2020 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010019

參展科別　數學

作品名稱　剛性三角形的進一步探討

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　基隆市立中正國民中學

臺北市立中山女子高級中學

指導教師　林耀南

作者姓名　陳品妘、劉垣妏

關鍵詞　共軛擺放、軟Δ、硬Δ

作者簡介

我是陳品妘(右)，目前就讀基隆市中正國中三年級，解開難題時所得到的成就感，對我來說莫過於人生最大的享受。

我是劉垣妏(左)，目前就讀台北市中山女高二年級，遇到令我好奇的事物，便一股腦兒精心鑽研，沒有事物能阻擋我的好奇心。

了不相屬的我們，因同樣熱衷於數學，而投入了這謎題之中，因身處兩地，休息時間就成了科展時間，在這艱難又甜美的路途，謝謝指導老師和家人一路陪伴，能參加這次比賽是我們的榮幸。

摘要

本文企圖將公認的剛性△區分為軟和硬△，軟硬△定義如下:「若給定△的每一內角都不存在比分角線能多切一點點的塞瓦線，則此△被稱為硬△，否則為軟△。」文中推出兩項主要結論，(一) 若等腰△的頂角角度在 36 度及 $77\frac{1}{7}$度之間則為硬△，否則為軟△。(二)一般△(非等腰△)三內角角度若都在 45 度及 75 度之間則為硬△，否則為軟△。明顯看得出來，任何鈍角及直角△都是軟△，只有部分銳角△才有機會是硬△。文章最艱難的部分是在 18 種擺放方式中，將僅存的七種成功擺放方式的臨界點都找出來，藉著臨界點的位置條件將∠B 最大及最小範圍和∠A 角度的關係式導出，作為可否多切一點點的依據，∠B 的最大值和最小值曲線兩者之間空隙表示在定值∠A 下，∠B 取角的容許範圍，其越大越容易舉例。在七個可成功塞入的臨界點擺放圖的尺規作圖中，有幾個非常困難，文中利用圓錐曲線幫忙定位，簡化作圖難度。

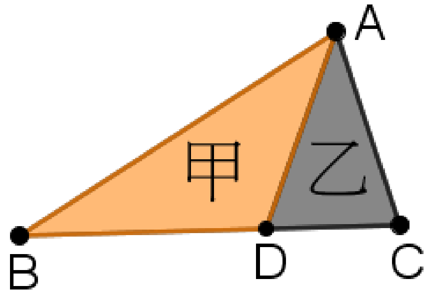
Abstract

The paper aims to distinguish the rigid △ recognized by the world as soft △ and hard △. The soft △ and hard △ is defined as follows: "If there is no Cevian that can cut a little more than the angular bisector for each inner angle of the given △, then this △ is called hard △； otherwise, it is soft △." Two main conclusions are introduced in the paper. (1) If the apex angle of the isosceles △ is between 36 degrees and $77\frac{1}{7}$degrees, it is a hard △； otherwise, it is a soft △. (2) If the three internal angles of the general △ are between 45 degrees and 75 degrees, then it is a hard △； otherwise, it is a soft △. Obviously, any obtuse △ and right △ are soft △, and only a part of the acute △ has a chance to be hard △. Among the 18 placement methods, the most difficult part of the article is to find out the critical points of the seven successful placement methods. Then we derive the relationship between the ranges of ∠B and ∠A by the positional conditions of the critical point as the basis of whether the △ could be cut a little bit. The gap between the curves of maximum and minimum ∠B indicates the allowable range of ∠B under the fixed value of ∠A. The larger the range, the easier it is to give an example. Among the ruler mapping of the seven critical point placement maps, which mean the △ could be successfully inserted, some of them are very difficult. The conic curve is used to help locate and simplify the drawing.

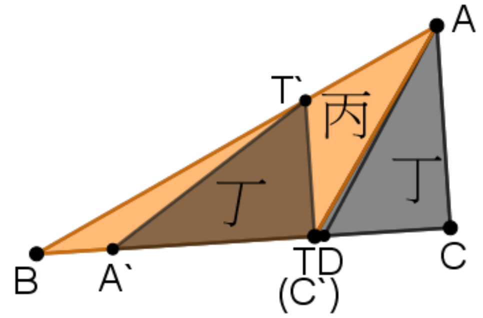
壹、 研究動機

整天天馬行空愛亂想的小妘，有一天忽然問學姊小妏說:「自然界的水有分為軟水和硬水，那幾何世界裡的△，有沒有甚麼依據可將他們區分為軟△和硬△呢?」一臉錯愕的學姊想起△有剛性現象，直覺地認為不可能。笑嘻嘻的小妘又說:「之前看過新聞說蛇餓時會吃自己尾巴，那牠可以把自己吃掉嗎?如果以分角線$\overline{AD}$，如圖(0-1)為基準，雖然右邊乙區可以塞入左邊甲區中，這不足為奇，但如果此時仍存在一條在甲區中的塞瓦線$\overline{AT}$，如圖(0-2)，使變大的丁區仍可塞入變小的丙區中，我們就稱這△為軟△。」

狐疑的學姐說這要每一個內角都試一試才行，蛇真的可以吃了自己嗎?



圖(0-1)



圖(0-2)

貳、 研究目的

一、 針對是否能多切一點點的那條塞瓦線來說，探討，如圖(0-2)，丁區塞入丙區時，丁區相對於丙區的擺放方式種類。

二、 針對每一種擺放方式，利用幾何性質探討塞入是否能成功或必失敗。

三、 在能成功塞入的擺放方式中，對不同的∠A 角度建立最大∠B 和∠A 關係式。

四、 針對∠B 的容許範圍，建立最大∠B 的曲線 L 和最小∠B 的曲線 L`。

五、 任給△的三內角，建立一套判斷是軟△或是硬△屬性的簡易流程圖。

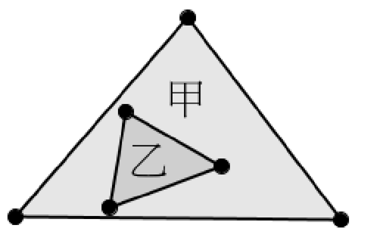
參、　名詞介紹

一、圖形乙 $\subset$ 圖形甲:表示可以將乙圖移動後完全塞入甲圖中而不露出。

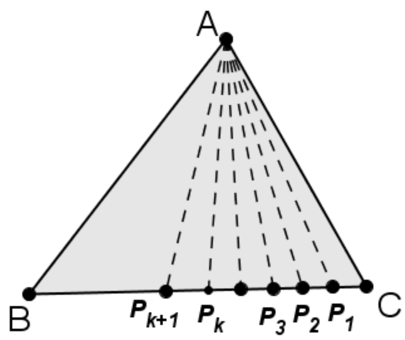
如圖(1-1)，圖形乙的△上的所有點均位在圖形甲這△的內部或邊上。

二、多切一點點的塞瓦線:

如圖(1-2)中，在$\overline{CB}$上沿同一方向取點P_1、P_2、P_3……觀察，若能使△ACP_1 $\subset$ △ABP_1、△ACP_2 $\subset$ △ABP_2、△ACP_3 $\subset$ △ABP_3，……△ACP_K $\subset$ △ABP_K都成立，其中$\overline{AP_K}$剛好是∠A 的分角線，若當下又發現存在$\overline{AP_{K+1}}$能使△ACP_{K+1} $\subset$ △ABP_{K+1}，則稱$\overline{AP_{K+1}}$是一條能夠比分角線多切一點點的塞瓦線。



圖(1-1)



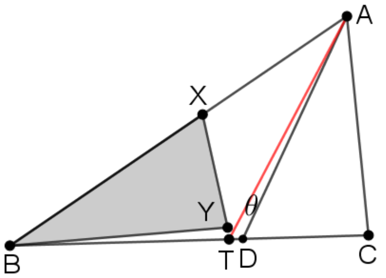
圖(1-2)

三、在能多切一點點的條件下，對當下的∠A 角度而言，其他內角各自所容許的取角範圍:

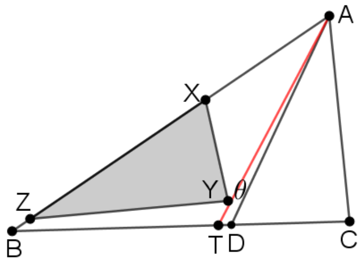
例如當∠A$= 70°$時，若在某種擺放方式下，介於$0°$到$30°$的∠B 都能多切一點點。此時$0°$~$30°$之間即為∠B 的取角範圍。

四、曲線 L(∠A，∠B 最大角)、曲線 L`(∠A、∠B 最小角):表示在直線座標平面上以∠A 為 X 座標，∠B 的最大角度(或∠B 的最小角)為 Y 座標所畫出的曲線圖。

五、邊貼邊:見圖(1-3)及圖(1-4)，例如將△ACT 的$\overline{AT}$邊貼在△ABT 的$\overline{AB}$邊上，其餘類推。



圖(1-3) $\overline{BX}=\overline{AC}$邊貼$\overline{BA}$邊示意圖



圖(1-4) $\overline{ZX}=\overline{AT}$邊貼$\overline{BA}$邊示意圖

六、硬△: 當△的每一內角都不存在能多切一點點的塞瓦線時，此△叫硬△。

七、軟△: 當△有任一內角存在能多切一點點的塞瓦線時，此△叫軟△。

八、$\lim_{\theta\to 0}\overline{AT}=\overline{AD}$: 表示當∠DAT=θ趨近於 0°時，$\overline{AT}$幾乎和$\overline{AD}$重疊，如圖(1-3)。

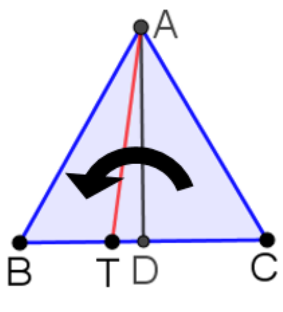
肆、研究過程或方法

一、研究主題觀察與研究架構設計

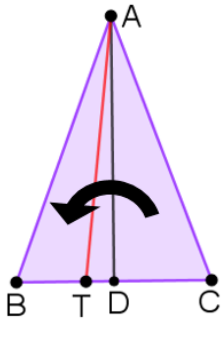
(一) 觀察一:正△的任一個內角，恆不存在比分角線能多切一點點的塞瓦線。

說明:如圖(2-1)，已知$\overline{AD}$為正△ABC 的分角線，T 點在 D 點的左邊，$\overline{AT}$為多切一點點的塞瓦線，明顯的△ACT 面積大於△ABT 的面積(同高)，△ACT 塞不進△ABT 中，其他內角的分角線也是如此，因此得證正△恆不存在能多切一點點的塞瓦線。

觀察二:同理對等腰△ABC 的頂角∠A 分角線來說，亦不存在能多切一點點的塞瓦線，如圖(2-2)。原因明顯和正△相同。但對∠B 或∠C 的分角線來說就不一定了。



圖(2-1) 正△ABC



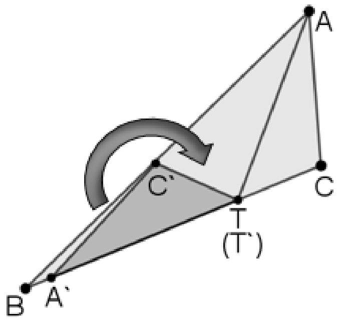
圖(2-2) 等腰△ABC

觀察三:但遇到一般△的內角平分線，判斷是否存在能多切一點點的塞瓦線，問題就沒那麼簡單。我們不可能每次都動手貼看看，看也看不精確，尤其是遇到內角不是整數角度的△時，就算用艱深的數學公式去運算證明必定也不容易判斷，我們想了好久也試了很多次，找到一種比較可行的辦法，說明如下:

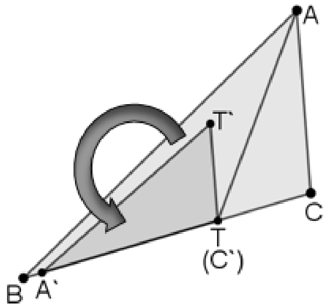
研究架構說明

1. 如圖(0-2)就$\overline{AT}$塞瓦線來說考慮丁區塞入丙區時，較有效率的貼著的方式共分成三種 (1) 取一邊貼$\overline{AB}$邊且讓高重疊，如圖(5-1)、 (2) 取一邊貼$\overline{BT}$且頂住 T 點，如圖(5-2)、(3) 取一邊貼$\overline{AT}$邊且頂住 T 點，如圖(5-3)。
2. 由上文正△和等腰△的說明，我們做一個不失一般性的假設:當要檢驗頂點 A 的塞瓦線$\overline{AT}$時，規定$\angle B < \angle C$。而∠B=∠C 就獨立在等腰△討論。
3. 將貼法分為順時針擺放及逆時針擺放，簡稱順擺及逆擺，如圖(4-1)、圖(4-2)。
4. 接著篩選出(利用幾何性質)可能成功的貼著方式再依不同的∠A 角度，利用滑桿找出∠B 最大角度的臨界點位置，並推得此時最大∠B 和∠A 角度關係式，進而算出∠B 精確的值，並將角度範圍逐一建立成表格。
5. 利用 L 及 L`曲線比較各擺放圖最大∠B 的值域進而推導出軟硬△的判定流程圖。

這些步驟及表格的建立是一個巨大的工程，非常耗時，但為了造福後人，願意一試。



圖(4-1) 順擺



圖(4-2) 逆擺

二、將△ACT 塞入△ABT 的貼著方式實作探討

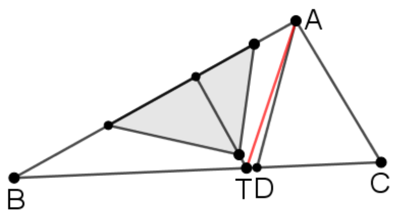
(一) 以邊貼邊的方式加上順擺及逆擺，將△ACT 塞入△ABT 中的作圖進行分類。

(二) 當貼在$\overline{AB}$上時，以兩者之高重合為擺放方式，如圖(5-1)。

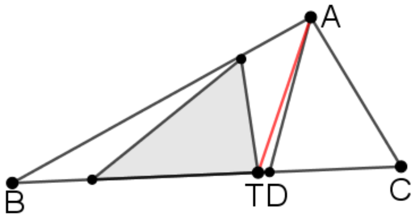
當貼在$\overline{BT}$上時，以盡量靠近 T 點為擺放方式，如圖(5-2)。

當貼在$\overline{AT}$上時，也以盡量靠近 T 點為擺放方式，如圖(5-3)。

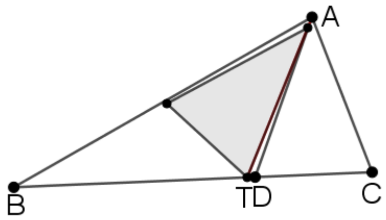
(三) 將(二)中的擺放方式依順擺、逆擺各計算一次，則共有$3 \times 3 \times 2 = 18$種方式。



圖(5-1)



圖(5-2)



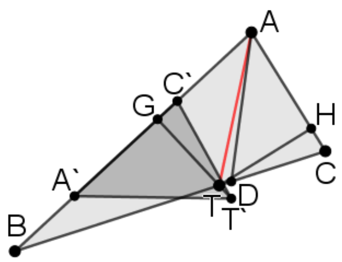
圖(5-3)

(四) 將 18 種擺放方式，圖示如下:

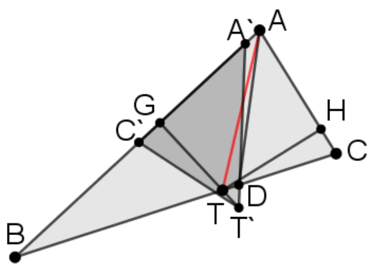
1.$\overline{AC}$貼$\overline{AB}$順擺 恆塞不進

2.$\overline{AC}$貼$\overline{AB}$逆擺 恆塞不進

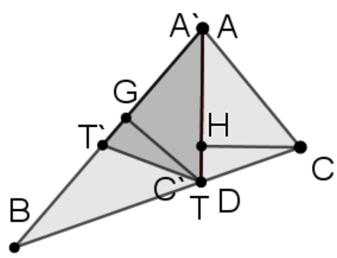
3.$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$順擺 塞得進



圖(6-1)

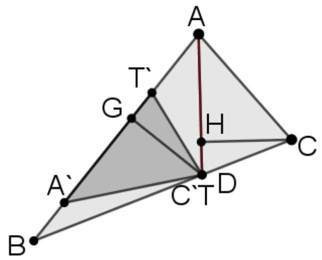


圖(6-2)



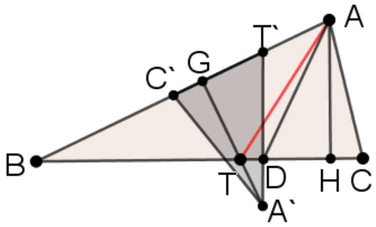
圖(6-3)

4.$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$逆擺 塞得進



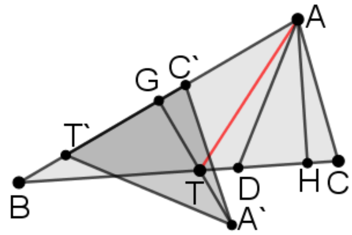
圖(6-4)

5.$\overline{CT}$貼$\overline{AB}$順擺 恆塞不進



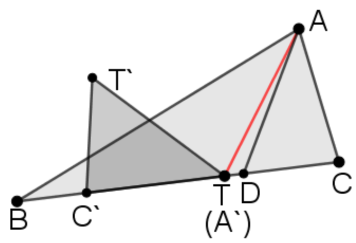
圖(6-5)

6.$\overline{CT}$貼$\overline{AB}$逆擺 恆塞不進



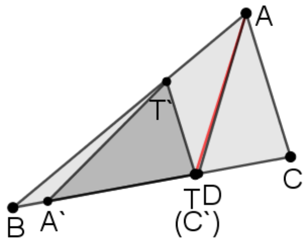
圖(6-6)

7.$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$順擺 恆塞不進



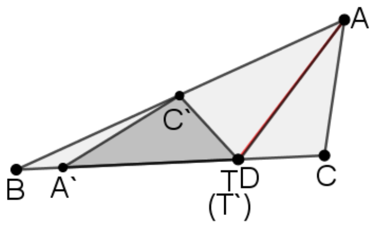
圖(6-7)

8.$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺 塞得進



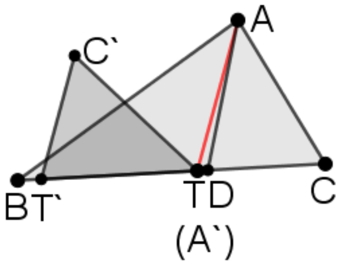
圖(6-8)

9.$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺 塞得進



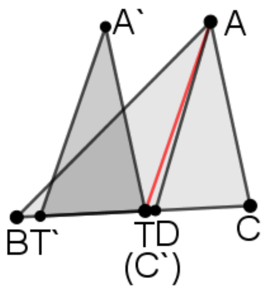
圖(6-9)

10.$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$逆擺 塞得進



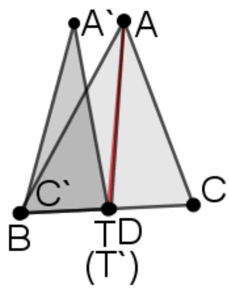
圖(6-10)

11.$\overline{CT}$貼$\overline{BT}$順擺 恆塞不進



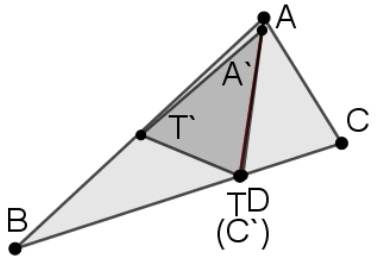
圖(6-11)

12.$\overline{CT}$貼$\overline{BT}$逆擺 恆塞不進



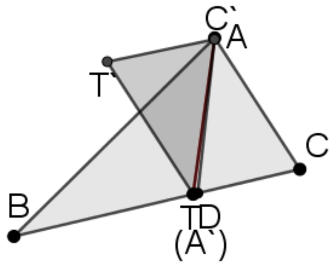
圖(6-12)

13.$\overline{AC}$貼$\overline{AT}$順擺 塞得進



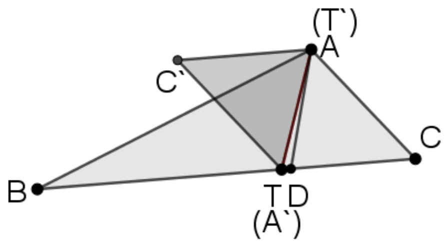
圖(6-13)

14.$\overline{AC}$貼$\overline{AT}$逆擺 恆塞不進



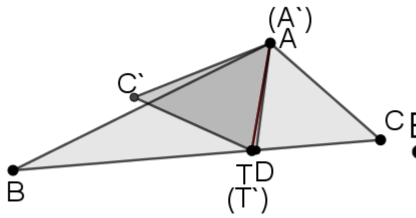
圖(6-14)

15. $\overline{AT}$貼$\overline{AT}$順擺 (恆塞不進)



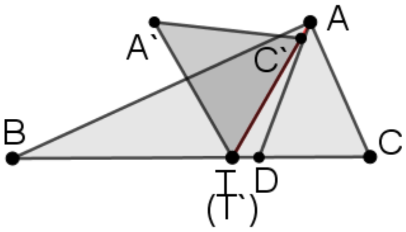
圖(6-15)

16.$\overline{AT}$貼$\overline{AT}$逆擺 (恆塞不進)



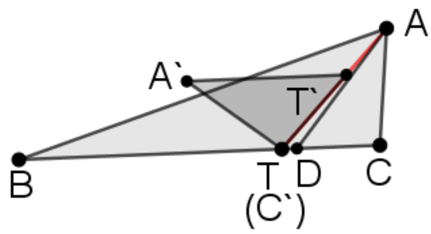
圖(6-16)

17.$\overline{CT}$貼$\overline{AT}$順擺 恆塞不進



圖(6-17)

18.$\overline{CT}$貼$\overline{AT}$逆擺 塞得進



圖(6-18)

三、篩選各種擺放方式能否塞入的過程中，常用的基本性質探討

在△ABC 中，規定∠B<∠C，$\overline{AD}$為∠A 分角線，$\overline{AT}$為能多切一點點的塞瓦線即

∠DAT=θ，$\theta > 0°$，我們可推得下列七個基本性質

(一) 性質 0-1: 如圖(7-1)

若$\overline{DE} \perp \overline{AB}$，$\overline{DF} \perp \overline{AC}$，$\overline{TG} \perp \overline{AB}$，$\overline{TH} \perp \overline{AC}$，則(1)∠CAT>∠BAT，(2) $\overline{TH} > \overline{TG}$。

(二) 性質 0-2: 如圖(7-2)

若 T 在 D 的左側，∠B<∠C，則(1) $\overline{AB} > \overline{AC}$，(2) $\overline{BD} > \overline{CD}$，(3) $\overline{AT} > \overline{AD}$

證明:明顯的$\overline{AB} > \overline{AC}$且$\overline{BD} > \overline{CD}$，又在△ATD 中，∵∠ADT=$\frac{1}{2}$∠A+∠C =

$\angle DAB + \angle C > \angle TAB + \angle B = \angle ATD$，即$\angle ADT > \angle ATD$，$\therefore \overline{AT} > \overline{AD}$。

(三) 性質 0-3: 如圖(7-2)

若 T 在 D 的左側，∠B<∠C，則∠ADB$>90°$為鈍角。

證明:∠ADB=∠C+$\frac{1}{2}$∠A=$\frac{2\angle C+\angle A}{2}$ =$\frac{\angle C+\angle C+\angle A}{2}$=$\frac{\angle C+180°-\angle B}{2}$=90°+$\frac{\angle C-\angle B}{2}>90°$

(四) 性質 0-4: 如圖(7-2)

若 T 在 D 左側，∠B<∠C，則(1)$\overline{AB}>\overline{AT}$，(2)$\overline{AB}>\overline{BT}$

證明: ∵∠ATB>∠CAT>∠BAT，∴$\overline{AB}>\overline{BT}$，又∵∠ATB $>\angle C>\angle B$，

∴$\overline{AB}>\overline{AT}$

(五) 性質 0-5: 如圖(7-3)

承上條件，若 T 在 D 左側， $\overline{TG}\perp\overline{AB}$，$\overline{AI}\perp\overline{BC}$，則$\overline{TG}<\overline{AI}$。

證明:在△ABT 中，∵$\overline{AB}>\overline{BT}$(性質 0-4)，∴$\overline{AB}$上的高$<\overline{BT}$上的高，即$\overline{GT}<\overline{AI}$。

(六) 性質 0-6: 如圖(7-4)

承上文規定，作$\overline{TJ}\parallel\overline{AI}$，$\overline{GK}\perp\overline{AT}$，則$\overline{AI}>\overline{JT}>\overline{TG}>\overline{GK}$。

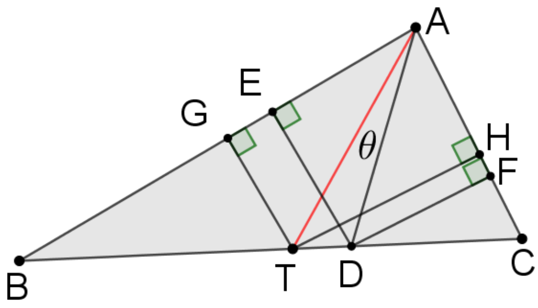
證明:由性質 0-5 及直角△性質可得證。

(七) 性質 0-7: 如圖(7-5)，(7-6)

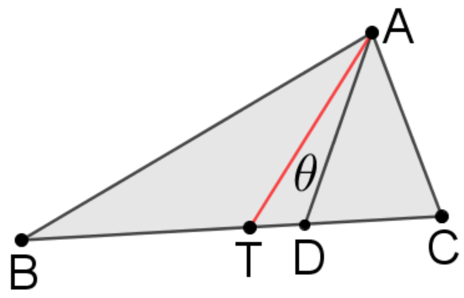
$\overline{AD}$為分角線∠C>∠B，若$\overline{AD}\geq\overline{AC}$，則∠A$<120°$。

證明: ∵$\overline{AD}\geq\overline{AC}$，∴∠C≥∠ADC，又∠ADC=∠B+$\frac{1}{2}$∠A，∴∠C≥ ∠B+$\frac{1}{2}$∠A，

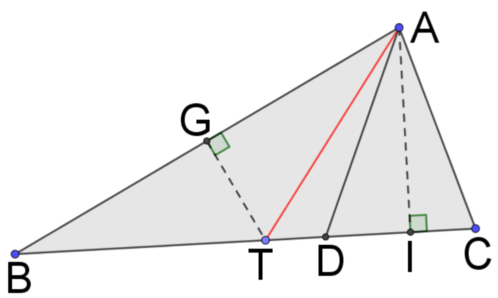
即 180°$-\angle A-\angle B\geq\angle B+\frac{1}{2}\angle A$，∴180°$\geq\frac{3}{2}\angle A+2\angle B>\frac{3}{2}\angle A$，∴120°$>$∠A



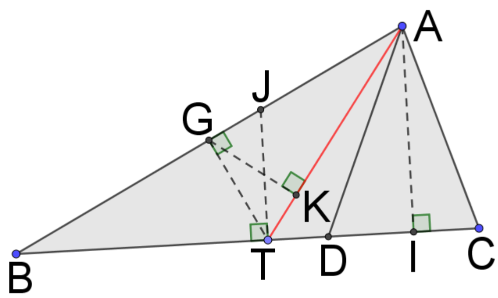
圖(7-1)



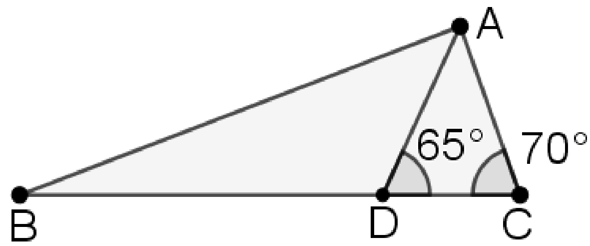
圖(7-2)



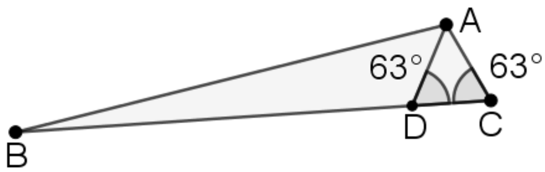
圖(7-3)



圖(7-4)



圖(7-5) $\overline{AD} > \overline{AC}$



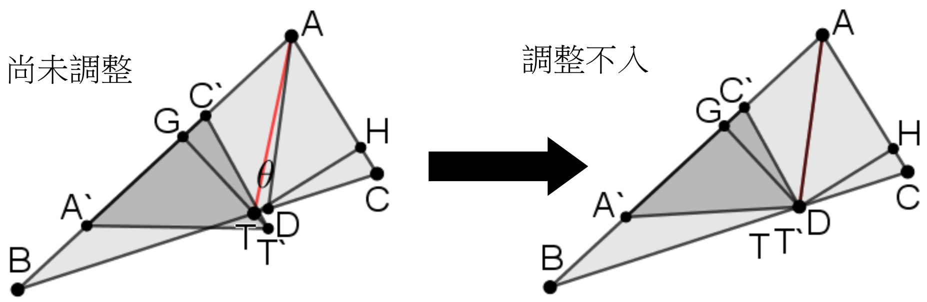
圖(7-6) $\overline{AD} = \overline{AC}$

利用上文的基本性質，可以刪除很多無法塞入的擺放圖

四、圖(6-1)~(6-18)的成功(塞得進)與失敗(塞不進)探討

(一) 將△ACT的邊 AC 貼在△ABT 的 AB 邊上:

1. $\overline{AC}$貼$\overline{AB}$順擺 (恆塞不進)，如下圖

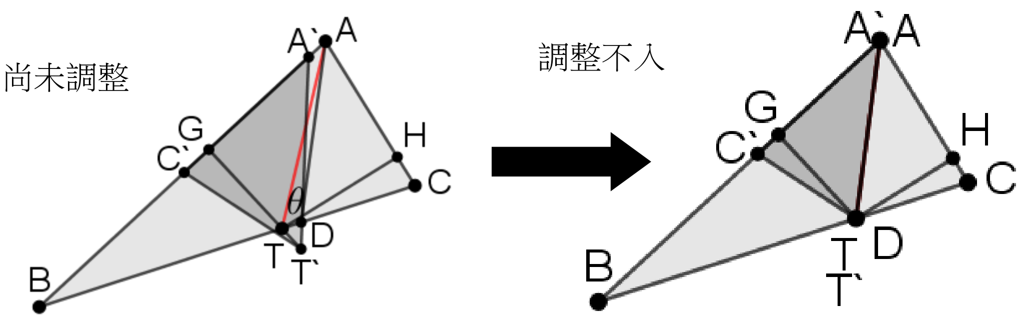


失敗原因:(性質 0-1)

$\because \overline{GT} < \overline{HT}$，又$\overline{HT} = \overline{GT`}$，$\therefore \overline{GT`} > \overline{GT}$

∵T`便會突出，再怎麼調整也調整不入，恆塞不進△ABT 中，∴無法多切一點點

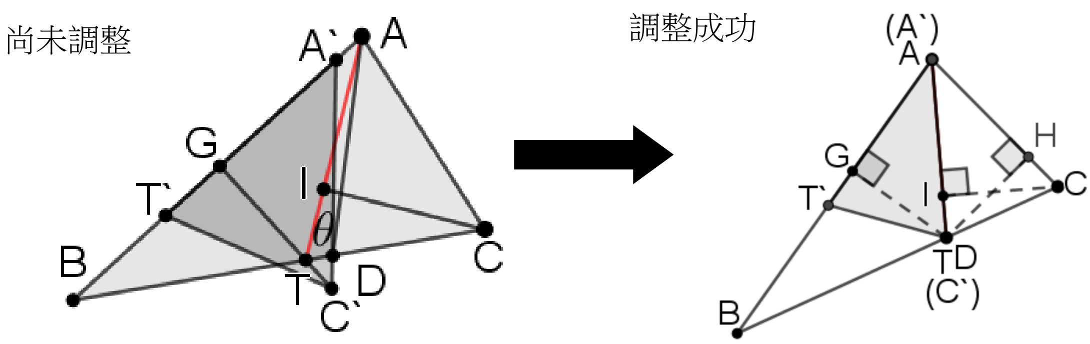
2. $\overline{AC}$貼$\overline{AB}$逆擺 **(恆塞不進)**，如下圖



失敗原因同$\overline{AC}$貼$\overline{AB}$順擺

(二) 將△ACT的邊 AT 貼在△ABT 的 AB 邊上:

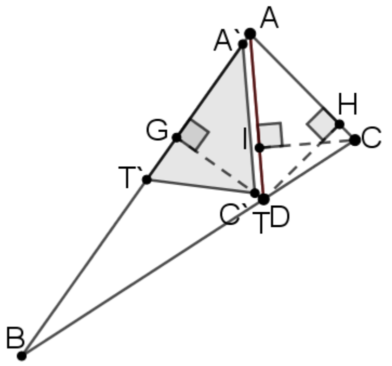
1. $\overline{AT}$貼$\overline{AB}$順擺 **(塞得進)**，如下圖

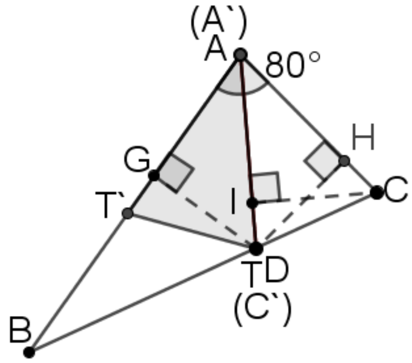


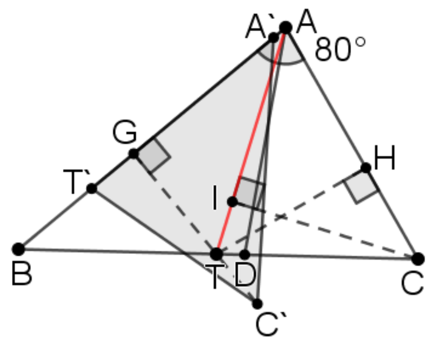
證明如下:(△ABC 中固定∠A 和$\overline{AC}$，調整∠B 和∠C 的角度，因此$\overline{AD}$長短會有變化)

條件	$\overline{AD} > \overline{AC}$	$\overline{AD} = \overline{AC}$	$\overline{AD} < \overline{AC}$
輔線	作$\overline{TG} \perp \overline{AB}$，$\overline{TH} \perp \overline{AC}$，$\overline{CI} \perp \overline{AT}$		
結果	皆能塞進	恰好塞不進	塞不進

圖例







證明	$\overline{AD} > \overline{AC}$	$\overline{AD} = \overline{AC}$	$\overline{AD} < \overline{AC}$
	∵$\overline{AD} > \overline{AC}$ ∴∠C> ∠ADC > ∠ATC ∴$\overline{AT} > \overline{AC}$ 在△ATC 中 ∵$\overline{AT} \times \overline{CI} = \overline{AC} \times \overline{TH}$=定值 且$\overline{AT} > \overline{AC}$ ∴$\overline{CI} < \overline{TH}$ 但$\overline{AT} \rightarrow \overline{AD}$ ∴$\overline{TH} \fallingdotseq \overline{TG}$ 即$\overline{C`G}$=$\overline{CI} < \overline{TG}$ 故△A`T`C`必可塞入△ABT 中	雖然$\theta \rightarrow 0°$，$\overline{AT} \rightarrow \overline{AD}$ 但 T 在點 D 的左邊 ∴$\overline{TG} < \overline{TH}$ ∵$\overline{CI} = \overline{TH}$，$\overline{TG} < \overline{TH}$ ∴$\overline{TG} < \overline{CI}$ △ACT 的高$\overline{CI}$大於△ABT 的高$\overline{TF}$，故塞不進。 四邊形 AT`DC 近乎成箏形。 這也可以看出來，此狀態時，對∠A=80°來說是一個臨界點時刻，之後(指第三種可能)都塞不進了。	∵$\overline{AD} < \overline{AC}$ 且當$\theta \rightarrow 0°$時 $\overline{AT} \rightarrow \overline{AD}$ ∴$\overline{AT} < \overline{AC}$ ∴$\overline{CI} > \overline{TH}$ 即$\overline{C`G} > \overline{TH}$ 又$\overline{TH} > \overline{TG}$(性質 0-1) 故$\overline{C`G} > \overline{TG}$，塞不進。

經過上表的分段($\overline{AD} > \overline{AC}$、$\overline{AD} = \overline{AC}$)敘述證明後，關於$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$順擺時，我們推得下列性質

性質 1-1:在$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$順擺的圖例中發現對每一個小於 120°的定值∠A 來說，當$\overline{AD} > \overline{AC}$時△ACT 必塞得進△ABT 中，如圖(8-1)。當$\overline{AD} \leq \overline{AC}$時，都塞不進。也就是說$\overline{AD} = \overline{AC}$為能否成功塞入的臨界點。

性質 1-2:承前文條件$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$順擺，對每一個小於 120°的定值∠A 來說，∠B 最大必發生在$\overline{AD} = \overline{AC}$時且此時∠B=90° $-\frac{3}{4}\angle A$。

證明:

1) 如圖(8-2)，當∠B 最大角時，$\overline{AT}$和$\overline{AD}$重合，△CAT≅△CAT≅△C\`A\`T\`，高$\overline{CI}$和高$\overline{C`G}$重合，T 點、D 點、C\`三點重合。此時$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AT} = \overline{AC`} = \overline{A`C`}$

2) 在△ADC 中，∵$\overline{AD} = \overline{AC}$，∴∠C=$(180° - \frac{1}{2}\angle A) \div 2 = 90° - \frac{1}{4}\angle A$

又∠B=$180° - \angle A - \angle C = 180° - \angle A - \left(90° - \frac{1}{4}\angle A\right) = 90 - \frac{3}{4}\angle A$得證。

性質 1-3:承前文條件，在$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$順擺的擺放方式下，可計算得

1) 曲線 L(∠A、∠B 的最大角)的圖形呈一直線型。其中$0° < \angle A < 120°$，∠B 最大角$= 90° - \frac{3}{4}\angle A$

2) 曲線 L\`(∠A、∠B 最小角)的圖形成一直線。其中$0° < \angle A < 120°$，∠B 最小角≒ 0°

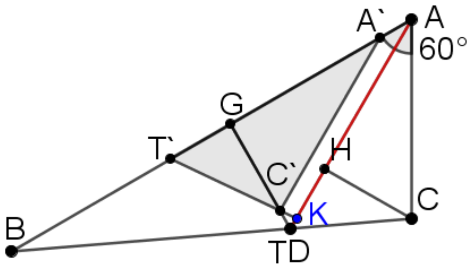
說明:

1) 由性質 1-2 中∠A 和∠B 最大角的關係式$\angle B = 90 - \frac{3}{4}\angle A$知，兩者呈現線型函數關係，故圖形成一直線。

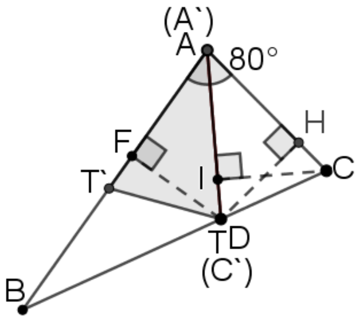
但當∠A→ 0°時，∠B+∠C 最大，且趨近於 180°，而已知規定∠B< ∠C，∴最大∠B< 90°，最小∠B 可→ 0°，即 $0° < \angle B < 90°$，為可能的∠B 角度值域。

2) 由性質 1-1 知，對定值∠A 來說塞得進與否的臨界點發生在$\overline{AD}=\overline{AC}$時，因此當現在是∠B 的最大值擺放圖時，如圖(8-3)，△ATC 和△AT`T 皆為等腰△且全等，∴ ∠C=∠3=∠4=∠5，∠3=∠1+∠B=180° $-2\angle C+\angle B$，∴3∠C=180°+∠B，∴3∠C> 180°，∴∠C> 60°，即最小∠C 範圍為$60°<\angle C<90°$。

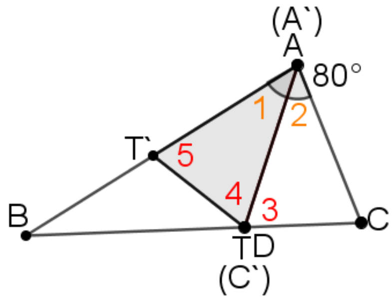
3) 又由性質 0-7 知，當$\overline{AD}\geq\overline{AC}$時，必然∠A< 120°，故$0°<\angle A<120°$。



圖(8-1) ∠A=60°



圖(8-2) ∠A=80°

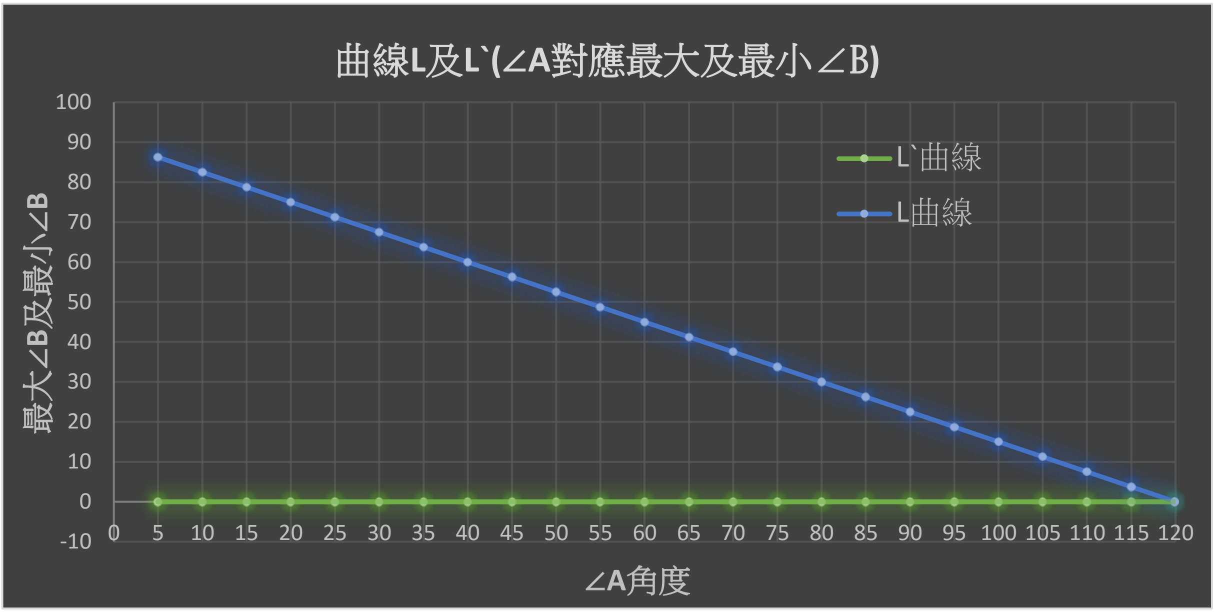


圖(8-3) ∠A=80°的臨界點

利用公式將∠B 最大角及最小角建立成表(一)及其曲線

表(一)

∠A 角度	∠B 角度範圍	∠A	∠B 角度範圍
120	無法多切一點點	50	0° <∠B<52.500°
110	0° <∠B<7.500°	40	0° <∠B<60.000°
100	0° <∠B<15.000°	30	0° <∠B<67.500°
90	0° <∠B<22.500°	20	0° <∠B<75.000°
80	0° <∠B<30.000°	10	0° <∠B<82.500°
70	0° <∠B<37.500°	5	0° <∠B<86.250°
60	0° <∠B<45.000		

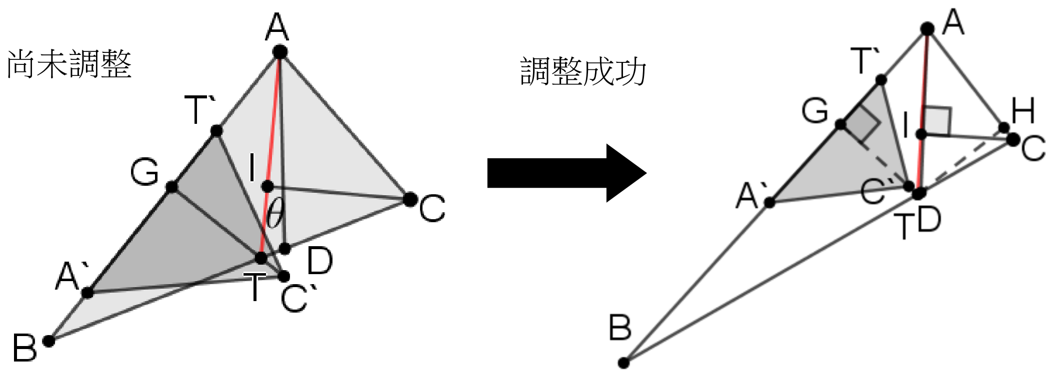


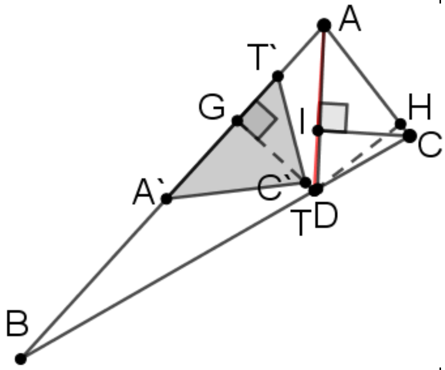
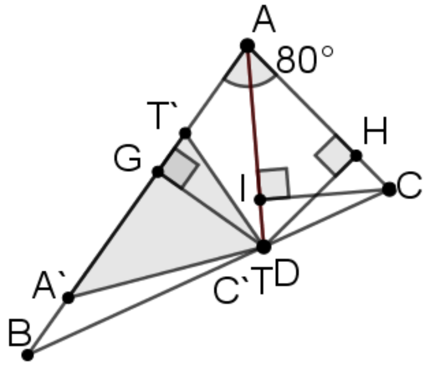
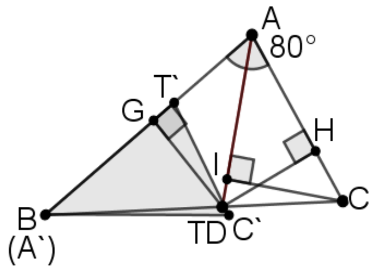
(1) 曲線功能說明:(之後就不再說明)

1) 最大∠B 的 L 值曲線呈一直線狀，斜率為$-\frac{3}{4}$，最小的∠B 的 L`值曲線圖亦呈一直線狀，斜率為0。

2) 由曲線圖可看出當頂角∠A 的角度愈小時，∠B 的取角範圍愈大，最大取角範圍介於0°~90°之間，此時若使用者要舉例或要能成功畫出塞得進的圖形，只要取用的∠A 角度愈小，愈能輕易地得到堪用的∠B，是有價值的。例如取∠A=60°，如圖(8-1)。

2. $\overline{AT}$貼$\overline{AB}$逆擺 **(塞得進)**，如下圖



<table>
<tr><th>條件</th><th>$\overline{AD}>\overline{AC}$</th><th>$\overline{AD}=\overline{AC}$</th><th>$\overline{AD}<\overline{AC}$</th></tr>
<tr><td>輔線</td><td colspan="3">作$\overline{TG}\perp\overline{AB}$，$\overline{TH}\perp\overleftrightarrow{AC}$，$\overline{TH}\perp\overline{AC}$，$\overline{CI}\perp\overline{AT}$，$\overline{DG}\perp\overline{AB}$</td></tr>
<tr><td>結果</td><td>皆能塞進</td><td>恰好塞不進</td><td>塞不進</td></tr>
<tr><td>圖例</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>證明</td><td>當$\theta\to 0^\circ$
即$\overline{AT}\to\overline{AD}$
∵$\overline{AD}>\overline{AC}$
∴$\overline{AT}>\overline{AC}$
在△ATC 中
∵$\overline{AT}\times\overline{CI}=\overline{AC}\times\overline{TH}$=定值
∴$\overline{CI}<\overline{TH}$
但$\overline{AT}\to\overline{AD}$
∴$\overline{TH}\fallingdotseq\overline{TG}$
即$\overline{C`G}$=$\overline{CI}<\overline{TH}\fallingdotseq\overline{TG}$<br>故△A`T`C`必可塞入△ABT 中</td><td>雖然$\theta\to 0^\circ$，$\overline{AT}\to\overline{AD}$
但 T 在點 D 的左邊
∴$\overline{TG}<\overline{TH}$，此時$\overline{CI}=\overline{C`H}\fallingdotseq$
$\overline{TH}$
△ACT 的高$\overline{TH}$大於△ABT 的高
$\overline{TG}$，剛好塞不進，在此狀態時，
對∠A=80°這定值角度來說是一
個塞得進與塞不進的臨界點時
刻。</td><td>當$\theta\to 0^\circ$，則$\overline{AT}\to\overline{AD}$，
∵$\overline{AD}<\overline{AC}$，∴$\overline{AT}\le\overline{AC}$
△ADC 中
∵$\overline{AD}<\overline{AC}$
∴$\overline{CI}>\overline{DH}$
而$\overline{CI}=\overline{C`G}$<br>又$\overline{DH}=\overline{DG}\to\overline{TH}=\overline{TG}$<br>得$\overline{C`E}=\overline{CI}>\overline{DH}\fallingdotseq\overline{TH}\fallingdotseq$
$\overline{TG}$，故塞不進</td></tr>
</table>

經過上表的分段($\overline{AD}>\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{AC}$及$\overline{AD}<\overline{AC}$)敘述證明後，關於$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$逆擺時，我們推

得下列性質。

性質 2-1:在$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$逆擺時的圖例中發現對每一個小於$\mathbf{120}°$的定值∠A 來說，若$\overline{AD} > \overline{AC}$，則△ACT 必塞得進△ABT 中，又若$\overline{AD} \leq \overline{AC}$，則必塞不進。也就是說$\overline{AD} = \overline{AC}$為是否能成功塞入的臨界點。

性質 2-2:承前文條件，$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$逆擺，對每一個小於 120°的定值∠A 來說，∠B 最大角必發生在$\overline{AD} = \overline{AC}$時，且此時最大∠B=$\mathbf{90}° - \frac{3}{4}\angle A$，最小∠C=$\mathbf{90}° - \frac{1}{4}\angle A$。

證明:如同性質 1-2

性質 2-3:承前文條件，在$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$逆擺時，可利用關係式在座標平面上畫出曲線 L 及 L`

1) 曲線 L(∠A，∠B 最大角):圖形成一直線

2) 曲線 L`(∠A，∠B 最小角):圖形成一直線

其中$\mathbf{0}° < \angle \mathbf{A} < \mathbf{120}°$，$\angle$**B**最大角 $= \mathbf{90}° - \frac{3}{4}\angle A$，$\angle$**B**最小角恆$\rightarrow \mathbf{0}°$。

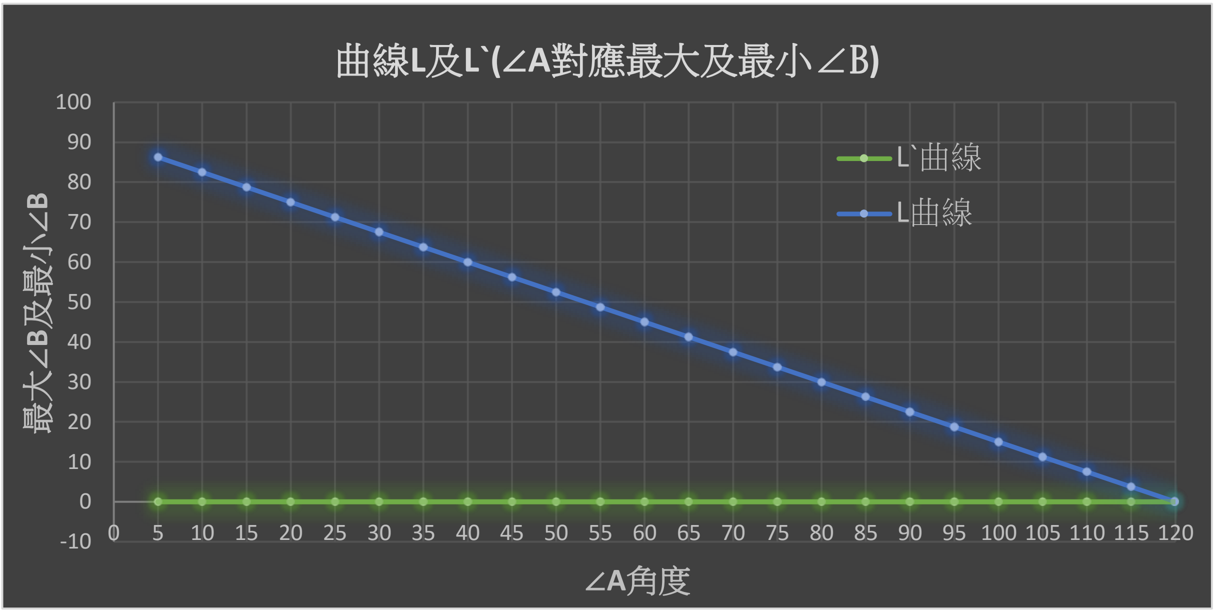
證明:如同性質 1-3

利用公式將∠B 最大角及最小角建立成表(二)及其曲線

表(二)

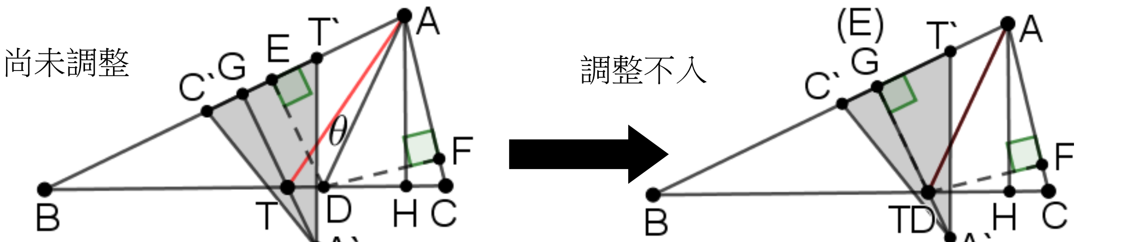
∠A	∠B 角度範圍	∠A	∠B 角度範圍
120	無法多切一點點	60	0° <∠B<45.000
110	0° <∠B<7.500°	50	0° <∠B<52.500°
100	0° <∠B<15.000°	40	0° <∠B<60.000°
90	0° <∠B<22.500°	30	0° <∠B<67.500°

80	0° <∠B<30.000°	20	0° <∠B<75.000°
70	0° <∠B<37.500°	10	0° <∠B<82.500°



(二) 將△ACT的邊 CT 貼在△ABT 的 AB 邊上:

1. $\overline{CT}$貼$\overline{AB}$順擺 **(恆塞不進)**

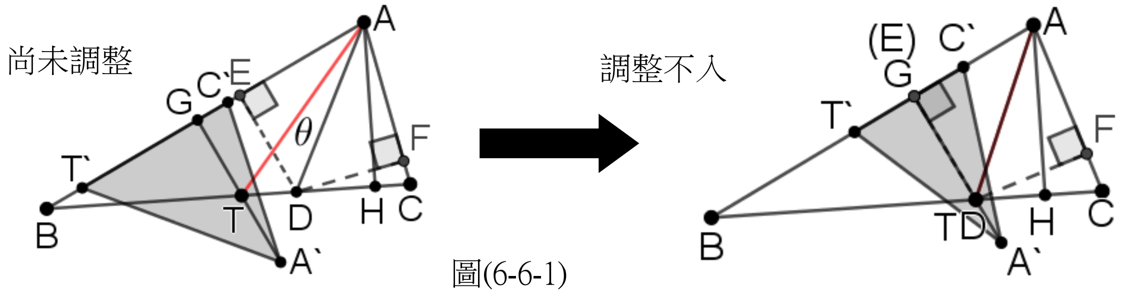


圖(6-5-1)

失敗原因:如圖(6-5-1)

當$\theta \to 0°$時，$\overline{AT} \to \overline{AD}$，由性質 0-6 知，$\overline{A`G} = \overline{AH} > \overline{DE} \fallingdotseq \overline{TG}$，故此時 A`點凸出到△ABC 外部而塞不進。

2. $\overline{CT}$貼$\overline{AB}$逆擺 **(恆塞不進)**

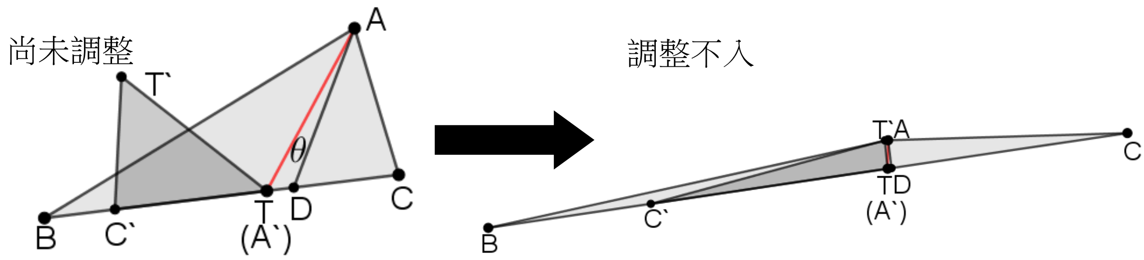


圖(6-6-1)

失敗原因，同$\overline{CT}$貼$\overline{AB}$順擺，如圖(6-6-1)

(三) 將△ACT的邊 AC 貼在△ABT 的 BT 邊上:

1. $\overline{AC}$貼$\overline{BT}$順擺 **(恆塞不進)**



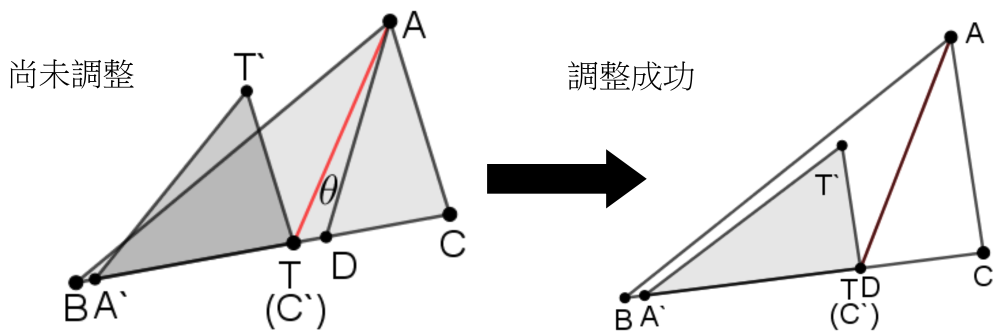
圖(6-7-1)

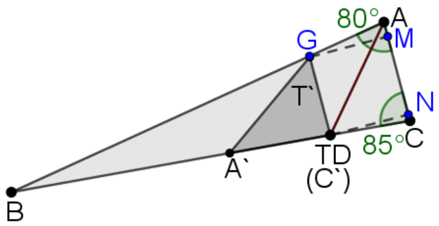
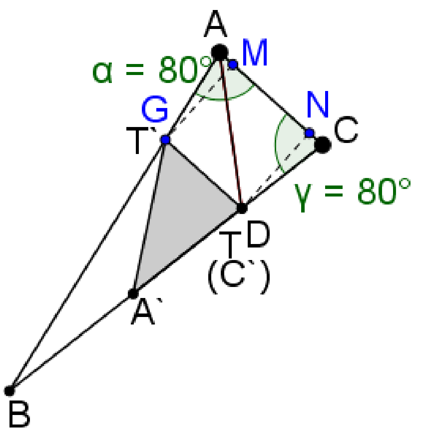
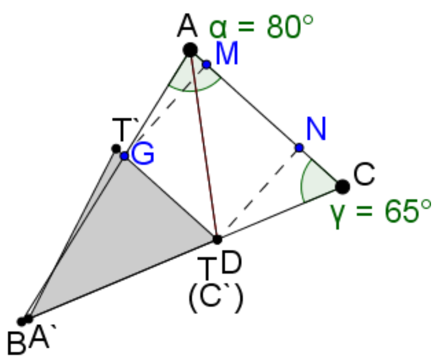
(1) 失敗原因:

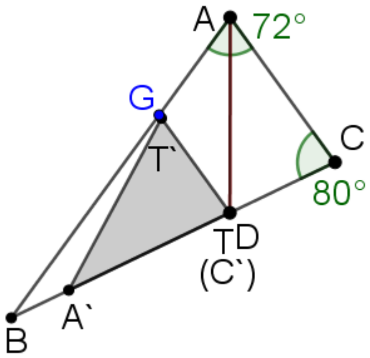
1) 如上圖，∵$\angle 2 > \angle 3 = \angle \mathrm{CAT} > \angle 1$，∴$\overline{AT} > \overline{TE}$

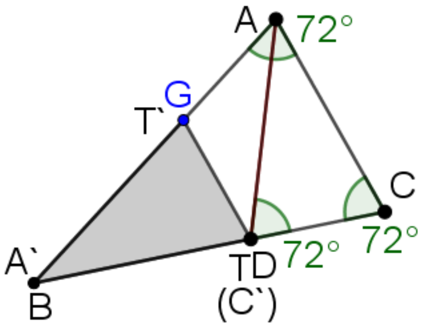
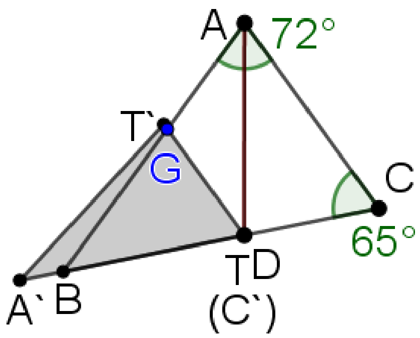
則△TT`C`的$\overline{TT`} > \overline{TE}$，明顯的使△TT`C`突出△ABC 之外。

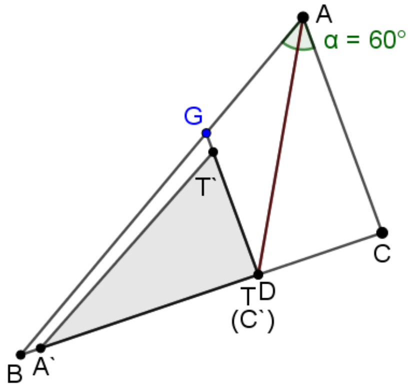
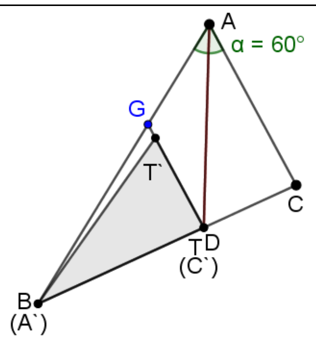
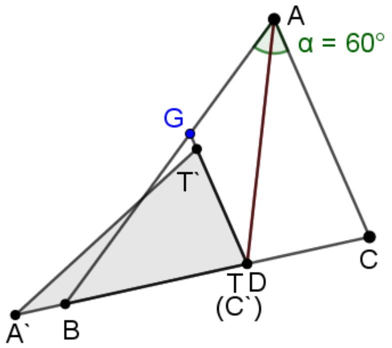
2. $\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺 **(塞得進)**



分類	條件及結果	圖例	證明
72° <∠A< 90°	$\overline{AB}>\overline{BC}$ 結果: 皆能塞進		作 $\overleftrightarrow{TT'}\parallel\overline{AC}$交$\overline{AB}$於G，$\overline{GM}\perp\overline{AC}$, $\overline{TN}\perp\overline{AC}$ ∵$\overline{TG}\parallel\overline{AC}$ ∴$\overline{GM}$=$\overline{TN}$，∵$\overline{AB}>\overline{BC}$，∴∠A< ∠C，此時將△GAM 和△CTN 依兩股$\overline{GM}=\overline{TN}$合併成一個△來看，由∠C> ∠A可得$\overline{GA}>\overline{TC}$，當θ → 0°，T、C`、D 互相靠近，∴$\overline{GT}=\overline{GA}>\overline{TC}=\overline{TT`}$，∴塞得進。
	$\overline{AB}=\overline{BC}$ 結果: 恰好塞不進		作 $\overleftrightarrow{TT'}\parallel\overline{AC}$交$\overline{AB}$於G，$\overline{GM}\perp\overline{AC}$, $\overline{TN}\perp\overline{AC}$，同上文，∴$\overline{GM}=\overline{TN}$，又∵∠A=∠C，∴$\overline{GA}=\overline{DC}$，當θ → 0°時，$\overline{TT`}=\overline{TC}=\overline{DC}$，又$\overline{TG}=\overline{DG}=\overline{GA}=\overline{DC}$，故$\overline{TT'}=\overline{TG}$ (此時恰為塞得進與塞不進的臨界狀態)
	$\overline{AB}<\overline{BC}$		作 $\overleftrightarrow{TT'}\parallel\overline{AC}$交$\overline{AB}$於G，$\overline{GM}\perp\overline{AC}$, $\overline{TN}\perp\overline{AC}$，得$\overline{GM}=\overline{TN}$，當$\lim_{\theta\to 0}\overline{AT}=\overline{AD}$時， ∵∠A>∠C 且$\overline{GT}\parallel\overline{AC}$ ∴$\overline{CT}>\overline{GA}$ ∵∠GAT=∠TAC=∠ATG ∴$\overline{GA}=\overline{GT}$

	結果: 塞不進 (以 T 點為軸心，旋轉△A’T’T 可塞得進，此時和前面得臨界點合併成一個由塞不進轉為塞得進的臨界點)		又$\overline{CT}=\overline{TT'}$, 故$\overline{TT'}>\overline{GT}$，故恆塞不進 到達這個完整臨界點圖例時，可清楚的說明為什麼要分類成三段(1)$72°<\angle A<90°$ (2)$\angle A=72°$ (3)$\angle A<72°$。 說明:在△A\`C\`T\`剛好塞入$\angle B$時，$\angle B=\frac{1}{2}\angle A$，$\angle C=180-\frac{2}{3}\angle A$，由$\angle C>\angle B$知，$\angle A<90°$，由$\overline{AB}<\overline{BC}$知，$\angle A>\angle C$，代入化簡得$\angle A>72°$，因此推得此階段 $72°<\angle A<90°$  我們利用 C\`貼 T 旋轉△A\`C\`T\`，使得$\overline{A^{`}T^{`}}$貼合$\overline{AB}$時∠B 最大，$\overline{AB}\parallel\overline{BC}$時∠B 最小 由上文得知∠B 在$\overline{A^{`}T^{`}}$貼$\overline{AB}$ 時的最大值=$\frac{1}{2}\angle A$，且∠B 最小值→ 0°
∠A= 72°	$\overline{AB}>\overline{BC}$ （此時 $\overline{AC}<\overline{BD}$）		作 $\overleftrightarrow{TT'}\parallel\overline{AC}$交$\overline{AB}$於G，∵72° =∠A<∠C，∴∠B<$\frac{1}{2}$∠A，即$\overline{AD}<\overline{BD}$ 明顯的當$\lim\limits_{\theta\to0}\overline{AT}=\overline{AD}$時，必$\overline{AT}<\overline{BT}$，又在△ATC 中，∠TAC+∠C> $36°+72°=108°$

	結果: 皆能塞進		∴∠ATC< 72°，即$\overline{AC} < \overline{AT}$，故$\overline{A`T} <$ $\overline{BT}$，A`點未突出，另一方面，因$\overline{GT} \parallel \overline{AC}$， 且∠A<∠C, 由第一格之證明知， 必$\overline{GA} > \overline{TC}$，∵∠GAT=∠GTA=∠TAC=36° ∴$\overline{GA} = \overline{GT}$，又$\overline{TC} = \overline{TT`}$，故$\overline{GT} > \overline{TT`}$即 T` 未突出，恆塞得進
	$\overline{AB} = \overline{BC}$ （此時 $\overline{AC} = \overline{BD}$） 結果: 恰好塞不進		∵∠A = ∠C = 72° ∴∠B 必存在且∠B= $\frac{1}{2}$∠A=36° 此時∠TAC=36° + θ必塞不進∠B 中，若能 塞進必 A`點位在 B 右側，但因$\overline{AD} = \overline{BD}$， ∴∠ADC=72°，∴$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BD}$ 但當我們多切一點點時，必要使 T 在 D 左 側，故$\overline{A`C`} = \overline{AC} = \overline{BD} > \overline{BT}$，故$\overline{AT'} >$ $\overline{BT}$，A`突出到△ABC 外部，而恰好塞不進 (此時為恰好塞得進轉成塞不進的臨界狀態)
	$\overline{AB} < \overline{BC}$ （此時 $\overline{AC} > \overline{BD}$）		作 $\overleftrightarrow{TT'} \parallel \overline{AC}$交$\overline{AB}$於G，$\lim_{\theta\to 0} \overline{AT} = \overline{AD}$ ∵∠A>∠C 且$\overline{GT} \parallel \overline{AC}$ ∴$\overline{CT} > \overline{GA}$ ∵∠GAT=∠TAC=∠ATG(θ → 0°)

	結果: 塞不進		∴$\overline{GA}=\overline{GT}$ 又$\overline{CT}=\overline{TT'}$, 故$\overline{TT'}>\overline{GT}$，故 TˋT突出 。同時由$\overline{AC}>\overline{BD}$，知 Aˋ亦突出，故塞不進。
∠A< 72°	$\overline{AC}<\overline{BD}$ 結果: 皆能塞進		∵∠A< 72°，∴$\frac{1}{2}$∠A< 36°，在△ADC 中，假設∠C≤ 72°，則∠ADC> 72°且∠B> 36°，推得$\overline{AC}>\overline{AD}$且$\overline{AD}>\overline{BD}$，即$\overline{AC}>\overline{BD}$矛盾，故∠C> ∠A，∵$\overline{AC}<\overline{BD}$，∴必存在$\overleftrightarrow{AT}$，使$\overline{AC}$擺入$\overline{BT}$中，又承前文，此時∠C>∠A，∴$\overline{GA}>\overline{TC}=\overline{TTˋ}$，也能擺入，故△AˋTˋCˋ皆能塞進。
	$\overline{AC}=\overline{BD}$ 結果: 恰好塞不進	 圖(9-1)	承前文，此時∠C > ∠A， ∵$\overline{GD}\parallel\overline{AC}$，∴$\overline{GA}>\overline{TC}$， 即$\overline{TˋT}=\overline{TC}<\overline{TG}$不突出，但因$\overline{AC}=\overline{BD}>\overline{BT}$，故 Aˋ點必恰好突出一點點，即△AˋTˋCˋ恰好塞不進。
	$\overline{AC}>\overline{BD}$ 結果: 塞不進		由上得知，當∠A< ∠C 時， $\overline{GT}>\overline{TT'}$，Tˋ點不突出 但因$\overline{AC}>\overline{BD}$，A’ 點必突出 故都塞不進

經過上表的分段，$90° > \angle A > 72°$時，分為$\overline{AB} > \overline{BC},\ \overline{AB} = \overline{BC},\ \overline{AB} < \overline{BC}$，$\angle A = 72°$時，分為$\overline{AC} > \overline{BT},\ \overline{AC} = \overline{BT},\ \overline{AC} < \overline{BT}$，$\angle A < 72°$時，分為$\overline{AC} > \overline{BT},\ \overline{AC} = \overline{BT},\ \overline{AC} < \overline{BT}$，敘述並證明後，關於$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺我們推得下列性質

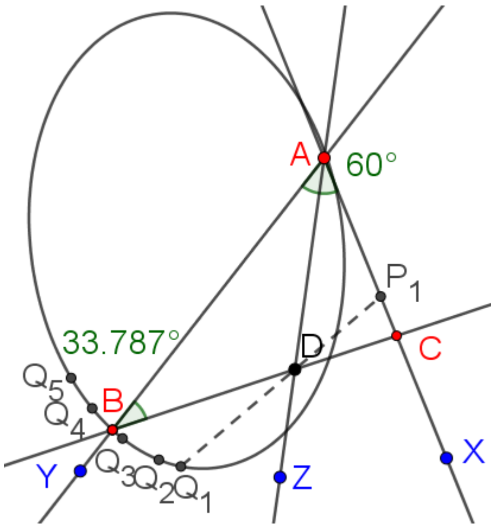
性質 3-1-1:在$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺的圖例中，能塞得進的方法共有三處

(1) $72° < \angle \mathbf{A} < \mathbf{90°}$且 $\overline{AB} > \overline{BC}$

(2) $\angle$A=72°且$\overline{AB} > \overline{BC}$

(3) $\angle$A< **72°**且$\overline{AC} < \overline{BD}$

性質 3-1-2:在$\angle$A< 72°，且$\overline{AC} = \overline{BD}$這個臨界點，欲不經調整圖形而直接用作圖軟體製作此臨界點的$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺圖形時是非常困難的，我們嘗試好多方法都畫不出來，但最後終於被我們找到一個不錯的作圖方式。



介紹作圖方法:如右圖

(1) 任取一個小於 72°的$\angle$XAY

(2) 作$\angle$XAY 的分角線$\overleftrightarrow{AZ}$

(3) 在$\overleftrightarrow{AZ}$任取一 點 D

(4) 以 A 為圓心，適當長為半徑，畫弧，交$\overleftrightarrow{AX}$於P_1

(5) 作$\overleftrightarrow{P_1D}$

(6) 以 D 為圓心，同半徑畫弧，交$\overleftrightarrow{P_1D}$於$Q_1$

(7) 循環操作(4)~(6)四次，可得Q_2、Q_3，Q_4、Q_5

(8) 作圓錐曲線通過Q_1、Q_2、Q_3，Q_4、Q_5

(9) 令此橢圓交$\overleftrightarrow{AY}$於 B

(10) 作$\overleftrightarrow{BD}$交$\overleftrightarrow{AX}$於 C

(11) 則△ABC 即為所求($\overline{AC}$=$\overline{BD}$)

性質 3-2-1:承性質 3-1-1 條件，$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺，當$90° > \angle A \geq 72°$且$\overline{AB} > \overline{BC}$時，

此時最大角$\angle B = 180° - 2\angle A$，又最小角∠C=∠A 而當$\angle A = 72°$，$\angle B = 36°$

證明：

1) 上半圖例中，當$\angle B$最大角時，都發生在四邊形 AGTC 為等腰梯形，

$\therefore \angle A = \angle C$，$\overline{AB} = \overline{BC}$

$\therefore$ *最大*$\angle B = 180° - 2\angle A$，最小∠C=180° − ∠A − ∠B=∠A

2) 當∠A=72°且$\overline{AB} > \overline{BC}$時，$\angle B = 180° - 144° = 36°$，最小∠C=∠A=72°

性質 3-2-2: 在$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺且∠A< 72°圖例中，$\overline{AC} = \overline{BD}$是塞得進與塞不進的臨界點，此時

若假設$\overline{AC} = \overline{BD}$=a，$\overline{AD} = 1$，如圖(9-1)，則最大∠B=$\sin^{-1}\frac{a\sin A}{a+\sqrt{a^2+1-2a\cos\frac{A}{2}}}$，

其中 a=$\sqrt{2+2\cos A} - \frac{1}{\sqrt{2+2\cos A}}$。

求證：最大$\angle B = \sin^{-1}\frac{a\sin A}{a+\sqrt{a^2+1-2a\cos\frac{A}{2}}}$，其中$a = \sqrt{2+2\cos A} - \frac{1}{\sqrt{2+2\cos A}}$

證明：在$\triangle ADC$中，由餘弦定理$\overline{DC} = \sqrt{a^2+1-2a\cos\frac{A}{2}}$

在$\triangle AGD$中，$\because \overline{GD} \parallel \overline{AC}$，$\overline{AD}$平分$\angle A$，$\therefore$令$\overline{GA} = \overline{GD} = b$，又$2b\cos\frac{A}{2} = \overline{AD} = 1$

$b = \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}$，$\therefore 2b\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = 1$，由$\overline{GD} > \overline{T'D}$，知$b \geq \overline{DC}$

即$\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}} \geq \sqrt{a^2+1-2a\cos\frac{A}{2}}$，令$\cos\frac{A}{2} = k$

得$\frac{1}{4k^2} \geq a^2+1-2ak$，$4k^2a^2 - 8k^3a + 4k^2 - 1 \leq 0$

由判別式$= 64k^6 - 16k^2(4k^2-1) = 64k^6 - 64k^4 + 16k^2$

$16k^2 \times (2k^2-1)^2 \geq 0$ 恆有解，即等式時$a = \frac{8k^3 \pm 4k(2k^2-1)}{8k^2} = \frac{4k^2-1}{2k}$ 或$\frac{1}{2k}$

$\because \frac{4k^2-1}{2k} > \frac{1}{2k}$，$\therefore \frac{1}{2k} < a < \frac{4k^2-1}{2k}$，又$2k = 2\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{2+2\cos A}$

帶入$\frac{1}{2k} < a < 2k - \frac{1}{2k}$，$\therefore \frac{1}{\sqrt{2+2\cos A}} \leq a \leq \sqrt{2+2\cos A} - \frac{1}{\sqrt{2+2\cos A}}$

接下來算$\sin B$的範圍

在$\triangle ABC$中，$\angle B$最大時發生在取$a = \sqrt{2+2\cos A} - \frac{1}{\sqrt{2+2\cos A}}$時

由正弦定理$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{BC}}{\sin A}$，$\therefore \sin B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \times \sin A = \frac{a\sin A}{a+\sqrt{a^2+1-2a\cos\frac{A}{2}}}$

即最大$\angle B = \sin^{-1}\frac{a\sin A}{a+\sqrt{a^2+1-2a\cos\frac{A}{2}}}$，以$\angle A = 60° < 72°$為例

最大$\angle B$時，$a = \sqrt{2+2\times\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2+2\times\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$，$\sin B = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{4}{3}+1-2\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$最大$\angle B = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$，而最小$\angle B \to 0°$

小結論：例如$\angle A = 60°$時，$0° < \angle B < \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$。

性質 3-3-1:承性質 3-2-1 條件，在$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺$90° > \angle A \geq 72°$時，可計算得

1) 曲線 L($\angle A, \angle B$最大角)的圖形成一直線

2) 曲線 L’($\angle A, \angle B$最小角)的圖形成一直線

說明：

1) 此時$\angle A$和$\angle B$最大角的關係式$\angle B = 180° - 2\angle A$，兩者成線型函數關係，故圖形呈一直線。

2) $\because$當$\angle B$最小$\fallingdotseq 0°$，此時$\angle A \fallingdotseq 90°$, $\therefore \angle C = 180° - 90° \fallingdotseq 90°$

又當$\angle B$最大$= 36°$，此時$\angle A = 72°$, $\therefore \angle C = 180° - 108° = 72°$，得$90° \geq \angle A \geq 72°$

性質 3-3-2:承性質 3-2-2 條件，在$\overline{AC}$貼$\overline{BT}$逆擺$72° \geq \angle A \geq 0°$時，可計算得

1) **曲線 L($\angle A, \angle B$最大角)的圖形成一曲線**

2) **曲線 L`($\angle A, \angle B$最小角)的圖形成一直線**

說明:

1) 例如當∠A=60°時，經前文公式可計算得最大∠B=$sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$。其餘類推。圖形分布成曲線狀。

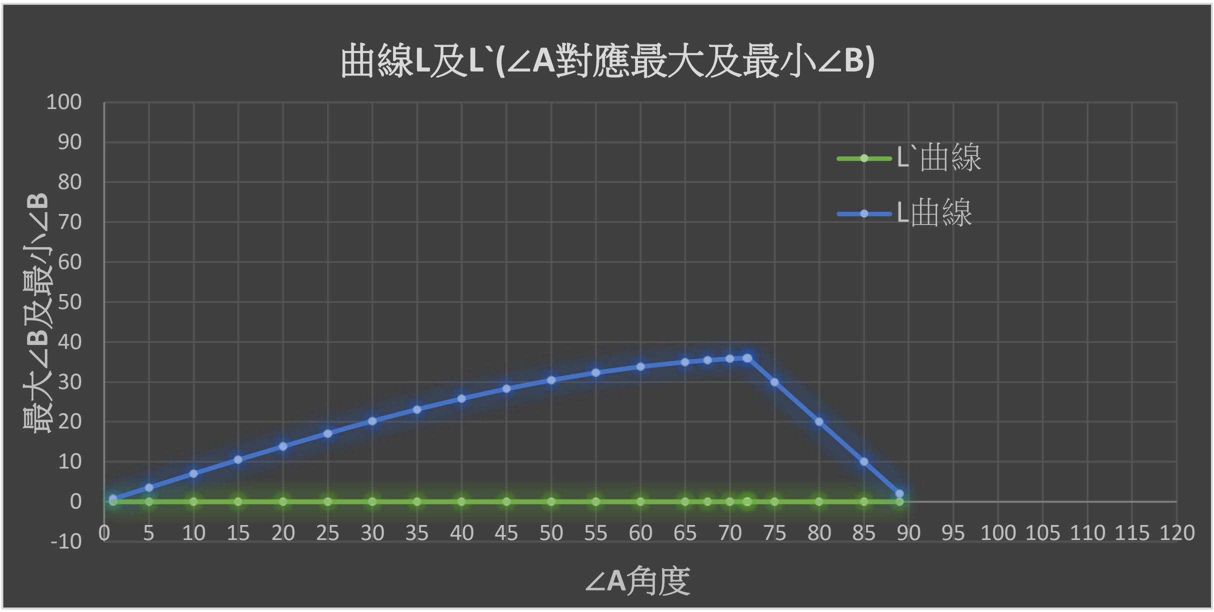
2) 當∠A=72°時，依性質 3-3-2 得最大∠B=最小∠B=36°=$180° - 2 \times 72°$，即∠A=72°時恰為曲線和直線的交界處。

利用公式將∠B 最大角及最小角建立成表(三)及其曲線

表(三)

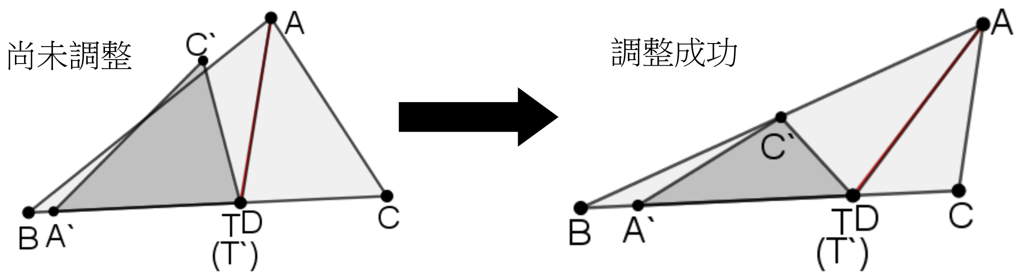
∠A	∠B 取角範圍	∠A	∠B 取角範圍
90	無法多切一點點	45°	$0° <$ ∠B $\leq 28.244°$
85°	$0° <$∠B$< 10.000°$	40°	$0° <$ ∠B ≤25.796°
80°	$0° <$∠B$< 20.000°$	35°	$0° <$ ∠B ≤23.098°
75°	$0° <$∠B$< 30.000°$	30°	$0° <$ ∠B ≤20.183°
72°	$0° <$∠B$< 36.000°$	25°	$0° <$ ∠B ≤17.087°
70°	$0° <$∠B≤35.774°	20°	$0° <$ ∠B ≤13.842°
65°	$0° <$∠B≤34.959°	15°	$0° \leq$ ∠B ≤10.481°
60°	$0° <$∠B≤33.787°	10°	$0° <$ ∠B ≤7.034°

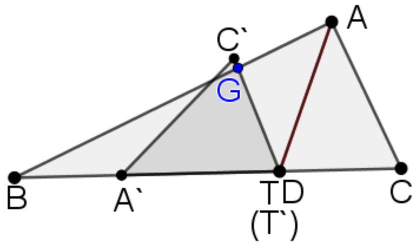
55°	0° < ∠B ≤32.265°	5°	0° < ∠B ≤3.531°
50°	0° < ∠B ≤ 30.410°		



(四) 將△ACT的邊 AT 貼在△ABT 的 BT 邊上:

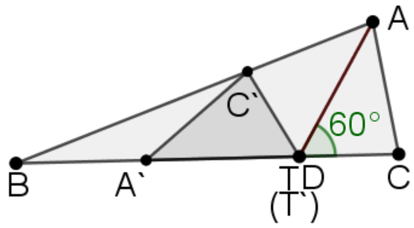
1. $\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺 **(塞得進)**



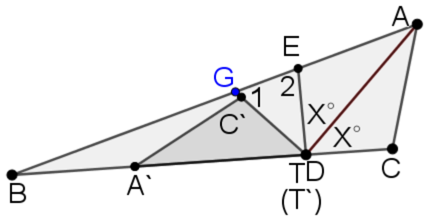
分類	條件和結果	圖例	證明
∠A≥ 60°	$\angle ADC > 60°$ 結果: 塞不進		∵ $\angle ADC > 60°$且∠A`TC`=∠ATC，故當$\lim_{\theta\to 0°}\overline{AT}=\overline{AD}$時，$\angle ADC` < 60°$，對$\overline{AD}$這分角線來說必$\overline{DG}<\overline{DC}$，即$\overline{DG}<\overline{DC`}$，使C`突出塞不進。

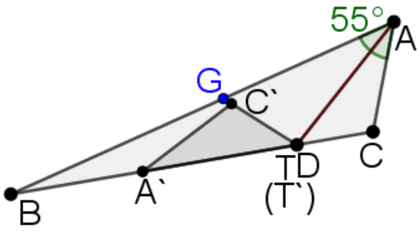
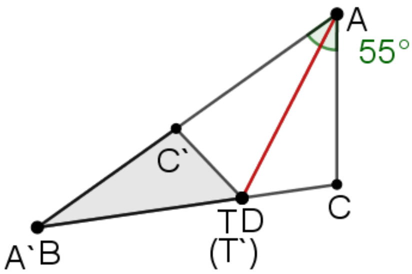
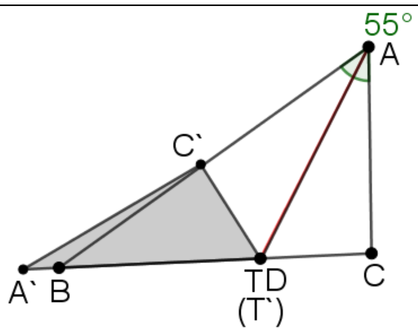
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$\angle ADC = 60°$

結果:

恰好塞不進</td><td></td><td>作△A`T`C`≅Δ ATC，作$\overleftrightarrow{AC}$交$\overleftrightarrow{CD}$於B，當$\lim\limits_{\theta\to0°}\overline{AT} = \overline{AD}$時，∠ADC`=$180° - 60° - 60° = 60° = $∠ADC，∠DAC`=∠DAC，$\overline{AD} = \overline{AD}$，∴△ADC`≅Δ ADC(ASA)，得$\overline{DC`} = \overline{DC}$，但因點T恆在點D左側，故實際上$\overline{TC`} > \overline{DC`}$，C`點必突出而塞不進，這是從塞得進轉變成塞不進的臨界點，此時∠B=$60° - \frac{1}{2}\angle A$為最大值。</td></tr>
<tr><td>$\angle ADC < 60°$

結果:

塞得進</td><td></td><td>作∠ADE=∠ADC，交$\overline{AB}$於E，明顯的△ADE≅△ADC，∴$\overline{DE} = \overline{DC}$，令∠A`DG=∠ADC=∠ADE=X°，∴∠1=∠B+X°，∴$\frac{1}{2}$∠A+X°，即∠2> ∠1，在△DGE中，∵∠2> ∠1，∴$\overline{DG} > \overline{DE} = \overline{DC}$，即C`不會突出塞得進。</td></tr>
</table>

∠A≤ 60°	$\overline{AD} < \overline{BD}$ 結果: 塞得進		由前一文證明知，$\overline{AD} = \overline{A`D} < \overline{BD}$，點 A`不會突出 B 點之外。又再由前一格證明知$\overline{DC} = \overline{DE} < \overline{DG}$，即$\overline{DC`} < \overline{DG}$，C`點不會突出，由此兩者之塞得進。
	$\overline{AD} = \overline{BD}$ 結果: 恰好塞不進		當$\overline{AD} = \overline{BD}$時，∵T 恆在 D 左側，故 A`點必會突出，恰好塞不進，此時為由塞得進轉成塞不進的臨界點，此時∠B≒$\frac{1}{2}$∠A。
	$\overline{AD} > \overline{BD}$ 結果: 塞不進		當$\overline{AD} > \overline{BD}$時，明顯的 A`點必會突出，此時恆塞不進。

經過上表分段，∠A≥ 60°時分為∠ADC< 60°，∠ADC= 60°，∠ADC> 60°

∠A≤ 60°時分為$\overline{AD} < \overline{BD}$，$\overline{AD} = \overline{BD}$，$\overline{AD} > \overline{BD}$，敘述並證明後

關於$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺，我們推得下列性質

性質 4-1-1:在$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺的圖例中，發現對符合$120° > ∠A \geq 60°$的定值∠A 來說，當∠ADC≤ 60°時必塞得進，當∠ADC> 60°時塞不進。也就是說∠ADC=60°為能否成功塞入的臨界點。

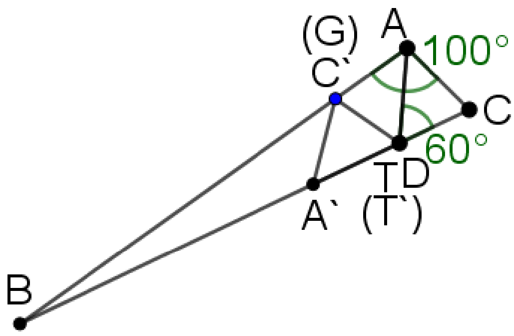
性質 4-1-2: 在$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺的圖例中，發現對符合$0° < \angle A \leq 60°$的定值∠A 來說，當$\overline{AD} < \overline{BD}$時必塞得進，當$\overline{AD} \geq \overline{BD}$時塞不進。也就是說$\overline{AD} = \overline{BD}$為能否成功塞入的臨界點。

性質 4-2-1:承性質 4-1-1 的條件，$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺，對符合$120° > \angle A \geq 60°$的定值∠A 來說，∠B 最大角必發生在∠ADC=60°，且此時∠B=60° $-\frac{1}{2}\angle A$。

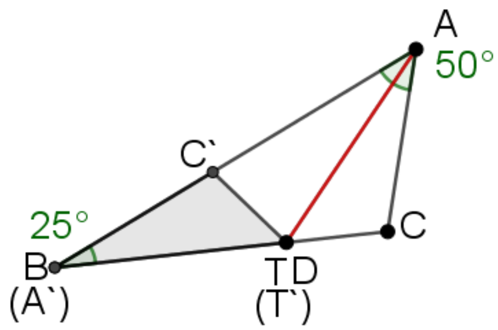
證明:

1) 如圖(10-1)，當∠B 最大角時$\overline{T`G}$=$\overline{T`C`}$=$\overline{TC}$，△AC`T`≅△ACT，∴∠ATC=∠C`T`A`=∠AT`C`=180° $\div 3 = 60°$

2) 在△ABD 中，∵∠ADB=120°，∴∠B=$180° - 120° - \frac{1}{2}\angle A = 60° - \frac{1}{2}\angle A$。



圖(10-1)



圖(10-2)

性質 4-2-2:承性質 4-1-2 條件，$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺，對符合$0° < \angle A \leq 60°$的定值∠A 來說，∠B 最大角必發生在$\overline{AD} = \overline{BD}$，且此時∠B=$\frac{1}{2}\angle A$

證明:

1) 如圖(10-2)，當∠B 欲愈大，點 A`愈靠近點 B，即$\overline{A`D} = \overline{BD} = \overline{AD}$

2) 在△ADB 中，∵$\overline{AD} = \overline{BD}$，∴∠B=∠DAB=$\frac{1}{2}\angle A$

性質 4-3-1:承性質 4-2-1 的條件，在$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺的擺放方式下，可計算得

1) 曲線 L(∠A，∠B 最大角)的圖形呈一直線型，其中∠B=$\frac{1}{2}$∠A，$\mathbf{60° \le \angle A < 120°}$

2) 曲線 L`(∠A，∠B 最小角)的圖形呈一直線型，其中∠B→ $\mathbf{0°}$

性質 4-3-2: 承性質 4-2-2 的條件，在$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$順擺的擺放方式下，可計算得

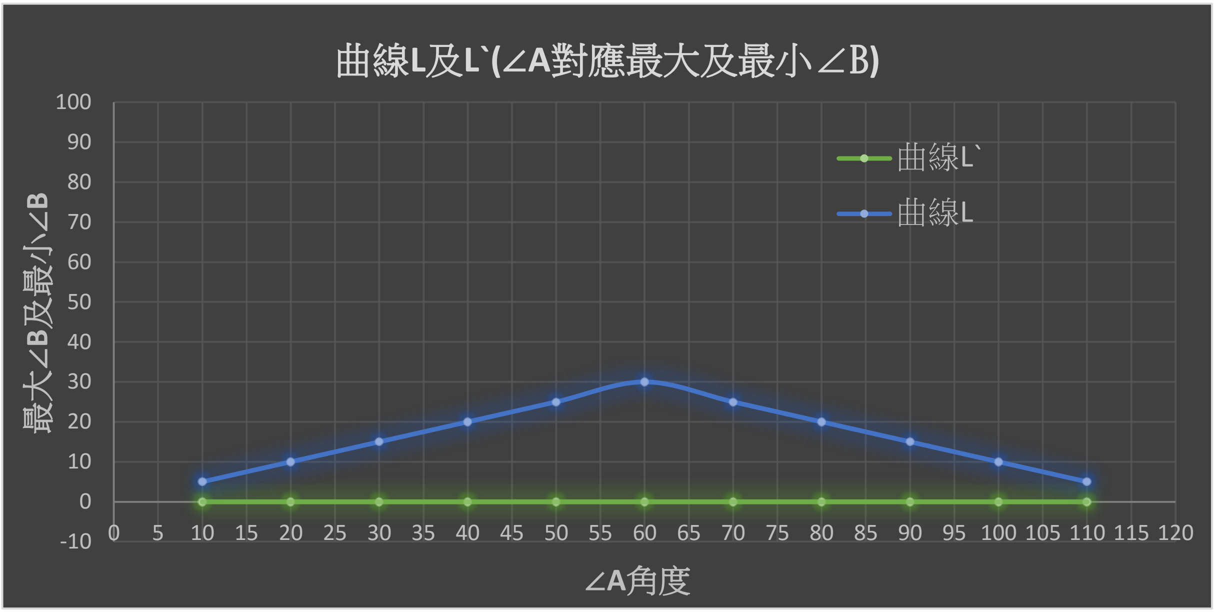
1) 曲線 L(∠A，∠B 最大角)的圖形呈一直線型，其中∠B=$\mathbf{60° - \frac{1}{2}}$∠A，$\mathbf{60° \le \angle A < 120°}$

2) 曲線 L`(∠A，∠B 最小角)的圖形呈一直線型其中∠B→ $\mathbf{0°}$

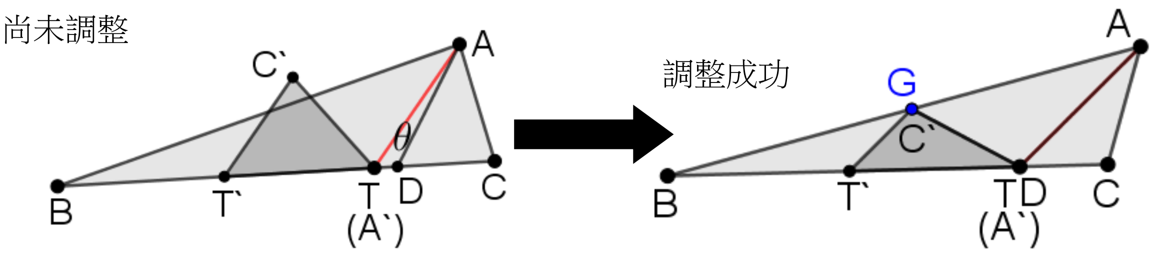
利用公式將∠B 最大角及最小角建立成表(四)及其曲線

表(四)

∠A	∠B 取角範圍	∠A	∠B 取角範圍
120°	無法多切一點點	60°	0° < ∠B <30.000°
119	0° < ∠B <0.500°	50°	0° < ∠B <25.000°
110°	0° < ∠B <5.000°	40°	0° < ∠B <20.000°
100°	0° < ∠B <10.000°	30°	0° < ∠B <15.000°
90°	0° < ∠B <15.000°	20°	0° < ∠B <10.000°
80°	0° < ∠B <20.000°	10°	0° < ∠B <5.000°
70°	0° < ∠B <25.000°		



2. $\overline{AT}$貼$\overline{BT}$逆擺 **(塞得進)**



圖(11-1)

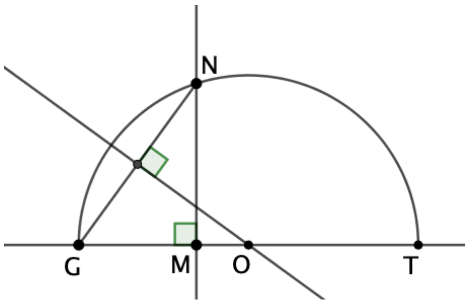
條件:	求證	證明:
$120° > \angle A \geq 60°$，$\angle ADC < 60°$，$\overline{AD} < \overline{BD}$，$\angle C > \angle B$	當$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$逆擺，且恰好位在臨界點時，必形成圖(11-1)的樣式，試證當$\lim_{\theta \to 0°} \overline{AT} = \overline{AD}$時，$\overline{AC}^2 = \overline{AT} \times \overline{CT}$	當$\lim_{\theta \to 0°} \overline{AT} = \overline{AD}$時，有機會畫出左圖點G、C`重疊的擺放，又∠C`AD= ∠CAD=$\frac{1}{2}$∠A，∴△ADC`~△ADC(AA 相似)，令$\overline{AC} = b$，$\overline{AT} = a$，$\overline{CT} = \overline{C`T} = c$，∴$\overline{TC`}:\overline{TC} = \overline{AT}:\overline{AC}$，∴b:c=a:b，即$b^2$ = ac得證

接下來，我們要舉例，使用$b^2 = ac$將圖(11-1)的擺放方式，用尺規作圖畫出來

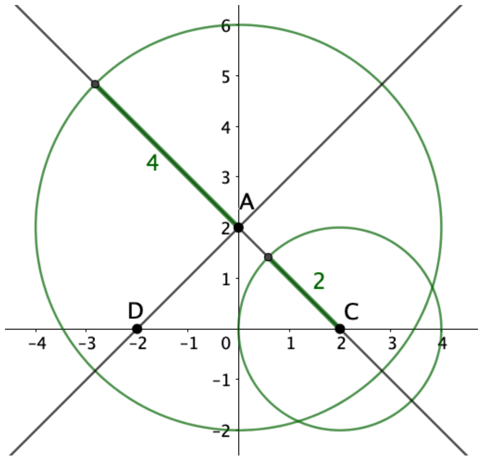
令$\overline{AT}$ = a, $\overline{AC}$ = b, $\overline{CT}$ = c，如圖(11-1)

$\because b^2 = a \times c$

$\therefore$我們可以將它畫成下圖(11-2)，即設 $\overline{MN} = \overline{AC} = b, \overline{MG} = \overline{AT} = a, \overline{MT} = \overline{CT} = c$



圖(11-2)



圖(11-3)

我們先以直角▵為例，令$A(2,0), C(0,2), D(-2,0)$ ，y 軸為∠A 的角平分線，試求點 B

$\because b = \overline{AC} = 2\sqrt{2}$，$\therefore b^2$=8

1) 令 a=2，可得 c=4，以 A 為圓心 c=4 為半徑畫圓，再以 C 為圓心 a=2 為半徑畫圓，

如圖(11-3)，圓 A：$x^2 + (y-2)^2 = 16$，圓 C：$(x-2)^2 + y^2 = 4$

得圓 A 及圓 C 交點：$\left(\frac{-\sqrt{7}+5}{2}, \frac{-\sqrt{7}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{7}+5}{2}, \frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)$

2) 令 a=$\frac{9}{4}$，可得 c=$\frac{32}{9}$，以 A 為圓心 c=$\frac{32}{9}$ 為半徑畫圓，再以 C 為圓心 a=$\frac{9}{4}$ 為半徑畫圓，

如圖(11-4)，圓 A：$x^2 + (y-2)^2 = \frac{1024}{81}$，圓 C：$(x-2)^2 + y^2 = \frac{81}{16}$

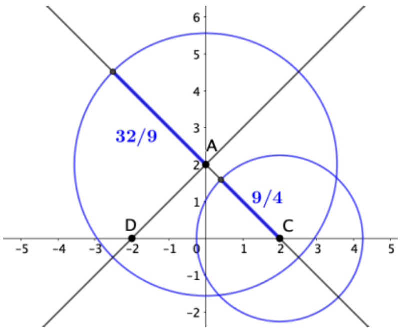
得圓 A 及圓 C 交點：

$\left(\frac{-\sqrt{271800767}+20191}{10368}, \frac{-\sqrt{271800767}+545}{10368}\right)\left(\frac{\sqrt{271800767}+20191}{10368}, \frac{\sqrt{271800767}+545}{10368}\right)$

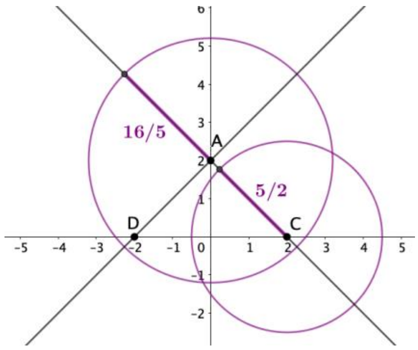
3) 令 a=$\frac{5}{2}$，可得 c=$\frac{16}{5}$，以 A 為圓心 c=$\frac{16}{5}$ 為半徑畫圓，再以 C 為圓心 a=$\frac{5}{2}$ 為半徑畫圓，

如圖(11-5)，圓 A：$x^2 + (y-2)^2 = \frac{256}{25}$，圓 C：$(x-2)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

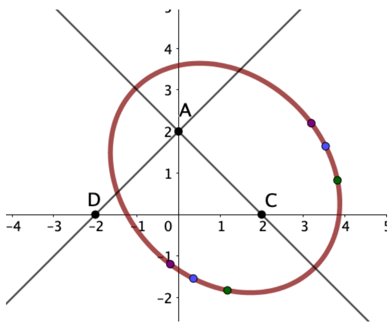
得圓 A 及圓 C 交點：$\left(\frac{-\sqrt{1839199}+1199}{800},\frac{-\sqrt{1839199}+401}{800}\right)\left(\frac{\sqrt{1839199}+1199}{800},\frac{\sqrt{1839199}+401}{800}\right)$



圖(11-4)



圖(11-5)



圖(11-6)

4) 由 1)、2)、3)中求得的六點帶入$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

解聯立得

$-\frac{150409553}{718117068}\mathrm{x}^2-\frac{5529600}{59843089}\mathrm{xy}-\frac{150409553}{718117068}\mathrm{y}^2+\frac{98860864}{179529267}\mathrm{x}+\frac{84726289}{179529267}\mathrm{y}+1=0$，如圖（11-6）

此橢圓與$\angle A$分角線 x=0 的交點為

$(0,\frac{-4\sqrt{8545365211899763}+169452578}{150409553})(0,\frac{4\sqrt{8545365211899763}+169452578}{150409553})$

我們取$\mathrm{T}\left(0,\frac{-4\sqrt{8545365211899763}+169452578}{150409553}\right)$

連$\overline{CT}$交$\overline{AD}$於點 B$(\frac{-\sqrt{8545365211899793}-82484705}{17541608},\frac{-\sqrt{8545365211899793}-47401489}{17541608})$，如圖(11-7)

至此我們已繪出△ABC，接著利用尺規作圖將△ACT 塞入△ATB 中

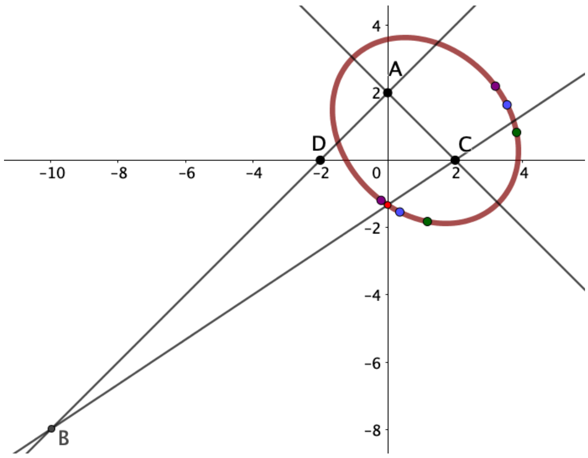
① 以 T 為圓心$\overline{AT}$為半徑畫圓，交$\overline{BC}$於 T'

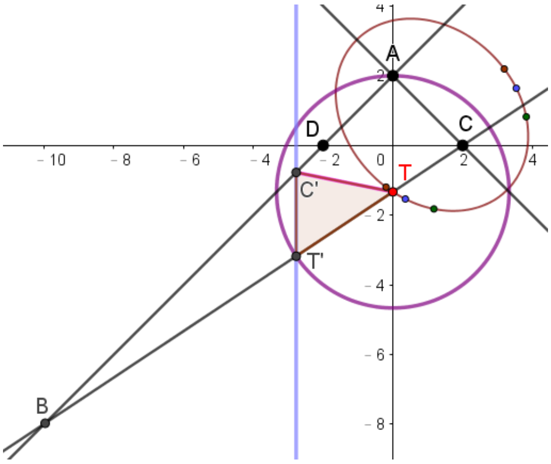
② 做過點 T' 平行$\overline{AT}$的直線，並交$\overline{AB}$於 C'

③ 連$\overline{C'T}=\overline{C'A'}=\overline{AC}$，如圖(11-8)，則△A`T`C`即為所求。

5) 再由正弦定理$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}\therefore \sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{153854005612832\sqrt{2}}{8770804\sqrt{82484705\sqrt{8545365211889 9793}+8289961907869737}}$

得$\angle B=\sin^{-1}(\frac{153854005612832\sqrt{2}}{8770804\sqrt{82484705\sqrt{85453652118899793}+8289961907869737}})$





圖(11-7)　∠A= 90°　　　　圖(11-8)∠A= 90°

再舉一例，令$A\left(2\sqrt{3},0\right),C(0,2),\angle A=60°,D(-2,0)$ 試求點 B

$\because b=\overline{AC}=4$，$\therefore b^2=ac$

6) 令 a=3，可得 c=$\frac{16}{3}$，以 A 為圓心 c=$\frac{16}{3}$為半徑畫圓，再以 C 為圓心 a=3 為半徑畫圓，

如圖(11-9)，圓 A：$x^2+(y-2)^2=\frac{256}{9}$，圓 C：$(x-2)^2+y^2=9$

得圓 A 及圓 C 交點：$\left(\frac{-\sqrt{137085}+319}{144},\frac{-31\sqrt{3}-\sqrt{45695}}{144}\right)\left(\frac{\sqrt{137085}+319}{144},\frac{-31\sqrt{3}+\sqrt{45695}}{144}\right)$

7) 令 a=$\frac{14}{5}$，可得 c=$\frac{40}{7}$，以 A 為圓心 c=$\frac{40}{7}$ 為半徑畫圓，再以 C 為圓心 a=$\frac{14}{5}$為半徑畫圓，

如圖(11-10)，圓 A：$x^2+(y-2)^2=\frac{1600}{49}$，圓 C：$(x-2)^2+y^2=\frac{196}{25}$

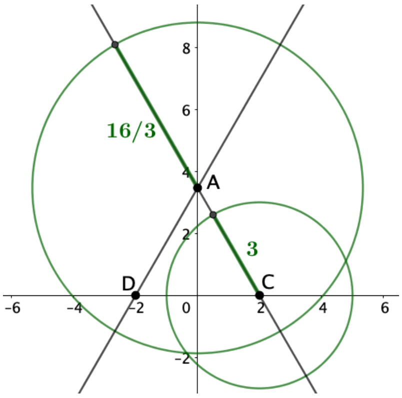
得圓 A 及圓 C 交點：

$\left(\frac{-33\sqrt{109573}+12499}{4900},\frac{-2699\sqrt{3}-11\sqrt{328719}}{4900}\right)\left(\frac{33\sqrt{109573}+12499}{4900},\frac{-2699\sqrt{3}+11\sqrt{328719}}{4900}\right)$

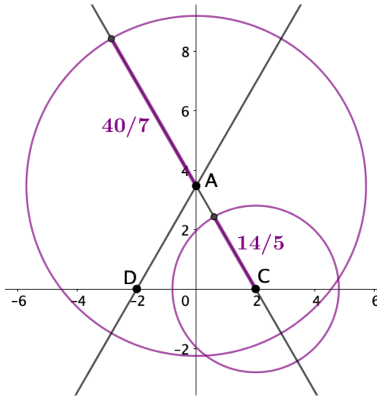
8) 令 a=$\frac{5}{2}$，可得 c=$\frac{8}{5}$，以 A 為圓心 c=$\frac{8}{5}$ 為半徑畫圓，再以 C 為圓心 a=$\frac{5}{2}$ 為半徑畫圓，

如圖(11-11)，圓 A：$x^2+(y-2)^2=\frac{64}{25}$，圓 C：$(x-2)^2+y^2=\frac{25}{4}$

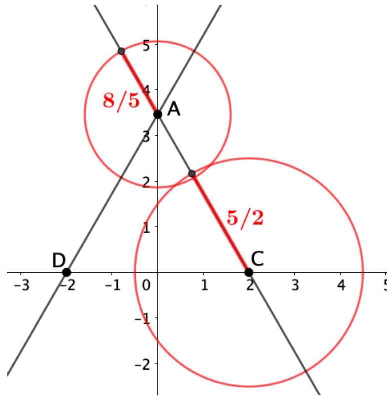
得圓 A 及圓 C 交點：$\left(\frac{-63\sqrt{93}+1231}{1600},\frac{-1969\sqrt{3}-63\sqrt{31}}{1600}\right)\left(\frac{63\sqrt{93}+1231}{1600},\frac{1969\sqrt{3}+63\sqrt{31}}{1600}\right)$



圖(11-9)　∠A=60°



圖(11-10)　∠A= 60°



圖(11-11)　∠A= 60°

9)　由 6)、7)、8)中求得的六點帶入$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

解聯立得，如圖(11-12)

$$-\frac{2350355238655}{10310782405324}\mathrm{x}^2+\frac{185984870400\sqrt{3}}{2577695601331}\mathrm{xy}-\frac{3094294720255}{10310782405324}\mathrm{y}^2+\frac{2207848214208}{2577695601331}\mathrm{x}-\frac{229462716353\sqrt{3}}{2577695601331}\mathrm{y}+1=0$$ ，

此橢圓與$\angle A$分角線 x=0 的交點為

$$\left(0,\frac{-458925432706\sqrt{3}-8\sqrt{508381831513220891572007 7}}{3094294720255}\right)\left(0,\frac{-458925432706\sqrt{3}+8\sqrt{5083818315132208915720077}}{3094294720255}\right)$$

我們取T $\left(0,\frac{-458925432706\sqrt{3}-8\sqrt{5083818315132208915720077}}{3094294720255}\right)$

連$\overline{CT}$交$\overline{AD}$於點 B，如圖(11-13)

我們已繪出△ABC，接著利用尺規作圖將△ACT 塞入△ATB 中

① 以 T 為圓心$\overline{AT}$為半徑畫圓，交$\overline{BC}$於 T’

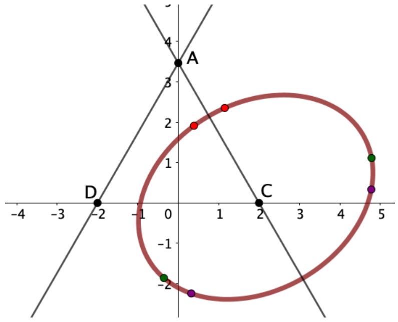
② 作過點 T’ 平行$\overline{AT}$的直線，並交$\overline{AB}$於 C’

③ 連$\overline{C'T}=\overline{C'A'}=\overline{AC}$，如圖(11-14)

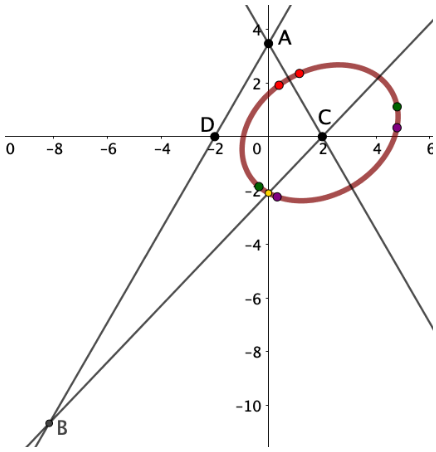
再利用正弦定理 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}\therefore\sin B=\frac{\overline{AC}\times\sqrt{3}}{2\times\overline{BC}}$

得最大$\angle B=$

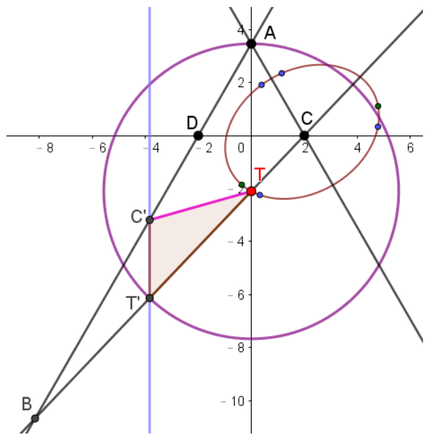
$$\sin^{-1}\left(\frac{44247735747471213806304508979388595921229707\sqrt{3}}{132743207242413641418913526938165787763689121\sqrt{126\sqrt{561295660306878922870929731667379911163800283783338435929509971299693411689478202759}+105703311692187056129028543879800224076375 0105}}\right)$$



圖(11-12)



圖(11-13)



圖(11-14)

經過上述敘述並證明後，關於$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$逆擺，我們推得下列性質

性質 5-1: 在$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$逆擺的圖例中，欲使$b^2 = ac$，此時點 D 或 T 或 A`為橢圓與角平分線的交點，且為能否成功塞入的臨界點位置。

性質 5-2:如圖(9-4)，$\overline{AT}$貼$\overline{BT}$逆擺的臨界點時，令$\overline{AC} = b$，$\overline{CD} = a$，$\overline{AD} = c$，則對 $0° < \angle A < 120°$中的任一個∠A 來說，可計算出當下的∠B 最大角為 ∠B=$sin^{-1}\left[(1-a^2)\times sin\frac{A}{2}\right]$，其中$a^2 = c^2+1-2c\times cos\frac{A}{2}$，且 ac=1

證明: 在△ADC 中，$a^2 = c^2+1-2C\times cos\frac{A}{2}$，$a = \sqrt{c^2+1-2C\times cos\frac{A}{2}}$

$\because \overline{C`T`} \parallel \overline{AT}$，$\therefore \frac{\overline{BT`}}{a} = \frac{\overline{BT`}+c}{c}$, $\overline{BT`} = \frac{ac}{c-a}$，∵△AC`T~△ATC，$\therefore \frac{AC`}{c} = \frac{1}{a}$,AC`=$\frac{c}{a}$

$\because \overline{C`T`} \parallel \overline{AT}$，$\therefore \frac{BC`}{\frac{c}{a}} = \frac{\frac{ac}{c-a}}{c}$,BC`=$\frac{c}{c-a}$，在△BC'T`中，由正弦定理知，$\frac{a}{sinB} = \frac{\frac{ac}{c-a}}{sin\frac{A}{2}}$

sinB=$\frac{c-a}{c}\times sin\frac{A}{2} = \frac{ac-a^2}{ac}\times \sin\frac{A}{2} = (1-a^2)\times sin\frac{A}{2}$

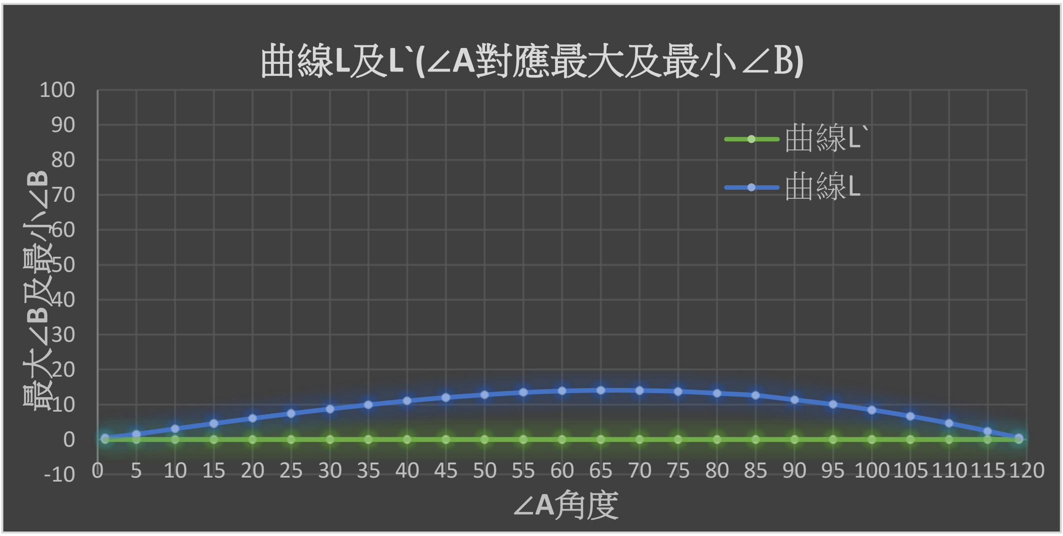
其中$\begin{cases} a^2 = c^2+1-\sqrt{3}c \\ ac = 1 \end{cases}$，解$a^2$代入 sinB=(1-$a^2$)sin$\frac{A}{2}$，例如:∠A= 60°時

得∠B≒ $\sin^{-1}$0.23975=13.8722°，利用上述同樣的辦法，針對各個∠A，算出∠B 列於表(五)，接著再將表(五)繪製成曲線 L 及 L`

利用公式將∠B 最大角及最小角建立成表(五)及其曲線

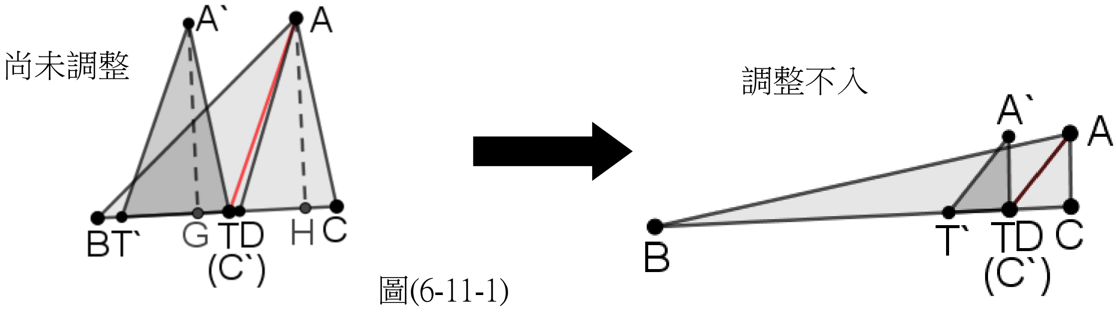
表(五)

∠A	∠B 取角範圍	∠A	∠B 取角範圍
120	無法多切一點點	60°	$0° < \angle B < 13.870°$
119	$0° < \angle B < 0.494°$	50°	$0° < \angle B < 12.801°$
110°	$0° < \angle B < 4.630°$	40°	$0° < \angle B < 11.044°$
100°	$0° < \angle B < 8.473°$	30°	$0° < \angle B < 8.728°$
90°	$0° < \angle B < 11.350°$	20°	$0° < \angle B < 5.962°$
80°	$0° < \angle B < 13.234°$	10°	$0° < \angle B < 3.061°$
70°	$0° < \angle B < 14.051°$	1°	$0° < \angle B < 0.309°$



(五) 將△ACT的邊 CT 貼在△ABT 的 BT 邊上:

1. $\overline{CT}$貼$\overline{BT}$順擺 **(恆塞不進)**



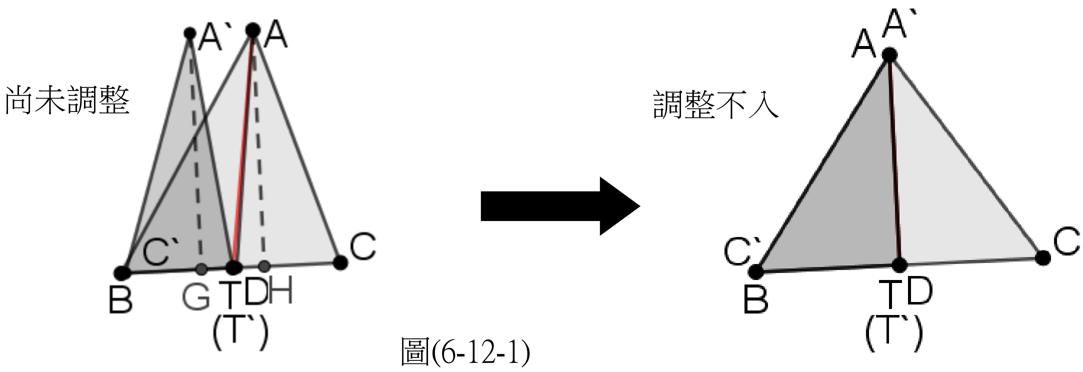
圖(6-11-1)

失敗原因:如圖(6-11-1)

$\because \overline{A\grave{}G} = \overline{AH}$，$\overline{A\grave{}G} \parallel \overline{AH}$，$\overline{AH}$為△ABC 的高，而 G 在 D 左側，明顯的 A`必突出，

$\therefore$失敗

2. $\overline{CT}$貼$\overline{BT}$逆擺 **(恆塞不進)**

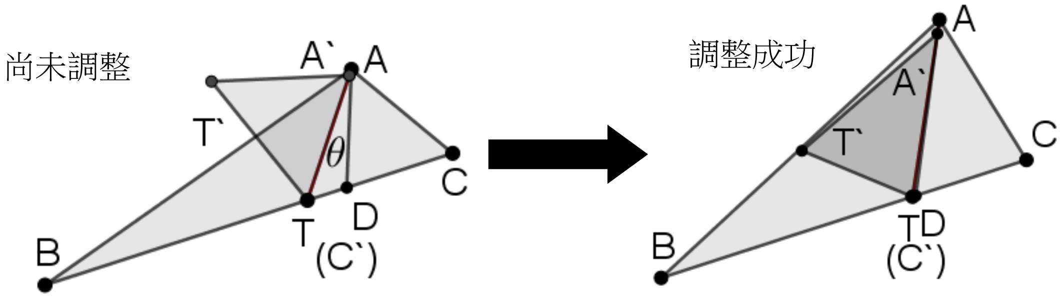


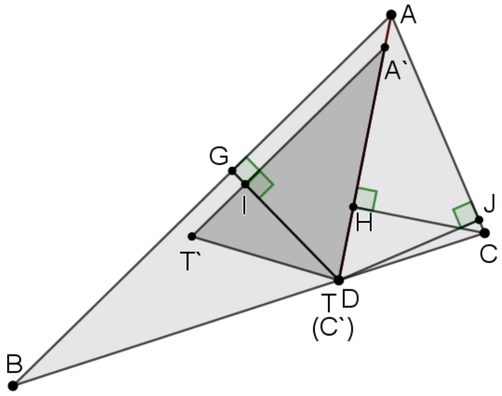
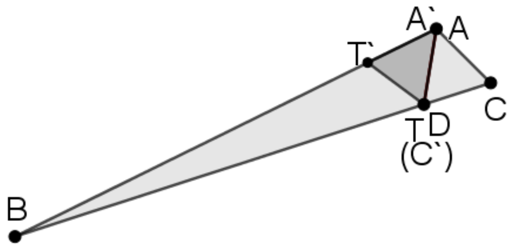
圖(6-12-1)

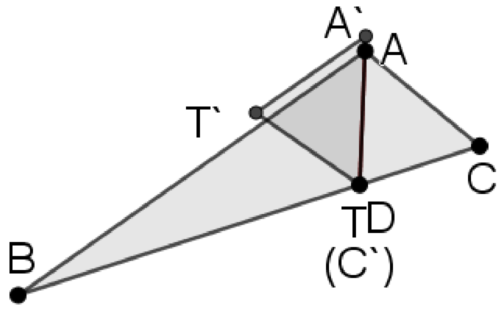
失敗原因，如圖(6-12-1)，同$\overline{CT}$貼$\overline{BT}$順擺

(六) 將△ACT的邊 AC 貼在△ABT 的 AT 邊上:

1. $\overline{AC}$貼$\overline{AT}$順擺 **(塞得進)**



條件	結果	圖例	證明
$\overline{AC}<\overline{AD}$	皆能塞進		當$\overline{AC}<\overline{AD}$時，在$\overline{AD}$的左側，作△A`T`C`≅△ATC，並使$\overline{A`C`}$和$\overline{AT}$疊合且C點貼在T點上。分別再作$\overline{DG}\perp\overline{AB}$、$\overline{DJ}\perp\overline{AC}$，及$\overline{CH}\perp\overline{AT}$、$\overline{TI}\perp\overline{A`T`}$。接下來調整$\vartheta\to 0°$時，會發現$\overline{AT}\to\overline{AD}$且$\overline{A`T`}\parallel\overline{AB}$，使得$\overline{TI}$和$\overline{TG}$疊合，由於$\overline{AC}<\overline{AD}$，所以$\overline{TJ}>\overline{CH}=\overline{TI}$，且$\overline{TJ}\fallingdotseq\overline{TG}$，故$\overline{TG}>\overline{TI}$即△A`T`C`可以塞進△ABT中。
$\overline{AC}=\overline{AD}$	恰好塞進	 圖(16-12-1)	當$\overline{AC}=\overline{AD}$時，在$\overline{AD}$的左側，作△A`T`C`≅△ATC，並使$\overline{A`C`}$和$\overline{AT}$疊合。此時∠T′A′T > ∠BAD，又當調整$\vartheta\to 0°$時，由於$\overline{AT}\to\overline{AD}$，使得$\overline{A`T`}$貼近$\overline{AB}$，但實際上T`仍在$\overline{AB}$的外側，即△A`T`C`塞不進△ABT中。(這時的擺放恰位在臨界點，可算出∠B的最大角度。) 最大∠B=$90°-\frac{3}{4}\angle A$



$\overline{AC} > \overline{AD}$	塞不進	當$\overline{AC} > \overline{AD}$時，在$\overline{AD}$的左側，作△A`T`C`≅△ATC，並使點 C`貼在 T 點，$\overline{A`C`}$貼在$\overleftrightarrow{AT}$上。當調整$\vartheta \to 0°$時，$\overline{A`T`}$、$\overline{AT}$，$\overline{AD}$幾乎重合，但是$\overline{A`C`} = \overline{AC} > \overline{AD}$，故點 A`必會突出，使得△A`T`C 塞不進△ABT 中。

經過上表的分段，$\overline{AC} > \overline{AD},\ \overline{AC} = \overline{AD},\ \overline{AC} < \overline{AD}$，敘述並證明後，關於$\overline{AC}$貼$\overline{AT}$順擺我們推得下列性質

性質 6-1: 在$\overline{AC}$貼$\overline{AT}$順擺的圖例中，發現對每個小於$120°$的定值$\angle A$來說，當$\overline{AC} \le \overline{AD}$時，必塞得進，當$\overline{AC} > \overline{AD}$時塞不得進。也就是說$\overline{AC} = \overline{AD}$為是否能成功塞入的臨界點。。

性質 6-2: 承性質 6-1 條件，$\overline{AC}$貼$\overline{AT}$順擺，對每個小於$120°$的定值$\angle A$來說，$\angle B$最大角必發生在$\overline{AC} = \overline{AD}$，且此時$\angle B = 90° - \frac{3}{4}\angle A$

證明：

1) 如圖（10-2）當$\angle B$最大角時，$\overline{A'C'} = \overline{AD}$重合，$\therefore \overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{AD}$

2) $\because \overline{AC} = \overline{AD}$，$\therefore \angle C = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{1}{2}\angle A\right) = 90° - \frac{1}{4}\angle A$，

得$\angle B = 180° - \angle A - 90° - \frac{1}{4}\angle A = 90° - \frac{3}{4}\angle A$

性質 6-3: 承性質 6-2 條件，在$\overline{AC}$貼$\overline{AT}$順擺的擺放下，可繪出得

1) 曲線 L($\angle A, \angle B$最大角)的圖形成一直線

2) 曲線 L’($\angle A, \angle B$最小角)的圖形亦成一直線

說明：

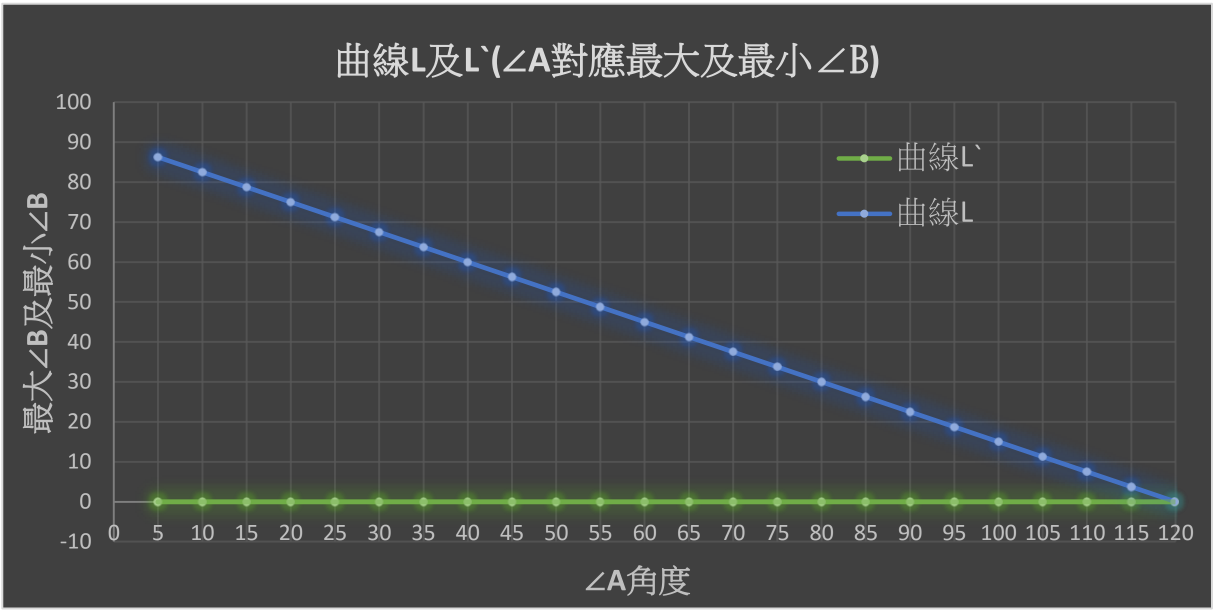
1) 由性質 6-2 中$\angle A$和$\angle B$最大角的關係式$\angle B=90°-\frac{3}{4}\angle A$，兩者成線型函數關係，故圖形呈一直線。

2) 由性質 6-1 知，對定值$\angle A$來說，在$\overline{AC}<\overline{AD}$時，恆塞得進，當∠C 接近∠A 補角時，∠B→ 0°，即∠B 的最小值恆為 0°，∴L`曲線為 X 軸直線。

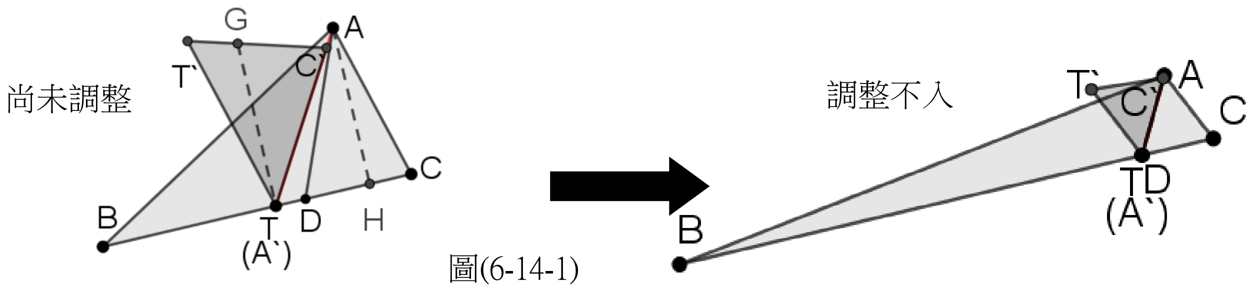
利用公式將∠B 最大角及最小角建立成表(六)及其曲線

表(六)

∠A	∠B 取角範圍	∠A	∠B 取角範圍
120	無法多切一點點	50	0° <∠B<52.500°
110	0° <∠B<7.500°	40	0° <∠B<60.000°
100	0° <∠B<15.000°	30	0° <∠B<67.500°
90	0° <∠B<22.500°	20	0° <∠B<75.000°
80	0° <∠B<30.000°	10	0° <∠B<82.500°
70	0° <∠B<37.500°	5	0° <∠B<86.250°
60	0° <∠B<45.000		



2. $\overline{AC}$貼$\overline{AT}$逆擺 (恆塞不進)

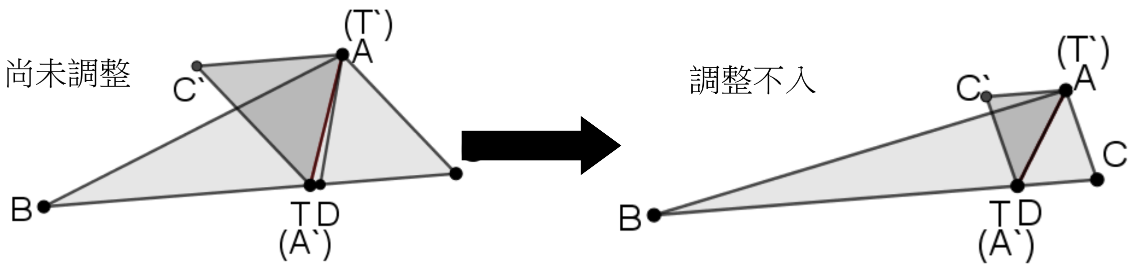


圖(6-14-1)

失敗原因:如圖(6-14-1)，∵$\overline{GT}=\overline{AH}$，$\overline{GT}\parallel\overline{AH}$，$\overline{AH}$為△ABC 的高，∴失敗

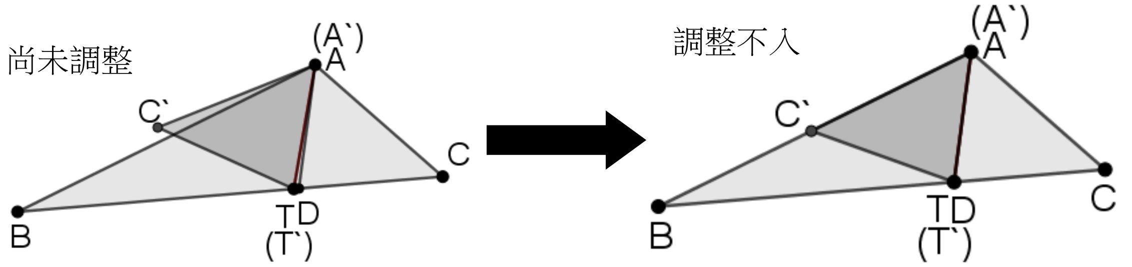
(七) 將△ACT的邊 AT 貼在△ABT 的 AT 邊上:

1. $\overline{AT}$貼$\overline{AT}$順擺 (恆塞不進)



∵∠CTA=∠BAT+∠TBA，∴∠CTA>∠BAT，失敗。

2. $\overline{AT}$貼$\overline{AT}$逆擺 (恆塞不進)



∵∠TAC> ∠BAT，∴失敗

(八) 將△ACT的邊 CT 貼在△ABT 的 AT 邊上:

1. $\overline{CT}$貼$\overline{AT}$順擺 (恆塞不進)

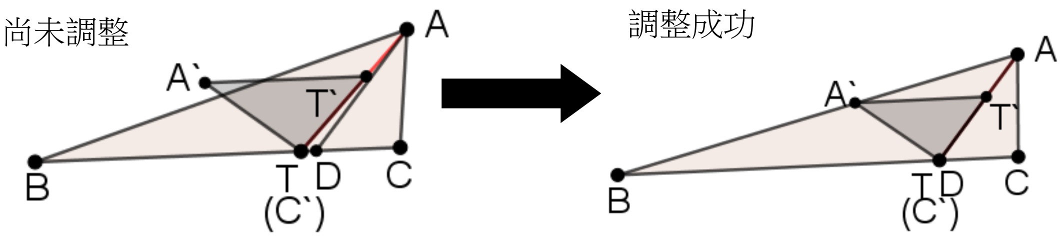
圖(5-21)

失敗原因:如圖(5-21)，作$\overleftrightarrow{A`T}$交$\overline{AB}$於 G

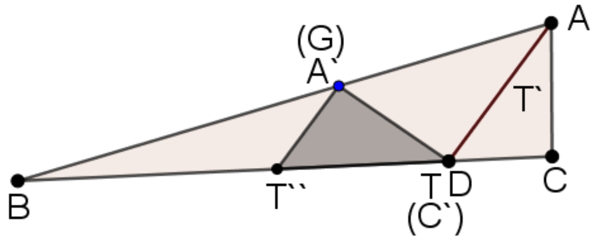
∵∠ATC=∠C`T`G，∴$\overline{GA}=\overline{AC}$，∵∠BAT< ∠TAC，$\overline{AT}$=$\overline{AT}$，$\overline{GA}=\overline{AC}$，∴$\overline{GT}<\overline{CT}$

∵$\overline{CT}$貼$\overline{AT}$，∴$\overline{CT}\leq\overline{AT}$才塞得進，但$\overline{GT}<\overline{CT}$，∴當$\overline{CT}\leq\overline{AT}$時 A`會突出

2. $\overline{CT}$貼$\overline{AT}$逆擺 (塞得進)



圖(16-18-1)

<table>
<tr><th>圖</th><th>說明及證明</th></tr>
<tr><td>

圖(11-1)</td><td>對定值∠A 來說，圖(16-18-1)是由塞得進轉成塞不進的臨界點位置圖，我們驚奇的發現，此圖和圖(11-1) $\overline{AT}$貼$\overline{BT}$逆擺時的臨界點位置圖恰好，可合併成一個平行四邊形，兩者有共軛現象，若令$\overline{AC}=b$，$\overline{AT}=a$，$\overline{CT}=\overline{C`T`}=c$，則由△ADC~△AA`C 亦可推得$b^2=4ac$，故最大∠B 的計算公式相同，曲線也相同。</td></tr>
</table>

經過上述敘述並證明後，關於$\overline{CT}$貼$\overline{AT}$逆擺，我們推得下列性質

性質 7-1: 在$\overline{CT}$貼$\overline{AT}$逆擺的圖例中，欲使$b^2=ac$，此時點 D 為橢圓與角平分線的交點，且為能否成功塞入的臨界點

性質 7-2: 承性質 7-1 條件$\overline{CT}$貼$\overline{AT}$逆擺，當點 D 為橢圓與角平分線的交點，此時$\angle B$為最大角

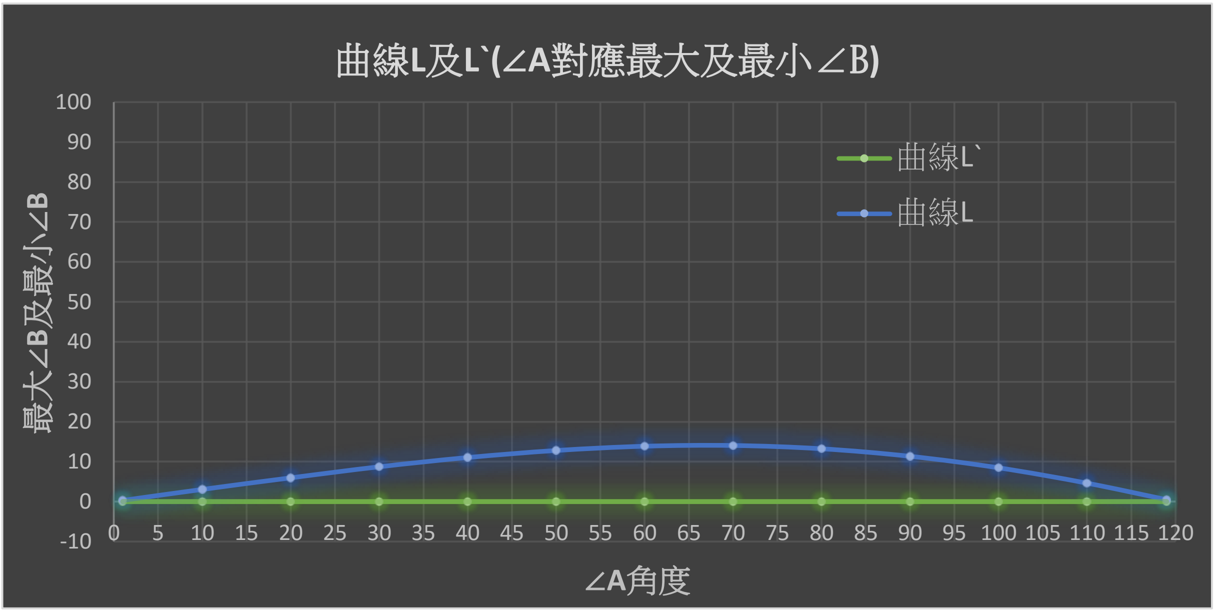
最大角∠B=$sin^{-1}\left[(1-a^2)\times sin\frac{A}{2}\right]$，其中$a^2=c^2+1-2c\times cos\frac{A}{2}$且 ac=1

利用公式將∠B 最大角及最小角建立成表(七)及其曲線

表(七)

∠A	∠B 取角範圍	∠A	∠B 取角範圍
120	無法多切一點點	60°	0° < ∠B <13.870°
119	0° < ∠B <0.494°	50°	0° < ∠B <12.801°
110°	0° < ∠B <4.630°	40°	0° < ∠B <11.044°
100°	0° < ∠B <8.473°	30°	0° < ∠B <8.728°

90°	0° < ∠B < 11.350°	20°	0° < ∠B <5.962°
80°	0° < ∠B < 13.234°	10°	0° < ∠B <3.061°
70°	0° < ∠B <14.051°	1°	0° < ∠B < 0.309°



五、軟硬△的判定探討:

(一) 概說(判別步驟)

1. 要檢查某一個內角，就將該角指定為∠A，其餘兩角，小角為∠B、大角為∠C；若兩角相等，由等腰△的說明知，該∠A 處不存在多切一點點的塞瓦線。
2. 當∠A≥ 120°時，在∠A 處不存在能多切一點點的塞瓦線。∠A< 120°時，進入每一個欄位(每一個擺放圖之表)的∠B 範圍，若∠B 也滿足，則在該 A 點處存在能多切一點點的塞瓦線，否則該處失敗。
3. 循環檢查給定△的每一個角，當 3 個內角逐一檢查之後，若發現都失敗，則稱該△恆不存在能多切一點點的塞瓦線，即為硬△。但若在某一處成功，則該△被稱為軟△。

4. 為了簡化步驟 2 和 3，我們推導出性質 8-1 及 8-2，可快速有效的判別出來。

(二) 關於等腰△為軟或硬△的探討

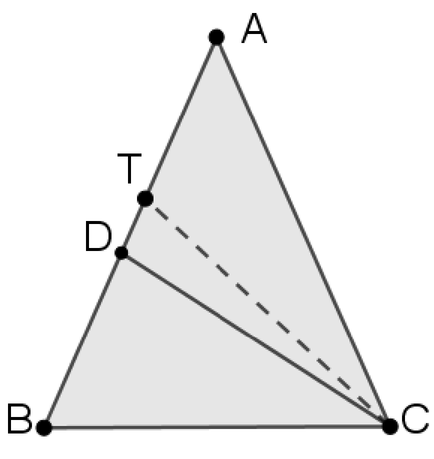
性質 8-1:若 36 度≤等腰△的頂角≤ $77\frac{1}{7}$度，則此等腰△必為硬△，反之亦然。

證明:

(1) 從頂角處，前文圖(2-2)已說明不存在能多切一點點的塞瓦線

(2) 接著就要檢查底角能否多切一點點，如右圖，設$\overline{CD}$為底角∠C 的平分角線，∠B>∠A，由前文七種成功貼法結論得知，在$\overline{AT}$貼$\overline{AB}$逆擺(現在是$\overline{CT}$貼$\overline{CA}$)逆擺的情況下，∠B 和∠C 個最大角與最小角之間的值域最大，因此我們採用此時最大∠B= $90° - \frac{3}{4}\angle A$及最小∠C= $90° - \frac{1}{4}\angle A$進行探討。

① ∵最大∠B= $90° - \frac{3}{4}\angle A$，即右圖中最大∠A= $90° - \frac{3}{4}\angle A$，∴令 $180° - 2\angle C = 90° - \frac{3}{4}\angle A$，$90° = \frac{5}{4}\angle C$，$\angle C = 72°$，∠A=36°，故在等腰△中，若頂角小於 36°時，可從底角多切一點點。



圖(12-1)

② ∵最小∠C= $90° - \frac{1}{4}\angle A$，在原圖上，得∠B=$180° - \left(90° - \frac{1}{4}\angle A\right) - \angle A = 90° - \frac{1}{4}\angle A$，即代換成圖(12-1)中為$\angle A = 90° - \frac{1}{4}\angle C$，令$180° - 2\angle C = 90° - \frac{1}{4}$

$\angle C$，$90° = \frac{7}{4}\angle C$，$\angle C=51\frac{3}{7}°$，$\angle A= 77\frac{1}{7}°$，故在等腰△中，若頂角大於$77\frac{1}{7}°$時，可從底角多切一點點。

由①、②知，在等腰△中，若頂角介於 36°到$77\frac{1}{7}°$時，不可從底角多切一點點，此等腰△必為硬△。

(三) 關於一般△為軟或硬△的探討

性質 8-2:在一般△(非等腰△)中，若三內角都落在 45°~75°之間，則為硬△，其他為軟△。

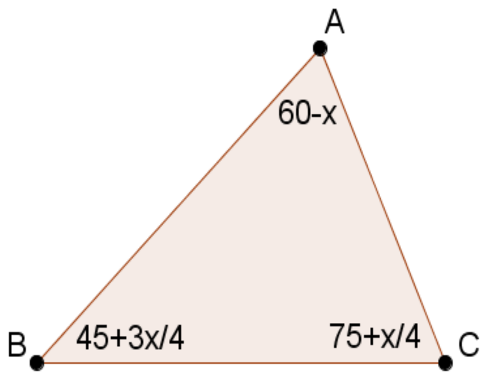
證明:由前面性質知銳角△才有機會為硬△，$\therefore 0° <$每一內角$< 90°$，才有機會是硬△，再由前文七種曲線得知，當指定檢查某一內角(例如$\angle A$)時，可多切一點點的$\angle B$ 值域在$0°\sim 90°$之間，意思就是不可多切一點點時的$\angle B$ 在$90°\sim 180°$之間，但這同時對另一內角$\angle C$也應是如此。設兩角各為$x°$和$y°$，故$90° < x° + y°$，考慮 $x< y$，則 $90° < 2y°$，得$45° < y$為某一內角。

方法一:由文章中知正△為硬△，即三內角皆為$60°$的△為硬△，現在由(1)知要檢查某一內角為硬△之角必要大於$45°$，此時以正△三內角$60°$來想，減少的$60° - 45° = 15°$去哪裡了呢?一定是跑到其他內角去，若這$15°$都集中到另一內角時，另一內角最大不能超過$60° + 15° = 75°$，因此可推論出任意硬△的三內角必在$45°\sim 75°$之間，呼應到表(一)、(二)、(六): $\angle B=90° - \frac{3}{4}\angle A$，$\angle A= 60°$時。

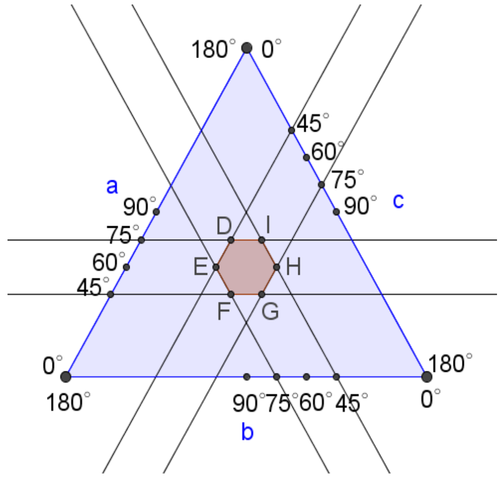
方法二:如圖(12-2)令$\angle A = 60° - x$，代入$\angle B$最大角公式$\angle B = 90° - \frac{3}{4}\angle A$，得$\angle B = 45° + \frac{3}{4}x$，$\angle C = 75° + \frac{1}{4}x$，此時恰為可切與不可切，即軟△與硬△的臨界點，為求硬△的臨界值，x 值要最小，因此令$x \to 0°$，得$\angle A = 60°$時，$\angle B = 45°$，$\angle C = 75°$，得證

方法三:如圖(12-3)令$\angle A = 60°$，此時$\angle B$或$\angle C$最大值$= 45°$，為求硬△的臨界值我們取

$\angle B > 45°$和$\angle C > 45°$，即兩直線的左半部，同理令$\angle B = 60°$和$\angle C = 60°$，取交集後得六邊形 DEFGHI，由圖形可知硬△中各角角度界於$45°$和$75°$，得證



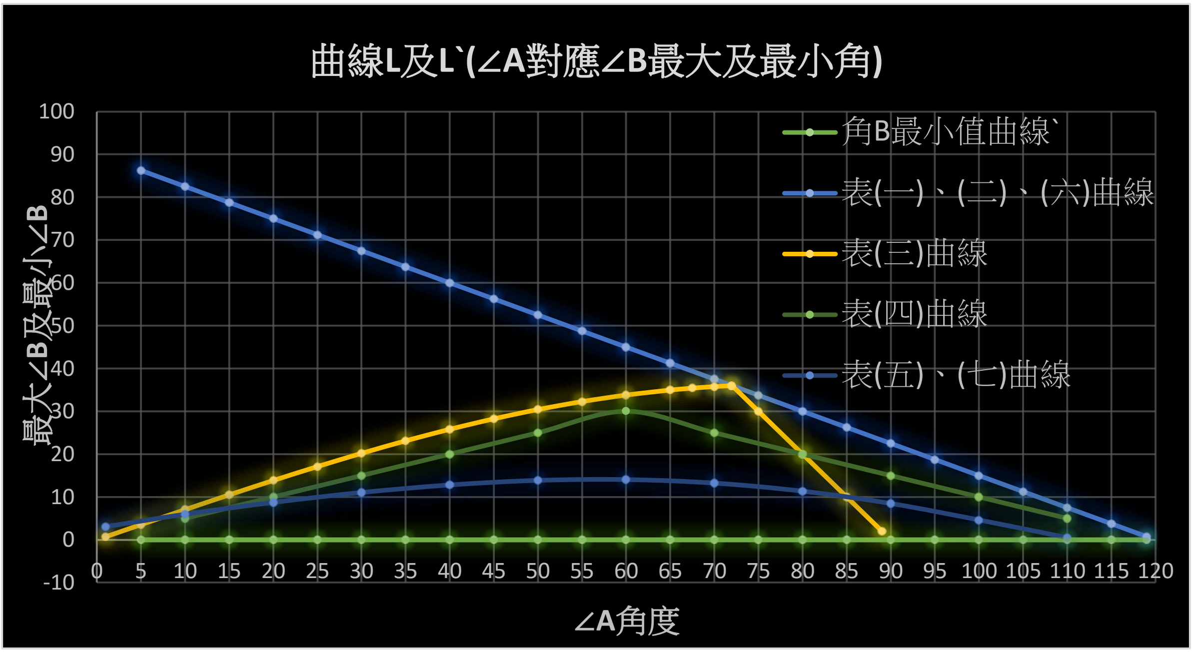
圖(12-2)



圖(12-3)

我們將所有曲線集合在同一圖中，比較表(一)至表(七)中的 L 和 L`曲線，對任一指定∠A 所對應的∠B 值域，以表(一)、(二)、(六)中的∠B= $90° - \frac{3}{4}$∠A 最大，∴得出下面性質

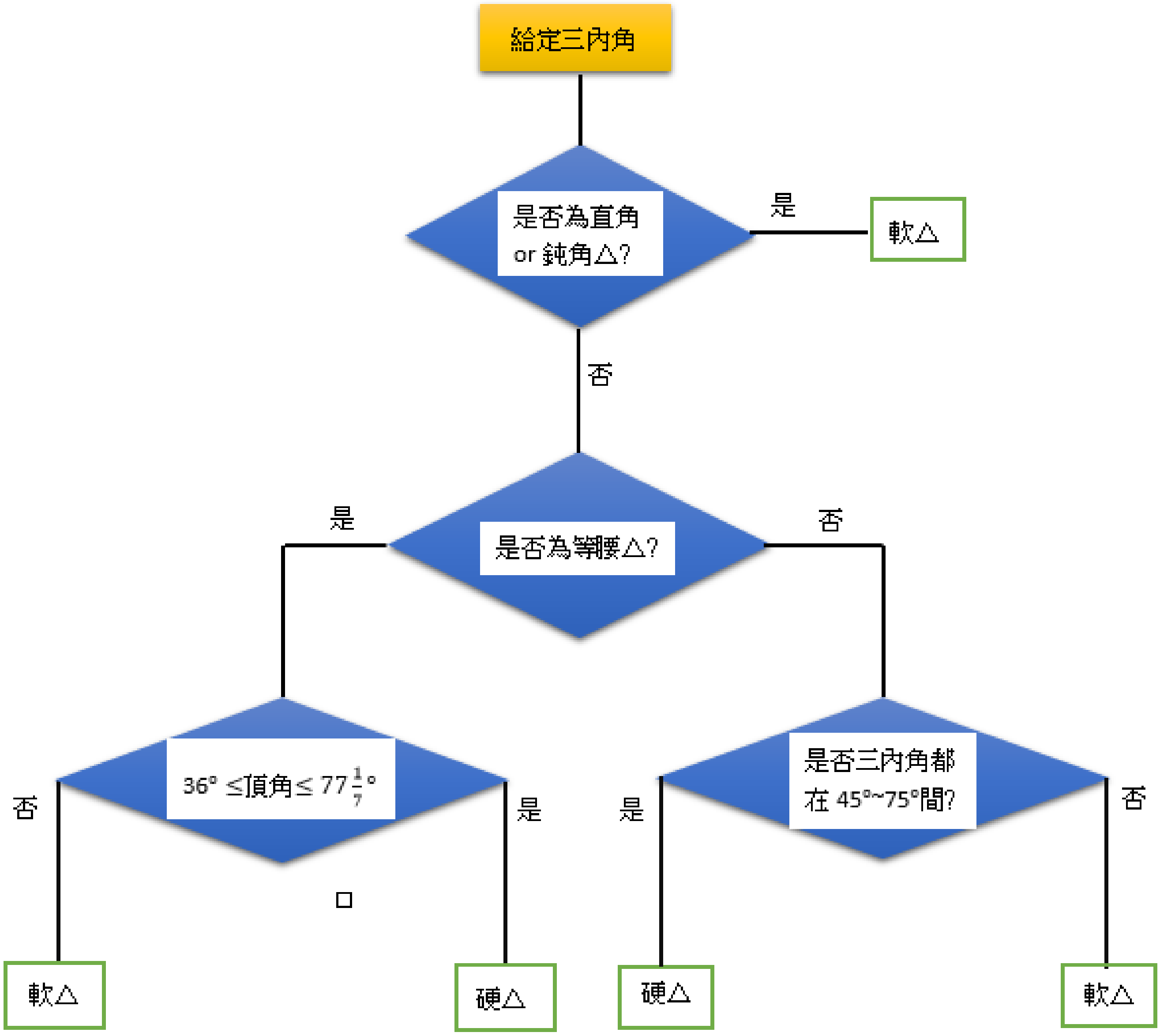
性質 8-3:當要檢查某一角(例如:∠A)是否存在多切一點點的塞瓦線時，只要檢查其他兩角中的較小角角度是否小於$90° - \frac{3}{4}$∠A 即可。



六、軟、硬△的綜合判斷流程圖

(一) 流程圖

這流程圖的設計邏輯是當接收到某△的三內角角度後，先檢查它是否為正△，再檢查它是否是直角△，接著檢查它是不是等腰△，運用性質(8-1)，如果都沒有辦法判定是硬△還是軟△後，接著逐一對每一內角，運用性質(8-2)檢查該△是否能多切一點點直到每一內角都判斷完畢。



(二) 範例

硬△:(50°，60°，70°)，(45°，60°，75°)，(36°，72°，72°)

軟△:(45°，55°，80°)，(40°，65°，75°)，(50°，50°，80°)

伍、 結論

一、正△為硬△

二、等腰△中，若 36° ≤頂角角度≤ $77\frac{1}{7}$°，則必為硬△，之外皆為軟△

三、直角△必為軟△

四、鈍角△必為軟△

五、只有在銳角△中，有硬△也有軟△

六、若三內角(非等腰△)都落在 45°~75°之間，則必為硬△

七、針對一般△，本文依邊貼邊及最有可能塞入的方向考慮，共分成 18 種擺放方式，接著利用幾何性質排除無效貼法，最後僅剩下 7 種有效擺放方式。

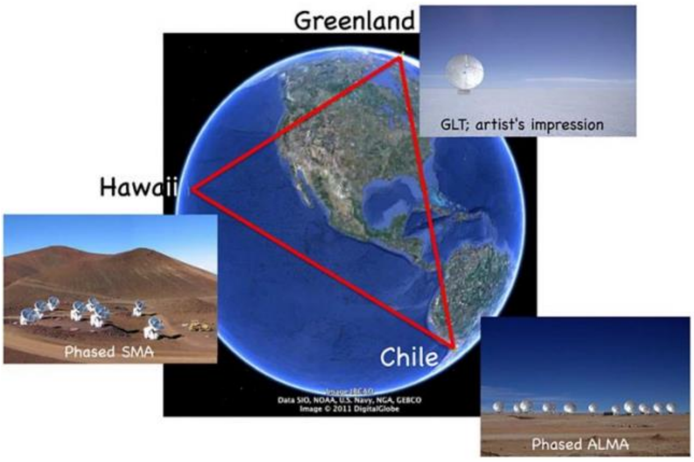
八、針對每一種有效擺放方式，在給定的定角∠A 下，變動∠B 和∠C，(須維持$\angle B + \angle C = 180° - \angle A$，且$\angle C > \angle B$)，觀察塞得進與塞不進互相轉換時所處的臨界條件，再根據每一個臨界處條件，推到出最大∠B 和給定的∠A 角度關係式，並檢查當時最小∠B 為多少?

九、對所有有效的擺放方式，利用最大和最小∠B 畫出每一定角∠A 所對應的曲線圖，由曲線圖可看出∠B 容許的值域，值域越大越容易舉例，也可用來推導等腰△或一般△為硬△的三內角容許取角範圍。

十、給定△，本文製作了流程圖，按流程檢查，即可判斷是軟△或硬△。

陸、 討論

軟硬△的區別在某些科學上可能很管用，例如前不久的一則宇宙科學新聞:「全球第一張黑洞影像亮相，這張照片令人印象深刻，令人讚嘆，我們注意到新聞報導夏威夷、格陵蘭、智利，據說為了得到那麼清新的影像，聰明的科學家串起夏威夷、格陵蘭、智利三地的望遠鏡，終於獲得了這麼棒的影像。非常奇妙的是我們發現這三個天文台組成的△就是個硬△，如右文及圖(13-1)、圖(13-2)。

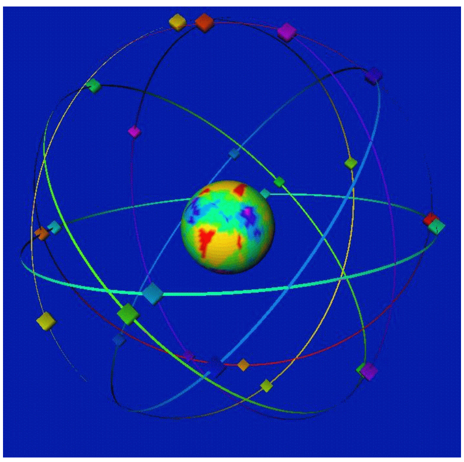


圖(13-1)

圖(13-2)

柒、　未來展望

　　我們這份研究報告專注在平面上的△，未來我們想要延伸至空間中的△，例如環繞地球飛行的數顆 GPS 人造衛星，如圖(14)，我們希望研究球面上的軟硬△，妥善安排那數顆人造衛星，以得到最大功效。


圖(14)

捌、 參考資料

一、國中數學課本第三冊、第四冊、第五冊、第六冊 張幼賢、李明芳、李信仲、吳秉鋒、邱繼輝、陳宏清、黃士哲、繆友勇 翰林出版

二、高中課本第一冊、第二冊、第三冊 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明 翰林出版

三、黃家禮 幾何明珠 第一版 台北 九章出版社 52~58 頁 2005 年

四、Geogebra 操作手冊

五、高中幾何學(上)與幾何學(下) 余文卿、吳志揚教授主編 龍騰版 2003

六、初等幾何學研究 左銓如、季素月編著 九章出版社 1998

七、高中解析幾何後記 黃武雄 1981

八、幾何學概論 趙文敏台北市 九章出版社 1993

九、幾何學的新探索 H.S.M. 考克瑟特，S.L. 格雷策 新竹市 凡異出版社。

十、幾何不等式 N.D.卡扎里諾夫著 凡異出版社譯

十一、 Conic Section—from Wolfram MathWorld
http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html

十二、 Limits(An introduction) – Math is fun
http://www.mathsisfun.com/calculus/limits.html

#【評語】010019

這個題目是尋求銳角三角形是否存在一個內角，其內角平分線切出面積較小之一側的子三角形，是否可以經過平移和旋轉放進面積較大的一側？作者做出所有可以這樣做的角度範圍，以三角函數證明，並給出作圖法。這問題很有趣，但是臨界角度恰為有理數並不是很直觀，可加以探討。本文一些證明不夠嚴謹，依賴觀察和直覺部分並沒有完全移除，應該妥善處理。