2020 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 010027

參展科別 數學

作品名稱 渾「圓」有「定」—從七圓定理到雙心六圓的性質探討與推廣

得獎獎項 大會獎：三等獎

就讀學校 臺北市立麗山高級中學

指導教師 林永發、江秀桂

作者姓名 黎蒨華、黃緯翔

關鍵詞 七圓定理、雙心六圓、極點極線

作者簡介

我是黎蒨華，目前就讀臺北市立麗山高級中學三年級。「與眾不同、獨一無二」是我的人生座右銘，平時喜愛參與營隊講座以驅動靈感與創新泉源，經由多元廣角體驗再結合數學研究的推廣，更是培養了自己跨領域應用的能力。

本次很榮幸能參與國際科展，可盼能拓展自己的視野、與各界高手切磋交流，進而精進自己的研究作品，更是為我高中三年的數學專題研究 畫下一個與眾不同的句點。

我是黃緯翔，就讀臺北市立麗山高中三年級。從小喜歡認識有趣的新知識、觀察和找尋身邊事物的關聯性，也喜歡有趣的數學題目，和對稱有規則的性質、圖形。高中開始投入科展，學習研究方法。希望在國際科展上能和各方交流，並能在此途中認識新事物、發現新知識、擴展自己的視野。

摘要

本研究將從七圓定理出發，探討點、線、圓的各種變化與推廣，試圖改變切圓個數，探討共點的存在性；更進一步推廣「與兩內離圓分別均外切與內切的六個環切圓」之雙心六圓，探討其共點、共線、共圓及共圓錐曲線等性質；研究有驚人的發現「當六個環切圓旋轉時，其各類對應點連線之共點必為定點，且各類共定點之對應共線恆為固定不變。」推廣至不同個數的環切圓時亦成立。當兩內離圓推廣至兩外離圓或是一圓一線時，亦發現其諸線共點、諸點共線、諸點共圓、諸點共圓錐曲線等性質必成立。當雙心六圓由平面推廣至立體情形，亦發現其共點、共線、共圓、共圓錐曲線的特殊變化。

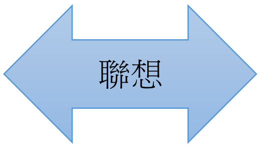
Abstract

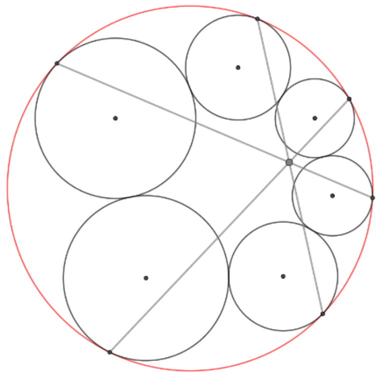
This mathematical research starts from the Seven circles theorem, exploring various changes and extensions of points, lines and circles, and we try to change the number of rounded circles, exploring the existence of the common points; further promoting the "external and internal cuts with the two inner circles" The six circles of the cut six circles cut the circle and explore the properties of the common point, collinearity, co-circle and common conic curve. The research has amazing findings. The common point of the point connection must be a fixed point, and the corresponding collinearity of all kinds of common points is always fixed." It is also true when it is promoted to a different number of circular tangential circles. When the two inner circles are extended to two outer circles or one circle and one line, they are also founded that the properties of the lines are common, the points are collinear, the points are round, and the points are conic. When the double-hearted six circles are extended from the plane to the three-dimensional situation, special changes in the common point, collinearity, co-circle, and common conic curve are also founded.

壹、前言

一、 研究動機

在閱讀有關反演變換的文獻時，意外發現一個有趣、形似湯圓的圖形：在一個大碗中放入六顆湯圓。兩兩均內切的六個小圓，若其兩相鄰均外切，則其對應內切點連線共點，這就是「七圓定理」；雖名為「七圓」，關鍵卻在於其中的「六圓」，如下圖。





圖片來源：2017-12-18 自由時報 http://health.ltn.com.tw/

文獻上除了以不同樣貌出現外，如何尺規作圖？除了諸線共點的性質外，我們亦發現諸點共線、諸點共圓等特性。如果不是六個小圓而是更少圓，甚至更多圓呢？又或同時內外切於兩個內離圓，甚至同時外切於兩個外離圓的情形呢？於是展開本研究。

二、 研究目的及問題

本研究試圖從七圓定理的性質探討與推廣，進而研究雙心六圓，以至多圓時的作圖關係式及共點、共線、共圓、共錐的不變性與對偶性探討，研究問題如下：

（一）探討七圓定理的性質與多圓的推廣。

（二）探討雙心六圓的作圖關係式與性質。

（三）以雙心六圓的結果探討雙心多圓的性質。

（四）試研究雙心多圓在兩外離圓及圓與直線的性質。

（五）七圓定理及雙心多圓在球面及球體上的推廣。

貳、 研究方法或過程

一、 研究工具

主要透過 *GSP* 與 *GeoGebra* 幾何軟體進行幾何問題實驗研究，透過實驗觀察、臆測與驗證，最後提出研究結果並加以證明。

二、 文獻探討

本研究涉及利用反演做三切圓構圖，並透過極點極線、*Ceva*、*Brianchon*、*Pascal* 定理及根心定理等探討共點共線等問題，文獻探討如下：

(一) 反演變換

如圖 0-1，給定平面上半徑為r、圓心為O的圓，對平面上任一異於O的點P，將其變換為$\overrightarrow{OP}$上的一點P'，使得$\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，則稱「**$P'$為$P$互為關於圓$O$的反演點**」。

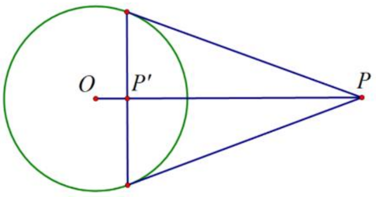


圖 0-1：P對圓 O反演得到P'

【性質 1-1】反演圖形

任一圖形F上所有點作關於O的反演點，形成一新的圖形F'， 稱「**F'為F關於O的反演圖形**」。常用圖形之反演結果如下： (1) 過O之一直線反演成過O之一直線。　(2)不過O之一直線反演成過O之一圓。 (3) 過O之一圓反演成不過O之一直線。　(4)不過O之一圓反演成不過O之一圓。

(二) 反演與極點極線

如圖 0-2，若A'為A關於圓 O的反演點，過A作垂直$\overline{AA'}$的直線 L，則稱「**直線 L 為A'關於圓 O的極線；A'為此直線 L 的極點。**」

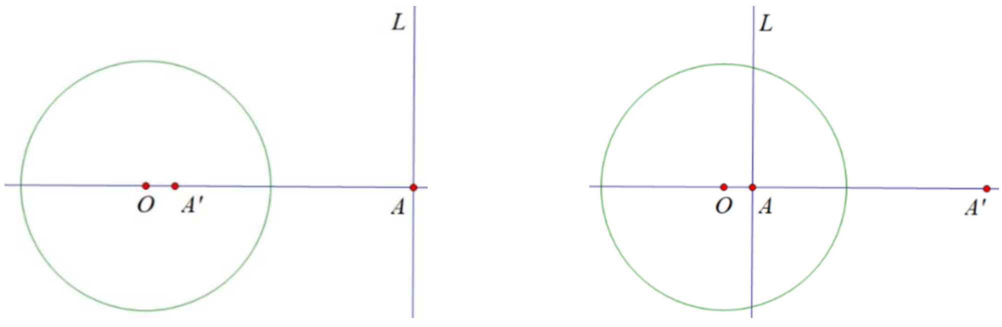


圖 0-2：極點在圓外或圓內的情形

【性質 2-1】極線的判別性質（參見文獻[3]）

過圓錐曲線(圓)Γ外的 P點作兩割線交Γ於 E、F、G、H；作$\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{FG}$交於P'，$\overleftrightarrow{EG}$、$\overleftrightarrow{FH}$交於 N；又$\overleftrightarrow{P'N}$交Γ於 A、B兩點($\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$恰為Γ的兩條切線)，則性質如下：如圖 0-3

(1) $\overleftrightarrow{P'N}$為 P關於O的極線；$\overleftrightarrow{PP'}$為 N關於 O的極線；$\overleftrightarrow{PN}$為P'關於O的極線。

(2) 當 P在Γ外，過 P作Γ的割線，則其兩交點的切線交點(如 M點)必在 P對應的極線上。

(3) 當 P在Γ外時，過 P作Γ的兩條切線，則兩切點的連線為 P的極線。(如$\overleftrightarrow{AB}$)

(4) 當Γ為圓時，上述極點與反演中心的連線垂直所對應的極線。(如$\overleftrightarrow{OP}\perp\overleftrightarrow{P'N}$)

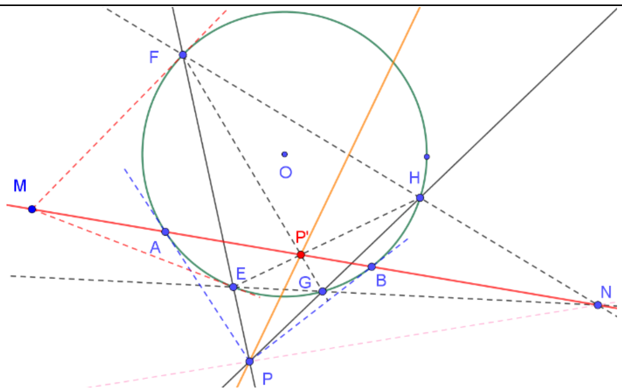


圖 0-3：橢圓時亦成立，但$\overleftrightarrow{OP}$與$\overleftrightarrow{P'N}$不一定垂直

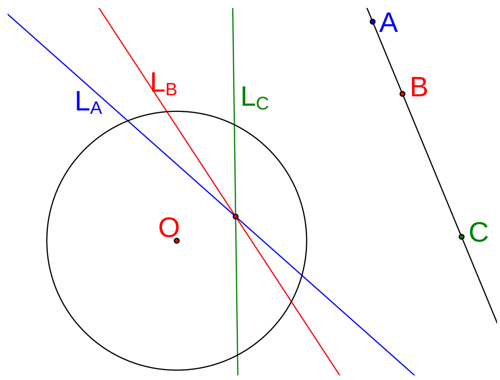


圖 0-4：極點與極線共點共線判別

【性質 2-2】共點共線的極線判別法（參見文獻[1]）

平面上有一圓 O及 A、B、C三點，L_A、L_B、L_C分別為 A、B、C關於圓 O的極線，若 A、B、C三點共線，則L_A、L_B、L_C三線共點，反之亦然。如圖 0-4

(三) *Ceva*、*Brianchon*、*Pascal* 定理與根心定理

【*Ceva* 定理】

(1) 給定三直線圍成ΔABC，且D、E、F分別為直線 $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{CA}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$上一點，若線段$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$共交一點$O$，則 $\overline{AF}\times\overline{BD}\times\overline{CE}=\overline{BF}\times\overline{CD}\times\overline{AE}$，反之亦然。

(2) 給四直線圍成四邊形$ABCD$，E和F，G和H，I和J，K和L分別為$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DA}$上兩點；若AHI、BJK、CLE、DFG均分別共線，且四線共點於O，則$\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BG}}\times\overline{\mathrm{BH}}\times\overline{\mathrm{CI}}\times\overline{\mathrm{CJ}}\times\overline{\mathrm{DK}}\times\overline{\mathrm{DL}}=\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{CG}}\times\overline{\mathrm{CH}}\times\overline{\mathrm{DI}}\times\overline{\mathrm{DJ}}\times\overline{\mathrm{AK}}\times\overline{\mathrm{AL}}$，反之亦然。

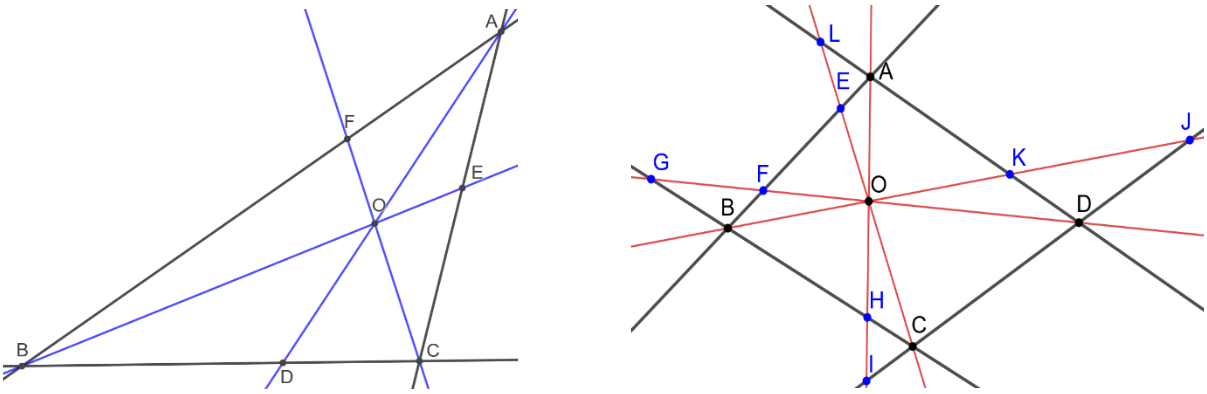


圖 0-5： *Ceva* 定理與推廣至 n 邊形的情形時，也成立。

【*Pascal* 神秘六邊形定理】(簡稱 *Pascal* 定理)

若六邊形內接於一個圓，則其三組對邊的延長線交點共線，反之亦然。如圖 0-6

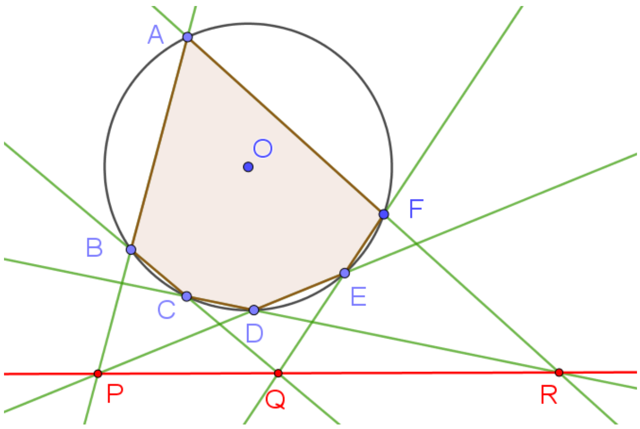


圖 0-6：P、Q、R 三點共 *Pascal* 線

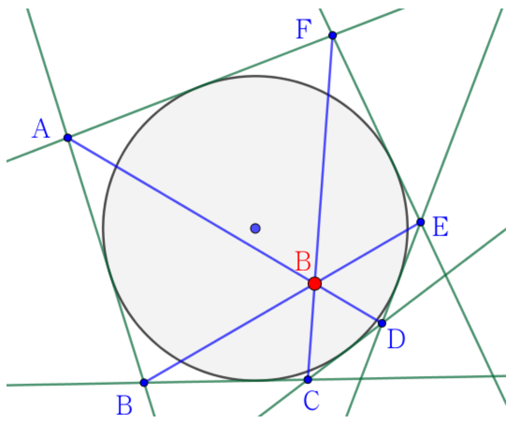


圖 0-7：對角線共交 *Brianchon* 點

【*Brianchon* 定理】

若六邊形外切於一個圓，則其三條對角線必共交一點，反之亦然。如圖 0-7

【根心定理】

平面上圓心不共線的三圓 A、B、C，若L_{AB}、L_{Bc}、L_{CA}分別為圓 A 與 B、圓 B 與 C、圓 C 與 A 的根軸，則L_{AB}、L_{Bc}、L_{CA}三線共點，此點稱為此「三圓 A、B、C 的根心」。如圖 0-8

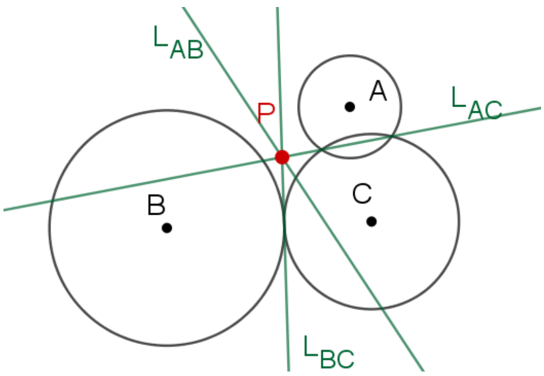


圖 0-8：$L_{AB} \cap L_{Bc} \cap L_{CA} = P$為根心，$P$到三圓切線等長。

參、 研究結果與討論

一、七圓定理的構圖方法、構成條件與性質探討

(一) 七圓定理的構圖方法

除了參考「阿波羅尼奧斯問題-作一圓與三圓相切」，也利用反演簡化七圓定理的構圖。

【作圖 1-1】作一圓與兩圓相切

已知：給定一大圓O與一個小圓O_1內切。
求作：一個小圓O_2，與大圓O內切，並與小圓O_1外切。

<作法>

1. 以A_1為圓心，$\overline{A_1O_1}$為半徑做圓A_1。將圓O 、O_1對圓A_1進行反演，可得兩平行線O' 、$O_1{}'$。
2. 在圓O上任選一點A_2作為圓O_2與O的內切點。
3. 將A_2點對圓A_1反演得到平行直線上一點$A_2{}'$。
4. 在兩平行線上做一切圓O ，並通過$A_2{}'$。將圓$O_2{}'$對圓A_1進行反演，可得到圓O_2，見圖 1-1。

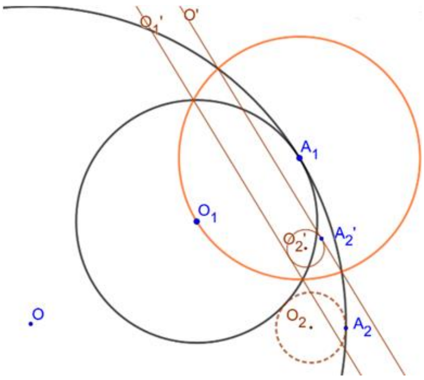


圖 1-1：作一圓與兩圓相切

【作圖 1-2】作一圓與兩平行線及切圓外切

已知：兩平行線L_1、L_2並且圓O_1與L_1相切，如圖。
求作：一圓O_2與L_1和L_2及圓O_1相切

<作法> 如圖 1-2(a)，依圖可知作法。

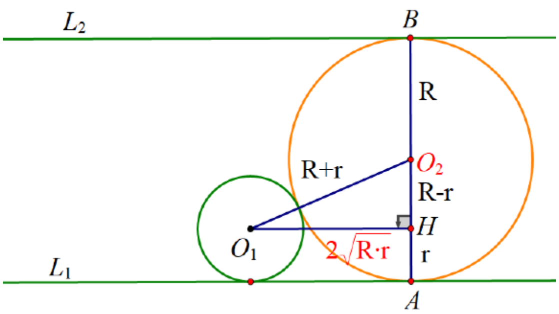


圖 1-2(a)：作一圓與兩平行線及切圓外切

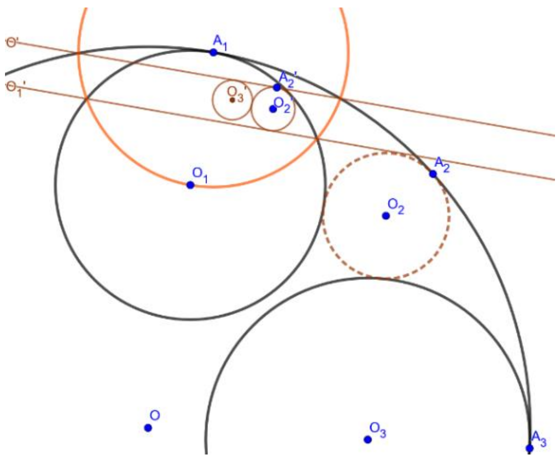


圖 1-2(b)：作一圓與三圓相切

【作圖 1-3】作與三圓相切的圓

已知：給定一大圓O，並與圓O_1、圓O_3均內切。
求作：一個小圓O_2，與大圓O內切，並與圓O_1、圓O_3均外切。

<作法>

1. 以A_1為圓心，$\overline{A_1O_1}$為半徑作圓A_1
2. 圓O、圓O_1、圓O_3對圓A_1進行反演，可得兩平行線O'、O_1'及一圓O_3'與直線O'相切
3. 根據**【作圖 1-2】**，作另一圓O_2'與兩平行線O'、O_1'相切，並外切圓O_3'
4. 圓O_2'對圓A_1進行反演，得圓O_2，即為所求，見圖 1-2(b)。

(二) 七圓定理的構成條件與性質探討

【定理 1-4】圓上弦的 *Ceva* 定理(參考文獻[6])

給定一個圓O及圓上六點 A_1、A_2、 ⋯ 、A_6，若$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6}$共交一點A
則 $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \overline{A_6A_1}$，反之亦然。

<證明>

(⇒) 因為$\angle A_1A_2A_5 = \angle A_1A_4A_5$，$\angle A_2A_1A_4 = \angle A_2A_5A_4$ (對同弧)，故$\Delta A_1A_2A \sim \Delta A_5A_4A$ ，

同理$\Delta A_3A_4A \sim \Delta A_1A_6A$，$\Delta A_5A_6A \sim \Delta A_3A_2A$

$\overline{A_1A_2} : \overline{A_4A_5} = \overline{AA_1} : \overline{AA_5}$ ， $\overline{A_3A_4} : \overline{A_6A_1} = \overline{AA_3} : \overline{AA_1}$ ， $\overline{A_5A_6} : \overline{A_2A_3} = \overline{AA_5} : \overline{AA_3}$

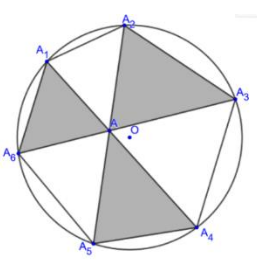
整理後得$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \overline{A_6A_1}$，得證。

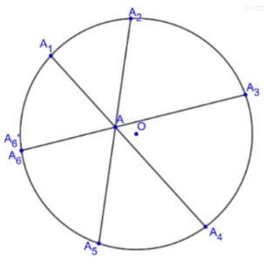
(⇐) 反過來，已知$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \overline{A_6A_1}$⋯⋯(1)

設$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$交於A點，但$\overleftrightarrow{A_3A}$交圓$O$於點$A_6'$，所以$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6'}$共交於$A$點，

根據前述 Ceva 定理，必滿足$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \overline{A_5A_6'} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \overline{A_6'A_1}$⋯⋯(2)

則由(1)(2) $\dfrac{\overline{A_6'A_1}}{\overline{A_5A_6'}} = \dfrac{\overline{A_6A_1}}{\overline{A_5A_6}} \Rightarrow A_6' = A_6$ ，故逆敘述成立。 ∎





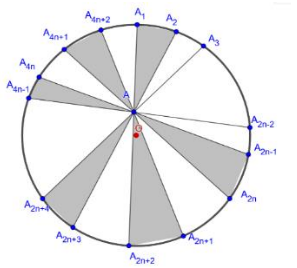


圖 1-3：共點則線段乘積相等　圖 1-4：線段乘積相等則共點　圖 1-5：推廣至 4n+2 的情形

【定理 1-5】圓上弦的 *Ceva* 定理推廣(4*n*+2 的情形)

給定一個圓O及圓上 4*n*+2 個點 A_1、$A_2 \cdots A_{4n+2}$，若 $\overline{A_1A_{2n+2}}$、$\overline{A_2A_{2n+3}}$、$\overline{A_3A_{2n+4}}$、⋯、$\overline{A_{4n+2}A_{2n+1}}$共交一點$A$，則 $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\cdots\times\overline{A_{4n+1}A_{4n+2}}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\cdots\times\overline{A_{4n+2}A_1}$

<證明>

仿照【**定理 1-3**】方法，即可得證，證明省略。

4n 情形不成立，以 n =2為例：已知 $\overline{A_1A_5}$、$\overline{A_2A_6}$、$\overline{A_3A_7}$、⋯、$\overline{A_4A_8}$共交一點A，假設 $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\overline{A_5A_6}\times\overline{A_7A_8}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\overline{A_6A_7}\times\overline{A_8A_1}$成立，但若將$A_1$移近$A_2$時，$\overline{A_1A_2}$會縮小且等號同側$\overline{A_5A_6}$也會跟著縮小，但右式的$\overline{A_8A_1}$與$\overline{A_4A_5}$均變長，因此等式不成立。 ■

【引理 1-6】圓上兩切圓切點距離與半徑關係(參考文獻[6])

1. 兩外切小圓O_1、O_2分別與大圓 O 內切於 A_1、A_2兩點，若其半徑分別為 r_1、r_2與R，則 $\overline{A_1A_2}=2R\sqrt{\frac{r_1}{(R-r_1)}}\sqrt{\frac{r_2}{(R-r_2)}}=2Rf(r_1)f(r_2)$ ，其中$f(r_i)=\sqrt{\frac{r_i}{(R-r_i)}}$ 。
2. 兩外切小圓O_1、O_2分別與大圓 O 外切於 A_1、A_2兩點，若其半徑分別為 r_1、r_2與R，則 $\overline{A_1A_2}=2R\sqrt{\frac{r_1}{(R+r_1)}}\sqrt{\frac{r_2}{(R+r_2)}}=2Rg(r_1)g(r_2)$ ，其中$g(r_i)=\sqrt{\frac{r_i}{(R+r_i)}}$ 。

<證明>

1. 如圖 1-6，作一圓 O 及兩圓O_1、O_2，其中圓 O 半徑大於 O_1、O_2，且三圓 O、O_1、O_2兩兩相切，A為兩圓O_1、O_2的外切點，$\overline{A_1A}$直線交圓於A"，$\overline{A_2A}$直線交圓於A′。
2. 因為$\overline{O_1A_1}$=$\overline{O_1A}$，所以$\angle O_1A_1A=\angle O_1AA_1$，又$\overline{OA"}=\overline{OA_1}$，故$\overline{A''O}//\overline{AO_1}$。同理，$\overline{A'O}//\overline{AO_2}$，又$O_1$、$A$、$O_2$共線，所以 A''、O、A' 共線。$\angle A''A'A_2=\angle A''A_1A_2$ (對同弧)，

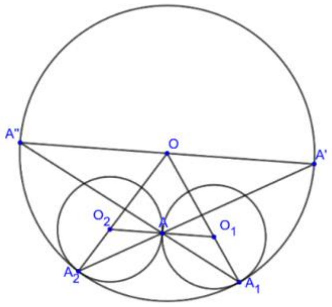


圖 1-6：兩外切圓內切於大圓

$\angle A'A''A_1=\angle A'A_2A_1$ (對同弧)，所以$\triangle AA_1A_2\sim\triangle AA'A''$。

$$\frac{2R}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{AA_1}}=\frac{\overline{AA"}}{\overline{AA_2}}\Rightarrow(\frac{2R}{\overline{A_1A_2}})^2=\frac{\overline{AA'}\times\overline{AA"}}{\overline{AA_1}\times\overline{AA_2}}=\frac{\overline{AA'}\times\overline{AA"}}{\overline{AA_2}\times\overline{AA_1}}=\frac{(R-r_1)}{r_1}\times\frac{(R-r_2)}{r_2}$$

整理後得 $\overline{A_1A_2}=2R\sqrt{\frac{r_1}{(R-r_1)}}\sqrt{\frac{r_2}{(R-r_2)}}$。同理可證(2)，見圖 1-6 ■

【定理 1-7】七圓定理的構成條件

給定半徑R的大圓O，與六個半徑r_1~r_6的小圓O_1~O_6均內切於A_1~A_6(或外切於B_1~B_6)，若此六圓相鄰兩圓均外切，則對應內切點(或外切點)的三條連線共點，如圖 1-7。

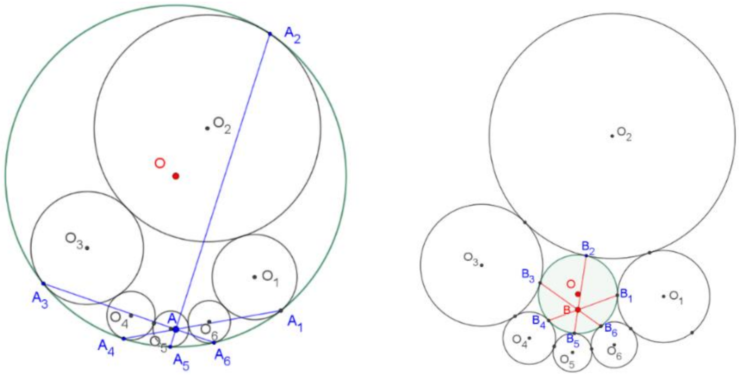


圖 1-7： A、B點均分別為該圓 O之 *Stanley*點

<證明>

(⇒)因為相鄰兩圓均外切且內切於大圓，設$f(r_i)=\sqrt{\frac{r_i}{(R-r_i)}}$，根據前面的**【引理 1-6】**

$$\overline{A_1A_2}=2Rf(r_1)f(r_2)\ 、\overline{A_3A_4}=2Rf(r_3)f(r_4)、\overline{A_5A_6}=2Rf(r_5)f(r_6)$$

$$\overline{A_2A_3}=2Rf(r_2)f(r_3)\ 、\overline{A_4A_5}=2Rf(r_4)f(r_5)、\overline{A_6A_1}=2Rf(r_5)f(r_1)$$

則$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\overline{A_5A_6}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\overline{A_6A_1}$，

由**【定理 1-4】**知$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6}$必共交於一點A。

(⇐)因為對應內切點連線共交一點 A，根據**【定理 1-4】**圓上弦的 *Ceva* 逆定理

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\overline{A_5A_6}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\overline{A_6A_1}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

假設小圓O_1~O_5均內切大圓 O於A_1~A_5，且均與前相鄰圓外切，設第 6 個小圓O_6與小圓O_1 、O_5均外切，但與大圓 O內切於A_6'，則根據前述，$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6'}$必共交於一點A，

又根據**【定理 1-4】**圓上弦的 *Ceva* 逆定理

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\overline{A_5A_6'}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\overline{A_6'A_1}\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

由(1)(2)可知 $A_6'=A_6$，故 6 個小圓兩相鄰圓均外切，得證。仿照(1)，(2)即可得證。 ■

上述 A點與 B點，我們稱之「圓 O與切圓O_1~O_6的 ***Stanley*點**」，以紀念作者 *Stanley* 在文獻上的貢獻。接下來，看看它有什麼特別之處？

【定理 1-8】$\boldsymbol{Stanley}$內點就是$\boldsymbol{Brainchon}$點

如圖 1-8，設圓O與六個兩兩相鄰均外切的小圓O_i，分別內切於A_i， $i = 1\sim6$，已知$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6}$共交於 A 點，則切點為$A_1\sim A_6$的圓O外切六邊形$D_1\sim D_6$，其對角線$\overline{D_1D_4}$、$\overline{D_2D_5}$、$\overline{D_3D_6}$ 也共交於 A 點。換句話說「$Stanley$點就是$Brainchon$ 點」。

<證明>

1. 根據**【定理 1-7】**七圓定理，$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6}$三線共交一點A。
2. $A_1\sim A_6$為圓 O 內接六邊形，設$\overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{A_4A_5} = P$、$\overleftrightarrow{A_2A_3} \cap \overleftrightarrow{A_5A_6} = Q$、$\overleftrightarrow{A_1A_6} \cap \overleftrightarrow{A_3A_4} = R$。由**【性質 2-1】**，$\overleftrightarrow{D_1D_4}$、$\overleftrightarrow{D_2D_5}$、$\overleftrightarrow{D_3D_6}$分別為 P、Q、R 關於圓 O 的極線；又由 *Pascal* 定理，P、Q、R 三點共線，由**【性質 2-2】**知$\overline{D_1D_4}$、$\overline{D_2D_5}$、$\overline{D_3D_6}$共交一點，即 *Brianchon* 點。(參見文獻[1])
3. 上述$\overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{A_4A_5} = P$ ，P點關於圓 O 的極線為$\overleftrightarrow{D_1D_4}$，但根據**【性質 2-2】**，$\overline{A_2A_5} \cap \overline{A_3A_6} = A$，$A$ 點必在P點關於圓 O 的極線上，所以$\overleftrightarrow{D_1D_4}$必通過$A$點；同理$\overleftrightarrow{D_2D_5}$、$\overleftrightarrow{D_3D_6}$也必通過 A 點。因此$\overline{A_1A_4} \cap \overline{A_2A_5} \cap \overline{A_2A_5} = \overline{D_1D_4} \cap \overline{D_2D_5} \cap \overline{D_3D_6}$ 六線共點，也就是 *Stanley* 點就是 *Brianchon* 點，見圖 1-8。

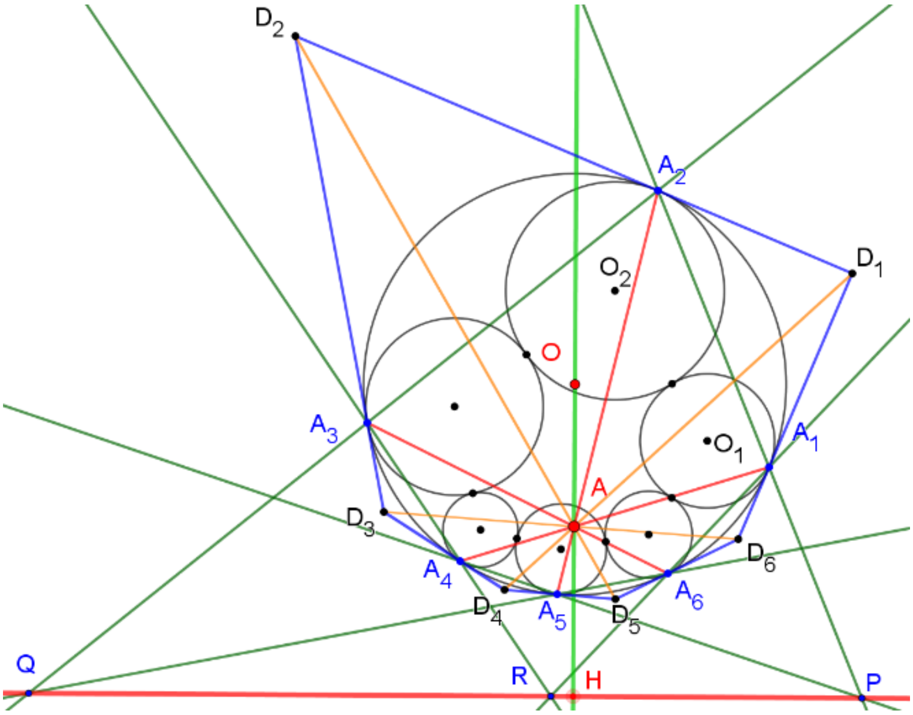


圖 1-8：$Stanley$點在 *Brianchon* 線上

【定理 1-9】$Stanley$點在 *Brianchon* 線上

設A為圓O與內切圓O_1~O_6的$Stanley$點，L為圓內接六邊形A_1~A_6的$Pascal$線，則$\overleftrightarrow{OA} \perp L$，(*Brianchon* 點與圓心$O$的連線稱為 *Brianchon* 線)，如圖 1-8。

<證明>

如圖 1-8，由**【性質 2-1】**知$\overleftrightarrow{D_1D_4}$、$\overleftrightarrow{D_2D_5}$、$\overleftrightarrow{D_3D_6}$分別為 P、Q、R 關於圓 O 的極線。由**【*Brianchon* 定理】**及**【*Pascal* 定理】**知$\overline{D_1D_4}$、$\overline{D_2D_5}$、$\overline{D_3D_6}$會共A點，P、Q、R 三點會共線。由**【性質 2-2】**知 *Brianchon* 點A與 *Pascal* 線互為極點與極線，故$\overleftrightarrow{OA} \perp L$。

- **如果內部不是 6 個切圓，而是 7 個以上或 5 個以下呢？**

(三) 多圓情形的推廣

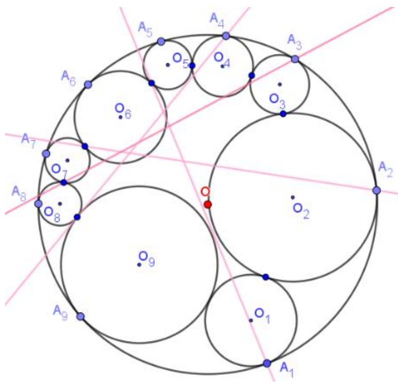


圖 1-9：以 9 個切圓為例

1. 奇數個切圓：對應內切點與鄰切點連線不一定共點。

2. 偶數個切圓：對應內切點與鄰切點連線也不一定共點。

(1) 如圖 1-10 (a)，若相鄰兩圓均外切，但連線未共交一點。

(2) 如圖 1-10 (b)，若共交 A 點，A_1~A_7 作與圓 O 的內切點；兩相鄰均外切的圓O_1~O_7，做與圓 O 內切於A_8的圓O_8，但其不一定與圓O_1、O_7外切。

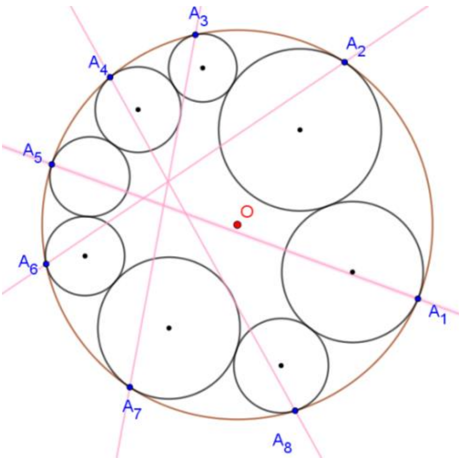


圖 1-10(a)

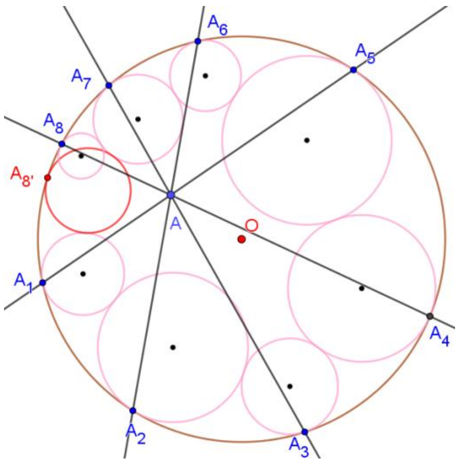


圖 1-10(b)

【定理 1-10】10 個切圓時，若共點則相切

與圓 O 均內切的 10 個切圓，若其對應內切點連線共交一點，則其兩相鄰切圓均外切，反之不一定成立，如圖 1-11。

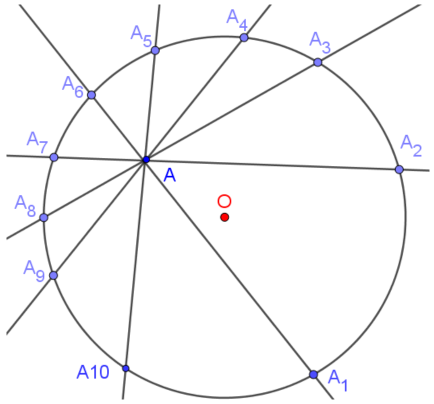


圖 1-11 (a)

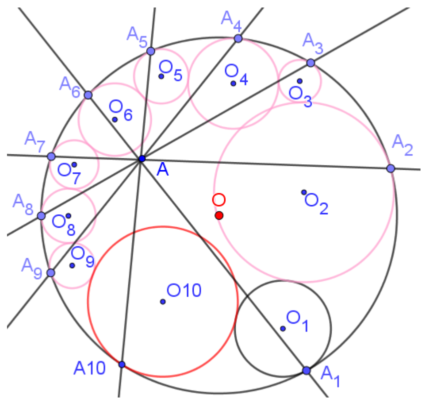


圖 1-11 (b)

<證明>

因對應內切點連線共交一點 A，

根據【**定理 1-5**】 $\overline{\mathrm{A_1A_2}}\times\overline{\mathrm{A_3A_4}}\cdots\times\overline{\mathrm{A_9A_{10}}}=\overline{\mathrm{A_2A_3}}\times\overline{\mathrm{A_4A_5}}\cdots\times\overline{\mathrm{A_{10}A_1}}$…………..(1)

假設小圓O_1~O_9均內切大圓 O 於A_1~A_9，且均與前一個相鄰圓外切，設第 10 個小圓O_{10}與小圓O_1 、O_9均外切，但與大圓 O 內切於A_{10}'

根據【**引理 1-6**】$\overline{\mathrm{A_1A_2}}\times\overline{\mathrm{A_3A_4}}\cdots\times\overline{\mathrm{A_9A_{10}'}}=\overline{\mathrm{A_2A_3}}\times\overline{\mathrm{A_4A_5}}\cdots\times\overline{\mathrm{A_{10}'A_1}}$…………..(2)。

由(1)(2) 可知 $A_{10}'=A_{10}$，故 10 個小圓兩相鄰圓均外切。 ■

檢驗發現 8、12 與 16 個相同均不成立；而為 6、10、14、18 個時發現「若對應內切點連線共交一點，則兩相鄰切圓均外切」，不禁懷疑在 4*n*+2 個切圓時，共點就會相切。

【定理 1-11】4*n*+2 個切圓時共點則相切

與圓 O 均內切的 4*n*+2 個切圓，若此 4*n*+2 個切圓的對應內切點連線均共交一點，則其兩相鄰的切圓均外切；反之不一定成立，以 10 圓為例，如圖 1-12。

<證明> 同 10 個切圓的情形，不另外贅述。

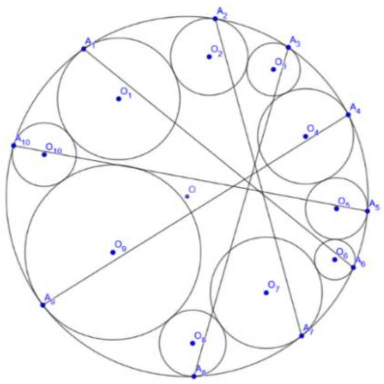


圖 1-12

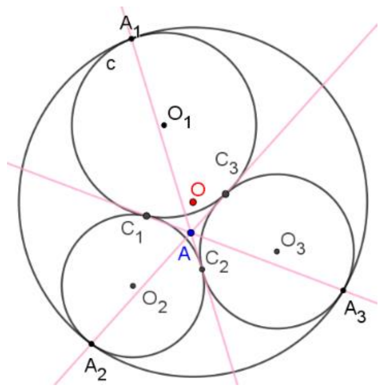


圖 1-13

(四)退化情形

仿造 9 個切圓想法檢驗 5、4、3 個的情形，3 個切圓時，發現「對應內切點與鄰切點連線共點」，如圖 1-13，5、4 個時，則發現並無共點性質，如圖 1-14。

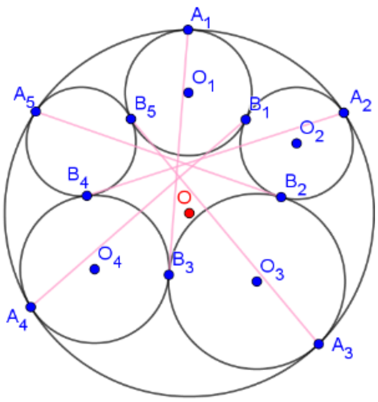


圖 1-14(a)

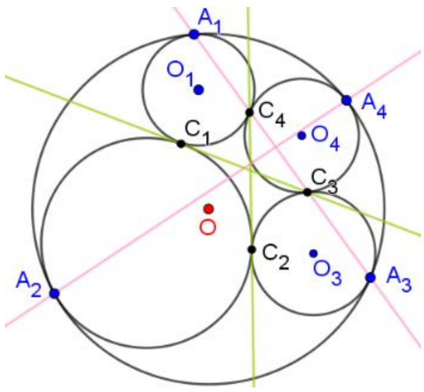


圖 1-14(b)

「若給定兩個內離圓，是否存在六個小圓同時與大圓內切，與小圓外切呢？」，類比「兩圓夾一個六邊形」的雙心六邊形，我們稱「兩個圓夾六個小圓」為「**雙心六圓**」。

二、雙心六圓的性質探討

(一) 利用反演構圖

【作圖 2-1】作同心圓的正雙心六圓，並反演成偏心圓的雙心六圓

已知：給定半徑比 3：1 的同心圓 O，以及半徑為r_s的反演圓 S(圖略)。求作：

(1) 六個與大圓均內切、與小圓均外切且兩相鄰均外切的小圓，如圖 2-1(a)，稱為正雙心六圓。

(2) 將正雙心六圓，對圓 S(半徑 r)作反演得到偏心圓的雙心六圓，如圖 2-1(b)。

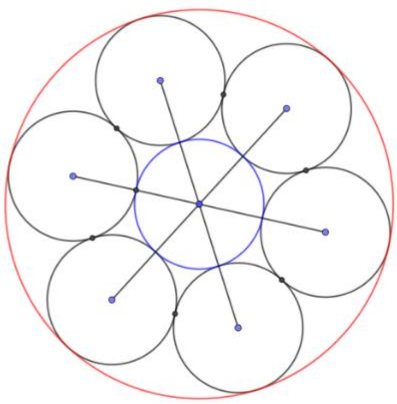
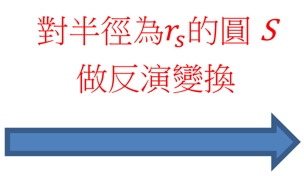


圖 2-1(a)：正雙心六圓



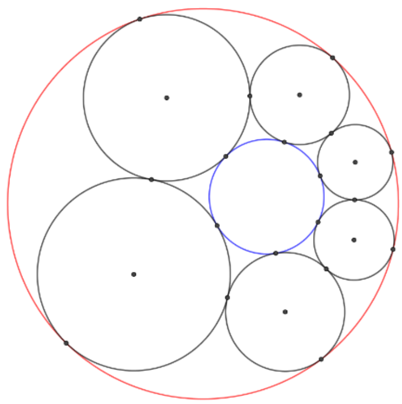
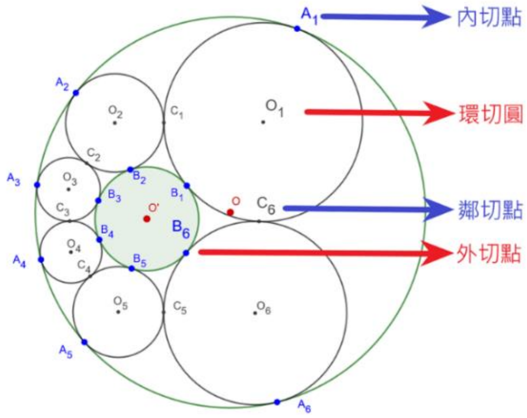


圖 2-1(b)：反演後的雙心六圓

<作法>過程省略，若任意變換反演圓 S的位置，則會有不同的雙心六圓與之對應。

為方便描述雙心六圓性質，作以下名詞約定：

1. 六個小圓O_1~O_6與兩大小內離圓 O與O'分別均內切與外切，且兩相鄰小圓均外切，稱其為此兩內離圓的「**環切圓**」。
2. 環切圓與大圓 O分別內切於A_1~A_6，稱之為「**內切點**」。
3. 環切圓與小圓O'分別外切於B_1~B_6，稱之為「**外切點**」。
4. 兩相鄰環切圓的切點C_1~C_6，稱之為「**鄰切點**」。



(二) 雙心六圓的構成條件

【定理 2-2】環切圓的圓心共橢圓

給定半徑分別為 R、r且兩個內離圓 O與O'，有 6 個分別與圓 O內切，與圓O'外切的小圓 O_1~O_6 (稱為環切圓)，半徑為r_1~r_6，則環切圓的圓心O_1~O_6共橢圓，如圖 2-2。

<證明>

$\overline{O_\iota O} = R - r_i$，$\overline{O_\iota O'} = r + r_i \quad \Rightarrow \quad \overline{O_\iota O} + \overline{O_\iota O'} = R + r$ 為定值，$i = 1$~6。

∴ 環切圓圓心O_i必在一個橢圓(以圓心 O與O'為焦點)。上述若推廣至雙心 n 圓時也成立。■

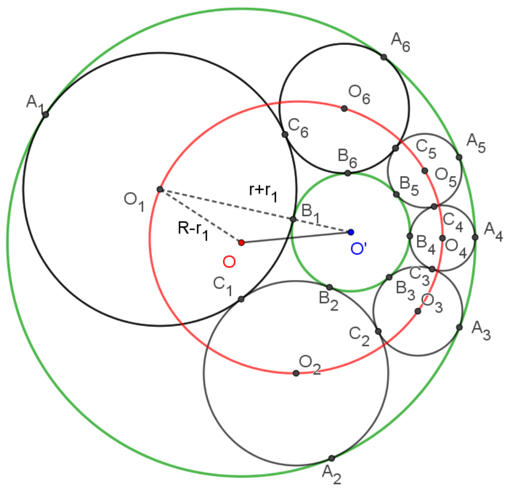


圖 2-2 環切圓圓心共橢圓

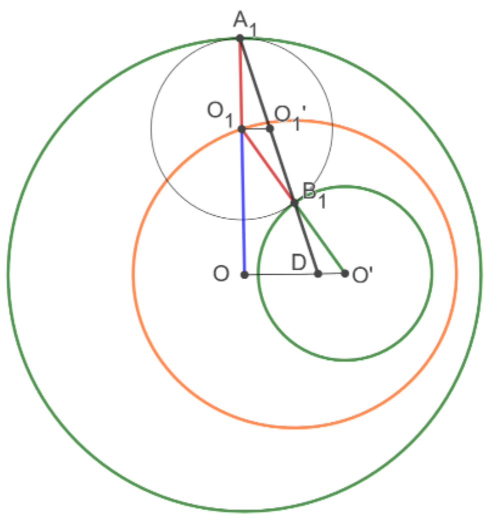


圖 2-3 內外切點連線共點

【定理 2-3】雙心多圓的環切圓內、外切點連線共點

同一個環切圓的內切點與外切點連線$\overleftrightarrow{A_kB_k}$共交一點，$k=1\sim n$，以$D$表之，如圖 2-3。

<證明>

設$\overrightarrow{A_kB_k}$交$\overline{OO'}$於 D，作$\overline{O_kO_k'}//\overline{OO'}$，交$\overline{A_kB_k}$於$O_k'$

$\overline{A_kO_k}:\overline{A_kO}=\overline{O_kO_k'}:\overline{DO}=r_k:R$ ， $\overline{O_kB_k}:\overline{B_kO'}=\overline{O_kO_k'}:\overline{DO'}=r_k:r$

$\overline{O_kO_k'}:\overline{DO}:\overline{DO'}=r_k:R:r$　　又$\overline{OO'}$及 R、r 為定值，$\overline{DO}:\overline{DO'}=R:r$，

也就是對所有的$\overrightarrow{A_kB_k}$必交於 D 點，$k=1\sim n$。 ■

【定理 2-4】環切圓的鄰切點共圓、兩個環切圓內外切點共圓

給定兩個內離圓 O與O'，有n個環切圓$O_1\sim O_n$，則 (1)鄰切點$O_1\sim O_n$共圓，且其圓心O_c在連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上，如圖 2-4。 (2)任意兩個環切圓的內、外切點A_i、B_i、A_j、B_j共圓，$i,j=1\sim n$，且$i\neq$ j。

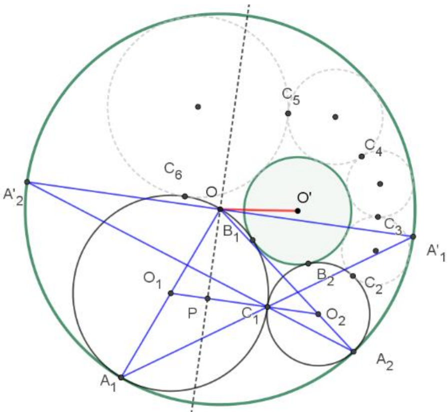


圖 2-4(a)

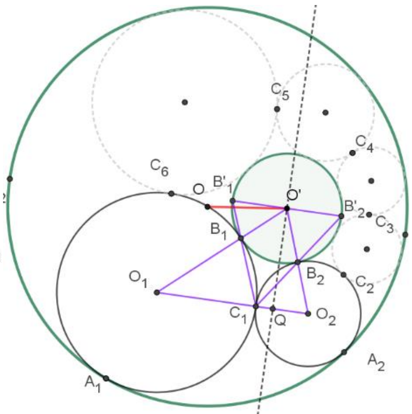


圖 2-4(b)

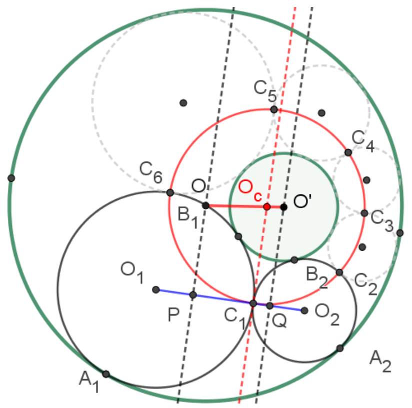


圖 2-4(c)

<證明>

(1) 欲證：鄰切點共圓

1. 內切情形:如圖 2-4(a)

$\overline{O_1C_1}=\overline{O_1A_1}=r_1$，$\overline{OA_1}=\overline{OA_1'}=R$，$\angle O_1A_1C_1=\angle OA_1A_1'$

$\Rightarrow \Delta OA_1A_1'\sim\Delta O_1A_1C_1$，$\overline{O_1C_1}//\overline{OA_1'}$， 同理$\overline{O_2C_1}//\overline{OA_2'}$，$\overline{A_2'A_1'}//\overline{O_1O_2}$

作$\overleftrightarrow{OP}\perp\overline{O_1O_2}$交$\overline{O_1O_2}$於$P$，設$\overline{C_1P}=x$

根據畢氏定理，$\overline{OO_1}^2$-$\overline{O_1P}^2=\overline{OP}^2=\overline{OO_2}^2$-$\overline{O_2P}^2$

$(R-r_1)^2$-$(r_1-x)^2=(R-r_2)^2$-$(r_2+x)^2\Rightarrow x=\frac{(r_1-r_2)R}{(r_1+r_2)}$。

2. 外切情形:如圖 2-4(b)

$\overline{O_1C_1}=\overline{O_1B_1}=r_1$，$\overline{O'B_1}=\overline{O'B_1'}=r$，$\angle O_1B_1C_1=\angle O'B_1B_1'$，

$\Rightarrow \Delta O'B_1B_1' \sim \Delta O_1B_1C_1$，$\overline{O_1C_1}//\overline{O'B_1'}$，同理$\overline{O_2C_1}//\overline{O'B_2'}$，$\overline{B_1'B_2'}//\overline{O_1O_2}$

作$\overleftrightarrow{O'Q}\perp\overline{O_1O_2}$交$\overline{O_1O_2}$於$Q$，設$\overline{C_1Q}=y$

根據畢氏定理 $\overline{O'O_1}^2$-$\overline{O_1Q}^2=\overline{O'O_2}^2$-$\overline{O_2Q}^2$

$(r+r_1)^2$-$(r_1+y)^2=(r+r_2)^2$-$(r_2-y)^2 \Rightarrow y=\frac{(r_1-r_2)r}{(r_1+r_2)}$。

3. 如圖 2-4(c)，作$\overleftrightarrow{C_1O_c}\perp\overline{O_1O_2}$交$\overline{OO'}$於$O_c$，因為$\overleftrightarrow{OP}//\overleftrightarrow{O'Q}//\overleftrightarrow{O_cC_1}$，

所以 $\overline{OO_c}:\overline{O_cO'}=x:y=\frac{(r_1-r_2)R}{(r_1+r_2)}:\frac{(r_1-r_2)r}{(r_1+r_2)}=R:r=\overline{OD}:\overline{O'D}$

又因為$\overline{OO'}$及R、r為定值，所以任意兩個相鄰環切圓的公切線必通過O_c點，且$O_c=D$，所以O_c點為所有環切圓的根心，到各環切圓的鄰切點之切線段$\overline{O_cC_\iota}$等長，故鄰切點C_i共圓，圓心為O_c(即D點)。

(2)欲證：任兩個環切圓內外切點共圓

由上述(1) 知鄰切點共圓，圓心為$O_c(=D)$，半徑為$\overline{DC_\iota}$；又由【定理 2-3】，根據圓冪定理

$\overline{DA_\iota}\times\overline{DB_\iota}=\overline{DC_\iota}^2=\overline{DA_J}\times\overline{DB_J}$,$i,j=1\sim n$，且$i\neq j$ $\therefore A_i$、A_j、B_i、B_j共圓。 ■

設反演前大小兩圓半徑分別為R_s、r_s、$\overline{SO}=d$，反演後大小兩圓半徑分別為R、r、則有以下結果：(以下討論，對雙心n圓也成立)

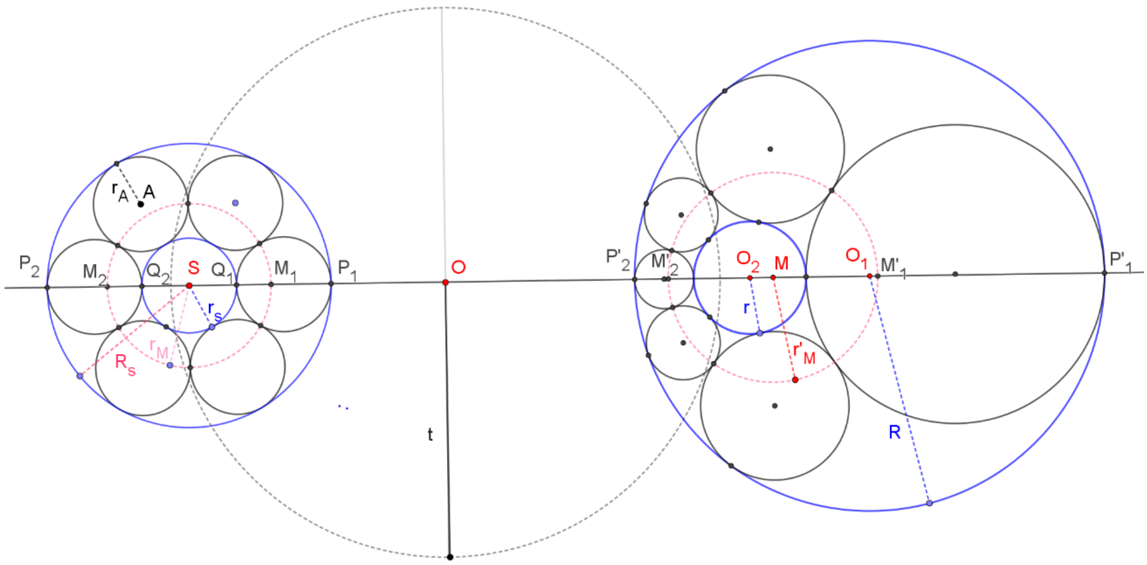


圖 2-5 正雙心六圓對圓O作反演後軸鏡射

【引理 2-5】反演中心到大小圓圓心的距離比值

> 雙心六圓其大小兩圓圓心O_1、O_2與反演圓圓心 O 距離為固定比值 $\dfrac{\overline{OO_2}}{\overline{OO_1}}=\dfrac{r}{R}\times\dfrac{R_s}{r_s}$ ，如圖 2-5。

<證明>

因為$\overline{OO_2}=\dfrac{dt^2}{d^2-r_s^2}$所以$\dfrac{\overline{OO_2}}{d}=\dfrac{t^2}{d^2-r_S^2}$，又$r=\dfrac{r_st^2}{d^2-r_S^2}$，所以$r=\dfrac{r_s\overline{OO_2}}{d}$；同理$R=\dfrac{R_s\overline{OO_1}}{d}$。

則 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{r_s}{R_s}\times\dfrac{\overline{OO_2}}{\overline{OO_1}}$ 所以 $\dfrac{\overline{OO_2}}{\overline{OO_1}}=\dfrac{r}{R}\times\dfrac{R_s}{r_s}$ 得證。 ■

透過上述引理，接下來正式處理雙心 n 圓的構成條件。

【定理 2-6】雙心n圓的構成條件

> 給定大小兩個內離圓 O_1、O_2，半徑分別為R、r，若存在n個環切圓分別均與大圓內切、均與小圓外切，且兩相鄰圓均外切，則其半徑R、r及連心距$\overline{O_1O_2}$必滿足下列關係式：
>
> $\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{R\overline{OO_2}-r\overline{OO_1}}{R\overline{OO_2}+r\overline{OO_1}}$ ，如圖 2-5。

<證明>

$$\sin\frac{2\pi}{2n}=\sin\frac{\pi}{n}=\sin\angle BSC=\frac{r_{\mathrm{B}}}{r_s+r_{\mathrm{B}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(R_s-r_s\right)}{r_s+\frac{1}{2}\left(R_s-r_s\right)}=\frac{R_s-r_s}{R_s+r_s}\Rightarrow\frac{R_s}{r_s}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$$

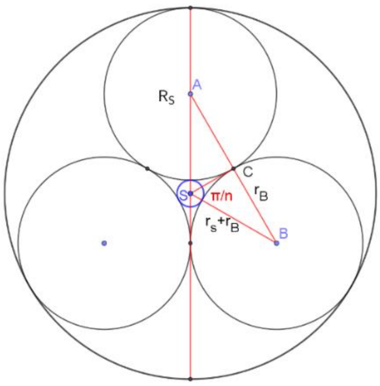


圖 2-6 以 n=3 雙心三圓為例

根據【引理 2-5】

$$r_s=\frac{rR_s\times\overline{OO_1}}{R\times\overline{OO_2}}\qquad\sin\frac{\pi}{n}=\frac{R_s-r_s}{R_s+r_s}=\frac{R\overline{OO_2}-r\overline{OO_1}}{R\overline{OO_2}+r\overline{OO_1}}$$ 。■

上述**雙心n圓的構成條件**仍受限「必須先知道反演圓的中心 O 的位置」，無法直接從給定的兩個內離圓半徑R、r及連心距d所構成的關係式來處理雙心多圓的構圖問題。

根據文獻，給定任意兩圓(內離、外離)，以兩圓根軸與連心線交點為圓心，到圓的切線長為半徑作圓(即為正交圓)，與連心線所交兩點為此兩圓的「**極限點(Limit point)**」；若此兩圓對以極限點為反演中心的圓作反演，則可得到同軸上的一組**同心圓**。

【定理 2-7】兩個內離圓時的雙心多圓構成條件

兩個內離圓C_1、C_2，圓心分別為O_1、O_2，半徑分別為R、r，連心距$d=\overline{O_1O_2}$，$0\le d<R-r$；若對以其極限點為反演中心的圓作反演，得兩圓C_1'、C_2'，半徑分別為R'、r'，則有以下結果：

(1) 反演後的兩圓C_1'、C_2'為同心圓。

(2) $\frac{R'}{r'}=\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$

(3) 若 $\frac{R'}{r'}=k$ ，則 $r=\frac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$ ，$0<k<1$。

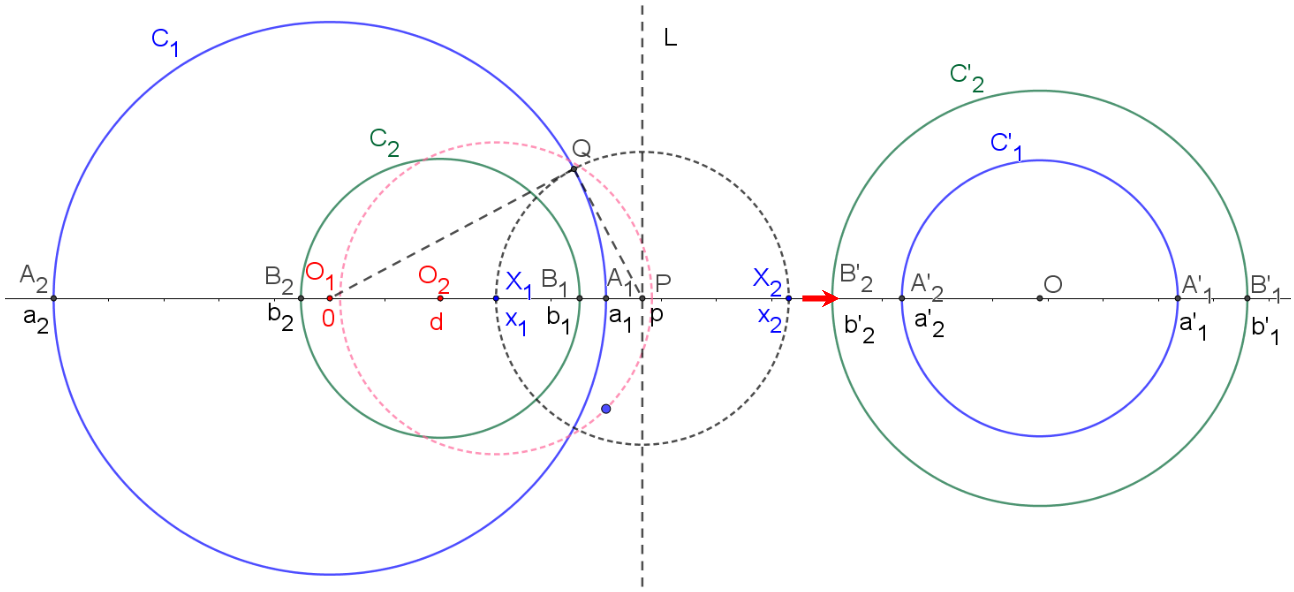


圖 2-7：兩圓C_1、C_2與極限點X_1、X_2；對圓X_1反演，再平移的兩圓C'_1、C'_2

<證明> 設$O_1(0,0)$、$O_2(d,0)$及相關點座標位置，如上圖 2-7。

設C_1：$x^2+y^2=R^2$ 、 C_2：$(x-d)^2+y^2=r^2$，

則根軸 L=C_1-C_2：$x=\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$，所以 $p=\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$。

$\overline{PQ}^2=\overline{O_1P}^2-\overline{O_1Q}^2=p^2-R^2$，所以 $\overline{PQ}=\sqrt{p^2-R^2}$

$x_1 = \overline{O_1X_1} = \overline{O_1P} - \overline{PQ} = p - \sqrt{p^2 - R^2}$ ， $x_2 = \overline{O_1X_2} = \overline{O_1P} + \overline{PQ} = p + \sqrt{p^2 - R^2}$，

兩圓C_1、C_2對單位圓X_1反演後的兩圓C'_1、C'_2，各點的反演點，根據反演定義如下：

$\overline{X_1A_1} \cdot \overline{X_1A_1'} = 1^2 \Rightarrow (a_1 - x_1)\cdot(a_1' - x_1) = 1 \Rightarrow a_1' = x_1 + \frac{1}{a_1 - x_1}$ ， $(a_1 = R)$

$\overline{X_1A_2} \cdot \overline{X_1A_2'} = 1^2 \Rightarrow (x_1 - a_2)\cdot(x_1 - a_2') = 1 \Rightarrow a_2' = x_1 + \frac{1}{a_2 - x_1}$ ， $(a_2 = -R)$

$\overline{X_1B_1} \cdot \overline{X_1B_1'} = 1^2 \Rightarrow (b_1 - x_1)\cdot(b_1' - x_1) = 1 \Rightarrow b_1' = x_1 - \frac{1}{x_1 - b_1}$ ， $(b_1 = d + r)$

$\overline{X_1B_2} \cdot \overline{X_1B_2'} = 1^2 \Rightarrow (x_1 - b_2)\cdot(x_1 - b_2') = 1 \Rightarrow b_2' = x_1 - \frac{1}{x_1 - b_2}$ ， $(b_2 = d - r)$

為簡化式子另設 $\triangle = d^2 + R^2 - r^2$、$\square = \sqrt{\triangle^2 - (2dR)^2} \Rightarrow p = \frac{\triangle}{2d}$、 $x_1 = \frac{\triangle - \square}{2d}$

(1) 欲證：$\frac{a_1' + a_2'}{2} = \frac{b_1' + b_2'}{2}$，圓$C'_1$、$C'_2$為同心圓。

因為$x_1 = \frac{\triangle - \square}{2d}$ 所以$2dx_1 = (\triangle - \square)$

$$\frac{a_1' + a_2'}{2} = x_1 + \frac{x_1}{R^2 - x_1^2} \qquad \frac{b_1' + b_2'}{2} = x_1 + \frac{x_1 - d}{r^2 - (d - x_1)^2}$$

$$\frac{x_1}{R^2 - x_1^2} = \frac{2d(2dx_1)}{4d^2R^2 - (2dx_1)^2} = \frac{2d(\triangle - \square)}{(\triangle^2 - \square^2) - (\triangle - \square)^2} = \frac{d}{\square}$$

$$\frac{x_1 - d}{r^2 - (x_1 - d)^2} = \frac{2d(2dx_1 - 2d^2)}{4d^2r^2 - (2dx_1 - 2d^2)^2}$$

$$= \frac{2d(\triangle - \square - 2d^2)}{(\triangle - \square - 2d^2)(\triangle + \square - 2d^2) - (\triangle - \square - 2d^2)^2}$$

$$= \frac{2d(\triangle - \square - 2d^2)}{(\triangle - \square - 2d^2)(2\square)} = \frac{d}{\square}$$

其中 $4d^2r^2 = 4d^2(d^2 + R^2 - \triangle) = 4d^4 + 4d^2R^2 - 4d^2\triangle = 4d^4 + \triangle^2 - \square^2 - 4d^2\triangle$

$$= (\triangle - \square - 2d^2)(\triangle + \square - 2d^2)$$

(2) $R' = \overline{OA_1'} = \frac{a_1' - a_2'}{2} = \frac{R}{R^2 - x_1^2}$ ，$r' = \overline{OB_1'} = \frac{b_1' - b_2'}{2} = \frac{r}{r^2 - (d - x_1)^2}$ $\Rightarrow \frac{R'}{r'} = \left(\frac{r^2 - (d - x_1)^2}{R^2 - x_1^2}\right)\frac{R}{r}$

欲證：$\left(\frac{r^2 - (d - x_1)^2}{R^2 - x_1^2}\right)\frac{R}{r} = \left\{1 - \frac{2d^2}{(d^2 + R^2 - r^2) - \sqrt{(d^2 + R^2 - r^2)^2 - (2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$

$$\frac{r^2-(d-x_1)^2}{R^2-x_1^2}=\frac{x_1^2-R^2-2dx_1+d^2+R^2-r^2}{x_1^2-R^2}=1-\frac{2dx_1-\triangle}{x_1^2-R^2}$$

$$=1-\frac{2d\left(\frac{\triangle-}{2d}\right)-\triangle}{\left(\frac{\triangle-}{2d}\right)^2-R^2}=1+\frac{4d^2}{\triangle^2+\ {}^2-2\triangle\qquad-4d^2R^2}$$

$$=1+\frac{4d^2\square}{2\triangle^2-2\triangle\square-8d^2R^2}=1+\frac{4d^2\square}{2(\triangle^2-4d^2R^2)-2\triangle\square}$$

$$=1+\frac{4d^2\square}{2\square^2-2\triangle\square}=1-\frac{2d^2}{\triangle-\square}$$

代入原式，即可得證。

(3) 設 $\frac{R'}{r'}=k$ ，因為兩內離圓反演後的兩圓C'_1、C'_2，半徑$R'<r'$，所以 $0<k<1$。

$$\Rightarrow k=\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow kr^2-(1+k^2)Rr+(R^2-d^2)k=0$$

$$\Rightarrow r=\frac{(1+k^2)R\pm\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$$ (因為 $r<R$，所以取負號) ∎

換句話說，若反演後同心圓半徑比$\frac{R'}{r'}=k$時，則反演前雙心多圓的R、r、d的關係式為：

$$r=\frac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$$

若 $k=\frac{1}{3}$，即半徑比$\frac{R'}{r'}=\frac{1}{3}$的正雙心六圓， 則其反演前的「兩個內離圓的雙心六圓」的構成條件為 $r=\frac{5R-\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ 。若給定R和d且$0\le d<R-r$，透過此關係式可求得r，然後依此構圖，就可做出一般的雙心六圓。

(三) 雙心六圓的性質探討

【定理 2-8】雙心六圓的 *Stanley* 點

設一個雙心六圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為 R、r且圓心距為 d，環切圓 $O_1\sim O_6$，內切點$A_1\sim A_6$，外切點$B_1\sim B_6$，鄰切點$C_1\sim C_6$，則有以下性質：

(1) 對應的內切點連線$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$三線共 A點。如圖 2-8(a)

(2) 對應的外切點連線$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$三線共 B點。如圖 2-8b)

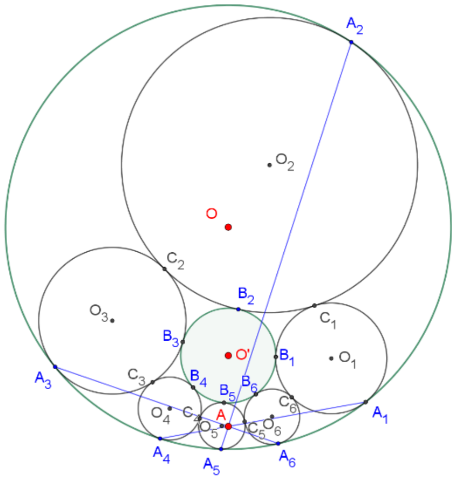


圖 2-8(a) 對應內切點連線共點

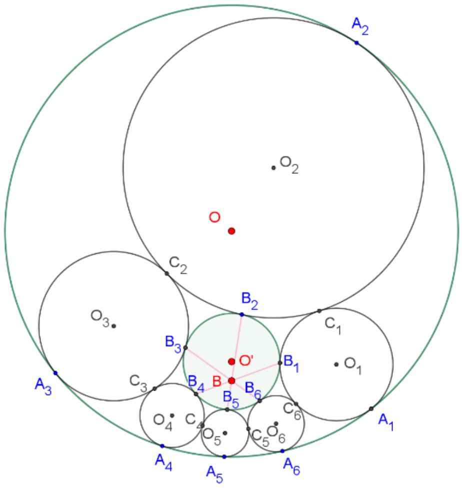


圖 2-8(b) 對應外切點連線共點

<證明>

根據【定理 1-7】七圓定理的構成條件，可知$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_5}$、$\overline{A_3A_6}$三線必共交一點，此點以 A 點表之；同理$\overline{B_1B_4}$、$\overline{B_2B_5}$、$\overline{B_3B_6}$三線必共交一點，此點以 B 點表之。 ∎

如圖 2-9(a)，大圓O分別對圓O_1、O_2、O_3、O_4做出兩圓根軸L_1、L_2、L_3、L_4，且$L_1 \cap L_2 = T$、$L_1 \cap L_3 = S$、$L_1 \cap L_4 = P$；當環切圓轉動時，發現 P、S、T三點的軌跡分別呈現直線、橢圓與雙曲線，如圖 2-9(b)。特別是P點的直線軌跡，仔細探究，得到下面結果：

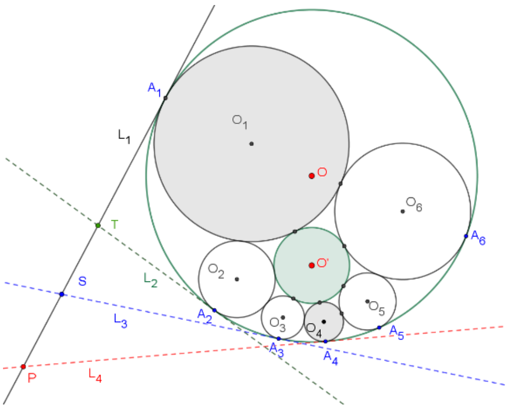


圖 2-9(a) 根軸交點

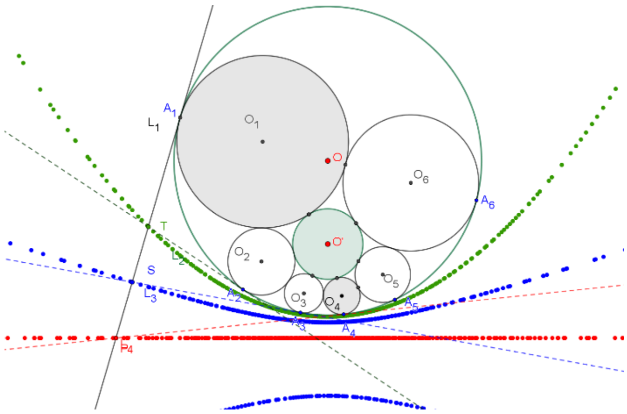


圖 2-9(b) 根軸交點的軌跡

【定理 2-9】雙心六圓內外點的共定點與共定線

(1) 若對應的兩個環切圓(如圓O_1、O_4)分別與兩個內離圓 O與O'各作根軸，則此四根軸共交P點，即此**四圓的根心**。當環切圓轉動時，根心P的軌跡為一直線 L；如圖 2-9

(2) 若L_A、L_B分別為圓 O 內接六邊形$A_1 \sim A_6$與圓O'內接六邊形$B_1 \sim B_6$的$Pascal$線，則 $L = L_A = L_B$；且 A、B 為定點均在$\overleftrightarrow{OO'}$上，且與$Pascal$線垂直。

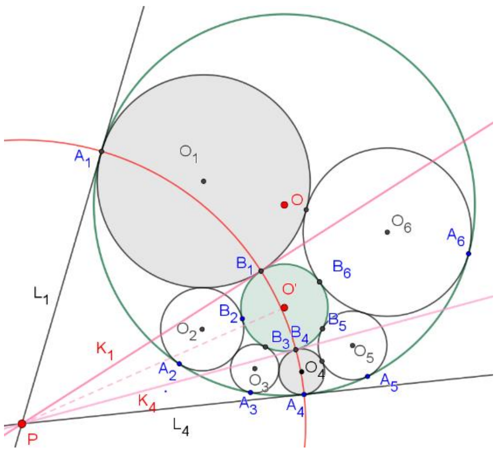


圖 2-10(a) 四圓的根心

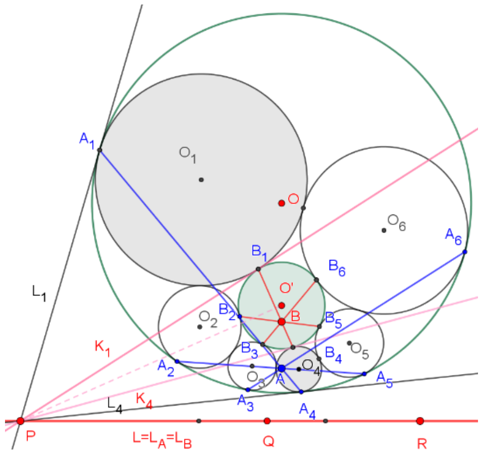


圖 2-10(b) 根心的軌跡為定線

<證明>

(1) 如圖 2-10(a)

1° 設L_1、L_4分別為圓O與圓O_1、圓O_4的根軸；設K_1、K_4分別為圓O'與圓O_1、圓O_4的根軸；

2° 由【定理 2-4】任兩個環切圓的內外切點，四點共圓，所以A_1、A_4、B_1、B_4共圓，所以L_1、L_4、K_1、K_4四根軸會共交一點 P，即為此圓圓心，也是四圓O、O'與O_1、O_4的根心。

3° 同理對圓O與圓O'分別對圓O_2、圓O_5得根心 Q；再分別對圓O_3、圓O_6得根心 R。

(2) 如圖 2-10(b)

1° P、Q、R分別為$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$關於圓$O$的極點，同時也分別為$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$關於圓$O'$的極點。根據【定理 2-8】$\overleftrightarrow{A_1A_4} \cap \overleftrightarrow{A_2A_5} \cap \overleftrightarrow{A_3A_6} = A$，$\overleftrightarrow{B_1B_4} \cap \overleftrightarrow{B_2B_5} \cap \overleftrightarrow{B_3B_6} = B$，所以由【性質 2-2】，$P$、$Q$、$R$三點必共線，如 L；換句話說，當環切圓轉動時，根心的軌跡必為一直線且為定線。

2° 若L_A、L_B分別為圓 O 內接六邊形$A_1 \sim A_6$與圓O'內接六邊形$B_1 \sim B_6$的$Pascal$線，則由上述可知 $L_A = L_B = L$。

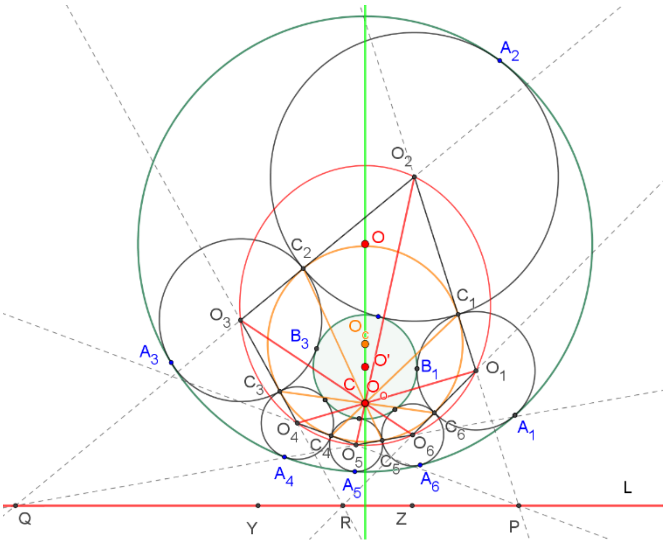
3° 因為關於圓 O與圓O'，A、B分別與 L 互為極點、極線，故A、B均在$\overleftrightarrow{OO'}$上且與$Pascal$線L垂直。又因為L為定線，故A、B均為定點。 ∎

【定理 2-10】雙心六圓對應鄰切點、環切圓圓心分別連線均共點且共定線

(1) 對應的鄰切點連線$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$三線共點，如$C$點。

(2) 對應的環切圓圓心連線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$三線共點，如$O_o$點。

(3) 六邊形C_1~C_6三組對邊延長線交點共線L_c；六邊形O_1~O_6三組對邊延長線交點共線L_o。且$C = O_o$為共同定點，$L_c = L_o$為共同定線(*Pascal* 線)。



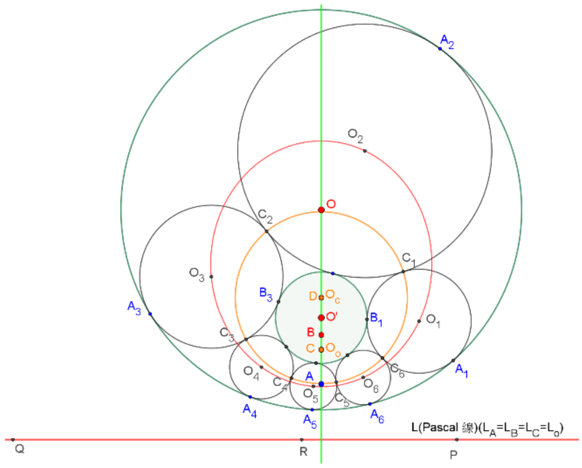


圖 2-12 環切圓轉動時C為定點，L 為定線　　圖 2-13 雙心六圓的共定點、共定線與共圓

<證明>

1° 由【定理 2-2】及【定理 2-4】，六邊形O_1~O_6同時內接於橢圓(以O和O'為兩焦點)，外切於圓O_c，所以根據 *Brianchon* 定理及 *Pascal* 定理，其三組對角線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$會共交一點$O_o$(即 *Brianchon* 點)，其三組對邊延長線的交點 P、Q、R 會共線L_o(即 *Pascal* 線)，且「O_o與L_o互為關於圓O_c的極點、極線」。

2° 由【性質 2-1】知$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$分別為 P、Q、R 關於圓O_c的極線；由上述知 P、Q、R 共線L_o，根據【性質 2-2】得$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$必共交一點 C，且「C與L_o互為關於圓O_c的極點、極線」。

3° 由上述可推知 C=O_o。進一步推論，圓O_c的內接六邊形C_1~C_6的三組對邊延長線交點

共線L_c，因為 $C= O_o$。所以$L_c = L_o$，最後以 L 表之。再由【定理 1-9】知$\overleftrightarrow{CO_c} \perp L$。

4° 由上述可知，*Brianchon* 點、*Pascal* 線同時對於圓O_c和橢圓皆為極點極線關係，故知 *Brianchon* 點為圓O_c和橢圓的 *Limiting Point*（極限點）。*Limiting Point* 是固定的，所以當環切圓$O_1 \sim O_6$轉動，其 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線皆為固定不動。 ∎

■綜合上述【定理 2-3】、【定理 2-4】及【定理 2-8】~【定理 2-10】，當六個環切圓轉動時，則共點 A、B、$C\,(=O_o)$及 $D\,(=O_c)$四點均為定點，且均在兩個內離圓的連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上，並與其 *Pascal* 線垂直，如上面右圖 2-13。

三、以雙心六圓的結果探討雙心多圓的性質

(一) 偶數個環切圓

「**雙心六邊形的 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線性質，推廣至雙心 2*n* 邊形也成立**」（參考文獻[1]），那麼在雙心 2*n* 圓是否也會有雙心六圓一樣的結果呢？以雙心八圓為例，如下

【定理 3-1】雙心八圓的 *Stanley* 點

設一個雙心八圓的兩個內離圓 O 與O'半徑分別為 R、r 且圓心距為 d，環切圓$O_1 \sim O_8$，內切點$A_1 \sim A_8$，外切點$B_1 \sim B_8$，鄰切點$C_1 \sim C_8$，則有以下性質：如圖 3-1。

(1) 對應的內切點連線$\overleftrightarrow{A_1A_5}$、$\overleftrightarrow{A_2A_6}$、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$、$\overleftrightarrow{A_4A_8}$四線共 A 點；

(2) 對應的外切點連線$\overleftrightarrow{B_1B_5}$、$\overleftrightarrow{B_2B_6}$、$\overleftrightarrow{B_3B_7}$、$\overleftrightarrow{B_4B_8}$四線共點，如 B 點。

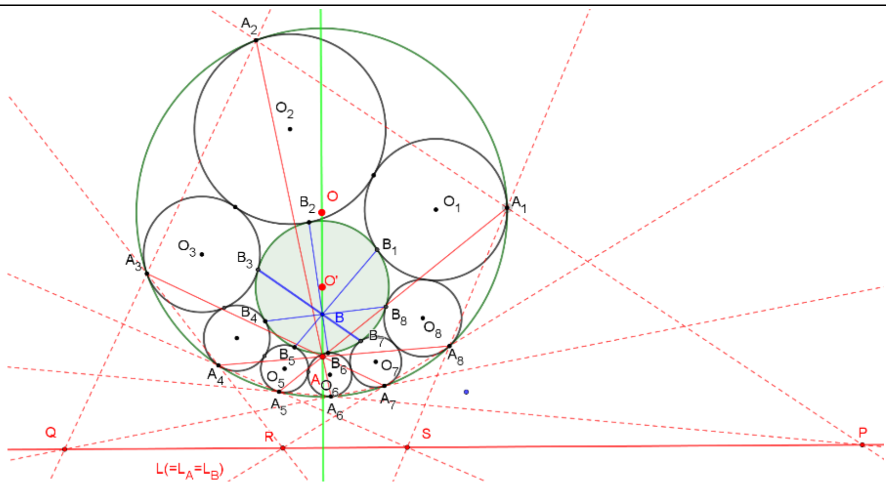


圖 3-1：雙心八圓的 *Stanley* 點 A、B 亦均為該圓時的 *Brianchon* 點

<證明>

1° 在正雙心八圓中的內接正八邊形$A_1 \sim A_8$，必含有一個內切圓(正雙心八邊形$A_1 \sim A_8$)，經反演成偏心的雙心八圓後，也仍然會是雙心八邊形。故根據，「雙心六邊形的 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線性質，推廣至雙心 $2n$ 邊形也成立」[參考文獻 1]，所以圓 O 的內接八邊形$A_1 \sim A_8$，其對邊延長線的交點共線L_A，對角線$\overleftrightarrow{A_1A_5}$、$\overleftrightarrow{A_2A_6}$、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$、$\overleftrightarrow{A_4A_8}$共交 A 點，即是 *Stanley* 點，也是 *Brianchon* 點。

2° 同理，圓 O' 的內接八邊形$B_1 \sim B_8$，其四組對邊延長線的交點共交L_B(即 *Pascal* 線)，對角線$\overleftrightarrow{B_1B_5}$、$\overleftrightarrow{B_2B_6}$、$\overleftrightarrow{B_3B_7}$、$\overleftrightarrow{B_4B_8}$共交 B 點，即是 *Brianchon* 點，也是 ***Stanley*** 點。

■

A、B 非同圓的 *Brianchon* 點，但L_A和L_B為什麼卻同一條 *Pascal* 線呢？

【定理 3-2】雙心八圓的 *Stanley* 點為定點、*Pascal* 線為共定線、共圓

(1) 若對應的兩個環切圓(如圓O_1、O_5)分別與兩個內離圓 O 與O'各作根軸，則此四根軸共交一點，如P_1，即為此**四圓的根心**。當環切圓轉動時，根心P_1的軌跡為一直線 L；

(2) 若L_A、L_B分別為圓 O 內接八邊形$A_1 \sim A_8$與圓O'內接八邊形$B_1 \sim B_8$的$Pascal$線，則 $L = L_A = L_B$；又點 A、B 為定點均在$\overleftrightarrow{OO'}$上，且與$Pascal$線垂直。

(3) 上述，兩個對應的環切圓的內、外切點四點共圓，推廣至任意兩個環切圓也成立。

<證明>

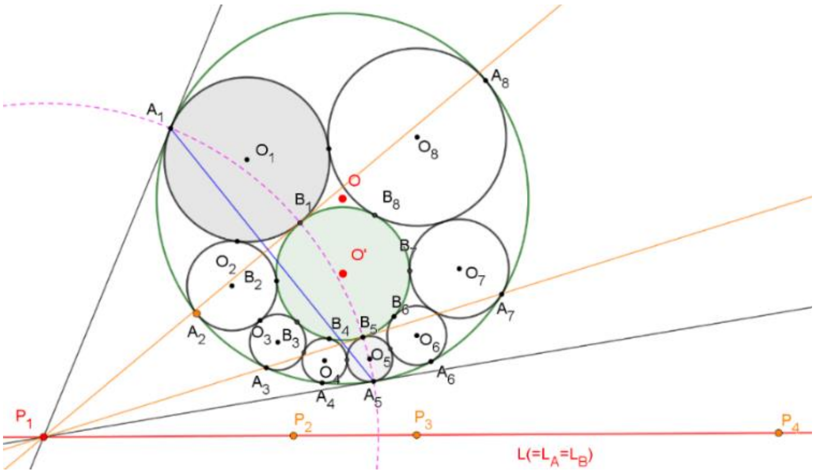


圖 3-2：四圓 O、O'、O_1、O_5的根心P_1軌跡為$Pascal$線

(1) 如圖 3-2

1° 設L_1、L_5分別為圓O與圓O_1、圓O_5的根軸；設K_1、K_5分別為圓O'與圓O_1、圓O_5的根軸；

2° 由【定理 2-4】任兩環切圓O_1、O_5的內外切點四點共圓，所以A_1、A_5、B_1、B_5共圓，故L_1、L_4、K_1、K_4四根軸會共交一點P_1，即為此圓圓心，也此四圓O、O'、O_1、O_4的根心。

3° 同理，圓O與圓O'分別對另三組對應的兩個環切圓可得根心P_2、P_3、P_4。

(2) 如圖 3-2

1° P_1、P_2、P_3、P_4分別為$\overleftrightarrow{A_1A_5}$、$\overleftrightarrow{A_2A_6}$、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$、$\overleftrightarrow{A_4A_8}$關於圓$O$的極點，同時也分別為$\overleftrightarrow{B_1B_5}$、$\overleftrightarrow{B_2B_6}$、$\overleftrightarrow{B_3B_7}$、$\overleftrightarrow{B_4B_8}$關於圓$O'$的極點。根據【定理 4-1】$\overleftrightarrow{A_1A_5} \cap \overleftrightarrow{A_2A_6} \cap \overleftrightarrow{A_3A_7} \cap \overleftrightarrow{A_4A_8} = A$，$\overleftrightarrow{B_1B_5} \cap \overleftrightarrow{B_2B_6} \cap \overleftrightarrow{B_3B_7} \cap \overleftrightarrow{B_4B_8} = B$共交一點，所以由【性質 2-2】，$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$四點必共線如 L；換句話說，當環切圓轉動時，根心軌跡必為一直線且定線。

2° 若L_A、L_B分別為圓 O內接八邊形$A_1 \sim A_8$與圓O'內接八邊形$B_1 \sim B_8$的$Pascal$線，則由上述可知 $L_A = L_B = L$。

3° 因為關於圓 O與圓O'，A、B分別與 L 互為極點、極線，故A、B均在連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上且與$Pascal$線L垂直。又因為L為定線，故A、B均為定點。 ■

【定理 3-3】雙心八圓的對應鄰切點連線、環切圓圓心連線均共定點且共定線

(4) 對應的鄰切點連線$\overleftrightarrow{C_1C_5}$、$\overleftrightarrow{C_2C_6}$、$\overleftrightarrow{C_3C_7}$、$\overleftrightarrow{C_4C_8}$四線共點，如$C$點。

(5) 對應的環切圓圓心連線$\overleftrightarrow{O_1O_5}$、$\overleftrightarrow{O_2O_6}$、$\overleftrightarrow{O_3O_7}$、$\overleftrightarrow{O_4O_8}$四線共點，如$O_o$點。

(6) 八邊形$C_1 \sim C_8$四組對邊延長線交點共線L_c；八邊形$O_1 \sim O_8$四組對邊延長線交點共線L_o。且$C = O_o$為共同定點，$L_c = L_o$為共同定線($Pascal$ 線)。

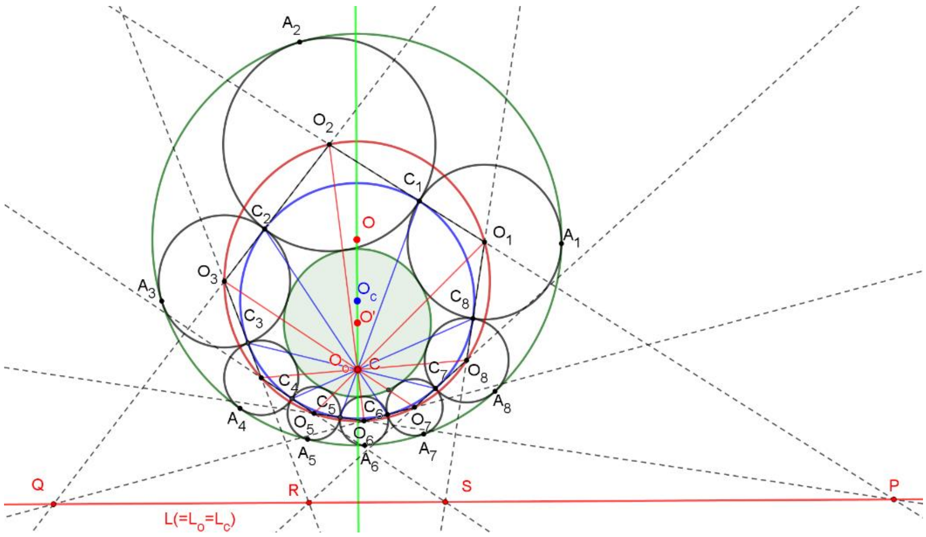


圖 3-3：雙心八圓的對應鄰切點連線與環切圓圓心連線均共定點 C 且共定線 L

<證明>如圖 3-3，方法同【定理 2-10】，不另外贅述。 ■

【定理 3-4】雙心 2 n 圓的共點、共線與共圓（n≥2)

設一個雙心 2n 圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為 R、r且圓心距為 d，環切圓O_1~O_{2n}，內切點A_1~A_{2n}，外切點B_1~B_{2n}，鄰切點C_1~C_{2n}，則有以下性質：$k = 1\sim n$

(1) $\overleftrightarrow{A_kA_{n+k}}$、$\overleftrightarrow{B_kB_{n+k}}$、$\overleftrightarrow{C_kC_{n+k}}$、$\overleftrightarrow{O_kO_{n+k}}$均各$n$條直線分別共交 A、B、C、$O_o(= C)$點；

(2) $\overleftrightarrow{A_iB_i}$，$i = 1\sim 2n$ 等$2n$條線共 D點。

(3) 環切圓的圓心O_1~O_{2n}共橢圓(以兩個內離圓圓心 O與O'為焦點)。

(4) 鄰切點C_1~C_{2n}共圓，圓心O_c點($= D$)。

(5) 任兩個環切圓的$A_iB_iA_jB_j$、$A_iC_iC_{j-1}A_j$、$B_iC_iC_{j-1}B_j$，均分別四點共圓，$i \neq j$。

(6) A_1~A_{2n}，B_1~B_{2n}，C_1~C_{2n}、O_1~O_{2n}等四個圓(橢圓)內接$2n$邊形共同一條 $Pascal$ 線。

(7) A、B、C、D 四點為定點且均在$\overleftrightarrow{OO'}$上，當環切圓轉動時仍為定線並與 $Pascal$ 線垂直。

(二) 奇數個環切圓

不同於偶數個，奇數個環切圓須打破「同類型點對應點連線」以雙心五圓為例，如下：

【定理 3-5】雙心五圓內(外)切點與鄰切點連線共定點

設一個雙心五圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為 R、r且圓心距為 d，環切圓 O_1~O_5，內切點A_1~A_5，外切點B_1~B_5，鄰切點C_1~C_5，則有以下性質：如圖 3-5

(1) 對應的內切點與鄰切點連線$\overleftrightarrow{A_1C_3}$、$\overleftrightarrow{A_2C_4}$、$\overleftrightarrow{A_3C_5}$、$\overleftrightarrow{A_4C_1}$、$\overleftrightarrow{A_5C_2}$五線共$A_c$點。

(2) 對應的外切點與鄰切點連線$\overleftrightarrow{B_1C_3}$、$\overleftrightarrow{B_2C_4}$、$\overleftrightarrow{B_3C_5}$、$\overleftrightarrow{B_4C_1}$、$\overleftrightarrow{B_5C_2}$五線共$B_c$點。

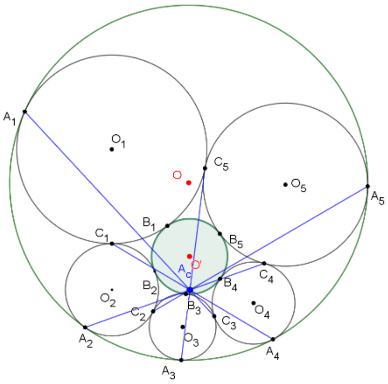


圖 3-5(a)

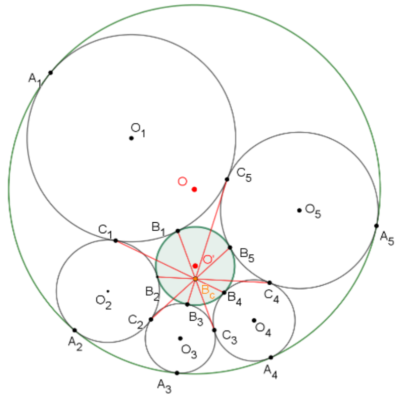


圖 3-5(b)

【定理 3-7】雙心五圓的定點、定線與共圓

(1) 若圓O_1分別對圓O與O'作根軸，對應的兩個環切圓O_3、O_4分別對圓O與O'作割線$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{B_3B_4}$則此四線會共交一點，如$P$。如圖 3-7

(2) 環切圓轉動時，P軌跡為一直線 L；若L_A、L_B分別為圓 O內接五邊形A_1~A_5與圓O'內接五邊形B_1~B_5的$Pascal$線，則$L=L_A=L_B$； A_c、B_c為定點在$\overleftrightarrow{OO'}$上且垂直$Pascal$線。

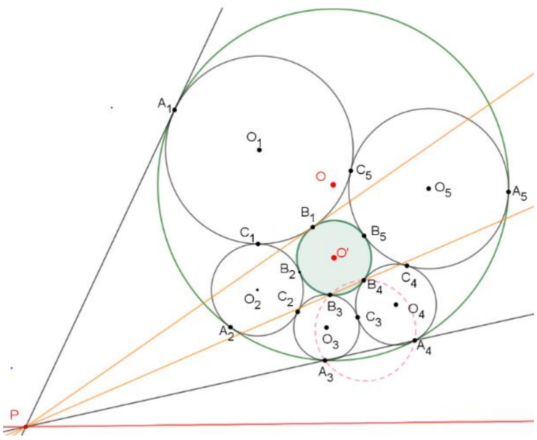


圖 3-6：P的軌跡為$Pascal$線

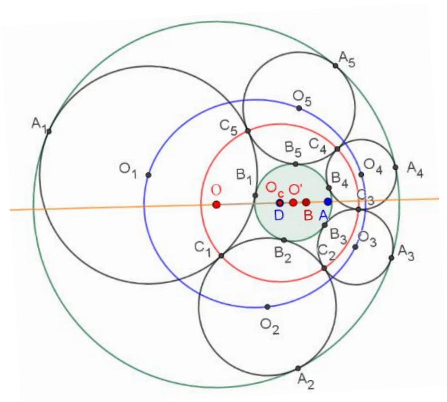


圖 3-7：O_1~O_5共橢圓，C_1~C_5共圓

【定理 3-8】雙心五圓環切圓圓心與鄰切點的連線共定點與共定線（參考文獻[1]）

(1) 對應的環切圓圓心連線$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、$\overleftrightarrow{O_2C_4}$、$\overleftrightarrow{O_3C_5}$、$\overleftrightarrow{O_4C_1}$、$\overleftrightarrow{O_5C_2}$五線共$O_o$點。

(2) 五邊形C_1~C_5與五邊形O_1~O_5的「頂點的切線與對邊延長線」交點分別共線L_c、L_o，且$L_c=L_o$為共定線($Pascal$ 線)。

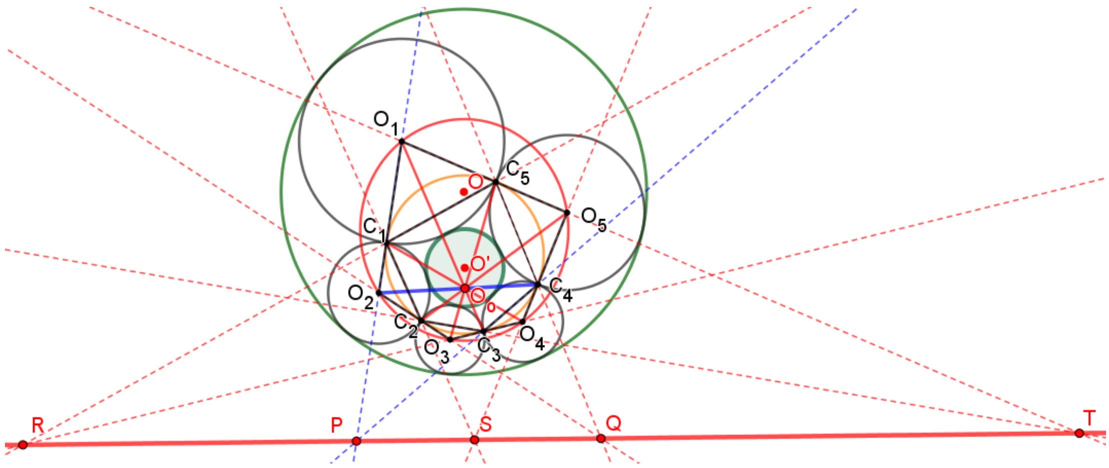


圖 3-8：環切圓圓心與鄰切點的連線共定點，頂點切線與對邊延長線交點共定線

<證明>

1° 由【定理 2-2】及【定理 2-4】，五邊形$O_1 \sim O_5$同時內接於橢圓(以O和O'為兩焦點)，外切於圓O_c，所以根據 *Brianchon* 定理及 *Pascal* 定理，其五組頂點與對邊切點連線$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、$\overleftrightarrow{O_2C_4}$、$\overleftrightarrow{O_3C_5}$、$\overleftrightarrow{O_4C_1}$、$\overleftrightarrow{O_5C_2}$會共交$O_o$點(即 *Brianchon* 點)；其五組頂點切線與對邊延長線的交點P、Q、R、S、T會共線L_o(即 *Pascal* 線)且「O_o與L_o互為關於圓O_c的極點、極線」(參考文獻[1])。

2° 由【性質 2-1】知$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、$\overleftrightarrow{O_2C_4}$、$\overleftrightarrow{O_3C_5}$、$\overleftrightarrow{O_4C_1}$、$\overleftrightarrow{O_5C_2}$分別為$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$關於圓$O_c$的極線；由上述知$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$線$L_o$，根據【性質 2-2】得$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、$\overleftrightarrow{O_2C_4}$、$\overleftrightarrow{O_3C_5}$、$\overleftrightarrow{O_4C_1}$、$\overleftrightarrow{O_5C_2}$必共交$C$點，且「$C$與$L_o$互為關於圓$O_c$的極點、極線」。

3° 由上述可知$C=O_o$。又圓O_c的內接五邊形邊形$C_1 \sim C_5$的五組頂點切線與對邊延長線交點共線L_c，因為$C= O_o$。所以$L_c = L_o$，最後以L表之。再由【定理 3-7】知$\overleftrightarrow{CO_c}$垂直$L$。

4° 由上述可知，*Brianchon* 點、*Pascal* 線同時對於圓O_c和橢圓皆為極點極線關係，故知 *Brianchon* 點為圓O_c和橢圓的 *Limit Point*（極限點）。*Limit Point* 是固定的，所以當環切圓$O_1 \sim O_5$轉動時，其 *Brianchon* 點為固定不動的點，*Pascal* 線為固定不動的線。 █

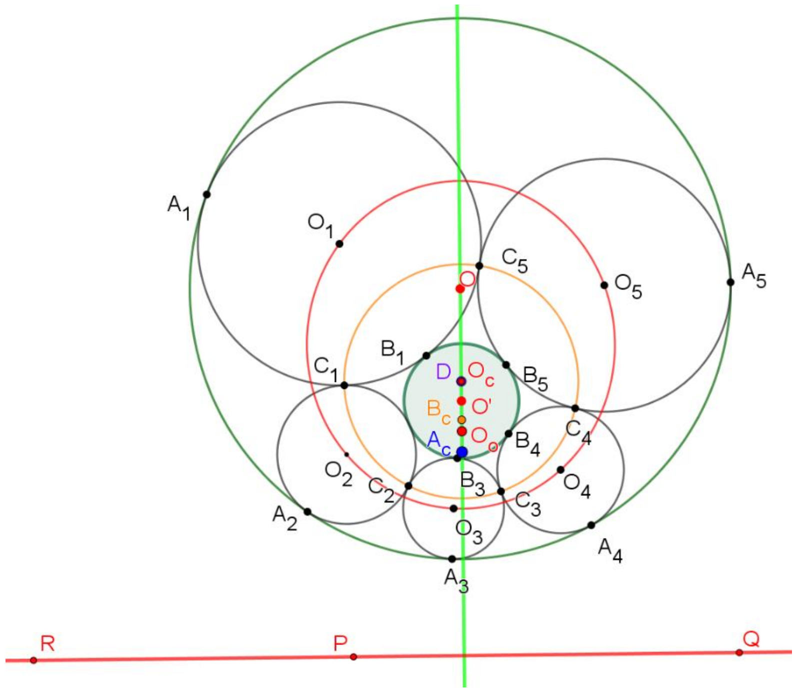
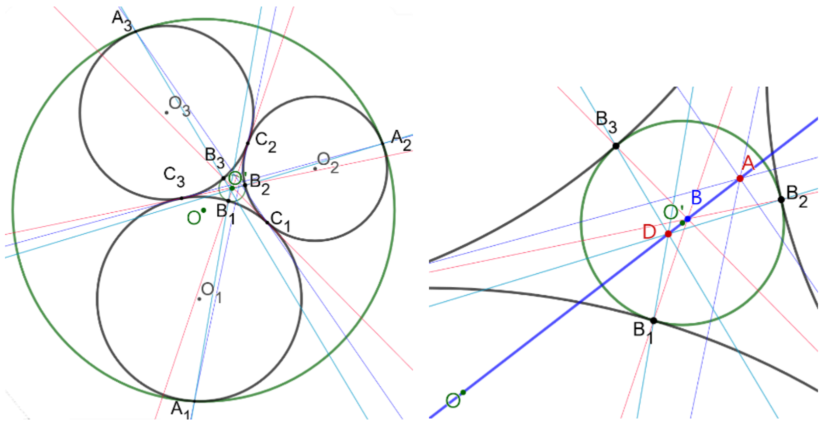


圖 3-9：A_c、B_c、D三點共線且垂直 *Pascal* 線

至此，雙心五圓的相對應內切點、外切點對鄰切點連線所得的三線共點分別為A_c、B_c及同一個環切圓的內切點與外切點連線共 D點均為定點，且A_c、B_c、D三點共線均在兩個內離圓的連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上，並與其 *Pascal* 線垂直，如圖 3-9。至於雙心三圓有一樣的結果，如圖 3-10：



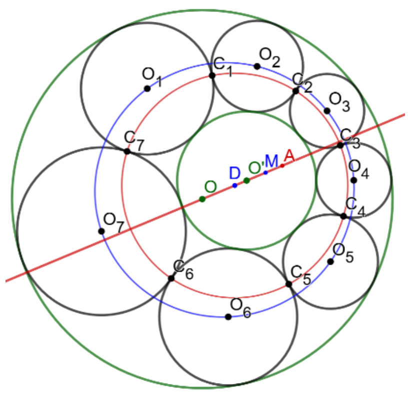


圖 3-10：雙心三圓共點共線　　　　　圖 3-11：雙心七圓

至於雙心七圓，利用雙心五圓的性質探討與證法可得相同結果，如圖 3-11，不再贅述。

【定理 3-10】雙心$2n+1$圓的共點、共線與共圓（$n\geq1$）

設一個雙心$2n+1$圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為R、r且圓心距為d，環切圓O_1~O_{2n+1}，內切點A_1~A_{2n+1}，外切點B_1~B_{2n+1}，鄰切點C_1~C_{2n+1}，則有以下性質：$i,j=$ $1\sim n$，

(1) 對應內切點與鄰切點連線$\overleftrightarrow{A_iC_{n+i}}$，$\overleftrightarrow{A_{n+1}C_{2n+1}}$，$\overleftrightarrow{A_{n+1+j}C_j}$等$2n+1$條線共$A_c$點。

(2) 對應外切點與鄰切點連線$\overleftrightarrow{B_iC_{n+i}}$，$\overleftrightarrow{B_{n+1}C_{2n+1}}$，$\overleftrightarrow{B_{n+1+j}C_j}$等$2n+1$條線共$B_c$點。

(3) 同一個環切圓的內外切點連線$\overleftrightarrow{A_kB_k}$，$k=1\sim 2n+1$，等$2n+1$條線共 D點。

(4) 環切圓的圓心$O_1\sim O_{2n+1}$共橢圓(以兩個內離圓圓心 O與O'為焦點)。

(5) 鄰切點$C_1\sim C_{2n+1}$共圓，圓心O_c點$(=D)$。

(6) 任兩個環切圓的$A_iB_iA_jB_j$、$A_iC_iC_{j-1}A_j$、$B_iC_iC_{j-1}B_j$，均分別四點共圓，$i\neq j$。

(7) A_1~A_{2n+1}，B_1~B_{2n+1}，$C_1\sim C_{2n+1}$、O_1~O_{2n+1}等四組(橢)圓內接 2 n邊形同 *Pascal* 線。

(8) A_c、B_c、D 為定點且均在$\overleftrightarrow{OO'}$上，當環切圓轉動時仍為定線並與 *Pascal* 線垂直。

四、雙心多圓外離情形

在雙心多圓中，如果給定的不是兩圓內離的情形，而是外離的情形，或者不是兩圓而是圓與直線的情形，那麼內離情形的性質是否仍然會存在呢？

(一) 兩圓外離的情形

【定理 4-1】環切圓圓心共雙曲線

如圖 4-1，給定兩個外離圓 O與圓O'，半徑分別為R、R'，作n個環切圓O_i，半徑分別為r_i，$i=1\sim n$，皆相切圓 O與圓O'，則環切圓圓心軌跡為雙曲線，也就是環切圓圓心共雙曲線。

<證明>

$\overline{O_iO}=R+r_i$，$\overline{O_iO'}=R'+r_i$

$\therefore\left|\overline{O_iO}-\overline{O_iO'}\right|=|R-R'|$為定值，$i=1\sim n$

環切圓圓心O_i必在一個雙曲線上(以圓心 O與O'為焦點)。■

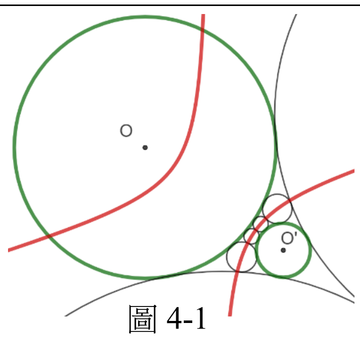


圖 4-1

【定理 4-2】環切圓外切點連線共點

環切圓O_i的外切點連線$\overleftrightarrow{A_iB_i}$必交$\overleftrightarrow{OO'}$於一定點$D$，$i=1\sim n$，且$\overline{OD}:\overline{O'D}=R:R'$，如圖 4-2。

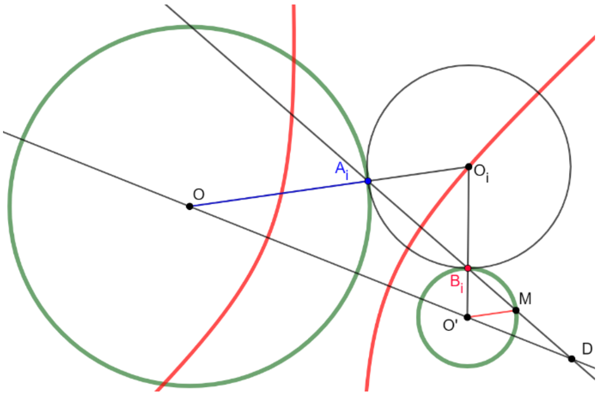


圖 4-2(a)

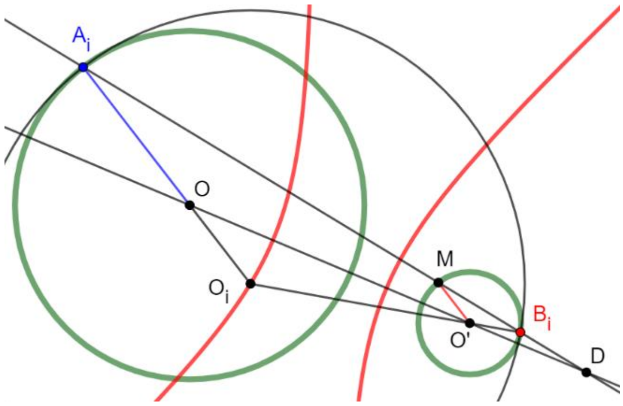


圖 4-2(b)

<證明>

如圖 4-2，設$\overleftrightarrow{A_iB_i}$交圓O′於$M$，$\because\ \overline{O'M}=\overline{O'B_i}$，$\overline{O_iA}=\overline{O_iB_i}$，且$\angle A_iB_iO_i$=$\angle MB_i\mathrm{O}'$

$\Rightarrow \Delta A_iB_iO_i\sim\Delta M\mathrm{O}'B_i$，$\therefore\ \overline{OA_i}\parallel\overline{O'M}\ \Rightarrow\ \overline{OA_i}:\overline{O'M}=\overline{OD}:\overline{O'D}=R:R'$，$i=1\sim n$

R、R'、$\overline{OO'}$均為定值，D為定點，故所有環切圓O_i的外切點連線$\overleftrightarrow{A_iB_i}$必交$\overleftrightarrow{OO'}$於一定點$D$。

■

【定理 4-3】環切圓的鄰切點共圓

給定兩個外離圓 O與O'，有n個環切圓O_i，半徑為r_i，且其兩相鄰圓鄰切點C_i，則鄰切點C_i共圓，$i=1\sim n$，且其圓心O_c在連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上，如圖 4-3(a)。

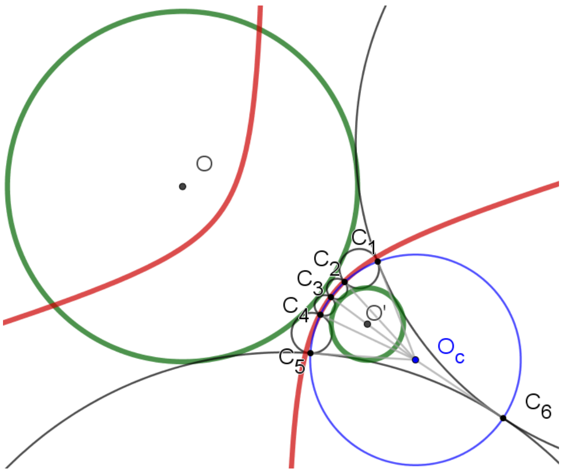


圖 4-3(a)

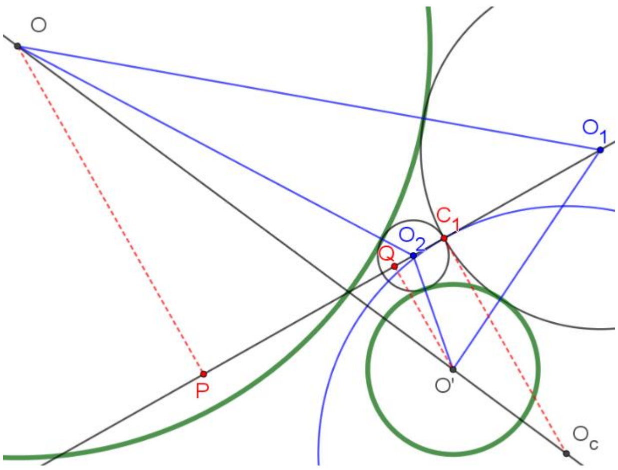


圖 4-3(b)

<證明>

如圖 4-3(b)，兩相鄰外切的環切圓O_1、O_2，切點為C_1，半徑分別為r_1、r_2，且$r_1 > r_2$。

作$\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{O_1O_2}$交$\overleftrightarrow{O_1O_2}$於$P$，作$\overleftrightarrow{OQ} \perp \overleftrightarrow{O_1O_2}$交$\overleftrightarrow{O_1O_2}$於$Q$，設$\overline{C_1P} = x$、$\overline{C_1Q} = y$，

根據畢氏定理　$(x - r_2)^2 + \overline{OP}^2 = (R + r_2)^2$，$(x + r_1)^2 + \overline{OP}^2 = (R + r_1)^2$

$\Rightarrow (R + r_2)^2 - (x - r_2)^2 = \overline{OP}^2 = (R + r_1)^2 - (x + r_1)^2$，得$x = \frac{(r_1 - r_2)R}{(r_1 + r_2)}$，同理，$y = \frac{(r_1 - r_2)R'}{(r_1 + r_2)}$，

作$\overleftrightarrow{C_1O_c} \perp \overline{O_1O_2}$交$\overleftrightarrow{OO'}$於$O_c$，因為$\overleftrightarrow{OP} // \overleftrightarrow{O'Q} // \overleftrightarrow{O_cC_1}$，

所以 $\overline{OO_c} : \overline{O_cO'} = x : y = \frac{(r_1 - r_2)R}{(r_1 + r_2)} : \frac{(r_1 - r_2)R}{(r_1 + r_2)} = R : R' = \overline{OD} : \overline{O'D}$

又因為$\overline{OO'}$及R、R'為定值，故任兩個相鄰環切圓的根軸必共交O_c點($O_c = D$)，為所有環切圓的根心，根軸$\overline{O_cC_\iota} = \overline{DC_\iota}$等長，故鄰切點$C_i$共圓，圓心為$O_c$(即$D$點)。 ■

【定理 4-4】鄰切點、外切點共圓

(1)任意兩個環切圓的外切點A_i、B_i、A_j、B_j共圓，$i, j = 1 \sim n$，且$i \neq$ j。

(2)任意兩個或四個環切圓的外切點與鄰切點對應組合分別有四點共圓或六點共圓。

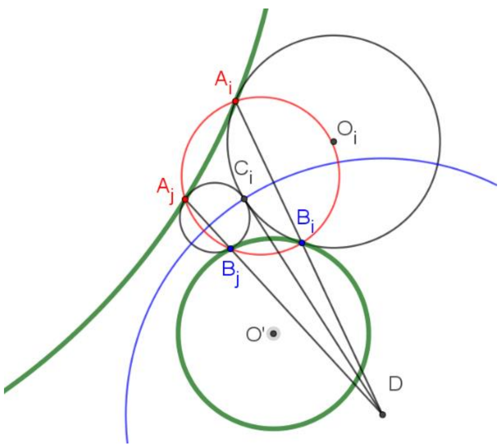


圖 4-4(a)

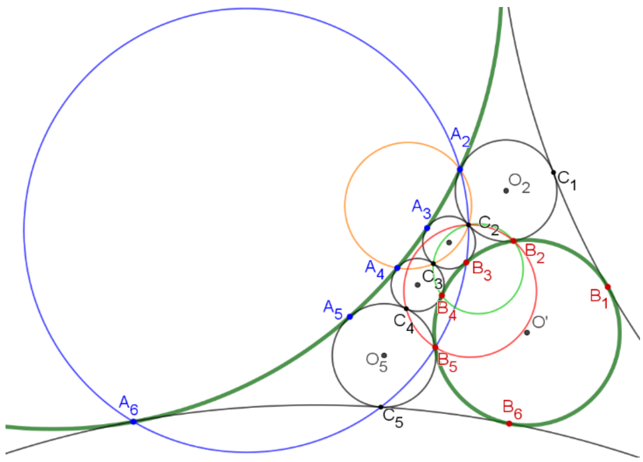


圖 4-
4(b)

<證明>

1° 如圖 4-4(a)，由【定理 4-3】知鄰切點共圓，圓心為$O_c(=D)$，半徑為$\overline{DC_\iota}$，根據圓冪定理

$\overline{DA_\iota}\times\overline{DB_\iota}=\overline{DC_\iota}^2=\overline{DA_j}\times\overline{DB_j}$,$i,j=1\sim n$，且$i\neq$ j ∴ A_i、A_j、B_i、B_j共圓。 ∎

2° 以$\{A_2$、C_2、C_3、$A_4\}$、$\{B_2$、C_2、C_4、$B_5\}$、$\{A_2$、C_2、B_3、B_5、C_5、$A_6\}$為例，均分別四點共圓或六點共圓。如圖 4-4(b)，證明省略。

兩圓外離的雙心六圓如何尺規作圖呢？接下來，仿照內離情形，我們透過極限點找出其構成條件，如下：

【定理 4-5】兩個外離圓的雙心多圓構成條件

兩個內離圓C_1、C_2，圓心分別為O_1、O_2，半徑分別為R、r，連心距$d=\overline{O_1O_2}$，$d>R+r$；若對以其極限點為反演中心的圓作反演，得到兩圓C'_1、C'_2，半徑分別為R'、r'，如圖 4-5 則有以下結果：

(1) 反演後的兩圓C'_1、C'_2為同心圓。

(2) $\frac{R'}{r'}=-\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$

(3) 若 $\frac{R'}{r'}=k$ ，則 $r=\frac{-(1+k^2)R+\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$ ，$k>1$。

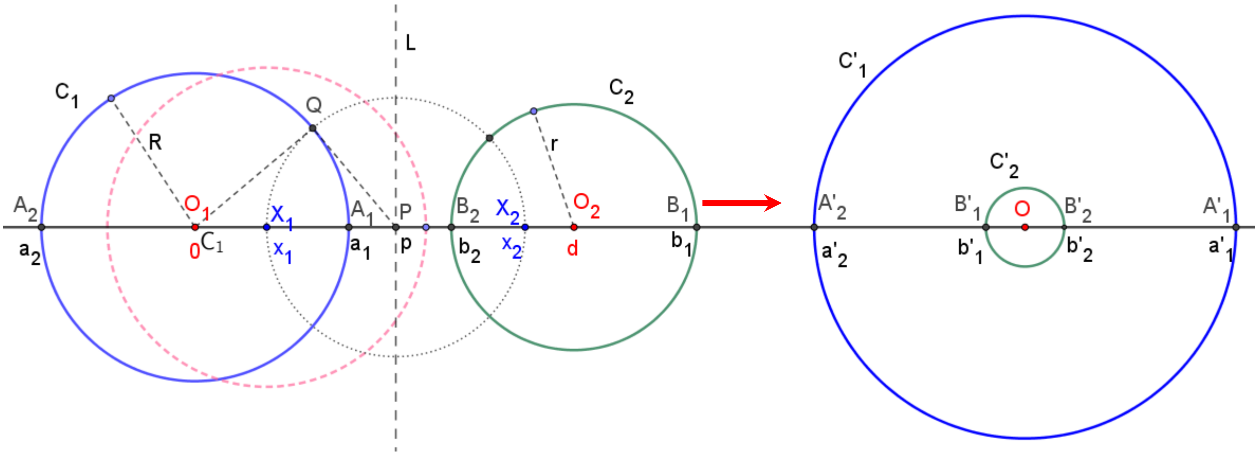


圖 4-5：圓C_1、圓C_2與X_1、X_2；對圓X_1反演，再平移的兩圓C'_1、

<證明>

設$O_1(0,0)$、$O_2(d,0)$及相關點座標位置，如圖 4-5。

設C_1：$x^2+y^2=R^2$ 、 C_2：$(x-d)^2+y^2=r^2$，

則根軸 L=C_1-C_2：$x=\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$，所以 $p=\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$。

$\overline{PQ}^2=\overline{O_1P}^2-\overline{O_1Q}^2=p^2-R^2$，所以 $\overline{PQ}=\sqrt{p^2-R^2}$

$x_1=\overline{O_1X_1}=\overline{O_1P}-\overline{PQ}=p-\sqrt{p^2-R^2}$，$x_2=\overline{O_1X_2}=\overline{O_1P}+\overline{PQ}=p+\sqrt{p^2-R^2}$

兩圓C_1、C_2對單位圓X_1反演後的兩圓C'_1、C'_2，各點的反演點，根據反演定義如下：

$\overline{X_1A_1}\cdot\overline{X_1A_1'}=1^2\Rightarrow(a_1-x_1)\cdot(a_1'-x_1)=1\ \Rightarrow\ a_1'=x_1+\frac{1}{a_1-x_1}$ ， （ $a_1=R$ ）

$\overline{X_1A_2}\cdot\overline{X_1A_2'}=1^2\Rightarrow(x_1-a_2)\cdot(x_1-a_2')=1\ \Rightarrow\ a_2'=x_1+\frac{1}{a_2-x_1}$ ， （ $a_2=-R$ ）

$\overline{X_1B_1}\cdot\overline{X_1B_1'}=1^2\Rightarrow(b_1-x_1)\cdot(b_1'-x_1)=1\ \Rightarrow\ b_1'=x_1-\frac{1}{x_1-b_1}$ ， （ $b_1=d+r$ ）

$\overline{X_1B_2}\cdot\overline{X_1B_2'}=1^2\Rightarrow(b_2-x_1)\cdot(b_2'-x_1)=1\ \Rightarrow\ b_2'=x_1-\frac{1}{x_1-b_2}$ ， （ $b_2=d-r$ ）

為簡化式子另設 $\triangle=d^2+R^2-r^2$、$\square=\sqrt{\triangle^2-(2dR)^2}\ \Rightarrow\ p=\frac{\triangle}{2d}$、 $x_1=\frac{\triangle-\square}{2d}$

(1) 欲證：$\frac{a_1'+a_2'}{2}=\frac{b_1'+b_2'}{2}$ ，圓C'_1、C'_2為同心圓 O，仿照【定理 2-7】，證明省略。

(2) 欲求：反演前後的半徑比關係。

$$R'=\overline{OA_1'}=\frac{a_1'-a_2'}{2}=\frac{R}{R^2-x_1^2}$$

$$r'=\overline{OB_1'}=\frac{b_1'-b_2'}{2}=\frac{r}{(d-x_1)^2-r^2}$$

$$\Rightarrow\frac{R'}{r'}=\left(\frac{(d-x_1)^2-r^2}{R^2-x_1^2}\right)\frac{R}{r}$$

欲證：$\left(\frac{(d-x_1)^2-r^2}{R^2-x_1^2}\right)\frac{R}{r}=-\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$

$$\frac{(d-x_1)^2-r^2}{R^2-x_1^2}=\frac{x_1^2-R^2-2dx_1+d^2+R^2-r^2}{R^2-x_1^2}=-1+\frac{2dx_1-\triangle}{x_1^2-R^2}$$

$$=-1+\frac{2d\left(\frac{\triangle-\square}{2d}\right)-\triangle}{\left(\frac{\triangle-\square}{2d}\right)^2-R^2}=-1+\frac{-4d^2\square}{\triangle^2+\square^2-2\triangle\square-4d^2R^2}$$

$$=-1+\frac{-4d^2\square}{2\triangle^2-2\triangle\square-8d^2R^2}=-1+\frac{-4d^2\square}{2(\triangle^2-4d^2R^2)-2\triangle\square}$$

$$=-1+\frac{-4d^2\square}{2\square^2-2\triangle\square}=-\left(1-\frac{2d^2}{\triangle-\square}\right)$$

代入原式，即可得證。

(3) 設 $\frac{R'}{r'}=k$ ，因為兩外離圓反演後的兩圓C'_1、C'_2，半徑$R'>r'$，所以$k>1$。

$$\Rightarrow k=-\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow kr^2+(1+k^2)R\,r+(R^2-d^2)k=0$$

$\Rightarrow r=\frac{-(1+k^2)R\pm\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$ (因為$0<r<R$，所以取正號)

換句話說，若反演後同心圓半徑比$\frac{R'}{r'}=k$時，則反演前雙心多圓的R、r、d的關係式為

$$r=\frac{-(1+k^2)R+\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$$

若$k=3$，即半徑比$\frac{R'}{r'}=3$的正雙心六圓，則其反演前「兩外離圓的雙心六圓」的構成條件為 $r=\frac{-5R+\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$；若給定$R$和$d$且$d>R+r$，透過關係式求得$r$，然後依此構圖，就可做出一般「兩個外離圓的雙心六圓」。

【定理 4-6】雙心六圓的 Stanley 點、外切點共定點與共定線

給定兩個外離圓 O 與圓 O'，若其環切圓 $O_1 \sim O_6$，皆相鄰外切，如圖 4-6(a)，則：

(1)對應的外切點連線 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$ 共交 A 點。

(2)對應的外切點連線 $\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$ 共交 B 點。

(3) 若對應的兩個環切圓(如圓 O_1、O_4)分別與兩個外離圓 O 與 O' 各作根軸，則此四根軸共交 P 點，即此**四圓的根心**。當環切圓轉動時，根心 P 的軌跡為一直線 L；如圖 4-6。

(4)若 L_A、L_B 分別為圓 O 內接六邊形 $A_1 \sim A_6$ 與圓 O' 內接六邊形 $B_1 \sim B_6$ 的 $Pascal$ 線，則 $L = L_A = L_B$；且 A、B 為定點均在 $\overleftrightarrow{OO'}$ 上，且與 $Pascal$ 線垂直。

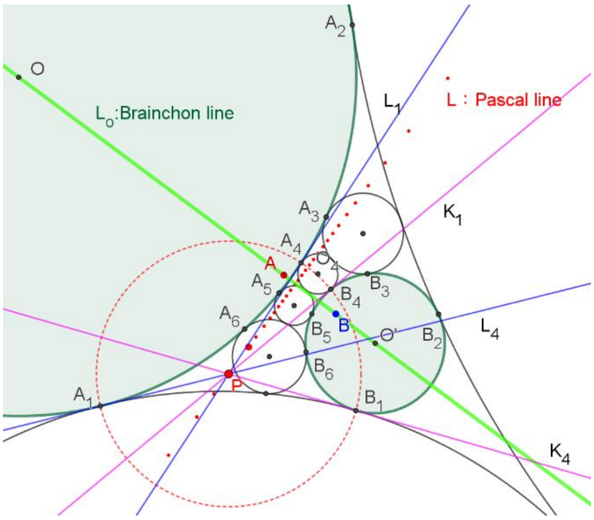


圖 4-6(a)

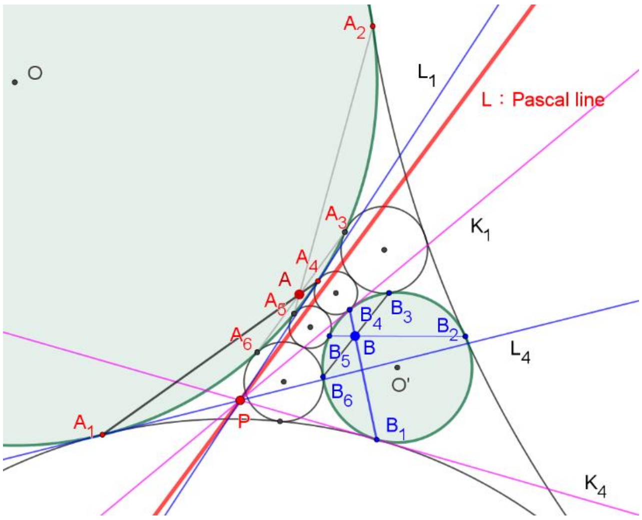


圖 4-6(b)

<證明>

(1)由【定理 1-7】可知兩外離圓上的外切點對應連線分別共交 A 和 B 點。

(2)如圖 4-6(a)

1° 設 L_1、L_4 分別為圓 O 與圓 O_1、圓 O_4 的根軸；設 K_1、K_4 分別為圓 O' 與圓 O_1、圓 O_4 的根軸；

2° 根據【定理】任意兩個環切圓的外切點，四點共圓，所以 A_1、A_4、B_1、B_4 共圓，所以 L_1、L_4、K_1、K_4 四根軸會共交一點 P，即為此圓的圓心，也是四圓 O、O' 與 O_1、O_4 的根心。

3° 同理對圓 O 與圓 O' 分別對圓 O_2、圓 O_5 得根心 Q；分別對圓 O_3、圓 O_6 得根心 R。

(3)如圖 4-6(b)

4° 因為P、Q、R分別為$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$關於圓$O$的極點，同時也分別為$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$關於圓$O'$的極點。根據【定理 1-7】$\overleftrightarrow{A_1A_4} \cap \overleftrightarrow{A_2A_5} \cap \overleftrightarrow{A_3A_6} = A$，$\overleftrightarrow{B_1B_4} \cap \overleftrightarrow{B_2B_5} \cap \overleftrightarrow{B_3B_6} = B$，由【性質 2-2】，$P$、$Q$、$R$三點必共線 L；換句話說，當環切圓轉動時，根心的軌跡必為一直線且為定線。

5° 若L_A、L_B分別為圓 O內接六邊形$A_1 \sim A_6$與圓O'內接六邊形$B_1 \sim B_6$的$Pascal$線，則由上述可知 $L_A = L_B = L$。

6° 因為關於圓 O與圓O'，A、B分別與 L 互為極點、極線，故A、B均在$\overleftrightarrow{OO'}$上且與$Pascal$線L垂直。又因為L為定線，故A、B均為定點。 ∎

【定理 4-7】雙心六圓對應鄰切點連線、環切圓圓心連線均共點且共定線

(7) 對應的鄰切點連線$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$三線共點，如$C$點。

(8) 對應的環切圓圓心連線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$三線共點，如$O_o$點。

(9) 六邊形$C_1 \sim C_6$三組對邊延長線交點共線L_c；六邊形$O_1 \sim O_6$三組對邊延長線交點共線L_o。且$C = O_o$為共同定點，$L_c = L_o$為共同定線($Pascal$ 線)。

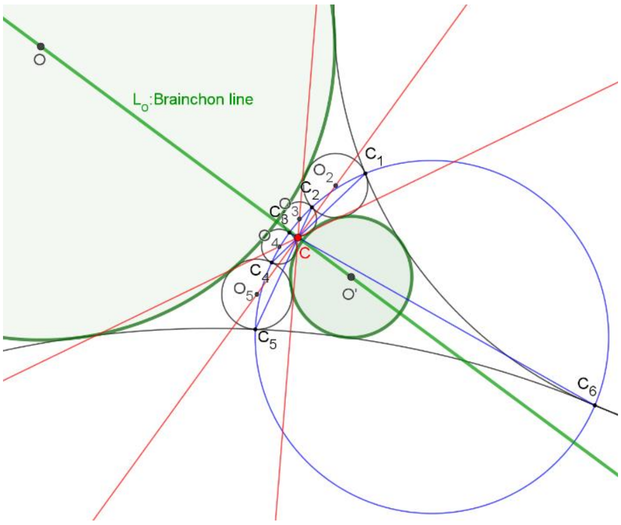


圖 4-7(a)

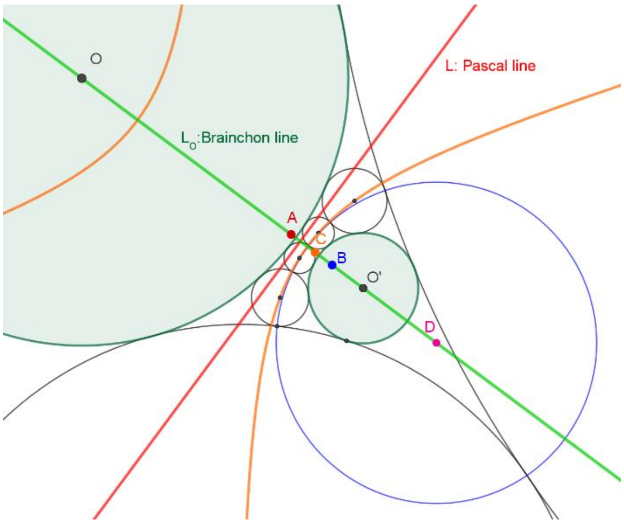


圖 4-7(b)

<證明>

1. 由【定理 4-1】及【定理 4-3】，六邊形$O_1 \sim O_6$同時內接於雙曲線（以O和O'為兩焦點)，外切於鄰切圓，所以根據 *Brianchon* 定理及 *Pascal* 定理，其三組對角線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$會共交一點$O_o$(即 *Brianchon* 點)，其三組對邊延長線的交點 P、Q、R 會共L_o線(即 *Pascal* 線)，且「O_o與L_o互為關於圓O_c的極點、極線」。
2. 由【性質 2-1】知$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$分別為 P、Q、R 關於鄰切圓的極線；由上述知 P、Q、R 共線L_o，根據＜性質 2-2＞得$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$必共交一點 C，且「C與L_o互為關於圓O_c的極點、極線」。
3. 由上述可知 C=O_o。又圓O_c內接六邊形$C_1 \sim C_6$的三組對邊延長線交點共線L_c，因 C= O_o，所以$L_c = L_o$，以 L 表之。 *Brianchon* 點為圓O_c和橢圓的 *Limit Point*（極限點)。*Limit Point* 是固定的，故當環切圓$O_1 \sim O_6$轉動，*Brianchon* 點及 *Pascal* 線皆為固定不動。 █

■綜合上述【定理 4-6】、【定理 4-7】，當六個環切圓轉動時，則共點 A、B、C (=O_o)及 D (= O_c)四點均為定點，且均在兩個內離圓的連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上，也就是 *Brianchon* 線上，並與其 *Pascal* 線垂直，如圖 4-7(b)。

(二) 直線與直線外一圓的情形

在外離情形的雙心多圓中，想像其中一圓的半徑大到與另一圓的關係幾乎是「一直線與直線上外一圓」的情形，那麼外離情形的性質是否仍然會存在呢？

【定理 4-8】環切圓圓心共拋物線

給定一直線L與直線外一圓O，半徑為R，作 n 個環切圓O_i，半徑為 r_i，$i = 1 \sim n$，皆相切於圓O和直線L，則則環切圓圓心軌跡為拋物線，也就是環切圓圓心共拋物線。如圖 4-9

<證明>

$\because\ \overline{O_\iota O}=R+r_i$，$d(O_i,L)=r_i$

$\therefore\ \overline{O_\iota O}=d(O_i,L)+R$，$i=1\sim n$

若將直線 L 向下平移R單位得直線L'，則$\overline{O_\iota O}=d(O_i,L')$

即環切圓圓心O_i的軌跡為拋物線，其中以 O 為焦點，直線L'為準線，即環切圓圓心共拋物線■

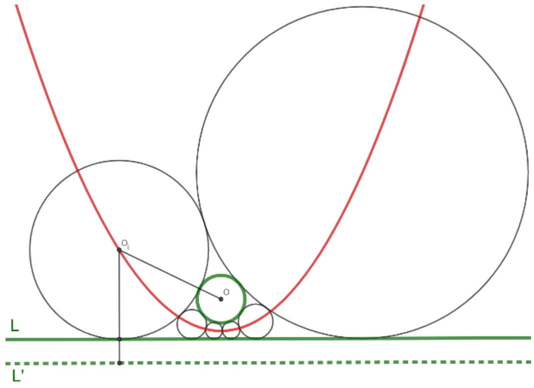


圖 4-8

【定理 4-9】環切圓外切點連線共點

設L_o為過O點與 L 垂直的直線，同環切圓的切點連線$\overleftrightarrow{A_\iota B_\iota}$交$L_o$於$D$點，$i=1\sim n$，則$\overline{OD}=R$，$D$點恰在圓O上。如圖 4-9

<證明>

$\because\ \overline{O_\iota B_\iota}\perp L$ 且$L_o\perp L$ $\therefore\ \overline{O_\iota B_\iota}//L_o$

$\Rightarrow\angle DA_iO=\angle B_iA_iO_i$、$\angle DOA_i=\angle B_iO_iA_i$、

$\Rightarrow\Delta OA_iD\sim\Delta O_iA_iB_i\ \Rightarrow\ \frac{\overline{OD}}{\overline{OA_\iota}}=\frac{\overline{O_\iota B_\iota}}{\overline{O_\iota A_\iota}}=\frac{r_i}{r_i}=1$

$\therefore\ \overline{OD}=\overline{OA_\iota}=R$，$\overleftrightarrow{A_\iota B_\iota}$交$L_o$於$D$點恰在圓$O$上。■

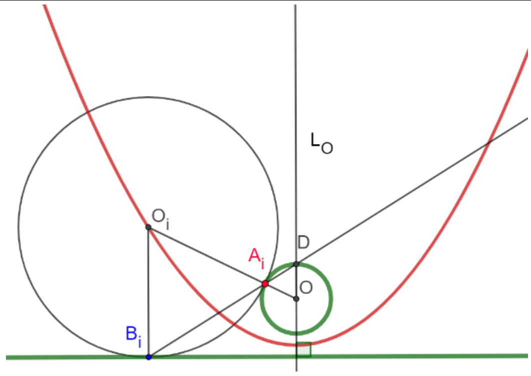


圖 4-9

【定理 4-10】環切圓的鄰切點共圓

給定一直線L與直線外一圓O，半徑為R，作n個環切圓切於圓 O與直線L，則相鄰兩圓的鄰切點共圓，圓心$O_C=D$。如圖 4-11(a)

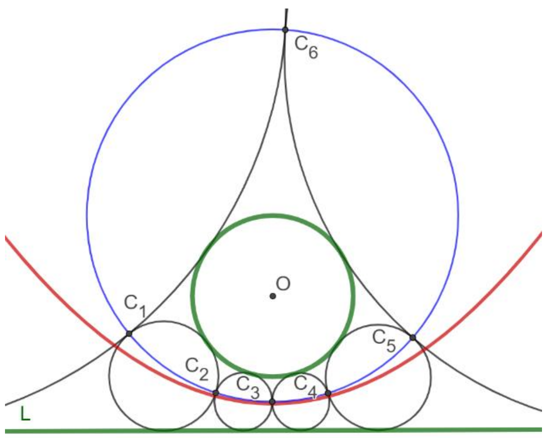


圖 4-10(a)

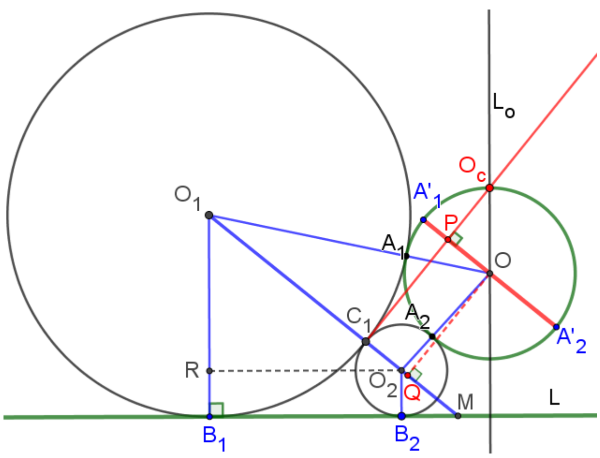


圖 4-10(b)

<證明>

如圖 4-10(b)

1. 設L_o為過O點與L垂直的直線，O_1、O_2為兩相鄰環切圓圓心，半徑分別為r_1、r_2。
2. 連接$\overleftrightarrow{O_1O_2}$交$L$於$M$，作$\overline{A_1'A_2'}//\overleftrightarrow{O_1O_2}$交$L_o$於$O$。作$\overleftrightarrow{C_1P}\perp\overleftrightarrow{O_1O_2}$交$\overline{A_1'A_2'}$於$P$，交$L_o$於$O_c$；作$\overleftrightarrow{OQ}\perp\overleftrightarrow{O_1O_2}$交$\overleftrightarrow{O_1O_2}$於$Q$；作$\overleftrightarrow{O_2R}\perp\overleftrightarrow{O_1B_1}$交$\overleftrightarrow{O_1B_1}$於$R$。
3. 根據畢氏定理，$\overline{OO_1}^2-\overline{O_1Q}^2=\overline{OQ}^2=\overline{OO_2}^2-\overline{O_2Q}^2$

$$(r_1+R)^2-(r_1+r_2+\overline{O_2Q})^2=(r_2+R)^2-\overline{O_2Q}^2$$

$$\Rightarrow \overline{\mathrm{O_2Q}}=\frac{(r_1-r_2)R}{r_1+r_2}-r_2=\overline{C_1Q}-r_2 \quad 所以\ \overline{PO}=\overline{C_1Q}=\frac{(r_1-r_2)R}{r_1+r_2}$$

又$\angle O_1MB_1=\angle OO_cP$，且$\angle \mathrm{O_1B_1M}=\angle \mathrm{OPO_c}=90°$，$\therefore\ \Delta O_1MB_1\sim\Delta OO_cP$

$$\Rightarrow \frac{\overline{O_cO}}{\overline{PO}}=\frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_1B_1}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_2R}}=\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}$$

$$\Rightarrow \overline{O_cO}=\overline{PO}\left(\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}\right)=\frac{(r_1-r_2)R}{r_1+r_2}\times\left(\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}\right)=R$$

相鄰環切圓的根軸共交O_c，由【定理 4-9】知 $O_c=D$為n個環切圓的根心，故鄰切點共圓

■

【定理 4-11】鄰切點、外切點共圓

(1)任兩個環切圓的外切點A_i、B_i、A_j、B_j共圓，$i,j=1\sim \mathrm{n}$ 且$i\neq j$ 。

(2)任意兩個或四個環切圓的外切點與鄰切點對應組合分別有四點共圓或六點共圓。

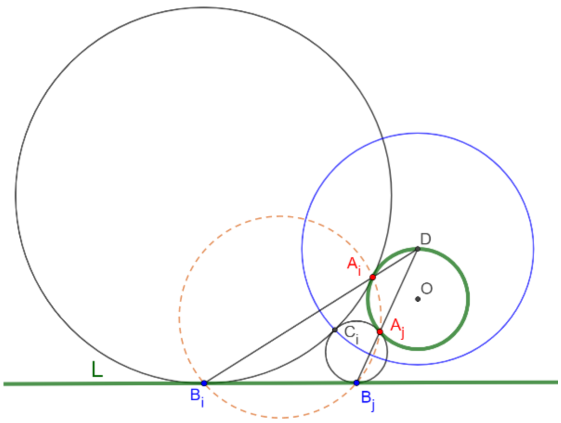


圖 4-11(a)

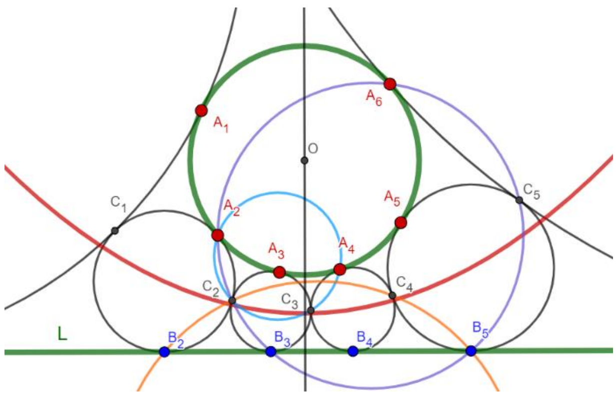


圖 4-11(b)

<證明>

(1) 由【定理 4-11】可知鄰切點共圓，

根據圓冪定理 $\overline{A_iD} \times \overline{B_iD} = \overline{C_iD}^2 = \overline{A_jD} \times \overline{B_jD}$　$i, j = 1 \sim \text{n}$ 且$i \neq j$ ，$\therefore A_i$、A_j、B_i、B_j共圓

∎

(2) 如圖 4-11(b)所示，以$\{A_2$、C_2、C_3、$A_4\}$、$\{B_2$、C_2、C_4、$B_5\}$、$\{A_2$、C_2、B_3、B_5、C_5、$A_6\}$為例，均分別四點共圓或六點共圓。證明省略。

給定一直線與直線外一圓的雙心六圓如何尺規作圖呢？接下來，我們透過極限點找出其構成條件，如下：

【定理 4-12】直線外一圓時的環切圓構成條件

給定一直線C_1(想像成半徑R無限大的圓，圓心O_1)及直線外一圓C_2(圓心O_2，半徑r)，與直線的垂直距離為$d = \overline{O_1O_2}$(垂足為O_1)，$d > r$；若以其極限點為反演中心的圓作反演，得到兩圓C'_1、C'_2，半徑分別為 R'、r'，則有以下結果：

(1) 反演後的兩圓C'_1、C'_2為同心圓。

(2) $\frac{R'}{r'} = \frac{d - \sqrt{d^2 - r^2}}{r}$

(3) 若 $\frac{R'}{r'} = k$ ，則 $r = \frac{2dk}{k^2+1}$

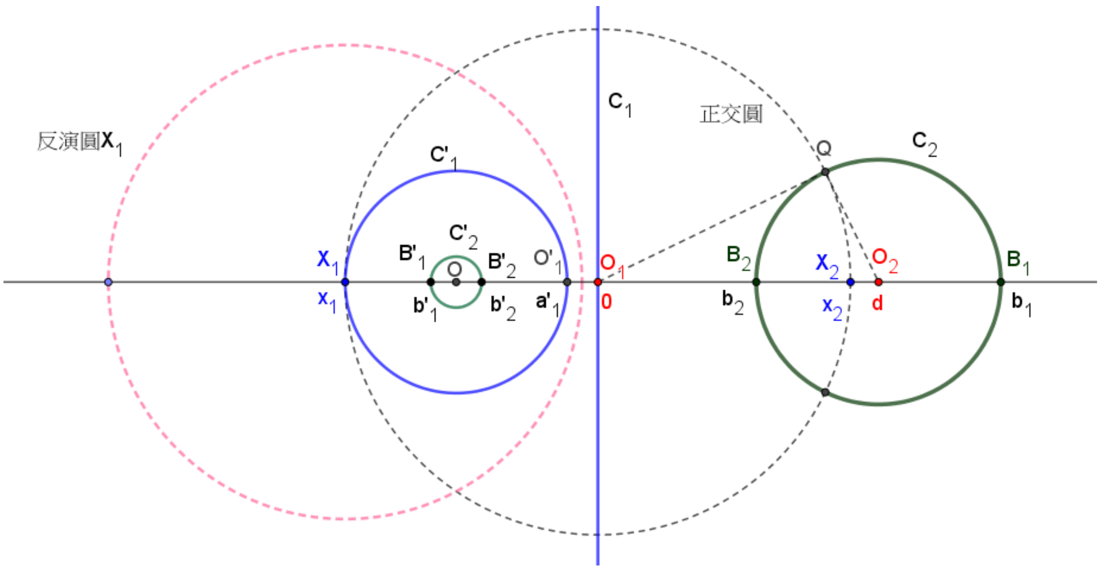


圖 4-12：直線C_1、圓C_2與X_1、X_2；對圓X_1反演的兩圓C'_1、C'_2

<證明>

設$O_1(0,0)$、$O_2(d,0)$及相關點座標位置，如圖 4-12。

設C_1：$\mathrm{y}=0$ 、 C_2：$(x-d)^2+y^2=r^2$，

則根軸即為直線C_1，以O_1為圓心，到圓C_2的切線段長為半徑畫圓(即正交圓)，交同軸於X_1、X_2，則$x_1=-\sqrt{\mathrm{d}^2-r^2}$、$x_2=\sqrt{\mathrm{d}^2-r^2}$。

直線C_1、圓C_2對單位圓X_1反演後的兩圓C'_1、C'_2，各點的反演點，根據反演定義如下：

$\overline{X_1O_1}\cdot\overline{X_1O'_1}=1^2\Rightarrow(0-x_1)\cdot(a'_1-x_1)=1\ \Rightarrow\ a'_1=x_1-\frac{1}{x_1}$ ， ($a_1=\ R$)

$\overline{X_1B_1}\cdot\overline{X_1B'_1}=1^2\Rightarrow(b_1-x_1)\cdot(b'_1-x_1)=1\ \Rightarrow\ b'_1=x_1-\frac{1}{x_1-b_1}$ ，($b_1=d+r$)

$\overline{X_1B_2}\cdot\overline{X_1B'_2}=1^2\Rightarrow(b_2-x_1)\cdot(b'_2-x_1)=1\ \Rightarrow\ b'_2=x_1-\frac{1}{x_1-b_2}$ ， ($b_2=d-r$)

(1) 欲證：$\frac{O'_1+x_1}{2}=\frac{b'_1+b'_2}{2}$ ，圓C'_1、C'_2為同心圓 O。仿照【定理 2-7】，證明省略。

(2) 欲求：反演前後的半徑比關係。

$$R'=\overline{OO'_1}=\frac{a'_1-x_1}{2}=-\frac{1}{2x_1}$$

$$r'=\overline{OB'_1}=\frac{b'_1-b'_2}{2}=\frac{r}{(x_1-d)^2-r^2}$$

$$\Rightarrow\frac{R'}{r'}=-\frac{(x_1-d)^2-r^2}{2rx_1}=-\frac{(x_1-d)^2-r^2}{2rx_1}=-\frac{x_1^2-2dx_1+d^2-r^2}{2rx_1}$$

$$=-\frac{x_1^2-2dx_1+x_1^2}{2rx_1}=-\frac{x_1-d}{r}=\frac{d+\sqrt{d^2-r^2}}{r}$$

(若對圓X_2 作反演，得$\frac{R'}{r'}=\frac{d-\sqrt{d^2-r^2}}{r}$)

(3) 設 $\frac{R'}{r'}=k$ ，因為兩外離圓反演後的兩圓C'_1、C'_2，半徑$R'>r'$，所以$k>1$。

$\Rightarrow k=\frac{d+\sqrt{d^2-r^2}}{r}\ \Rightarrow r=\frac{2kd}{1+k^2}$，即為反演前雙心多圓的$R$、$r$、$d$的關係式。

若 $k=3$，即半徑比$\frac{R'}{r'}=3$的正雙心六圓， 則其反演前「直線與圓的雙心六圓」的構成條件為 $r=\frac{3d}{5}$ 。若給定 d 且 $d>r$，透過關係式可求得r，然後依此構圖，就可做出一般「圓與直線的雙心六圓」。

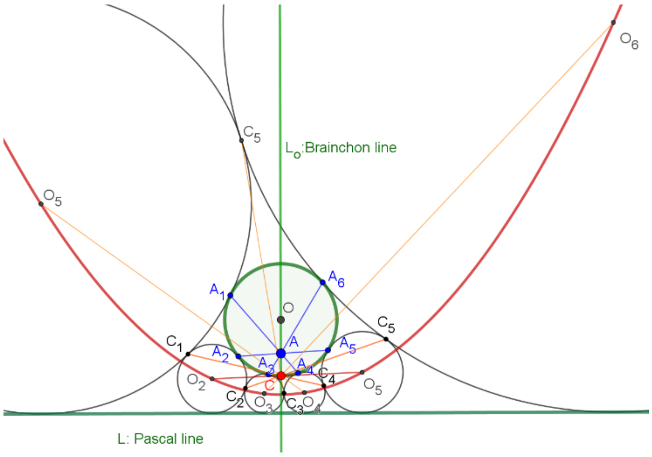
【定理 4-13】對應外切點、鄰切點、環切圓圓心分別連線共點

給定直線L與直線外圓 O，若其環切圓$O_1\sim O_6$，外切點$A_1\sim A_6$、$B_1\sim B_6$、鄰切點$C_1\sim C_6$，則：

(1)對應的外切點連線$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$共交 A 點。

(2)對應的鄰切點連線$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$和環切圓圓心連線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$共交 C點。

(3)當環切圓轉動時，上述 A、C 皆為定點，且在通過圓心 O與直線L垂直的$Brainchon$ 線上。



<證明>

圖 4-13

如圖 4-13，仿照【定理 4-6】、【定理 4-7】利用極點、極線即可得證。

【定理 4-14】外切點、鄰切點、環切圓圓心連線延長線共*Pascal*線

給直線 L 與直線外一圓 O，若其環切圓$O_1\sim O_6$，皆相鄰外切，如圖 4-14，則：

六邊形$A_1\sim A_6$ 、$C_1\sim C_6$ 、$O_1\sim O_6$的對應邊延長線交點均在直線L上，即共 *Pascal* 線。

<證明>

仿照【定理 4-7】，即可得證。

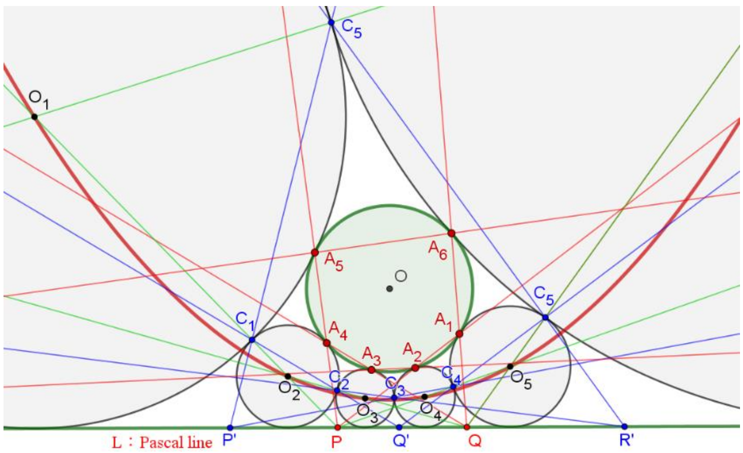


圖 4-14

(三) 阿波羅尼斯圓族中的雙心多圓

阿波羅尼斯圓族為橘色圓族(參考文獻[4])，其與上下藍色圓族的每一個圓均正交。

橘色圓族= $\left\{X \middle| \frac{d(X,X_1)}{d(X,X_2)} = r \text{，} r > 0 \text{，} X_1 \text{、} X_2 \text{為極限點} \right\}$

藍色圓族= $\left\{X \middle| \text{有向角} \angle X_1XX_2 = \theta \text{，} 0 \leq \theta \leq \pi \text{，} \right\}$

透過對橘色圓族的不同選擇「兩個內離圓、兩個外離圓或圓與直線」，見圖 4-15：

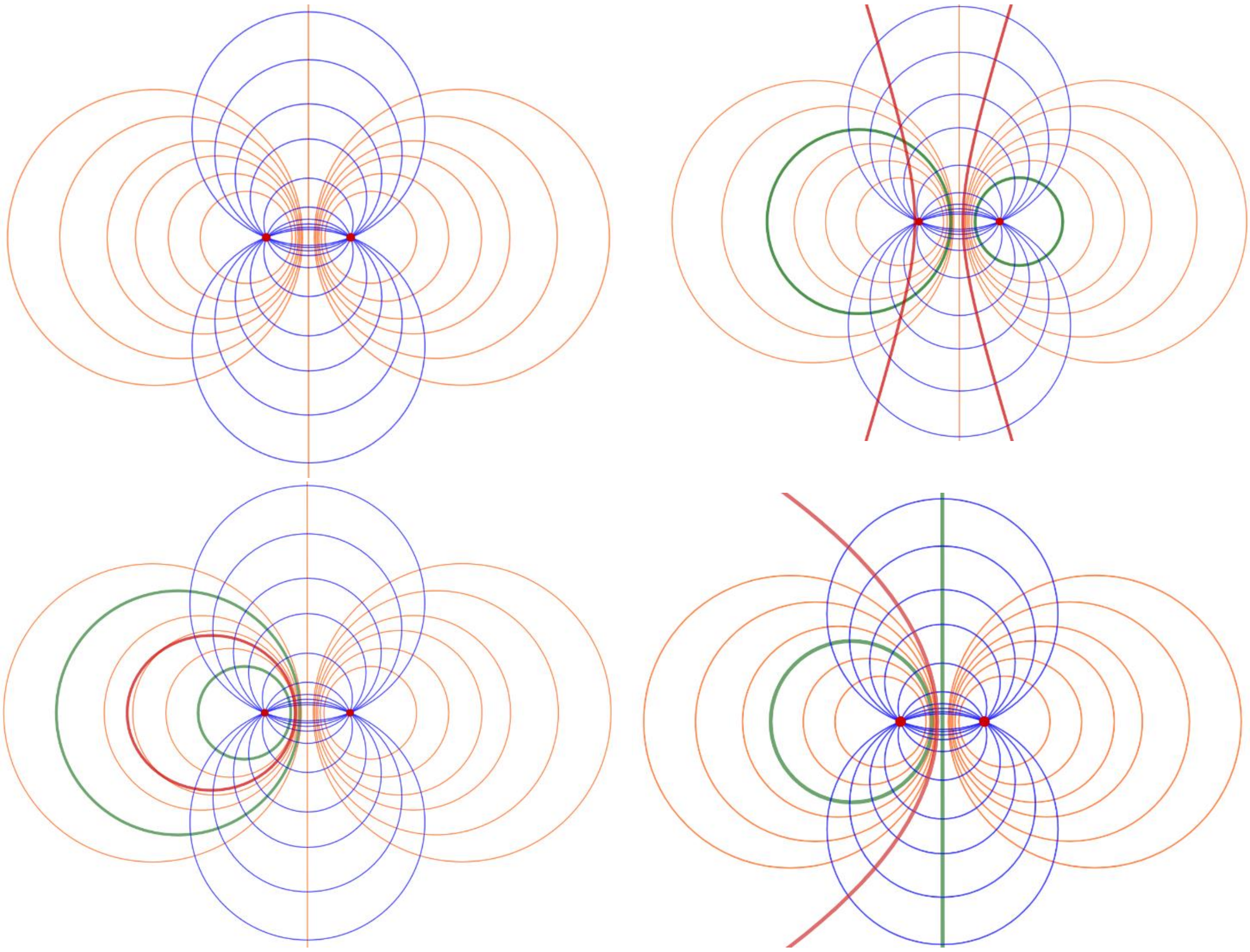


圖 4-15 雙心多圓的環切圓圓心的錐線軌跡

本研究透過以極限點為中心的反演圓將上述情形反演，得到同軸上的一組同心圓，藉以推導出雙心多圓三種情形的構成條件，並發現：

1. 阿波羅尼斯圓族有共同的根軸，同時也是雙心多圓的$Pascal$線。
2. 雙心多圓的環切圓圓心共錐(橢圓、雙曲線、拋物線)。
3. 雙心多圓的環切圓的鄰切點共圓。
4. 以雙心六圓為例，各組對應內或外切點、環切圓圓心、鄰切點均各自連線，分別共交一定點，即為其所構成雙心六邊形的$Brainchon$點，在連心線上形成$Brainchon$線；但即使在不同的雙心六邊形卻共同一條$Pascal$線。

由【定理 2-7】【定理 4-5】【定理 4-12】雙心多圓三種情形的構成條件，若以 k=3，雙心六圓為例，透過所發現的性質，可推導出各定點、定線、定圓、定圓錐曲線的軌跡方程式，如下表：

類型	構成條件	環切圓圓心軌跡 鄰切點軌跡	$Pascal$線
兩內離圓 $O(0,0)$ $O'(d,0)$ $d=\overline{OO'}$	$r=\dfrac{5R-\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ $0\le d<R-r$	$\dfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{(R+r)^2}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{(R+r)^2-d^2}{4}}=1$ $\left(x-\dfrac{Rd}{R+r}\right)^2+y^2=\dfrac{Rrd^2}{(R+r)^2}$	$x=\dfrac{d^2+R^2-r^2}{2d}$
兩外離圓 $O(0,0)$ $O'(d,0)$ $d=\overline{OO'}$	$r=\dfrac{-5R+\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ $d>R+r$	$\dfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{(R-r)^2}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{d^2-(R-r)^2}{4}}=1$ $\left(x-\dfrac{Rd}{R-r}\right)^2+y^2=Rr\left(\dfrac{d^2}{(R-r)^2}-1\right)$	$x=\dfrac{d^2+R^2-r^2}{2d}$
圓與直線 $O(0,0)$ $d=d(O,L)$	$r=\frac{3d}{5}$，$d>r$	$y^2=-2(d+R)\left(x-\dfrac{d+R}{2}\right)$ $(x+R)^2+y^2=2R(d+R)$	$x=d$

五、七圓定理及雙心多圓在球面及球體上的推廣

這些圓的性質難道僅僅在平面上成立嗎?

我們嘗試往立體的方向發展。

首先，我們嘗試了將七圓定理在球面上，以截面的形式呈現。**在球面上對應點連線會共交兩點**，若以圖上 A 點的角度來看，六圓在內部，但是若以 A’ 的角度來看，則六圓在外部。

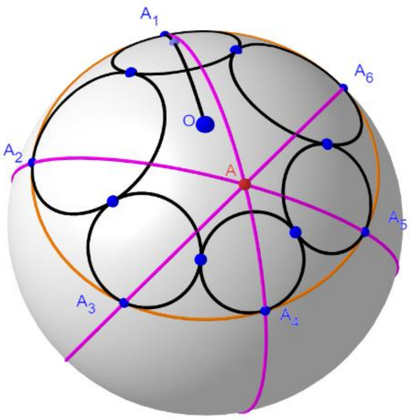


圖 5-1

而後，我們嘗試了雙心多圓在球面上的推廣

將連線狀況分為兩種，和空間中的連線，球面上的弧線，如圖，上述第一種情況，對應 A 點、B 點、C 點連線，都會共交一點，然後 A、B、C 三點共 Brainchon 線。

【定理 5-1】圓上的內外切點連線交於兩點

在同一個環切圓的內切點與外切點連線$\widehat{A_kB_k}$共交一點，$k=1\sim n$，以D表之，如圖 5-2。

<證明>

已知圓O半徑為R，圓O'半徑為r，圓O_i半徑為r_i

則根據文獻球面 Menelaus 定理 $\frac{\sin\widehat{OB_1}}{\sin\widehat{O_1B_1}}\times\frac{\sin\widehat{O_1A_1}}{\sin\widehat{O'A_1}}\times\frac{\sin\widehat{O'C}}{\sin\widehat{OC}}=1$

$\frac{R}{r_1}\times\frac{r_1}{r}\times\frac{\sin\widehat{O'C}}{\sin\widehat{OC}}=1$，$\frac{\sin\widehat{O'C}}{\sin\widehat{OC}}=\frac{r}{R}$，又 R、r 為定值

故$\overline{A_iB_i}$共交於一點。 ∎

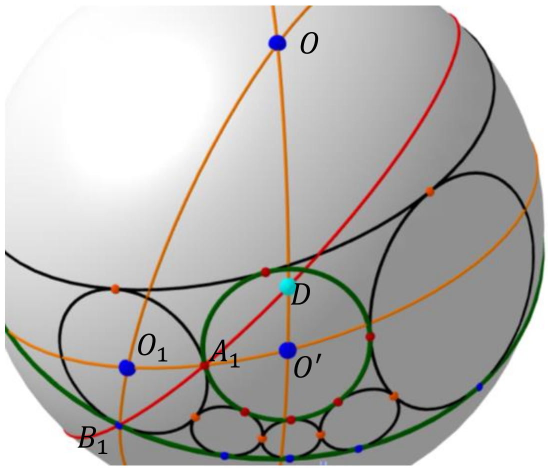


圖 5-2

另外在外部的情況，A、B、C 點連成的直線，在線外也會共交同一條 Pascal 線，和平面不一樣的是，這些點和線的組合不再被拘束在面上，而是在球的內部和外部。

這條 Pascal 線和 Brainchon 線，**在空間中的關係則是歪斜**，並且**通過圓心能做一條同時垂直 Brainchon 線和 Pascal 線的直線**，如圖 5-3。

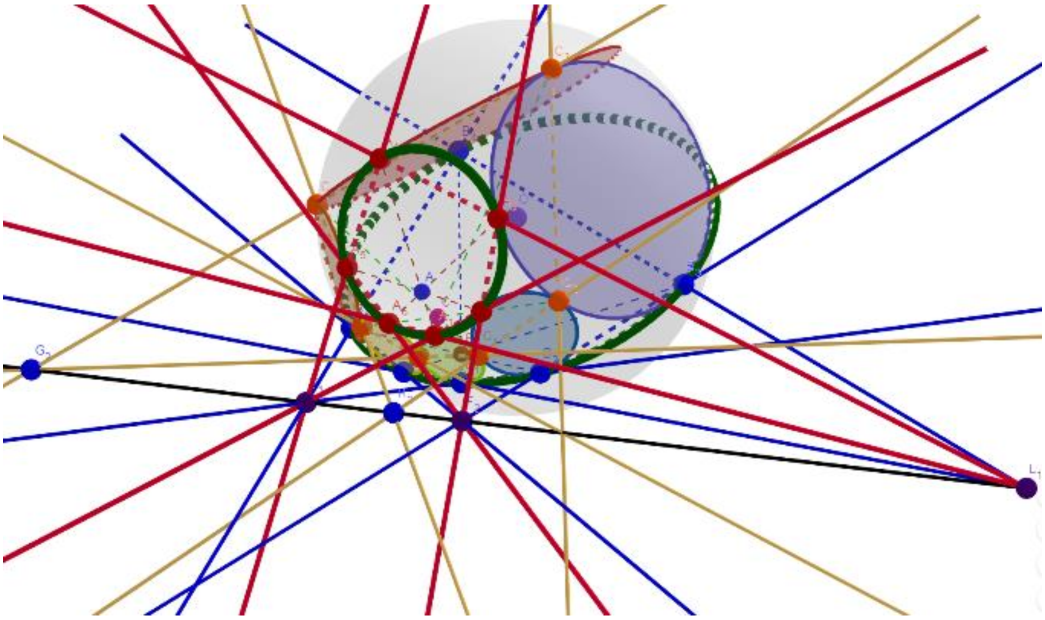


圖 5-3(a)

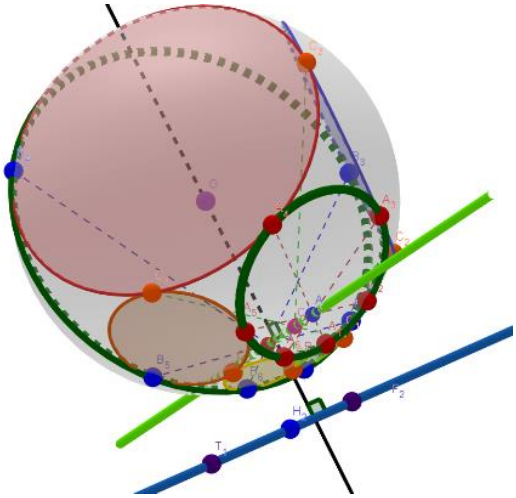


圖 5-3(b)

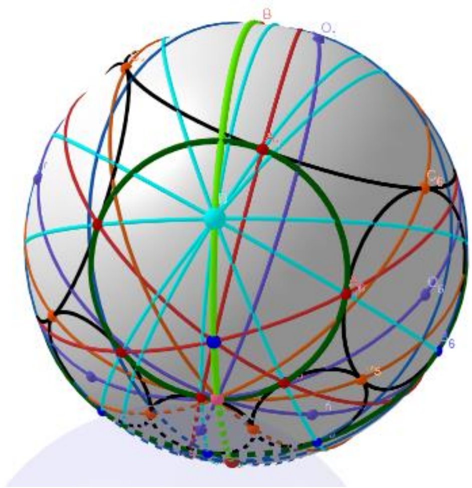


圖 5-3(c)

再來，我們實驗了球面上的弧，發現，對應 A、B、C、O 點連線，同樣會共交於球面兩點，而 O、C 仍然共交相同的點，最後這些共點連線一樣**共 Brainchon 弧**，同樣的延長線一樣會**交於 Pascal 弧**。

肆、 結論與應用

一、 結論

正如本研究作品名稱“渾「圓」有「定」”，從七圓定理一堆渾圓中，觀察共點的現象，推廣至兩內離圓、兩外離圓及圓與直線三種情形的雙心六圓，發現許多共點、共線、共圓、共錐，且有定點、定線之不變性，以至雙心多圓也成立。茲將重要結論摘列如下：

一、 無論相鄰外切的六個小圓內切或外切於大圓的七圓定理，對應切點連線共交一點，稱之為 *Stanley* 點，就是 *Brainchon* 點，與 *Pascal* 線互為極點極線。

二、 $4n+2$ 個與大圓均內切的小圓，若連接對應內切點所成 $2n+1$ 條直線共點，則其兩相鄰的小圓均外切，反之不一定成立。

三、 給定兩圓(內離、外離)或圓與直線，有 n 個環切圓的雙心 n 圓，具有下列性質：

(一) 透過極限點可推導出雙心 n 圓的構成條件，如下：

兩內離圓：$r=\frac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$，$0\leq d<R-r$，$0<k<1$

兩外離圓：$r=-\frac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$，$d>R+r$，$k>1$

圓與直線：$r=\frac{2dk}{k^2+1}$，$d>r$，$k>1$

(k為正雙心n圓的半徑比，d為連心線或圓心到直線距離)

(二) 環切圓的圓心共錐(橢圓、雙曲線、拋物線)，鄰切點共圓，且均固定不動。

(三) 任一個環切圓與兩定圓(或圓與直線)的切點連線共點，且為鄰切點共圓的圓心。

(四) 任兩個環切圓的內切點、外切點與鄰切點，任選相對應兩點均分別四點共圓。

(五) 若 n 為偶數，則對應內切點、對應外切點、對應鄰切點、對應環切圓圓心均分別連線共點；若 n 為奇數，則內切點、外切點、環切圓圓心各自與對應的鄰切點均分別連線共點。這些共點即為其所構成雙心 n 邊形的$Brainchon$點，在連心線上形成$Brainchon$線；但即使在不同的雙心 n 邊形卻共同一條$Pascal$線。

(六) 當環切圓轉動時，這些共點、共線均保持不動恆為定點、定線。

四、 雙心多圓的$Pascal$線同時為其在阿波羅尼斯圓族中的根軸。

五、 在球面及球體下，仍存在相對應的共點，共線，共圓，另亦發現共弧等性質。

二、 未來展望

若將環切圓想像是在一個系統運轉的星體，從上述結論，可發現縱使在一堆渾圓的系統中運作也必存一些不變性「共定點、共定線(*Brainchon* 線與 *Pascal* 線)與共定圓(如鄰切點)」，未來可持續透過點線圓的射影幾何與球面球體的更深入研究討討，或許有機會勾勒出一些天體運行所蘊藏的機制，註如近來熱門的人造衛星之訊息傳遞路徑等議題，值得日後進一步的探討。

伍、 參考文獻

[1] 張霈萱(2016)；層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討；2016 年臺灣國際科展作品。

[2] 趙文敏(1993)。幾何學概論。台北市：九章出版社。

[3] 趙文敏(2012)。*Apollonius* 問題─兼談三條件決定圓。台北市：龍騰出版社,數亦優,第 17 刊,25-37

[4] 梁子傑(2006)；阿波羅尼奧斯問題的解答(上)；香港道教聯合會青松中學 EduMath 22.

[5] Stanley Rabinowitz(1987) ,the Seven Circles Theorem, with a proof based on Ceva's,Reprinted from the Pi Mu Epsilon Journal, 8(1987)441–449.

[6] Cundy, H. Martyn (1978). "The seven-circles theorem".The Mathematical Gazette.62(421): 200–203.JSTOR3616692.

[7] Evelyn, C. J. A.; Money-Coutts, G. B;Tyrrell, J. A. (1974).The Seven Circles Theorem and Other New Theorems. London: Stacey International.ISBN 978-0-9503304-0-2.

[8] 老王的夢田：三個圓的根心。取自 http://lyingheart6174.pixnet.net/blog/post

[9] Weisstein, Eric W."Seven Circles Theorem".MathWorld。取自 http://mathworld.wolfram.com

[10] Seven Circles Theorem。取自 https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_circles_theorem

[11] Limiting Point。取自 http://mathworld.wolfram.com/LimitingPoint.html。

[12] Athanase Papadopoulos, Weixu Su. On hyperbolic analogues of some classical theorems in spherical geometry. 2014. ffhal-01064449v1f

【評語】010027

此作品從文獻已知之7圓之對應內切圓切點連線共點定理出發，發現圓的個數較多或較少時，定理就不一定成立。在此先注意到「對應內切點」之「對應」的定義不明確，因此，隨之而來的連線，連線交點的定義也不明確。若要推廣，作者加入的條件是新增一個內離圓，也因此，7圓定理就從「單心6圓」變成了「雙心六圓」。此時，雙心六圓環切圓圓心共橢圓、鄰切點共圓。然後在雙心的條件下，若6圓的個數加以變化呢？此時最重要的就是定理 2-7：兩個內離圓時的雙心多圓(n 圓)構成條件。但是，這個定理最奇怪的就是和 n 無關？之後，作者立刻回去探討雙心6圓(n=6)的性質。然後，這個最重要的構成條件再也和本作品無關。本作品成色不差，然須改進之處亦多，包括多處證明以圖觀之，嚴謹性不足！