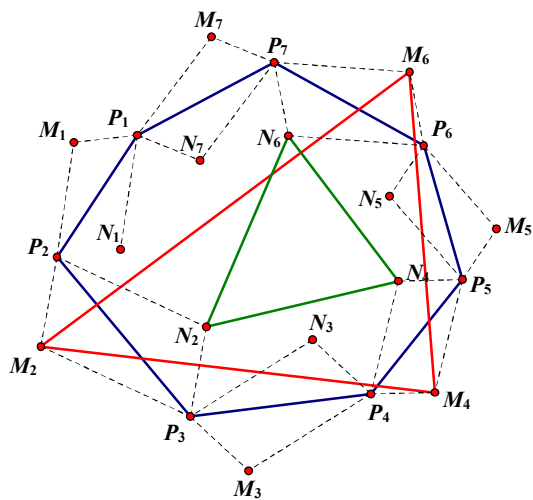
如圖 0-1，以多邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ 的邊為對角線構造相似平行四邊形或箏形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 後，考慮兩種構圖，首先，取任一動點 Q 構造三角形 $\triangle QM_kN_k$ ，這些三角形的重心 G_k 形成「重心多邊形 $G_1G_2 \dots G_k$ 」，研究重心多邊形與原多邊形的有向面積不變量。



△ 圖 0-1：重心多邊形。

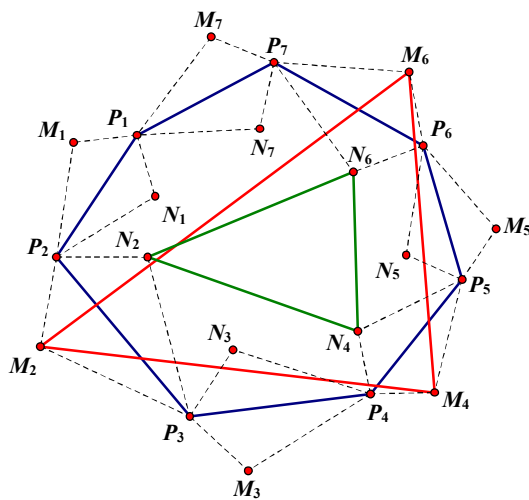
接下來，如圖 0-2，對相似平行四邊形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 的頂點 M_k 與點 N_k 取 $\text{mod } r$ ，分別連接同餘 a 的點 ($a = 1, 2, \dots, r$) 構造全外（全內）的「跳點多邊形」，共有 r 種，研究由平行四邊形構造下的跳點多邊形與原多邊形的有向面積不變量。

平行四邊形是點對稱性圖形，如圖 0-3，我們再改為線對稱的**箏形** $P_k M_k P_{k+1} N_k$ ，同樣對所有點 M_k 與點 N_k 取 $\text{mod } r$ ，分別連接同餘 a 的點 ($a = 1, 2, \dots, r$) 構造全外 (全內) 的「跳點多邊形」，共有 r 種，研究由箏形構造下的跳點多邊形其與原多邊形的有向面積不變量。



七邊形模 2 餘 2

△ 圖 0-2：跳點多邊形。



七邊形模 2 餘 2

△ 圖 0-3：跳點多邊形。

1.2 研究目的

- (1) 探究重心多邊形的幾何性質。
- (2) 一般化：重心多邊形與原始多邊形的有向面積定值關係式。
- (3) 一般化：平行四邊形構造下的跳點多邊形與原始多邊形的有向面積定值關係式。
- (4) 一般化：箏形構造下的跳點多邊形與原始多邊形的有向面積定值關係式。

2. 預備知識

性質 1.(分點公式) 平面上依序給定共線三點 $A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 、 $C(x_C, y_C)$ 。若 $\overline{AB}:\overline{BC} = m:n$ ，則 $x_B = \frac{nx_A + mx_C}{m+n}$ ， $y_B = \frac{ny_A + my_C}{m+n}$ 。

定理 2.(測量師公式) 平面上封閉 n 邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的頂點（轉折點）坐標為 $P_i(x_i, y_i)$ ，則有向面積為

$$\bar{S}_{P_1P_2 \dots P_n} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right)$$

其中，若頂點繞行方式為逆時針時，則有向面積為正；若頂點繞行方式為順時針時，則有向面積為負。

性質 3.(行列式基本運算)

$$(1) \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c+e \\ b & d+f \end{vmatrix}。$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & g & i \\ f & h & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & e & g & i \\ b & d & f & h & j \end{vmatrix}。$$

3. 研究內容

3.1 建立研究工具

平面上給定相異兩點 $P_k(x_k, y_k)$ 、 $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ ，點 $M_k(x_{M_k}, y_{M_k})$ 與點 $N_k(x_{N_k}, y_{N_k})$ 為以 $\overline{P_kP_{k+1}}$ 的中點 T_k 為「點對稱」中心的對稱點，即四邊形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 是平行邊形。

點 M_k 對直線 $\overleftrightarrow{P_kP_{k+1}}$ 作垂線交於點 Q_{M_k} ，點 N_k 對直線 $\overleftrightarrow{P_kP_{k+1}}$ 作垂線交於點 Q_{N_k} 。

性質 4 (1) 若 $\overline{P_kQ_{M_k}} = \lambda \overline{Q_{M_k}P_{k+1}}$ 且 $\overline{M_kQ_{M_k}} = \mu \overline{P_kP_{k+1}}$ ，則 M_k 與 N_k 的坐標

$$x_{M_k} = \frac{x_k + \lambda x_{k+1}}{1 + \lambda} + \mu(y_{k+1} - y_k), \quad y_{M_k} = \frac{y_k + \lambda y_{k+1}}{1 + \lambda} - \mu(x_{k+1} - x_k)$$

$$x_{N_k} = \frac{\lambda x_k + x_{k+1}}{1 + \lambda} - \mu(y_{k+1} - y_k), \quad y_{N_k} = \frac{\lambda y_k + y_{k+1}}{1 + \lambda} + \mu(x_{k+1} - x_k)$$

證明。

1. 如圖 1，利用分點公式可得出坐標 $x_{Q_{M_k}} = \frac{\lambda x_{k+1} + x_k}{1 + \lambda}$ ， $y_{Q_{M_k}} = \frac{\lambda y_{k+1} + y_k}{1 + \lambda}$ 。再因為 $\triangle P_k P_{k+1} R_k \sim \triangle M_k Q_{M_k} S_k$ (AA 相似)，所以 $\overline{P_k P_{k+1}} : \overline{M_k Q_{M_k}} = \overline{P_{k+1} R_k} : \overline{M_k S_k} = 1 : \mu$ ，所以再得出 $|x_{P_{k+1}} - x_{P_k}| : |y_{M_k} - y_{Q_{M_k}}| = 1 : \mu$ ，推得坐標

$$y_{M_k} = \frac{\lambda y_{k+1} + y_k}{1 + \lambda} - \mu(x_{k+1} - x_k)$$

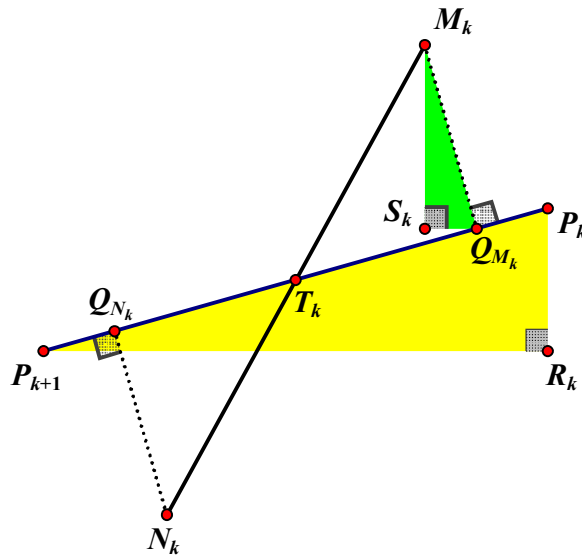
2. 同理，可得到 $|y_{P_k} - y_{P_{k+1}}| : |x_{Q_{M_k}} - x_{M_k}| = 1 : \mu$ ，推得坐標

$$x_{M_k} = \frac{\lambda x_{k+1} + x_k}{1 + \lambda} + \mu(y_{k+1} - y_k)$$

3. 因為點對稱可得出 $\lambda \overline{P_k Q_{N_k}} = \overline{Q_{N_k} P_{k+1}}$ ，同樣利用分點公式，可得 $x_{Q_{N_k}} = \frac{x_k \lambda + x_{k+1}}{1 + \lambda}$ ， $y_{Q_{N_k}} = \frac{y_k \lambda + y_{k+1}}{1 + \lambda}$ 。因為 $\frac{x_{M_k} + x_{N_k}}{2} = \frac{x_{P_k} + x_{P_{k+1}}}{2}$ 且 $\frac{y_{M_k} + y_{N_k}}{2} = \frac{y_{P_k} + y_{P_{k+1}}}{2}$ ，可得出 N_k 的坐標

$$x_{N_k} = \frac{\lambda x_k + x_{k+1}}{1 + \lambda} - \mu(y_{k+1} - y_k)$$

$$y_{N_k} = \frac{\lambda y_k + y_{k+1}}{1 + \lambda} + \mu(x_{k+1} - x_k)$$



△ 圖 1-1：平行四邊形坐標工具。

□

我們接著建立四邊形 $P_k M_k P_{k+1} N_k$ 是箏形的坐標工具。平面上給定相異兩點 $P_k(x_k, y_k)$ 、 $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ ，點 $M_k(x_{M_k}, y_{M_k})$ 與點 $N_k(x_{N_k}, y_{N_k})$ 為以 $\overline{P_k P_{k+1}}$ 為「對稱軸」的對稱點，

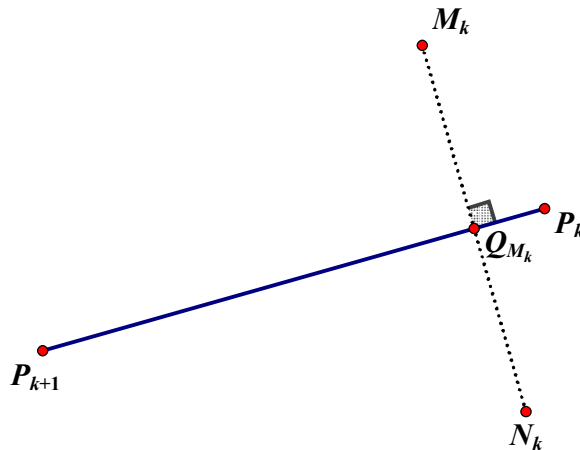
即四邊形 $P_k M_k P_{k+1} N_k$ 是箏形。

性質 4 (2) 若 $\overline{P_k Q_{M_k}} = \lambda \overline{Q_{M_k} P_{k+1}}$ 且 $\overline{M_k Q_{M_k}} = \mu \overline{P_k P_{k+1}}$ ，則 M_k 與 N_k 的坐標

$$x_{M_k} = \frac{x_k + \lambda x_{k+1}}{1 + \lambda} + \mu(y_{k+1} - y_k), \quad y_{M_k} = \frac{y_k + \lambda y_{k+1}}{1 + \lambda} - \mu(x_{k+1} - x_k)$$

$$x_{N_k} = \frac{x_k + \lambda x_{k+1}}{1 + \lambda} - \mu(y_{k+1} - y_k), \quad y_{N_k} = \frac{y_k + \lambda y_{k+1}}{1 + \lambda} + \mu(x_{k+1} - x_k)$$

證明。如圖 1-2, Q_{M_k} 點 M_k 點的坐標與平行四邊形相同, 因為 Q_{M_k} 點是 $\overline{M_k N_k}$ 的中點, 利用中點公式即可得出 N_k 的坐標。



△ 圖 1-2：箏形坐標工具。

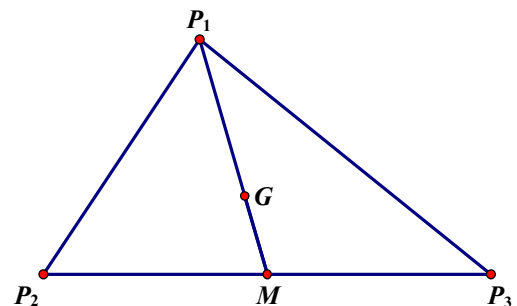
□

引理 5.(重心座標) 三角形 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的重心坐標為 $G \left(\frac{\sum_{k=1}^3 x_{P_k}}{n}, \frac{\sum_{k=1}^3 y_{P_k}}{n} \right)$

證明。如圖 2, 令 $P_1(x_{P_1}, y_{P_1})$ 、 $P_2(x_{P_2}, y_{P_2})$ 、 $P_3(x_{P_3}, y_{P_3})$, 因為 G 是重心, 所以 M 為中點, 依據分點公式先得出 $M \left(\frac{x_{P_2} + x_{P_3}}{2}, \frac{y_{P_2} + y_{P_3}}{2} \right)$, 再 $\overline{P_1 M} = 2\overline{GM}$, 推得

$$G \left(\frac{\frac{x_{P_2} + x_{P_3}}{2} \times 2 + x_{P_1} \times 1}{2 + 1}, \frac{\frac{y_{P_2} + y_{P_3}}{2} \times 2 + y_{P_1} \times 1}{2 + 1} \right)$$

$$= \left(\frac{x_{P_1} + x_{P_2} + x_{P_3}}{3}, \frac{y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3}}{3} \right)$$

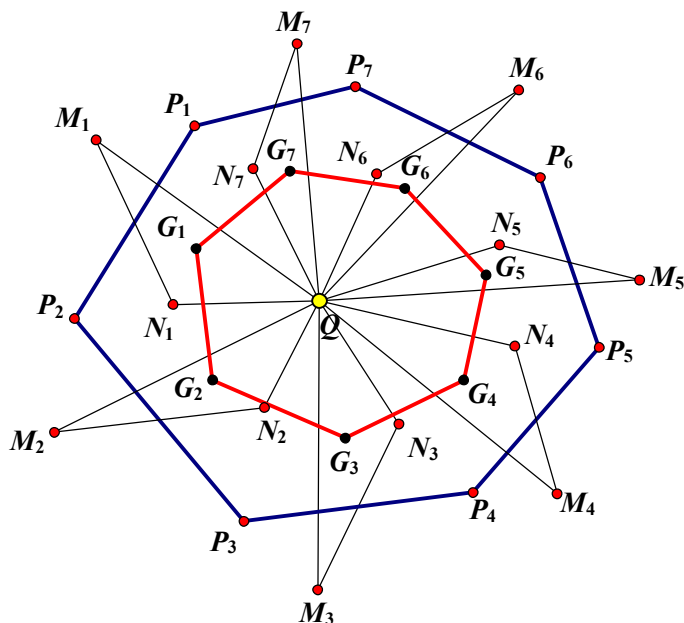


△ 圖 2：三角形重心坐標。

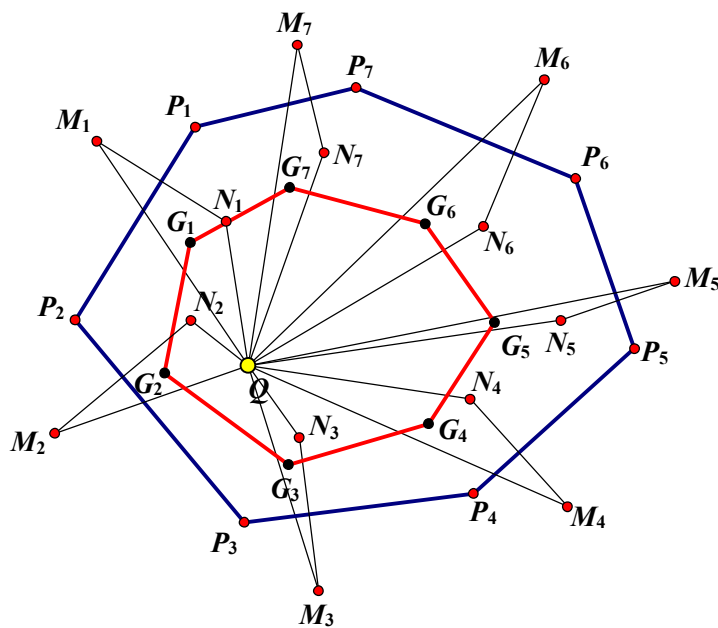
□

3.2 重心多邊形

定義 6.(重心多邊形) 在平面上分別以任意多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的 n 個邊為平行四邊形(箏形)的對角線, 構作 n 個相似平行四邊形(箏形) $P_1M_1P_2N_1 \sim P_2M_2P_3N_2 \sim P_3M_3P_4N_3 \sim \dots \sim P_nM_nP_1N_n$ 。取一動點 Q , 再取 $\triangle QM_kN_k$ 的重心為 G_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), 則本文定義多邊形 $G_1G_2G_3 \dots G_n$ 為多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的重心多邊形。



△ 圖 3-1：重心多邊形（平行四邊形構造下）。



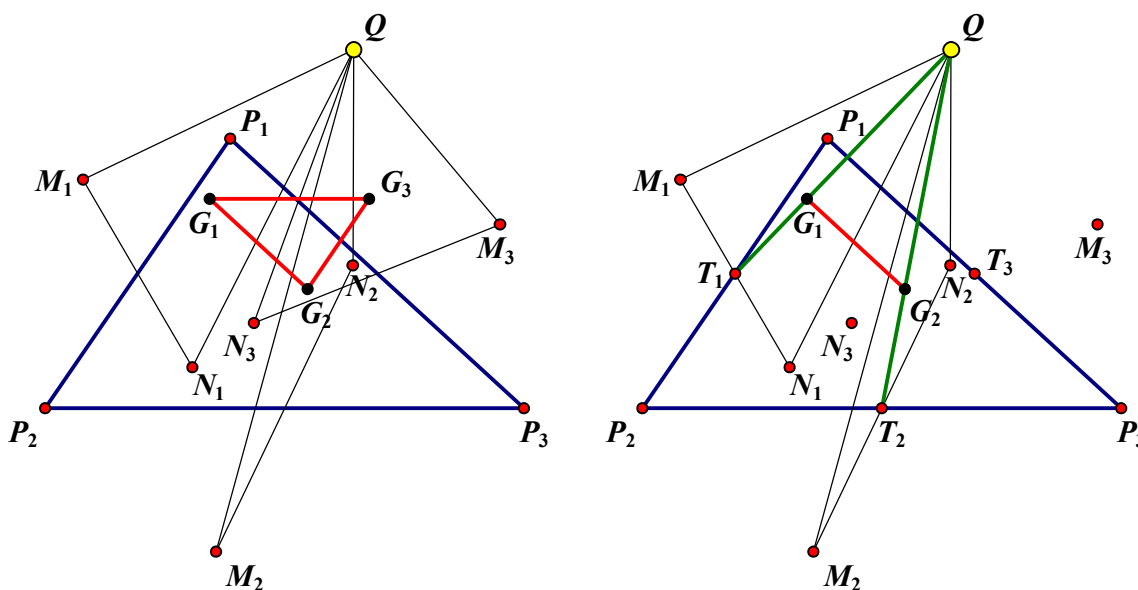
△ 圖 3-2：重心多邊形（箏形構造下）。

3.2.1 平行四邊形構造下的三角形

我們先研究任意三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心三角形 $\triangle G_1G_2G_3$ 。

性質 7.(平行性) $\overline{G_kG_{k+1}} \parallel \overline{P_{k+2}P_{k+3}}$ ($k \in \mathbb{N}; k = 3 + j = j$)。

證明. 因為四邊形 $P_1M_1P_2N_1$ 與 $P_2M_2P_3N_2$ 是平行四邊形, 所以 T_1 是 $\overline{M_1N_1}$ 的中點、 T_2 是 $\overline{M_2N_2}$ 的中點。連接 $\overline{QT_1}$ 與 $\overline{QT_2}$, 因為 G_1 與 G_2 分別是 $\triangle QM_1N_1$ 和 $\triangle QM_2N_2$ 的重心, 得出 $\overline{QG_1}:\overline{G_1T_1} = 2:1 = \overline{QG_2}:\overline{G_2T_2}$, 所以 $\overline{G_1G_2} \parallel \overline{T_1T_2}$ 。又 T_1 也是 $\overline{P_1P_2}$ 的中點、 T_2 是 $\overline{P_2P_3}$ 的中點, 所以 $\overline{T_1T_2} \parallel \overline{P_3P_1}$, 因此 $\overline{G_1G_2} \parallel \overline{P_3P_1}$, 同理 $\overline{G_2G_3} \parallel \overline{P_1P_2}$ 、 $\overline{G_3G_1} \parallel \overline{P_2P_3}$ 。



△ 圖 4：重心三角形。

□

性質 8.(面積不變量) $\triangle G_1G_2G_3 \sim \triangle P_3P_1P_2$ 且面積 $\frac{\triangle G_1G_2G_3}{\triangle P_3P_1P_2} = \frac{1}{9}$ 。

證明. 如圖 4, 根據性質 7 的平行性可得 $\triangle G_1G_2G_3 \sim \triangle P_3P_1P_2$, 又因為 $\overline{G_1G_2} = \frac{2}{3}\overline{T_1T_2} =$

$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\overline{P_3P_1}\right) = \frac{1}{3}\overline{P_3P_1}$, 所以 $9 \triangle G_1G_2G_3 = \triangle P_3P_1P_2$ 。

□

3.2.2 平行四邊形構造下的四邊形

我們繼續研究任意四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 的重心四邊形 $G_1G_2G_3G_4$ 。

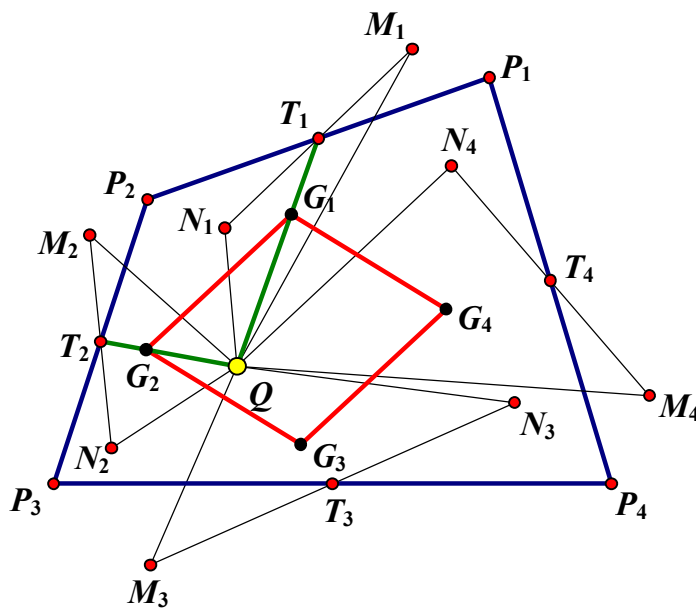
性質 9.(平行性) $\overline{G_kG_{k+1}} \parallel \overline{T_kT_{k+1}}$ ($k \in \mathbb{N}; k = 4 + j = j$)。

證明. 如圖 5 與性質 7 的方式相同, 我們可得出 $\overline{QG_1}:\overline{G_1T_1} = 2:1 = \overline{QG_2}:\overline{G_2T_2}$, 所以 $\overline{G_1G_2} \parallel \overline{T_1T_2}$, 同理 $\overline{G_2G_3} \parallel \overline{T_2T_3}$ 、 $\overline{G_3G_4} \parallel \overline{T_3T_4}$ 、 $\overline{G_4G_1} \parallel \overline{T_4T_1}$ 。

□

性質 10. 重心四邊形 $G_1G_2G_3G_4$ 是平行四邊形。

證明. 依據性質 9 得知 $\overline{G_kG_{k+1}} \parallel \overline{T_kT_{k+1}}$, 又 T_1 也是 $\overline{P_1P_2}$ 的中點、 T_2 是 $\overline{P_2P_3}$ 的中點, 所以 $\overline{T_1T_2} \parallel \overline{P_1P_3}$, 因此 $\overline{G_1G_2} \parallel \overline{P_1P_3}$, 同理 $\overline{G_2G_3} \parallel \overline{P_2P_4}$ 、 $\overline{G_3G_4} \parallel \overline{P_3P_1}$ 、 $\overline{G_4G_1} \parallel \overline{P_4P_2}$ 。



△ 圖 5：重心四邊形。

□

性質 11. (面積不變量) 平行四邊形 $G_1G_2G_3G_4 \sim T_1T_2T_3T_4$ 且面積 $\frac{G_1G_2G_3G_4}{P_1P_2P_3P_4} = \frac{2}{9}$ 。

證明. 如圖 5, 根據性質 9 的平行性可得, 平行四邊形 $G_1G_2G_3G_4 \sim T_1T_2T_3T_4$ 又因為 G_1 與 G_2 為重心, 所以 $\overline{G_1G_2} = \frac{2}{3}\overline{T_1T_2} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\overline{P_3P_1}\right) = \frac{1}{3}\overline{P_3P_1}$ 。再根據四邊形四邊中點連線段性質可得, $\overline{S}_{T_1T_2T_3T_4} = \frac{1}{2}\overline{S}_{P_1P_2P_3P_4}$ 又 $\frac{4}{9}\overline{S}_{T_1T_2T_3T_4} = \overline{S}_{G_1G_2G_3G_4}$, 得到 $\overline{S}_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{2}{9}\overline{S}_{P_1P_2P_3P_4}$ 。

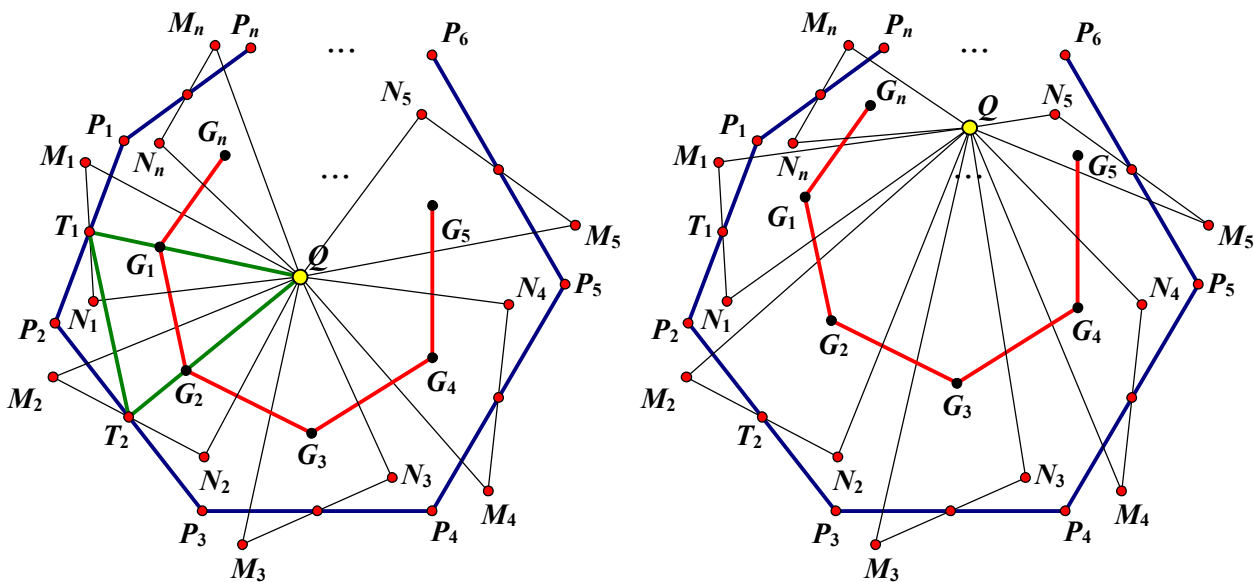
□

3.2.3 一般化：平行四邊形構造下的重心 n 邊形

推廣到任意 n 邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的重心 n 邊形 $G_1G_2G_3 \dots G_n$ 。

性質 12. (剛體運動/平行性) $\overline{G_kG_{k+1}} \parallel \overline{T_kT_{k+1}}$ ($k \in \mathbb{N}; k = n + j = j$)。

證明. 如同三角形與四邊形的方式, 我們利用平行四邊形 $P_k M_k P_{k+1} N_k$ 的對角線互相平分(T_k 為中點) 且 G_k 點是 $\triangle Q M_k N_k$ 的重心可得出 $\overline{G_k G_{k+1}} \parallel \overline{T_k T_{k+1}}$ 。注意到, 當 Q 點在平面上運動時, 因為平行性, 重心 n 邊形 $G_1 G_2 G_3 \dots G_n$ 進行剛體運動 (平移)。



△ 圖 6：平行四邊形構造下的重心 n 邊形。

□

定義 13.(中點多邊形) 任意 n 邊形 $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ 的各邊 $\overline{P_k P_{k+1}}$ 中點為 T_k 點, 定義 n 邊形 $T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ 為中點多邊形。

推論 14.(相似) 重心 n 邊形 $G_1 G_2 G_3 \dots G_n$ 相似於中點 n 邊形 $T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ 。

證明. 由性質 12 的平行性 $\overline{G_k G_{k+1}} \parallel \overline{T_k T_{k+1}}$ 可得出多邊形 $G_1 G_2 G_3 \dots G_n$ 與多邊形 $T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ 的對應內角相同, 且 $\overline{G_k G_{k+1}} : \overline{T_k T_{k+1}} = 2:3$ 固得證。

□

因為由推論 14, 我們已經知道重心 n 邊形 $G_1 G_2 G_3 \dots G_n$ 與中點 n 邊形 $T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ 的面積比為 4:9, 接下來只要證明中點 n 邊形 $T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ 與原始 n 邊形 $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ 的面積比即可推出重心 n 邊形與原始 n 邊形的面積不變量。

性質 15. 中點 n 邊形 $T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ 的面積公式

(1) 偶邊形 $n = 2k$ 時, $\bar{S}_{T_1 T_2 T_3 \dots T_{2k}} = \frac{1}{4} (2\bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k}} + \bar{S}_{P_2 P_4 \dots P_{2k}} + \bar{S}_{P_1 P_3 \dots P_{2k-1}})$

$$(2) \text{ 奇邊形 } n = 2k + 1 \text{ 時, } \bar{S}_{T_1 T_2 T_3 \dots T_{2k+1}} = \frac{1}{4} (2\bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k+1}} + \bar{S}_{P_1 P_3 \dots P_{2k+1} P_2 P_4 \dots P_{2k}})$$

證明. 由定理 2 得出坐標 $T_m \left(\frac{x_{P_m} + x_{P_{m+1}}}{2}, \frac{y_{P_m} + y_{P_{m+1}}}{2} \right)$, 其中 $m \in \mathbb{N}$ 、 $m = n + j = j$ 。利用測

量師公式得出中點 n 邊形 $T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ 的有向面積

$$\bar{S}_{T_1 T_2 T_3 \dots T_n} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_{P_1} + x_{P_2}}{2} & \frac{x_{P_2} + x_{P_3}}{2} & \frac{x_{P_3} + x_{P_4}}{2} & \dots & \frac{x_{P_m} + x_{P_m}}{2} & \dots & \frac{x_{P_n} + x_{P_1}}{2} & \frac{x_{P_1} + x_{P_2}}{2} \\ \frac{y_{P_1} + y_{P_2}}{2} & \frac{y_{P_2} + y_{P_3}}{2} & \frac{y_{P_3} + y_{P_4}}{2} & \dots & \frac{y_{P_m} + y_{P_m}}{2} & \dots & \frac{y_{P_n} + y_{P_1}}{2} & \frac{y_{P_1} + y_{P_2}}{2} \end{vmatrix}$$

(1) $n = 2k$ 時, 利用性質 3 的行列式拆解而得出

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{T_1 T_2 T_3 \dots T_{2k-1} T_{2k}} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} x_{P_{2i-1}} + x_{P_{2i}} & x_{P_{2i}} + x_{P_{2i+1}} & x_{P_{2i+1}} + x_{P_{2i+2}} \\ y_{P_{2i-1}} + y_{P_{2i}} & y_{P_{2i}} + y_{P_{2i+1}} & y_{P_{2i+1}} + y_{P_{2i+2}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^k \left(\begin{vmatrix} x_{P_{2i-1}} & x_{P_{2i}} \\ y_{P_{2i-1}} & y_{P_{2i}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i-1}} & x_{P_{2i+1}} \\ y_{P_{2i-1}} & y_{P_{2i+1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i}} & x_{P_{2i+1}} \\ y_{P_{2i}} & y_{P_{2i+1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i}} & x_{P_{2i+1}} \\ y_{P_{2i}} & y_{P_{2i+1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i}} & x_{P_{2i+2}} \\ y_{P_{2i}} & y_{P_{2i+2}} \end{vmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \begin{vmatrix} x_{P_{2i+1}} & x_{P_{2i+2}} \\ y_{P_{2i+1}} & y_{P_{2i+2}} \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2\bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k-1} P_{2k}} + \bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k-3} P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k-2} P_{2k}}) \end{aligned}$$

(2) $n = 2k + 1$ 時, 利用偶邊形可得出

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{T_1 T_2 T_3 \dots T_{2k} T_{2k+1}} \\ &= \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} x_{P_{2i-1}} + x_{P_{2i}} & x_{P_{2i}} + x_{P_{2i+1}} & x_{P_{2i+1}} + x_{P_{2i+2}} \\ y_{P_{2i-1}} + y_{P_{2i}} & y_{P_{2i}} + y_{P_{2i+1}} & y_{P_{2i+1}} + y_{P_{2i+2}} \end{vmatrix} \right) + \frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_{P_{2k+1}} + x_{P_1} & x_{P_1} + x_{P_2} \\ y_{P_{2k+1}} + y_{P_1} & y_{P_1} + y_{P_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^k \left(\begin{vmatrix} x_{P_{2i-1}} & x_{P_{2i}} \\ y_{P_{2i-1}} & y_{P_{2i}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i-1}} & x_{P_{2i+1}} \\ y_{P_{2i-1}} & y_{P_{2i+1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i}} & x_{P_{2i+1}} \\ y_{P_{2i}} & y_{P_{2i+1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i}} & x_{P_{2i+1}} \\ y_{P_{2i}} & y_{P_{2i+1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{P_{2i}} & x_{P_{2i+2}} \\ y_{P_{2i}} & y_{P_{2i+2}} \end{vmatrix} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \begin{vmatrix} x_{P_{2i+1}} & x_{P_{2i+2}} \\ y_{P_{2i+1}} & y_{P_{2i+2}} \end{vmatrix} \right) \right) + \frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_{P_{2k+1}} + x_{P_1} & x_{P_1} + x_{P_2} \\ y_{P_{2k+1}} + y_{P_1} & y_{P_1} + y_{P_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} (2\bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k} P_{2k+1}} + \bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k+1} P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k}}) \end{aligned}$$

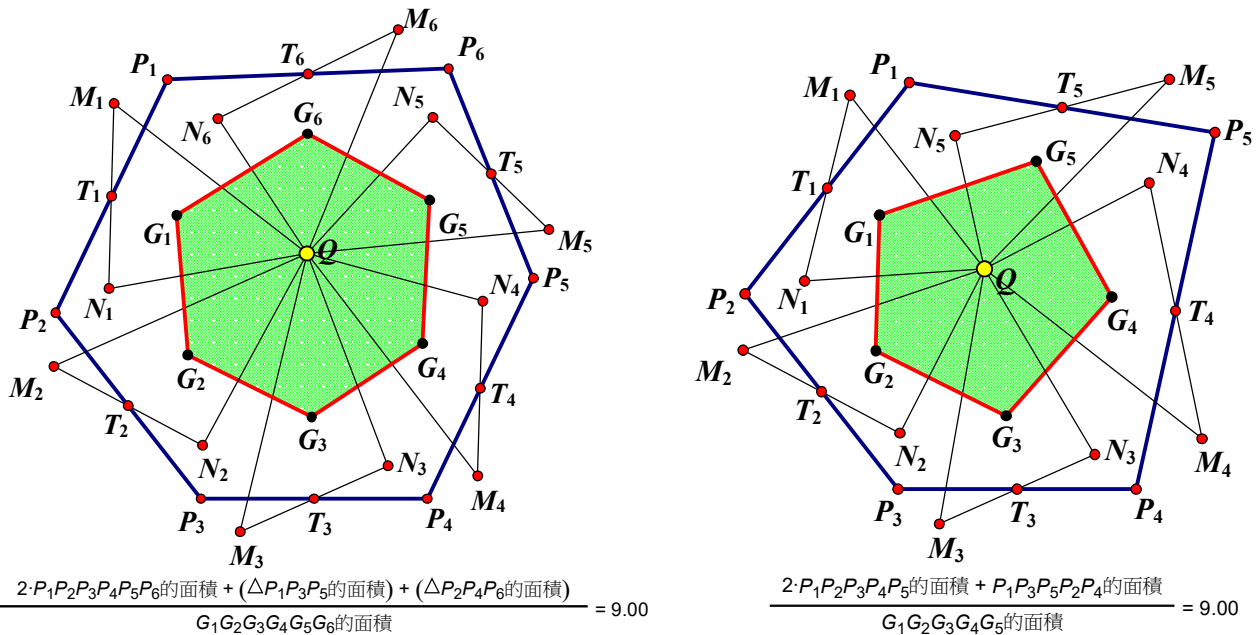
□

性質 16. (面積不變量) 平行四邊形構造下的重心多邊形 $G_1G_2G_3 \dots G_{2k}$ 面積定值

$$(1) \text{重心偶多邊形 } \bar{S}_{G_1G_2G_3 \dots G_{2k}} = \frac{1}{9} (\bar{S}_{P_2P_4 \dots P_{2k}} + \bar{S}_{P_1P_3 \dots P_{2k-1}} + 2\bar{S}_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k}})$$

$$(2) \text{重心奇多邊形 } \bar{S}_{G_1G_2G_3 \dots G_{2k+1}} = \frac{1}{9} (\bar{S}_{P_1P_3 \dots P_{2k+1}P_2P_4 \dots P_{2k}} + 2\bar{S}_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k+1}})$$

證明. 如圖 7, 由推論 14 與性質 15 可證明。



△ 圖 7：重心多邊形面積定值。

□

3.2.3 一般化：箏形構造下的重心 n 邊形

由於箏形構造下的重心多邊形證明方法與平行四邊形構造下的重心多邊形類似，因此接下來，我們就直接進入到一般化的證明。

任意 n 邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的各邊 $\overline{P_kP_{k+1}}$ 的同比例分點為 Q_k 點，即 $\overline{P_1Q_1} : \overline{Q_2P_2} = \overline{P_2Q_2} : \overline{Q_3P_3} = \dots = \overline{P_nQ_n} : \overline{Q_1P_1} = \lambda : 1$ ，定義 n 邊形 $Q_1Q_2Q_3 \dots Q_n$ 為分點多邊形，可得

$$\bar{S}_{Q_1Q_2Q_3 \dots Q_n} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_{P_1} + \lambda x_{P_2}}{\lambda + 1} & \frac{x_{P_2} + \lambda x_{P_3}}{\lambda + 1} & \frac{x_{P_3} + \lambda x_{P_4}}{\lambda + 1} & \dots & \frac{x_{P_n} + \lambda x_{P_1}}{\lambda + 1} & \frac{x_{P_1} + \lambda x_{P_2}}{\lambda + 1} \\ \frac{y_{P_1} + \lambda y_{P_2}}{\lambda + 1} & \frac{y_{P_2} + \lambda y_{P_3}}{\lambda + 1} & \frac{y_{P_3} + \lambda y_{P_4}}{\lambda + 1} & \dots & \frac{y_{P_n} + \lambda y_{P_1}}{\lambda + 1} & \frac{y_{P_1} + \lambda y_{P_2}}{\lambda + 1} \end{vmatrix}$$

化簡行列式可得出

(1) $n = 2k$ 時

$$\bar{S}_{Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_{2k}} = \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k}} + \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k}})$$

(2) $n = 2k + 1$ 時

$$\bar{S}_{Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_{2k+1}} = \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k+1}} + \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k+1} P_2 \dots P_{2k}}$$

我們繼續證明箏形構造下的重心多邊形的面積定值。

性質17. (面積不變量) 箏形構造下的重心多邊形 $G_1 G_2 G_3 \dots G_n$ 面積定值

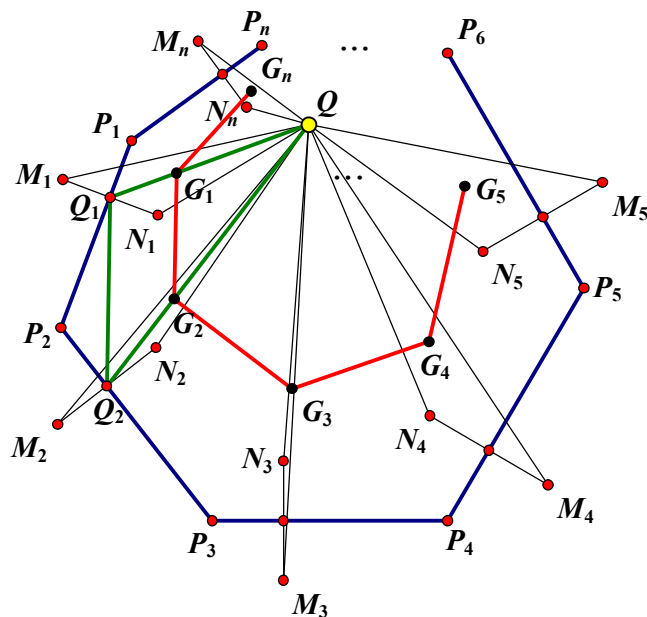
$$(1) \text{ 偶邊形 } \bar{S}_{G_1 G_2 G_3 \dots G_{2k}} = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k}} + \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k}}) \right)$$

$$(2) \text{ 奇邊形 } \bar{S}_{G_1 G_2 G_3 \dots G_{2k+1}} = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k+1}} + \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k+1} P_2 \dots P_{2k}} \right)$$

證明. 因為 G_k 為重心，所以 $\overline{G_k G_{k+1}} \parallel \overline{Q_k Q_{k+1}}$ 且 $\overline{G_k G_{k+1}} : \overline{Q_k Q_{k+1}} = 2:3$ ，可得重心多邊形 $G_1 G_2 G_3 \dots G_n$ 與分點多邊形 $Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_n$ 相似，因此得出重心偶邊形與奇邊形的面積不變量

$$\bar{S}_{G_1 G_2 G_3 \dots G_{2k}} = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k}} + \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k}}) \right)$$

$$\bar{S}_{G_1 G_2 G_3 \dots G_{2k+1}} = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k+1}} + \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k+1} P_2 \dots P_{2k}} \right)$$



△ 圖 8：箏形構造下的重心多邊形。

□

3.3 平行四邊形構造下，「mod r 」的跳點多邊形之有向面積不變量

2015 年的全國科展數學作品推廣了拿破崙三角形定理，他們研究了平面封閉折線的多邊形有向面積定值[1]。該篇作品的創新在於「沿多邊形取一內一外（或一外一內）之多邊形，所得之兩個多邊形之面積的定量關係」。

在相同構造下，即在平面上分別以任意多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的 n 個邊為平行四邊形的對角線，構作 n 個相似平行四邊形 $P_1M_1P_2N_1 \sim P_2M_2P_3N_2 \sim P_3M_3P_4N_3 \sim \dots \sim P_nM_nP_1N_n$ 。

他們有兩個主要結果如下[1]：

結果 18.(見[1]的第 20 頁) 對於偶邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_{2k}$ 有

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_1N_2M_3N_4 \dots M_{2k-1}N_{2k}} + \bar{S}_{N_1M_2N_3M_4 \dots N_{2k-1}M_{2k}} \\ &= 2 \left(\frac{\lambda^2 + 1}{2(1 + \lambda)^2} + \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2P_4 \dots P_{2k}} + \bar{S}_{P_1P_3 \dots P_{2k-1}}) + 4 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k}} \end{aligned}$$

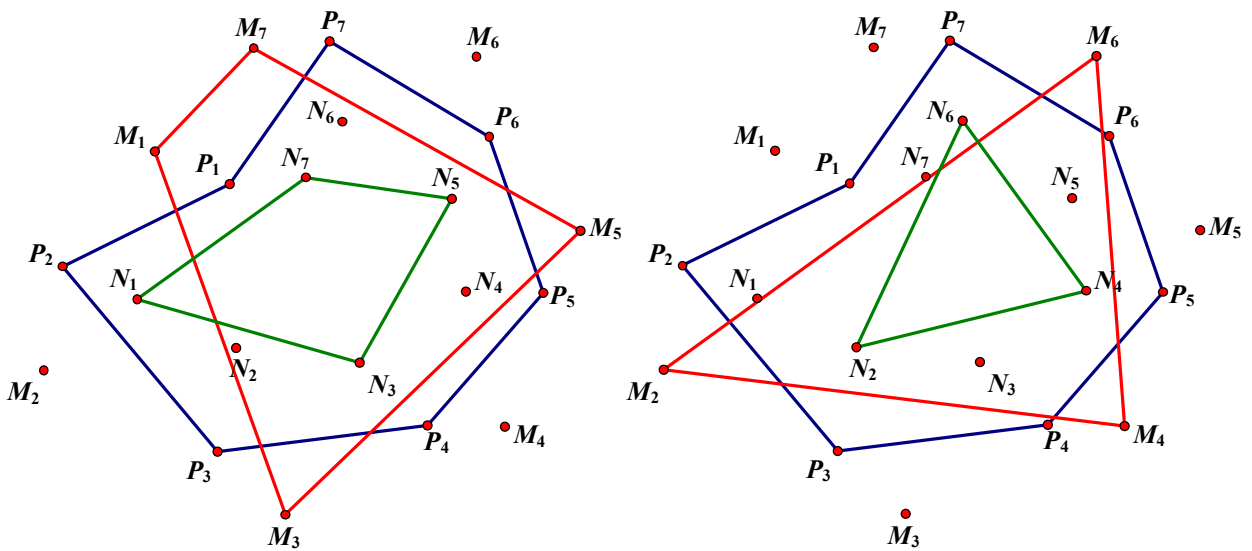
結果 19.(見[1]的第 22 頁) 對於奇邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_{2k+1}$ 有

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_1N_2M_3N_4 \dots N_{2k}M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1M_2N_3M_4 \dots M_{2k}N_{2k+1}} \\ &= 2 \left(\frac{\lambda^2 + 1}{2(1 + \lambda)^2} + \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2P_4 \dots P_{2k}P_1} + \bar{S}_{P_1P_3 \dots P_{2k+1}}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) (2\bar{S}_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k+1}} - \bar{S}_{P_1P_2P_{2k+1}}) \end{aligned}$$

2015 年，當時全國科展比賽評審教授給予該研究《內外有致—類拿破崙多邊形性質及其有向面積定值》的建議是「未來可考慮取 mod r ，看是否能走出此類研究的新路」[1]。我們蒐尋之後的歷屆科展比賽資料並同時請教指導老師，結果發現這幾年來並沒有人針對「mod r 」進行推廣研究（猜測應該是大多數人沒有看懂評語）。因此，我們設定了新的條件——mod r ，而展開以下研究工作。

考慮對多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 中的所有 M_i 點 (N_i 點) 的足碼編號 i 進行 mod r ，其中 $i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。例如： M_1 點可得到 $1 \equiv 1 \pmod{2}$ 、 M_3 點可得到 $3 \equiv 1 \pmod{2}$ 、 M_5 點可得到 $5 \equiv 1 \pmod{2}$ ，於是我們定義 $M_1 \equiv M_3 \equiv M_5 \equiv M_7 \equiv M_{2k+1} \pmod{2}$ 。同理， $M_2 \equiv M_4 \equiv M_6 \equiv M_8 \equiv M_{2k} \pmod{2}$

將這些同餘的點 M_i (N_i) 連線形成「跳點多邊形」，我們繼續研究其內、外跳點多邊形有向面積之和與原多邊形之關聯性與定值（有向面積不變量），如 $\bar{S}_{M_2M_4M_6} + \bar{S}_{N_2N_4N_6}$ 。



$$M_i(N_i) \equiv 1 \pmod{2}$$

$$M_i(N_i) \equiv 2 \pmod{2}$$

△ 圖 9：七邊形 mod 2 跳點多邊形。

定義 20.(跳點多邊形) 對於封閉多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 中的所有構造的 M_i 點 (N_i 點)，定義 mod r 下的跳點多邊形有外、內兩類，分別是**外多邊形** $M_1M_{1+r}M_{1+2r} \dots M_{1+mr}$ 、多邊形 $M_2M_{2+r}M_{2+2r} \dots M_{2+mr}$ 、...、多邊形 $M_rM_{r+r}M_{r+2r} \dots M_{r+mr}$ ，一共 r 個（因為 mod r 的餘數有 r 種）。**內多邊形** $N_1N_{1+r}N_{1+2r} \dots N_{1+mr}$ 、多邊形 $N_2N_{2+r}N_{2+2r} \dots N_{2+mr}$ 、...、多邊形 $N_rN_{r+r}N_{r+2r} \dots N_{r+mr}$ ，一共 r 個。

3.3.2 mod 1

關於 mod 1，也就是每一個頂點都要連線的多邊形，我們直接進行一般化證明。

性質 21.(偶邊形，模 1 餘 1)

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_1M_2M_3 \dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_1N_2N_3 \dots N_{2k}} \\ &= 2 \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \bar{S}_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k}} + 2 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1P_3P_5 \dots P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2P_4P_6 \dots P_{2k}}) \end{aligned}$$

證明.

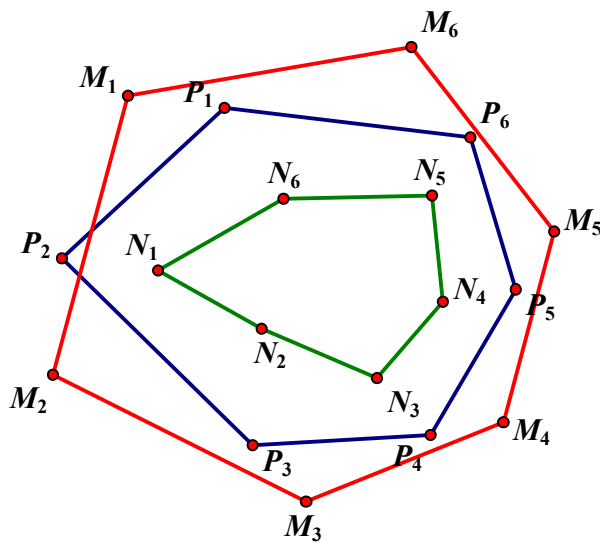
如圖 10，由性質 4 可得 x_{M_k} 與 x_{N_k} 坐標，代回可得

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_1M_2M_3 \dots M_{2k-1}M_{2k}} + \bar{S}_{N_1N_2N_3 \dots N_{2k-1}N_{2k}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{2k} \left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{i+1} + x_i}{1 + \lambda} + \mu(y_{i+1} - y_i) & \frac{\lambda x_{i+2} + x_{i+1}}{1 + \lambda} + \mu(y_{i+2} - y_{i+1}) \\ \frac{\lambda y_{i+1} + y_i}{1 + \lambda} - \mu(x_{i+1} - x_i) & \frac{\lambda y_{i+2} + y_{i+1}}{1 + \lambda} - \mu(x_{i+2} - x_{i+1}) \end{array} \right| \right) + \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_i + x_{i+1}}{1+\lambda} - \mu(y_{i+1} - y_i) & \frac{\lambda x_{i+1} + x_{i+2}}{1+\lambda} - \mu(y_{i+2} - y_{i+1}) \\ \frac{\lambda y_i + y_{i+1}}{1+\lambda} + \mu(x_{i+1} - x_i) & \frac{\lambda y_{i+1} + y_{i+2}}{1+\lambda} + \mu(x_{i+2} - x_{i+1}) \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2k} \left(2 \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\begin{vmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ y_{i+1} & y_{i+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} \right) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\begin{vmatrix} x_{i+1} & x_{i+1} \\ y_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i & x_{i+2} \\ y_i & y_{i+2} \end{vmatrix} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k}} + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k}}).$$



$M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6$ 的面積 = 67.89 厘米²

$N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 N_6$ 的面積 = 13.86 厘米²

$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ 的面積 = 44.98 厘米²

$\triangle P_1 P_3 P_5$ 的面積 = 19.64 厘米²

$\triangle P_2 P_4 P_6$ 的面積 = 24.61 厘米²

$$\frac{\left(2 \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \right) \cdot P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 \text{ 的面積} + \left(2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \right) \cdot ((\triangle P_1 P_3 P_5 \text{ 的面積}) + (\triangle P_2 P_4 P_6 \text{ 的面積}))}{M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 \text{ 的面積} + N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 N_6 \text{ 的面積}} = 1.00000$$

△ 圖 10：偶邊形 mod 1 跳點多邊形。

□

性質 22.(奇邊形，模 1 餘 1)

$$\bar{S}_{M_1 M_2 M_3 \dots M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1 N_2 N_3 \dots N_{2k+1}}$$

$$= 2 \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_{2k+1}} + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k+1} P_2 \dots P_{2k}}$$

證明. 與性質 21 證明方式相同，在此省略。

□

應用 23.(Napoleon's Thm.)

(1) 外、內拿破崙三角形 $\bar{S}_{M_1 M_2 M_3} + \bar{S}_{N_1 N_2 N_3} = \bar{S}_{P_1 P_2 P_3}$

(2) 外、內拿破崙四邊形 $\bar{S}_{M_1 M_2 M_3 M_4} + \bar{S}_{N_1 N_2 N_3 N_4} = 2\bar{S}_{P_1 P_2 P_3 P_4}$

證明.

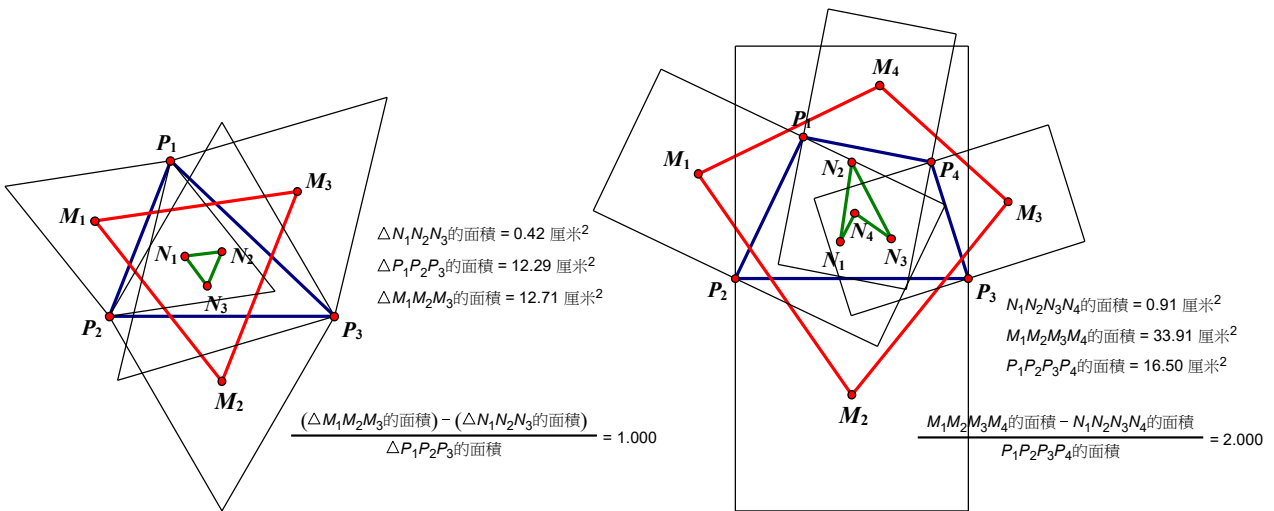
(1) 三角形時，如圖 11，令 $\lambda = 1$ 、 $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 代回性質 22

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_1M_2M_3} + \bar{S}_{N_1N_2N_3} \\ &= 2 \left(\frac{1+1^2}{(1+1)^2} + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) \bar{S}_{P_1P_2P_3} + 2 \left(\frac{1}{(1+1)^2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) \bar{S}_{P_1P_3P_2} \\ &= \frac{4}{3} \bar{S}_{P_1P_2P_3} + \frac{1}{3} \bar{S}_{P_1P_3P_2} = \frac{4}{3} \bar{S}_{P_1P_2P_3} - \frac{1}{3} \bar{S}_{P_1P_2P_3} = \bar{S}_{P_1P_2P_3} \end{aligned}$$

(2) 四邊形時，如圖 11，令 $\lambda = 1$ 、 $\mu = \frac{1}{2}$ 代回性質 21

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_1M_2M_3M_4} + \bar{S}_{N_1N_2N_3N_4} \\ &= 2 \left(\frac{1+1^2}{(1+1)^2} + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \bar{S}_{P_1P_2P_3P_4} = 2 \bar{S}_{P_1P_2P_3P_4} \end{aligned}$$

注意到， $\Delta N_1N_2N_3$ 頂點為順時針，所以面積為負值。四邊形 $N_1N_2N_3N_4$ 面積也為負值。



△ 圖 11：Napoleon 三角形與四邊形。

□

3.3.2 mod 2

(一) 五邊形

事實 24.(五邊形，模 2 餘 2) $\bar{S}_{M_2M_4} + \bar{S}_{N_2N_4} = 0$

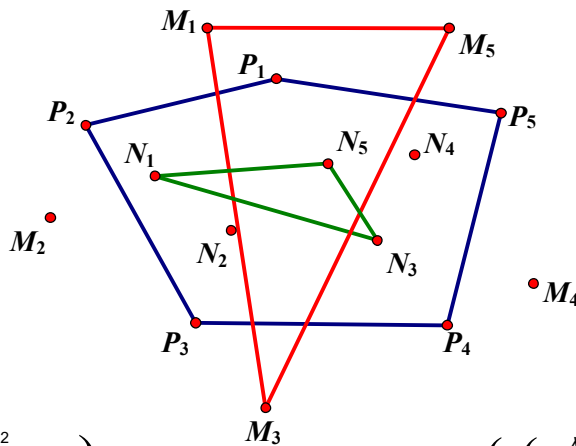
性質 25.(五邊形，模 2 餘 1)

$$\bar{S}_{M_1M_3M_5} + \bar{S}_{N_1N_3N_5} = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1P_3P_5} + \bar{S}_{P_2P_4P_1}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1P_4P_5P_2P_3})$$

證明.

如圖 12，由性質 4 可得 x_{M_k} 與 x_{N_k} 坐標，代回可得

$$\begin{aligned}
 & \bar{S}_{M_1M_3M_5} + \bar{S}_{N_1N_3N_5} = \\
 & \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^2 \left| \begin{array}{cc} \frac{x_{2i-1} + \lambda x_{2i}}{1+\lambda} + \mu(y_{2i} - y_{2i-1}) & \frac{x_{2i+1} + \lambda x_{2i+2}}{1+\lambda} + \mu(y_{2i+2} - y_{2i+1}) \\ \frac{y_{2i-1} + \lambda y_{2i}}{1+\lambda} - \mu(x_{2i} - x_{2i-1}) & \frac{y_{2i+1} + \lambda y_{2i+2}}{1+\lambda} - \mu(x_{2i+2} - x_{2i+1}) \end{array} \right| + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{2i-1} + x_{2i}}{1+\lambda} - \mu(y_{2i} - y_{2i-1}) & \frac{\lambda x_{2i+1} + x_{2i+2}}{1+\lambda} - \mu(y_{2i+2} - y_{2i+1}) \\ \frac{\lambda y_{2i-1} + y_{2i}}{1+\lambda} + \mu(x_{2i} - x_{2i-1}) & \frac{\lambda y_{2i+1} + y_{2i+2}}{1+\lambda} + \mu(x_{2i+2} - x_{2i+1}) \end{array} \right| \right) + \right. \\
 & \left. \left| \begin{array}{cc} \frac{x_5 + \lambda x_1}{1+\lambda} + \mu(y_1 - y_5) & \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + \mu(y_2 - y_1) \\ \frac{y_5 + \lambda y_1}{1+\lambda} - \mu(x_1 - x_5) & \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} - \mu(x_2 - x_1) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_5 + x_1}{1+\lambda} - \mu(y_1 - y_5) & \frac{\lambda x_1 + x_2}{1+\lambda} - \mu(y_2 - y_1) \\ \frac{\lambda y_5 + y_1}{1+\lambda} + \mu(x_1 - x_5) & \frac{\lambda y_1 + y_2}{1+\lambda} + \mu(x_2 - x_1) \end{array} \right| \right) \\
 & = \left(\left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^2 + 2\mu^2 \right) \left(\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^2 \left| \begin{array}{cc} x_{2i} & x_{2i+2} \\ y_{2i} & y_{2i+2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{2i-1} & x_{2i+1} \\ y_{2i-1} & y_{2i+1} \end{array} \right| \right) + \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_5 & x_1 \\ y_5 & y_1 \end{array} \right| \right) \right) \\
 & + \left(\frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2} - 2\mu^2 \right) \left(\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^2 \left| \begin{array}{cc} x_{2i-1} & x_{2i+2} \\ y_{2i-1} & y_{2i+2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{2i} & x_{2i+1} \\ y_{2i} & y_{2i+1} \end{array} \right| \right) + \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_5 & x_2 \\ y_5 & y_2 \end{array} \right| \right) \right) \\
 & + \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^2 \left| \begin{array}{cc} x_{2i-1} & x_{2i+1} \\ y_{2i-1} & y_{2i+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{2i} & x_{2i+2} \\ y_{2i} & y_{2i+2} \end{array} \right| \right) + \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_5 & x_1 \\ y_5 & y_1 \end{array} \right| \right) \right) \\
 & = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1P_3P_5} + \bar{S}_{P_2P_4P_1}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1P_4P_5P_2P_3}).
 \end{aligned}$$



$\Delta M_1M_3M_5$ 的面積 = 21.59 厘米²
 $\Delta N_1N_3N_5$ 的面積 = 3.26 厘米²
 $\Delta P_2P_4P_1$ 的面積 = 12.89 厘米²
 $\Delta P_1P_3P_5$ 的面積 = 13.53 厘米²
 $P_1P_4P_5P_2P_3$ 的面積 = 17.70 厘米²

$$\frac{\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \cdot ((\Delta P_1P_3P_5 \text{ 的面積}) + (\Delta P_2P_4P_1 \text{ 的面積})) + \left(2 \cdot \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \right) \cdot P_1P_4P_5P_2P_3 \text{ 的面積}}{(\Delta M_1M_3M_5 \text{ 的面積}) + (\Delta N_1N_3N_5 \text{ 的面積})} = 1.00000$$

△ 圖 12：五邊形 mod 2 餘 1 的跳點多邊形之有向面積定值。

□

利用一樣的證明方式可以得出封閉六邊形、封閉七邊形的 mod 2 跳點多邊形之有向面積定值，版面有限而在此省略證明過程。

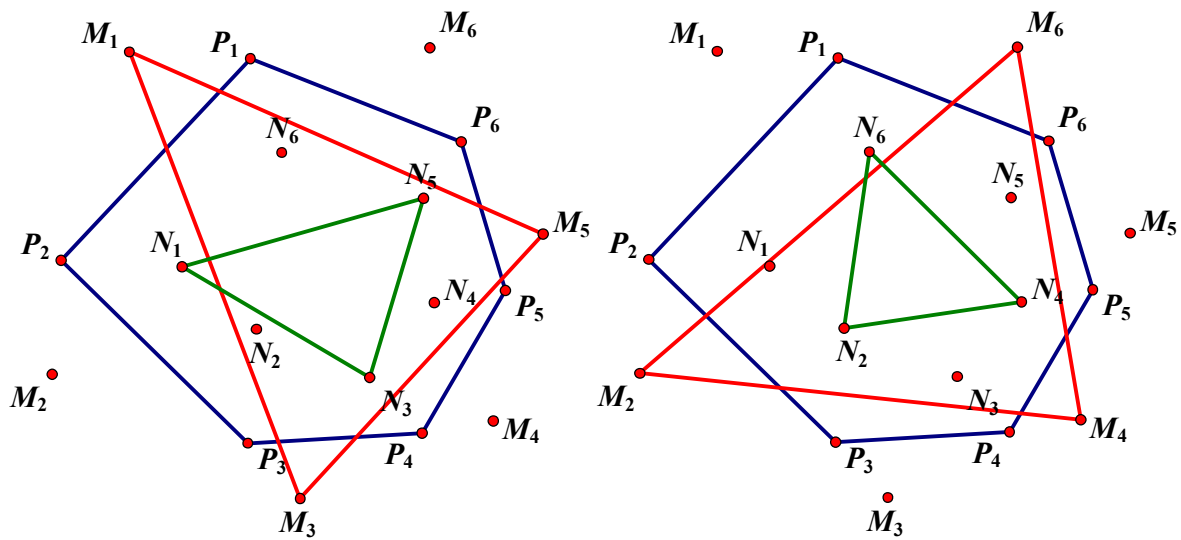
(二) 六邊形

性質 26.(六邊形，模 2)

$$(1) \bar{S}_{M_1M_3M_5} + \bar{S}_{N_1N_3N_5} = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_1P_3P_5} + \bar{S}_{P_2P_4P_6}) + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) (\bar{S}_{P_1P_4P_5P_2P_3P_6})$$

$$(2) \bar{S}_{M_2M_4M_6} + \bar{S}_{N_2N_4N_6} = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_2P_4P_6} + \bar{S}_{P_1P_3P_5}) + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) (\bar{S}_{P_2P_5P_6P_3P_4P_1})$$

證明. 如性質 25，在此省略。



△ 圖 13：六邊形 mod 2 跳點多邊形。

□

(三) 七邊形

性質 27.(七邊形，模 2)

$$(1) \bar{S}_{M_1M_3M_5M_7} + \bar{S}_{N_1N_3N_5N_7} = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_1P_3P_5P_7} + \bar{S}_{P_2P_4P_6P_1}) + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) (\bar{S}_{P_1P_4P_5} + \bar{S}_{P_2P_3P_6P_7})$$

$$(2) \bar{S}_{M_2M_4M_6} + \bar{S}_{N_2N_4N_6} = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_2P_4P_6} + \bar{S}_{P_3P_5P_7}) + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) \bar{S}_{P_2P_5P_6P_3P_4P_7}$$

證明. 如性質 25，在此省略。

□

從封閉五邊形、封閉六邊形到封閉七邊形中發現有趣的規律性，接下來針對封閉偶邊形、封閉奇邊形進行一般化。

(四) 一般化偶邊形 $n = 2k$

定理 28.($2k$ 邊形, 模 2 餘 1) $\bar{S}_{M_1 M_3 M_5 \dots M_{2k-1}} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 \dots N_{2k-1}}$ 的有向面積定值

證明.

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_1 M_3 M_5 \dots M_{2k-1}} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 \dots N_{2k-1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\begin{vmatrix} x_{2i} & x_{2i+2} \\ y_{2i} & y_{2i+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2i-1} & x_{2i+1} \\ y_{2i-1} & y_{2i+1} \end{vmatrix} \right) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\begin{vmatrix} x_{2i} & x_{2i+1} \\ y_{2i} & y_{2i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2i-1} & x_{2i+2} \\ y_{2i-1} & y_{2i+2} \end{vmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

(1) $2k \equiv 0 \pmod{4}$ 時 (例如: 四邊形、八邊形、十二邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_1 M_3 M_5 \dots M_{2k-1}} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 \dots N_{2k-1}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 \dots P_{2k-3} P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 \dots P_{2k-2} P_{2k}}) + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1 P_4 P_5 \dots P_{2k-4} P_{2k-3} P_{2k}} + \bar{S}_{P_2 P_3 P_6 \dots P_{2k-5} P_{2k-2} P_{2k-1}}). \end{aligned}$$

(2) $2k \equiv 2 \pmod{4}$ 時 (例如: 六邊形、十邊形、十四邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_1 M_3 M_5 \dots M_{2k-1}} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 \dots N_{2k-1}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 \dots P_{2k-3} P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 \dots P_{2k-2} P_{2k}}) + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_1 P_4 P_5 \dots P_{2k-5} P_{2k-2} P_{2k-1} P_2 P_3 P_6 \dots P_{2k-4} P_{2k-3} P_{2k}}. \end{aligned}$$

□

定理 29.($2k$ 邊形, 模 2 餘 2) $\bar{S}_{M_2 M_4 M_6 \dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_2 N_4 N_6 \dots N_{2k}}$ 的有向面積定值

證明. 定理 29 與定理 28 是相同結構, 只要將所有頂點 P_i 換成 P_{i+1} 即可證明

(1) $2k \equiv 0 \pmod{4}$ 時 (例如: 四邊形、八邊形、十二邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_2 M_4 M_6 \dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_2 N_4 N_6 \dots N_{2k}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2 P_4 \dots P_{2k-2} P_{2k}} + \bar{S}_{P_3 P_5 \dots P_{2k-1} P_1}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2 P_5 P_6 \dots P_{2k-3} P_{2k-2} P_1} + \bar{S}_{P_3 P_4 P_7 \dots P_{2k-4} P_{2k-1} P_{2k}}). \end{aligned}$$

(2) $2k \equiv 2 \pmod{4}$ 時 (例如: 六邊形、十邊形、十四邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_2 M_4 M_6 \dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_2 N_4 N_6 \dots N_{2k}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2 P_4 \dots P_{2k-2} P_{2k}} + \bar{S}_{P_3 P_5 \dots P_{2k-1} P_1}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_2 P_5 P_6 \dots P_{2k-4} P_{2k-1} P_{2k} P_3 P_4 P_7 \dots P_{2k-3} P_{2k-2} P_1}. \end{aligned}$$

□

(五) 一般化奇邊形 $n = 2k + 1$

定理 30.($2k + 1$ 邊形, 模 2 餘 1) $\bar{S}_{M_1 M_3 M_5 \dots M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 \dots N_{2k+1}}$ 的有向面積定值

證明. 與定理 28 的偶邊形之方法相同。

(1) $2k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ 時 (例如：五邊形、九邊形、十三邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_1 M_3 M_5 \dots M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 \dots N_{2k+1}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k+1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k} P_1}) + \\ &2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_1 P_4 P_5 \dots P_{2k-5} P_{2k-2} P_{2k-1}}. \end{aligned}$$

(2) $2k + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ 時 (例如：三角形、七邊形、十一邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_1 M_3 M_5 \dots M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 \dots N_{2k+1}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{2k+1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_{2k} P_1}) + \\ &2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1 P_4 P_5 \dots P_{2k-5} P_{2k-2} P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2 P_3 P_6 \dots P_{2k-3} P_{2k} P_{2k+1}}). \end{aligned}$$

□

定理 31. ($2k + 1$ 邊形, 模 2 餘 2) $\bar{S}_{M_2 M_4 M_6 \dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_2 N_4 N_6 \dots N_{2k}}$ 的有向面積定值

證明. 與定理 28 的偶邊形之方法相同。

(1) $2k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ 時 (例如：五邊形、九邊形、十三邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_2 M_4 M_6 \dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_2 N_4 N_6 \dots N_{2k}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2 P_4 \dots P_{2k-2} P_{2k}} + \bar{S}_{P_3 P_5 \dots P_{2k-1} P_{2k+1}}) + \\ &2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2 P_5 P_6 \dots P_{2k-3} P_{2k-2} P_{2k+1}} + \bar{S}_{P_3 P_4 P_7 \dots P_{2k-4} P_{2k-1} P_{2k}}). \end{aligned}$$

(2) $2k + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ 時 (例如：三角形、七邊形、十一邊形、...)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{M_2 M_4 M_6 \dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_2 N_4 N_6 \dots N_{2k}} &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2 P_4 \dots P_{2k-2} P_{2k}} + \bar{S}_{P_3 P_5 \dots P_{2k-1} P_{2k+1}}) + \\ &2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_2 P_5 P_6 \dots P_{2k-4} P_{2k-1} P_{2k} P_3 P_4 P_7 \dots P_{2k-3} P_{2k-2} P_{2k+1}}. \end{aligned}$$

□

討論

依據定理 28 到定理 31 將偶邊形和奇邊形分別就模 2 餘 1 和模 2 餘 2 進行證明，總共分為八類。我們發現規律性：有向面積定值中的常數係數共有兩項。

$$\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \text{ 與 } 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right)$$

更進一步發現

(1) $\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right)$ 乘上兩個封閉多邊形，其頂點足碼的結構均「跳 2」。

(2) $2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right)$ 乘上一個封閉多邊形（可一筆畫）或兩個封閉多邊形，第一個多邊形是其頂點足碼的結構均「先跳 3、後跳 1」持續循環；第二個多邊形是其頂點足碼的結構均「先跳 1、後跳 3」持續循環。

我們將這八個結果統整起來，得出更簡潔的一般化之結果。

$2k + h + a$ 邊形，模 2 餘 a ，其中 $0 \leq h \leq 1, 1 \leq a \leq 2$

$\bar{S}_{M_a M_{a+2} M_{a+4} \dots M_{a+2k}} + \bar{S}_{N_a N_{a+2} N_{a+4} \dots N_{a+2k}}$ 的有向面積定值

第一類： k 為偶數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+2} M_{a+4} \dots M_{a+2k}} + \bar{S}_{N_a N_{a+2} N_{a+4} \dots N_{a+2k}} \\ &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_a P_{a+2} P_{a+4} \dots P_{a+2k-2} P_{a+2k}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+3} P_{a+5} \dots P_{a+2k-1} P_{a+2k+1}}) + \\ & 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) \bar{S}_{P_a P_{a+3} P_{a+4} \dots P_{a+2k-4} P_{a+2k-1} P_{a+2k} P_{a+1} P_{a+2} P_{a+5} \dots P_{a+2k-1} P_{a+2k-2} P_{a+2k+1}}. \end{aligned}$$

第二類： k 為奇數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+2} M_{a+4} \dots M_{a+2k}} + \bar{S}_{N_a N_{a+2} N_{a+4} \dots N_{a+2k}} \\ &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_a P_{a+2} P_{a+4} \dots P_{a+2k-2} P_{a+2k}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+3} P_{a+5} \dots P_{a+2k-1} P_{a+2k+1}}) + \\ & 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) (\bar{S}_{P_a P_{a+3} P_{a+4} \dots P_{a+2k-3} P_{a+2k} P_{a+2k+1}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+2} P_{a+5} \dots P_{a+2k-4} P_{a+2k-1} P_{a+2k}}). \end{aligned}$$

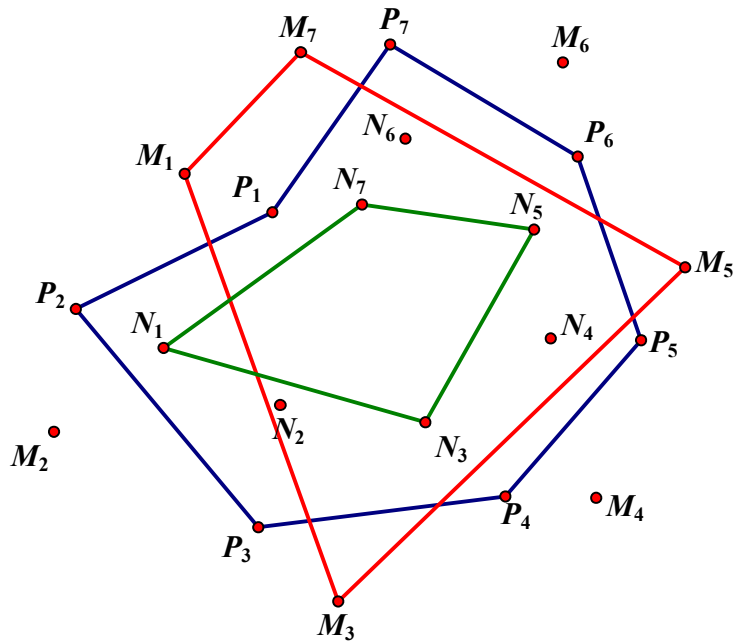
以七邊形為例有兩種情形 $(k, h, a) = (2, 1, 2)$ 、 $(k, h, a) = (3, 0, 1)$

(1) $(k, h, a) = (2, 1, 2)$

$$\bar{S}_{M_2 M_4 M_6} + \bar{S}_{N_2 N_4 N_6} = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_2 P_4 P_6} + \bar{S}_{P_3 P_5 P_7}) + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) \bar{S}_{P_2 P_5 P_6 P_3 P_4 P_7}.$$

(2) $(k, p, a) = (3, 0, 1)$

$$\bar{S}_{M_1 M_3 M_5 M_7} + \bar{S}_{N_1 N_3 N_5 N_7} = \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2\right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 P_7} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 P_1}) + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right) (\bar{S}_{P_1 P_4 P_5} + \bar{S}_{P_2 P_3 P_6 P_7}).$$

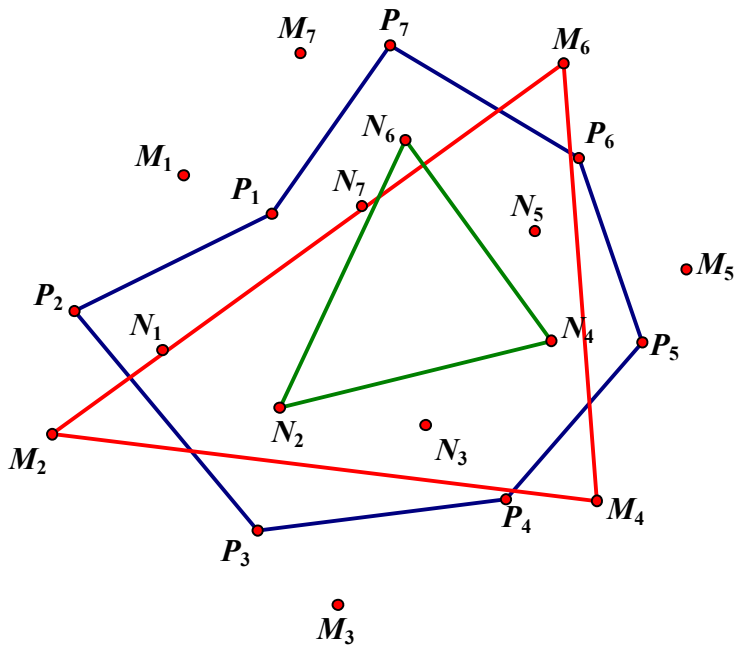


$M_1M_3M_5M_7$ 的面積 + $N_1N_3N_5N_7$ 的面積

= 1.00000

$$\left(\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \cdot (P_1P_3P_5P_7 \text{的面積} + P_2P_4P_6P_1 \text{的面積}) \right) + \left(\left(2 \cdot \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \right) \cdot ((\Delta P_1P_4P_5 \text{的面積}) + P_2P_3P_6P_7 \text{的面積}) \right)$$

△ 圖 14：七邊形「模 2 餘 1」的跳點多邊形。



$(\Delta M_2M_4M_6 \text{的面積}) + (\Delta N_2N_4N_6 \text{的面積})$

= 1.00000

$$\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \cdot ((\Delta P_2P_4P_6 \text{的面積}) + (\Delta P_3P_5P_7 \text{的面積})) + \left(2 \cdot \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \right) \cdot (P_2P_5P_6P_3P_4P_7 \text{的面積})$$

△ 圖 15：七邊形「模 2 餘 2」的跳點多邊形。

3.3.2 mod 3

我們可利用相同的方法得出以下一般化性質：

定理 32. ($3k + h + a$ 邊形，模 3 餘 a 。其中， $0 \leq h \leq 2$ 、 $1 \leq a \leq 3$)

$$\bar{S}_{M_a M_{a+3} M_{a+6} \dots M_{a+3k}} + \bar{S}_{N_a N_{a+3} N_{a+6} \dots N_{a+3k}} \text{ 的有向面積定值}$$

證明.

1. 先考慮三個變數 k 、 h 和模 3 的餘數 a 的構造，在 $3k + h + a$ 邊形中， $0 \leq h \leq 2$ 且 $1 \leq a \leq 3$ ，令 $n = 3k + h + a$ 得出

$$\frac{n-a}{3} = k + \frac{h}{3}$$

$$\text{又 } 0 \leq \frac{h}{3} < 1, \text{ 所以 } k = \left\lfloor \frac{n-a}{3} \right\rfloor$$

2. 考慮因為 $0 \leq \frac{h}{3} < 1$ ，所以 $k = \left\lfloor \frac{n-a}{3} \right\rfloor$ ，又 $n = 3k + h + a$ 為給定值， $a = 1, 2, 3$ 時，分別恰好對應到唯一一個 k 值，此時再得出 h 也是唯一值，因此利用 $3k + h + a$ 邊形的設定，恰好對應到三種外跳點多邊形、內跳點多邊形。
3. 再利用測量師公式與行列式運算，我們就可以將原始多邊形的奇邊形和偶邊形統整起來，並得出以下一般化之結果。

(1) k 為偶數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{3+a} M_{6+a} \dots M_{a+3k}} + \bar{S}_{N_a N_{a+3} N_{a+6} \dots N_{a+3k}} \\ &= \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+3} P_{a+6} \dots P_{a+3k-3} P_{a+3k}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+4} P_{a+7} \dots P_{a+3k-2} P_{a+3k+1}} \right) + \\ & \quad 2 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+4} P_{a+6} \dots P_{a+3k-6} P_{a+3k-2} P_{a+3k} P_{a+1} P_{a+3} P_{a+7} \dots P_{a+3k-5} P_{a+3k-3} P_{a+3k+1}} \end{aligned}$$

(2) k 為奇數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{3+a} M_{6+a} \dots M_{a+3k}} + \bar{S}_{N_a N_{a+3} N_{a+6} \dots N_{a+3k}} \\ &= \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+3} P_{a+6} \dots P_{a+3k-3} P_{a+3k}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+4} P_{a+7} \dots P_{a+3k-2} P_{a+3k+1}} \right) + \\ & \quad 2 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+4} P_{a+6} \dots P_{a+3k-5} P_{a+3k-3} P_{a+3k+1}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+3} P_{a+7} \dots P_{a+3k-6} P_{a+3k-2} P_{a+3k}} \right) \end{aligned}$$

□

如圖 15，我們用九邊形為例。

- (1) 模 3 餘 1 時， $(k, h, a) = (2, 2, 1)$

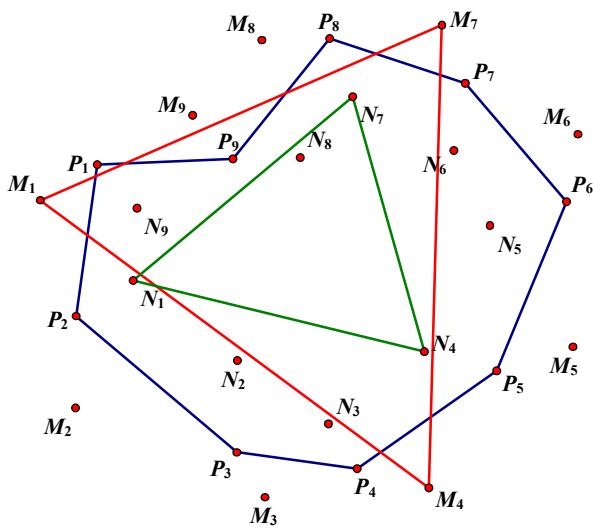
$$\bar{S}_{M_1M_4M_7} + \bar{S}_{N_1N_4N_7} = \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_1P_4P_7} + \bar{S}_{P_2P_5P_8}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_1P_5P_7P_2P_4P_8}$$

(2) 模 3 餘 2 時， $(k, h, a) = (2, 1, 2)$

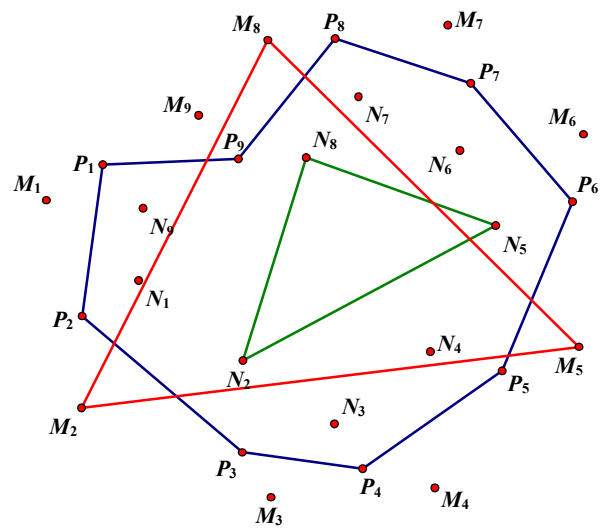
$$\bar{S}_{M_2M_5M_8} + \bar{S}_{N_2N_5N_8} = \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_2P_5P_8} + \bar{S}_{P_3P_6P_9}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_2P_6P_8P_3P_5P_9}$$

(3) 模 3 餘 3 時， $(k, h, a) = (2, 0, 3)$

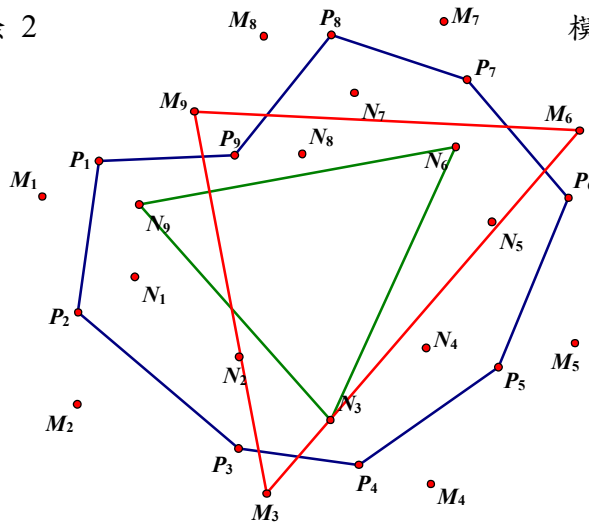
$$\bar{S}_{M_3M_6M_9} + \bar{S}_{N_3N_6N_9} = \left(\frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2} + 2\mu^2 \right) (\bar{S}_{P_3P_6P_9} + \bar{S}_{P_4P_7P_{10}}) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_3P_7P_9P_4P_6P_{10}}$$



模 3 餘 2



模 3 餘 2



模 3 餘 3

△ 圖 16：九邊形 mod 3 跳點多邊形。

3.3.2 一般化： $rk + h + a$ 邊形 mod r 的跳點多邊形之有向面積不變量

由前面 mod 3 得出靈感，利用四個變數 r 、 k 、 h 、 a 來表示任意的封閉多邊形，這是創意之處。設定多邊形為 $rk + h + a$ 邊形， $0 \leq h \leq r - 1$ 、 $1 \leq a \leq r$ ，其中 r 、 k 、 h 、 a 皆為整數。因此 $rk + h + a$ 邊形的取值恰好只有 r 種可能，恰好對應到 r 種外跳點多邊形、內跳點多邊形。這樣的假設解決了分類數量龐大的問題，只需要分成兩類，而非 r 類。

$$\bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}}$$

例如：十一邊形模 5 下的跳點多邊形，即 $(k, h, a) = (2, 0, 1)$ 、 $(1, 1, 5)$ 、 $(1, 2, 4)$ 、 $(1, 3, 3)$ 、 $(1, 4, 2)$ ，共有五種。

定理 33. 平行四邊形構造下 ($rk + h + a$ 邊形，模 r 餘 a 。其中， $0 \leq h \leq r - 1$ 、 $1 \leq a \leq r$)

$$\bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} \text{ 的有向面積定值}$$

證明。

注意到，先考慮幾個變數 k 、 h 和模 r 的餘數 a 的巧妙構造，再利用測量師公式與行列式運算，我們就可以將原始多邊形的奇邊形和偶邊形統整起來，並得出以下一般化之結果。

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{ri-r+a+1} + x_{ri-r+a}}{1+\lambda} + \mu(y_{ri-r+a+1} - y_{ri-r+a}) & \frac{\lambda x_{ri+a+1} + x_{ri+a}}{1+\lambda} + \mu(y_{ri+a+1} - y_{ri+a}) \\ \frac{\lambda y_{ri-r+a+1} + y_{ri-r+a}}{1+\lambda} - \mu(x_{ri-r+a+1} - x_{ri-r+a}) & \frac{\lambda y_{ri+a+1} + y_{ri+a}}{1+\lambda} - \mu(x_{ri+a+1} - x_{ri+a}) \end{array} \right| + \right. \\ & \left. \left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{ri-r+a} + x_{ri-r+a+1}}{1+\lambda} - \mu(y_{ri-r+a+1} - y_{ri-r+a}) & \frac{\lambda x_{ri+a} + x_{ri+a+1}}{1+\lambda} - \mu(y_{ri+a+1} - y_{ri+a}) \\ \frac{\lambda y_{ri-r+a} + y_{ri-r+a+1}}{1+\lambda} + \mu(x_{ri-r+a+1} - x_{ri-r+a}) & \frac{\lambda y_{ri+a} + y_{ri+a+1}}{1+\lambda} + \mu(x_{ri+a+1} - x_{ri+a}) \end{array} \right| \right) + \\ & \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{kr+a+1} + x_{kr+a}}{1+\lambda} + \mu(y_{kr+a+1} - y_{kr+a}) & \frac{\lambda x_{a+1} + x_a}{1+\lambda} + \mu(y_{a+1} - y_a) \\ \frac{\lambda y_{kr+a+1} + y_{kr+a}}{1+\lambda} - \mu(x_{kr+a+1} - x_{kr+a}) & \frac{\lambda y_{a+1} + y_a}{1+\lambda} - \mu(x_{a+1} - x_a) \end{array} \right| + \right. \\ & \left. \left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{kr+a} + x_{kr+a+1}}{1+\lambda} - \mu(y_{kr+a+1} - y_{kr+a}) & \frac{\lambda x_a + x_{a+1}}{1+\lambda} - \mu(y_{a+1} - y_a) \\ \frac{\lambda y_{kr+a} + y_{kr+a+1}}{1+\lambda} + \mu(x_{kr+a+1} - x_{kr+a}) & \frac{\lambda y_a + y_{a+1}}{1+\lambda} + \mu(x_{a+1} - x_a) \end{array} \right| \right) \right). \end{aligned}$$

化簡後得出

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} = \\ & \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \left(\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a} & x_{ri+a} \\ y_{ri-r+a} & y_{ri+a} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a+1} & x_{ri+a+1} \\ y_{ri-r+a+1} & y_{ri+a+1} \end{array} \right| \right) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\mu^2) \left(\left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a} & x_{ri+a+1} \\ y_{ri-r+a} & y_{ri+a+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a+1} & x_{ri+a} \\ y_{ri-r+a+1} & y_{ri+a} \end{array} \right| \right) + \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\left| \begin{array}{cc} x_{kr+a+1} & x_{a+1} \\ y_{kr+a+1} & y_{a+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{kr+a} & x_a \\ y_{kr+a} & y_a \end{array} \right| \right) + 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\left| \begin{array}{cc} x_{kr+a+1} & x_a \\ y_{kr+a+1} & y_a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{kr+a} & x_{a+1} \\ y_{kr+a} & y_{a+1} \end{array} \right| \right).$$

由於 k 的奇偶性會影響到以下是否為一筆畫圖形

$$2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a} & x_{ri+a+1} \\ y_{ri-r+a} & y_{ri+a+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a+1} & x_{ri+a} \\ y_{ri-r+a+1} & y_{ri+a} \end{array} \right| \right) + \frac{1}{2} \left(\left| \begin{array}{cc} x_{kr+a+1} & x_a \\ y_{kr+a+1} & y_a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{kr+a} & x_{a+1} \\ y_{kr+a} & y_{a+1} \end{array} \right| \right) \right).$$

所以，我們分別討論

(1) k 為偶數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} \\ &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} \right) + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr} P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr+1}} \end{aligned}$$

(2) k 為奇數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+kr}} \\ &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} \right) + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr+1}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr}} \right) \end{aligned}$$

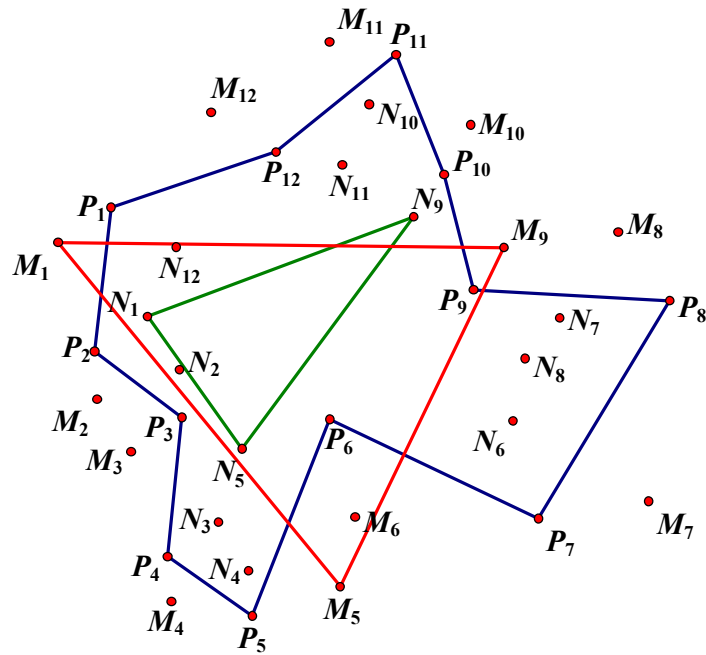
□

結果 34. mod r 的跳點多邊形之有向面積定值之結構

(1) $\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right)$ 乘上兩個封閉多邊形，其頂點足碼的結構均「跳 r 」。

(2) $2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right)$ 乘上一個封閉多邊形（可一筆畫）或兩個封閉多邊形，第一個多邊形是其頂點足碼的結構均「先跳 $r+1$ 、後跳 $r-1$ 」持續循環；第二個多邊形是其頂點足碼的結構均「先跳 $r-1$ 、後跳 $r+1$ 」持續循環。

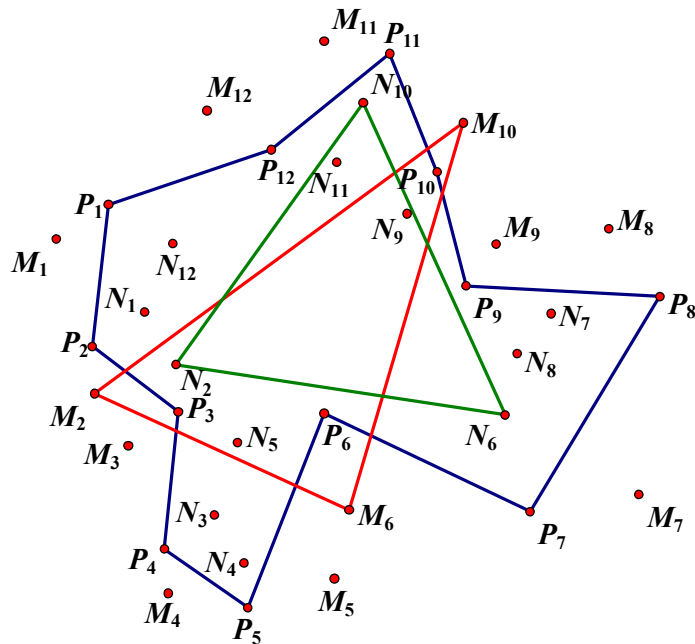
下圖 17 是十二邊形 mod 4 的跳點多邊形（共有四種，版面有限只列兩種）為例。



$(\triangle M_1M_3M_9\text{的面積}) + (\triangle N_1N_2N_3\text{的面積})$

$$\frac{\left(\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \cdot ((\triangle P_1P_3P_9\text{的面積}) + (\triangle P_2P_6P_{10}\text{的面積})) \right) + \left(\left(2 \cdot \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \right) \cdot P_1P_6P_9P_2P_3P_{10}\text{的面積} \right)}{= 1.00000}$$

模 4 餘 1



$(\triangle M_2M_6M_{10}\text{的面積}) + (\triangle N_2N_6N_{10}\text{的面積})$

$$\frac{\left(\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \cdot ((\triangle P_2P_6P_{10}\text{的面積}) + (\triangle P_3P_7P_{11}\text{的面積})) \right) + \left(\left(2 \cdot \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \right) \cdot P_2P_7P_{10}P_3P_6P_{11}\text{的面積} \right)}{= 1.00000}$$

模 4 餘 2

△ 圖 17：十二邊形 mod 4 跳點多邊形。

3.4 箏形構造下，「 $\text{mod } r$ 」的跳點多邊形之有向面積不變量

我們同樣利用四個變數 r 、 k 、 h 、 a 來表示任意的封閉多邊形。多邊形為 $rk + h + a$ 邊形， $0 \leq h \leq r - 1$ 、 $1 \leq a \leq r$ ， $rk + h + a$ 邊形的取值恰好只有 r 種可能，對應到 r 種外跳點多邊形、內跳點多邊形。

定理 35. 箏形構造下 ($rk + h + a$ 邊形，模 r 餘 a 。其中， $0 \leq h \leq r - 1$ 、 $1 \leq a \leq r$)

$$\bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} \text{ 的有向面積定值}$$

證明.

考慮幾個變數 k 、 h 和模 r 的餘數 a 的構造，再利用測量師公式與行列式運算，我們就可以將原始多邊形的奇邊形和偶邊形統整起來，並得出以下一般化之結果。

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} = \\ & \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{ri-r+a+1} + x_{ri-r+a}}{1+\lambda} + \mu(y_{ri-r+a+1} - y_{ri-r+a}) & \frac{\lambda x_{ri+a+1} + x_{ri+a}}{1+\lambda} + \mu(y_{ri+a+1} - y_{ri+a}) \\ \frac{\lambda y_{ri-r+a+1} + y_{ri-r+a}}{1+\lambda} - \mu(x_{ri-r+a+1} - x_{ri-r+a}) & \frac{\lambda y_{ri+a+1} + y_{ri+a}}{1+\lambda} - \mu(x_{ri+a+1} - x_{ri+a}) \end{array} \right| + \right. \\ & \left. \left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{ri-r+a+1} + x_{ri-r+a}}{1+\lambda} - \mu(y_{ri-r+a+1} - y_{ri-r+a}) & \frac{\lambda x_{ri+a+1} + x_{ri+a}}{1+\lambda} - \mu(y_{ri+a+1} - y_{ri+a}) \\ \frac{\lambda y_{ri-r+a+1} + y_{ri-r+a}}{1+\lambda} + \mu(x_{ri-r+a+1} - x_{ri-r+a}) & \frac{\lambda y_{ri+a+1} + y_{ri+a}}{1+\lambda} + \mu(x_{ri+a+1} - x_{ri+a}) \end{array} \right| \right) + \\ & \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{kr+a+1} + x_{kr+a}}{1+\lambda} + \mu(y_{kr+a+1} - y_{kr+a}) & \frac{\lambda x_{a+1} + x_a}{1+\lambda} + \mu(y_{a+1} - y_a) \\ \frac{\lambda y_{kr+a+1} + y_{kr+a}}{1+\lambda} - \mu(x_{kr+a+1} - x_{kr+a}) & \frac{\lambda y_{a+1} + y_a}{1+\lambda} - \mu(x_{a+1} - x_a) \end{array} \right| + \right. \\ & \left. \left| \begin{array}{cc} \frac{\lambda x_{kr+a+1} + x_{kr+a}}{1+\lambda} - \mu(y_{kr+a+1} - y_{kr+a}) & \frac{\lambda x_{a+1} + x_a}{1+\lambda} - \mu(y_{a+1} - y_a) \\ \frac{\lambda y_{kr+a+1} + y_{kr+a}}{1+\lambda} + \mu(x_{kr+a+1} - x_{kr+a}) & \frac{\lambda y_{a+1} + y_a}{1+\lambda} + \mu(x_{a+1} - x_a) \end{array} \right| \right) \right). \end{aligned}$$

化簡後得出

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} = \\ & \left(\sum_{i=1}^k \left(\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a+1} & x_{ri+a+1} \\ y_{ri-r+a+1} & y_{ri+a+1} \end{array} \right| + \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a} & x_{ri+a} \\ y_{ri-r+a} & y_{ri+a} \end{array} \right| + \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \mu^2 \right) \left(\left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a} & x_{ri+a+1} \\ y_{ri-r+a} & y_{ri+a+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{ri-r+a+1} & x_{ri+a} \\ y_{ri-r+a+1} & y_{ri+a} \end{array} \right| \right) + \left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \left| \begin{array}{cc} x_{kr+a+1} & x_{a+1} \\ y_{kr+a+1} & y_{a+1} \end{array} \right| + \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \mu^2 \right) \left| \begin{array}{cc} x_{kr+a} & x_a \\ y_{kr+a} & y_a \end{array} \right| + \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\left| \begin{array}{cc} x_{kr+a+1} & x_a \\ y_{kr+a+1} & y_a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{kr+a} & x_{a+1} \\ y_{kr+a} & y_{a+1} \end{array} \right| \right) \right). \end{aligned}$$

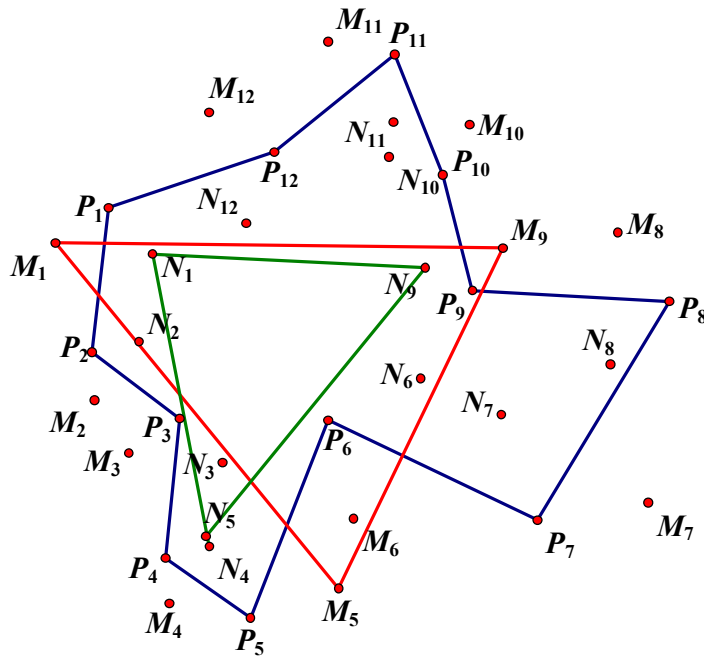
同定理 33，我們分別討論

(1) k 為偶數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} \\ &= 2 \left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} + \\ & 2 \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr} P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr+1}} \end{aligned}$$

(2) k 為奇數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+kr}} \\ &= 2 \left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} + \\ & 2 \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr+1}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr}} \end{aligned}$$



$(\triangle M_1 M_5 M_9 \text{的面積}) + (\triangle N_1 N_5 N_9 \text{的面積})$

$$\left(2 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \right) \cdot (\triangle P_2 P_6 P_{10} \text{的面積}) + \left(2 \cdot \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \right) \cdot (\triangle P_1 P_5 P_9 \text{的面積}) + \left(2 \cdot \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \right) \cdot P_1 P_6 P_9 P_2 P_5 P_{10} \text{的面積} = 1.00000$$

模 4 餘 1

△ 圖 18：十二邊形 mod 4 跳點多邊形。

□

4. 討論與應用

4.1 重心多邊形之有向面積不變量的應用

本研究的第一部分是「重心多邊形的有向面積不變量」。在平面上分別以任意多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的 n 個邊為平行四邊形或箏形的對角線，構作 n 個相似平行四邊形或箏形 $P_1M_1P_2N_1 \sim P_2M_2P_3N_2 \sim P_3M_3P_4N_3 \sim \dots \sim P_nM_nP_1N_n$ 。另取一動點 Q ，令 $\triangle QM_kN_k$ 的重心為 G_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) 則我們得出性質 16 的重心多邊形 $G_1G_2G_3 \dots G_n$ 面積的定值。

$$\text{重心偶多邊形 } S_{G_1G_2G_3 \dots G_{2k}} = \frac{1}{9} (S_{P_2P_4 \dots P_{2k}} + S_{P_1P_3 \dots P_{2k-1}} + 2S_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k}})$$

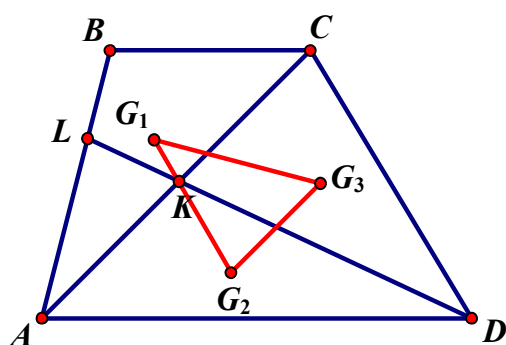
$$\text{重心奇多邊形 } S_{G_1G_2G_3 \dots G_{2k+1}} = \frac{1}{9} (S_{P_1P_3 \dots P_{2k+1}P_2P_4 \dots P_{2k}} + 2S_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k+1}})$$

由性質 16 可知道重心多邊形 $G_1G_2G_3 \dots G_n$ 面積與平行四邊形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 無關！

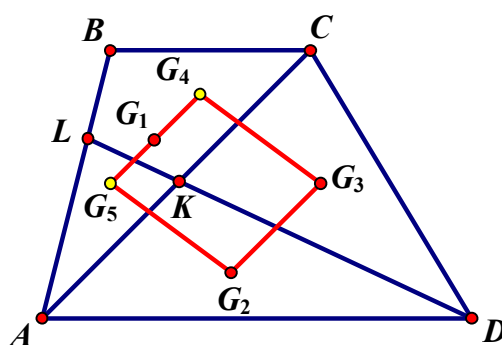
我們將性質 16 進行應用討論。

梁勇能在數學傳播季刊的一篇文章〈梯形內一塊四邊形面積的探討〉提出一個性質（詳閱 [2] 的第 44 與 45 頁）。

如圖 19-1 給定一個梯形 $ABCD$ ， L 在 \overline{AB} 上， \overline{DL} 與 \overline{AC} 交於 K ， $\triangle ABC$ 、 $\triangle AKD$ 、 $\triangle CKD$ 的重心 G_1 、 G_2 、 G_3 所圍成的三角形 $\triangle G_1G_2G_3$ 面積是梯形 $ABCD$ 的九分之一。



△ 圖 19-1



△ 圖 19-2

【證明】

本研究定義的重心多邊形面積與平行四邊形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 無關，因此可以直接將平行四邊形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 退化成邊 $\overline{P_kP_{k+1}}$ ，如圖 19-2，我們分別構造 $\triangle ABK$ 、 $\triangle BCK$ 、 $\triangle CDK$ 、 $\triangle DAK$ 的重心 G_5 、 G_4 、 G_3 、 G_2 。根據性質 16， $S_{G_5G_4G_3G_2} = \frac{2}{9} S_{P_1P_2P_3P_4}$ ，且 $G_5G_4G_3G_2$ 是平行四邊形。再考慮 $\triangle ABC$ 的重心 G_1 ，因為 K 在 \overline{AC} 上，所以 G_5 、 G_4 、 G_1 必定共線，因此 $S_{G_1G_2G_3} =$

$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{9} S_{P_1 P_2 P_3 P_4} \right) = \frac{1}{9} S_{P_1 P_2 P_3 P_4}$ 。注意到，這個面積定值的性質跟梯形無關，換句話說，任意凸、凹四邊形都成立。

4.2 跳點多邊形之有向面積不變量的應用

陳子瑜、林羿霏、尤圓淨提出的全國科展作品〈超級比一比—多種形狀面積比例分配的研究〉中，探討「在任意 K 邊形 Γ ，各邊以相同比例取分點，依序連接各分點形成一新多邊形 Γ' ，判斷新圖形和原圖形是否相似？找出新圖形和原圖形面積比值的公式及範圍。」

他們將 K 邊形 Γ 與 Γ' 切割成 $K-2$ 個三角形，再用三角函數計算面積，他們的結論如下（詳閱[3]的第 13 與 14 頁）。

K 邊形 Γ ，邊長依序為 a_1 、 a_2 、 a_3 、 \dots 、 a_K ，各內角依序為 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 \dots 、 θ_K 。

1、依序在 K 邊形 Γ 各邊以 $m:n$ 比例取 K 個分點形成新 K 邊形 Γ' ，則

(1) K 邊形 Γ' 與 K 邊形 Γ 不相似。

(2) $\frac{K \text{ 邊形 } \Gamma' \text{ 面積}}{K \text{ 邊形 } \Gamma \text{ 面積}} = 1 - \frac{\frac{mn}{(m+n)^2} (a_K a_1 \sin \theta_1 + \sum_{i=1}^{K-1} a_i a_{i+1} \sin \theta_{i+1})}{\sum_{j=1}^{K-2} \left\{ (-1)^{j+1} a_j \cdot \left[\sum_{i=j+1}^{K-1} (-1)^i \cdot a_i \cdot \sin(\theta_{j+1} + \dots + \theta_i) \right] \right\}}$ ，

(3) 面積比值範圍：大於等於 $1 - \frac{(a_K a_1 \sin \theta_1 + \sum_{i=1}^{K-1} a_i a_{i+1} \sin \theta_{i+1})}{4 \cdot \sum_{j=1}^{K-2} \left\{ (-1)^{j+1} a_j \cdot \left[\sum_{i=j+1}^{K-1} (-1)^i \cdot a_i \cdot \sin(\theta_{j+1} + \dots + \theta_i) \right] \right\}}$ ，小於 1。

K 邊形 Γ' 與 K 邊形 Γ 面積比值及面積比值最小值會依邊長及角度不同而不同。

△ 圖 20：陳子瑜、林羿霏、尤圓淨的研究結果。

陳子瑜、林羿霏、尤圓淨的推導出來的式子很複雜，而且 K 邊形 Γ 的每個邊長度和內角都是參數，這樣看不出來相同比例取分點的新多邊形與原多邊形的直接關連。但是利用本研究的第二部份成果（跳點多邊形），即可得出簡潔漂亮的結構。

考慮本研究 mod 1 的跳點多邊形有向面積定值。令 $\lambda = \frac{m}{n}$ 與 $\mu = 0$ ，代入性質 21 與性質 22 可得 K 邊形 Γ' 面積。

(1) 當 K 為偶數

$$\Gamma' \text{ 面積} = \left(\frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_K} + \left(\frac{mn}{(m+n)^2} \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{K-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_K})$$

(2) 當 K 為奇數

$$\Gamma' \text{ 面積} = \left(\frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_K} + \left(\frac{mn}{(m+n)^2} \right) (\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_K P_2 P_4 P_6 \dots P_{K-1}})$$

5. 結論

以多邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ 的邊為對角線構造點對稱與線對稱的兩種四邊形，即相似平行四邊形或相似箏形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 後，考慮兩種構圖，首先，取任一動點 Q 構造三角形 $\triangle QM_kN_k$ ，這些三角形的重心 G_k 形成「重心多邊形 $G_1G_2 \dots G_k$ 」。第二，對所有點 M_k 與點 $N_k \pmod r$ ，分別連接同餘 a 的點 ($a = 1, 2, \dots, r$) 構造全外（全內）的「跳點多邊形」，共有 r 種。透過純幾何與解析幾何研究此二類多邊形與原多邊形的有向面積不變量。

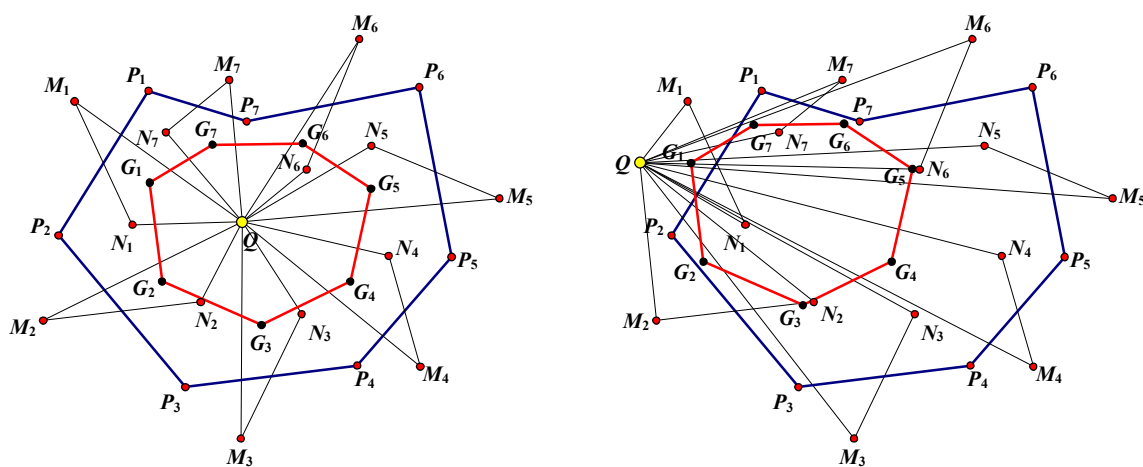
5.1 重心多邊形

首先是利用相似「平行四邊形構造」的重心多邊形，我們利用純幾何發現重心多邊形的剛體運動，以及 $\overline{G_kG_{k+1}} \parallel \overline{T_kT_{k+1}}$ 平行性 (T_k 為 $\overline{P_kP_{k+1}}$ 之中點)，並由此推導重心多邊形與中點多邊形皆相似。

以純幾何、解析幾何先找出重心多邊形與中點多邊形的面積關係，之後給出重心多邊形與原多邊形的面積定值關係。

$$\begin{aligned}\bar{S}_{G_1G_2G_3 \dots G_{2k}} &= \frac{1}{9} (\bar{S}_{P_2P_4 \dots P_{2k}} + \bar{S}_{P_1P_3 \dots P_{2k-1}} + 2\bar{S}_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k}}) \\ \bar{S}_{G_1G_2G_3 \dots G_{2k+1}} &= \frac{1}{9} (\bar{S}_{P_1P_3 \dots P_{2k+1}P_2P_4 \dots P_{2k}} + 2\bar{S}_{P_1P_2P_3 \dots P_{2k+1}})\end{aligned}$$

本研究給出的重心多邊形面積性質可以簡易解決梁勇能在數學傳播季刊所提出的性質 [2]，甚至可以給出更強的結論，成立於任意凸、凹四邊形。



△ 圖 21: 平行四邊形構造的重心多邊形。

第二是以相似「箏形構造」的重心多邊形，本研究用相同方法，發現重心多邊形與分點

多邊形相似，之後給出重心多邊形與原多邊形的面積定值關係。

$$\bar{S}_{G_1G_2G_3\dots G_{2k}} = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_{2k}} + \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \right) (\bar{S}_{P_1P_3P_5\dots P_{2k-1}} + \bar{S}_{P_2P_4P_6\dots P_{2k}}) \right)$$

$$\bar{S}_{G_1G_2G_3\dots G_{2k+1}} = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_{2k+1}} + \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \right) \bar{S}_{P_1P_3P_5\dots P_{2k+1}P_2\dots P_{2k}} \right)$$

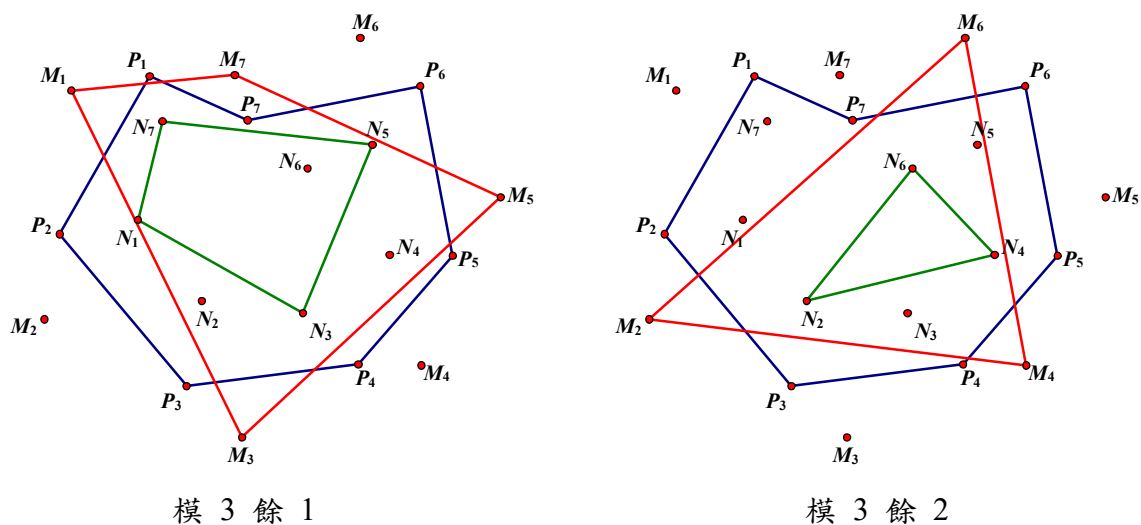
當然，我們也探討內心多邊形、旁心多邊形、外心多邊形、垂心四邊形，結果發現並不存在面積不變量。

5.2 平行四邊形構造下的跳點多邊形

(1) 跳點多邊形的有向面積定值

令平行四邊形 $P_kM_kP_{k+1}N_k$ 的對角線交點為 Q_{M_k} ， $\overline{P_kQ_{M_k}} = \lambda \overline{Q_{M_k}P_{k+1}}$ 且 $\overline{M_kQ_{M_k}} = \mu \overline{P_kP_{k+1}}$ 。我們先特殊化，針對奇邊形與偶邊形的對所有點 M_k 與點 N_k 取 mod 1，用測量師面積公式給出分別連接同餘 1 的點構造的全外（全內）的「跳點多邊形」 $\bar{S}_{M_1M_2M_3\dots M_{2k}} + \bar{S}_{N_1N_2N_3\dots N_{2k}}$ 的面積定值關係式。

用同樣方法繼續討論 mod 2 與 mod 3 的情形，結果發現 mod 2 的跳點多邊形有四種情形（奇邊形餘 1、餘 2、偶邊形餘 1、餘 2），同理，mod 3 的跳點多邊形就有六種情形。如此一來，mod r 就會有 $2r$ 種，因此我們思考討論是否有方法解決這個複雜度？



△ 圖 22：跳點多邊形。

本研究給出一個很有創意的假設法，利用四個變數 r 、 k 、 h 、 a 來表示任意的封閉 n 邊

形的邊數，因為設定多邊形為 $n = rk + h + a$ 邊形，其中 $0 \leq h \leq r - 1$ 、 $1 \leq a \leq r$ 。我們發現 $rk + h + a$ 邊形的取值恰好只有 r 種可能，對應到 r 種外跳點多邊形與內跳點多邊形，這樣的假設解決了分類數量龐大的問題，並將 $\text{mod } r$ 的跳點多邊形變成兩類而已！

利用此具創意的表示法，使用測量師公式求出 $\text{mod } r$ 下同餘 a 的跳點多邊形之有向面積定值關係式。

(A) k 為偶數

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} \\ &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} \right) + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr} P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr+1}} \end{aligned}$$

(B) k 為奇數

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+kr}} \\ &= \left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} \right) + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \left(\bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr+1}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr}} \right) \end{aligned}$$

我們進一步發現有向面積定值中的兩項常數係數頂點跳點的規律。

第一， $\left(\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + 2\mu^2 \right)$ 乘上兩個封閉多邊形，其頂點均「跳 r 」。

第二， $2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right)$ 乘上一個封閉多邊形（可一筆畫）或兩個封閉多邊形，第一個多邊形是其頂點足碼的結構均「先跳 $r+1$ 、後跳 $r-1$ 」持續循環；第二個多邊形則是其頂點足碼的結構均「先跳 $r-1$ 、後跳 $r+1$ 」持續循環。

(2) 跳點多邊形的應用

本研究跳點多邊形有向面積定值關係式可應用於陳子瑜、林羿霏、尤圓淨提出的全國科展作品[3]。令 $\lambda = \frac{m}{n}$ 與 $\mu = 0$ 代入 $\text{mod } 1$ 之公式，則可得到：

$$K \text{ 為偶數：} \Gamma' \text{ 面積} = \left(\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_K} + \left(\frac{mn}{(m+n)^2} \right) \left(\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_{K-1}} + \bar{S}_{P_2 P_4 P_6 \dots P_K} \right)$$

$$K \text{ 為奇數：} \Gamma' \text{ 面積} = \left(\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} \right) \bar{S}_{P_1 P_2 P_3 \dots P_K} + \left(\frac{mn}{(m+n)^2} \right) \left(\bar{S}_{P_1 P_3 P_5 \dots P_K P_2 P_4 P_6 \dots P_{K-1}} \right)$$

5.3 箏形構造下的跳點多邊形

令多邊形為 $n = rk + h + a$ 邊形，其中 $0 \leq h \leq r - 1$ 、 $1 \leq a \leq r$ 。在 $\overline{P_k P_{k+1}}$ 邊上構造箏形 $P_k M_k P_{k+1} N_k$ ，取箏形頂點 $\text{mod } r$ 下同餘 a 的跳點多邊形之有向面積定值關係式。

(A) k 為偶數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+(k-1)r} M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+(k-1)r} N_{a+kr}} \\ &= 2 \left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} + \\ & 2 \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr} P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr+1}}. \end{aligned}$$

(B) k 為奇數時

$$\begin{aligned} & \bar{S}_{M_a M_{a+r} M_{a+2r} \dots M_{a+kr}} + \bar{S}_{N_a N_{a+r} N_{a+2r} \dots N_{a+kr}} \\ &= 2 \left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r+1} P_{a+2r+1} \dots P_{a+(k-1)r+1} P_{a+kr+1}} + \\ & 2 \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r} P_{a+2r} \dots P_{a+(k-1)r} P_{a+kr}} + \\ & 2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right) \bar{S}_{P_a P_{a+r+1} P_{a+2r} P_{a+3r+1} P_{a+4r} \dots P_{a+kr+1}} + \bar{S}_{P_{a+1} P_{a+r} P_{a+2r+1} P_{a+3r} P_{a+4r+1} \dots P_{a+kr}}. \end{aligned}$$

有意思的是，與平行四邊形類似，箏形構造的跳點多邊形其有向面積定值中的三項常數係數頂點也具備跳點的規律。

第一， $2 \left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right)$ 乘上一個封閉多邊形，其頂點均「跳 r 」。

第二， $2 \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2 \right)$ 乘上一個封閉多邊形，其頂點均「跳 r 」。

第三， $2 \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2 \right)$ 乘上一個封閉多邊形（可一筆畫）或兩個封閉多邊形，第一個多邊形是其頂點足碼的結構均「先跳 $r+1$ 、後跳 $r-1$ 」持續循環；第二個多邊形則是其頂點足碼的結構均「先跳 $r-1$ 、後跳 $r+1$ 」持續循環。

6. 參考資料

- [1] 李允兆、許崇淵、王士豪 (2015)。內外有致一類拿破崙多邊形性質及其有向面積定值。第 55 屆全國中小學科展，國中組數學科作品。
- [2] 梁勇能 (2004)。梯形內一塊四邊形面積的探討。數學傳播第 28 卷第 3 期，38 頁-45 頁。
- [3] 陳子瑜、林羿霏、尤圓淨 (2012)。超級比一比—多種形狀面積比例分配的研究。全國第 52 屆中小學科學展覽會國中組數學科作品。

【評語】 010036

本研究目的是分別探討由平行四邊形結構與箏形結構所形成的重心多邊形與跳點多邊形，其面積與原多邊形面積比值為定值的關係。方法是以重心多邊形與中點多邊形、及中點多邊形與原多邊形面積的關係，推導出結果。研究結構頗完整。在分析的方法上，本份作品經由奇、偶， $\text{mod } 2$ 開始一個個計算後分類，得出一個分類方式，也就是將 n 邊形寫成 $rK+h+a$ ，模 r 餘 a ，在平行四邊形和箏形結構下得出有向面積和為定值，算是整份作品的亮點。