2020 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010018

參展科別　數學

作品名稱　四角垛彩球遊戲研究

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　國立新竹女子高級中學

指導教師　邱士珊、吳承彥

作者姓名　楊絜宇、周容安

關鍵詞　四角垛、同餘、矩陣方程

作者簡介

我是楊絜宇(左)，是新竹女中二年級的學生。平時喜歡畫畫，數學是我感興趣的科目之一，所以選擇數學作為專題研究的主題。而在做數學專題的過程中，體會到沒有考試壓力下數學是充滿樂趣的，也收穫了不少成就。很榮幸能參加國際科展，也十分感謝老師這一年來的指導，讓我體會數學的美好。

我是周容安(右)，目前就讀新竹女中二年級。平常喜歡打排球、看小說，數學是我最得心應手的科目，所以選擇了數學作為專題研究主題。研究過程雖然辛苦但是成就滿滿。感謝老師的指導，能夠來參加國際科展很榮幸。希望未來可以繼續進行更多不同方面的研究。

摘要

四角垛是「底層是邊長為n顆球的正方形，其上層在每顆球的中間排成邊長為$n-1$顆球的正方形，依此方式堆疊至最上層是邊長為1顆的正方形」。

本文主要探討的問題為：當四角垛最底層彩球用紅藍綠三種彩球擺定，上層每顆球的顏色由其下層所接觸的四顆彩球依照給定之規則來決定其顏色(紅或藍或綠)，那四角垛最頂層那顆球的顏色為何？我們透過數學建模將此問題轉換為mod 3的矩陣問題來解決，並得到如何最快求得答案的方法。另外，透過矩陣的可逆性與否我們可以判斷當給定四角垛哪些位置彩球的顏色後，即可推得四角垛中每顆彩球的顏色。

Abstract

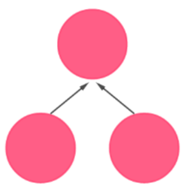
The quadrangular pyramid is a quadrangular cone with n levels. The first level, or the bottom of the cone is a square of side length n balls, the second level a square of side length $n-1$ balls, and so on the nth level, the top of the cone, a square of side length a ball.

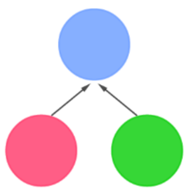
In the beginning, the quadrangular pyramid's bottom level is constituted by red, blue, and green balls in random. And the color red, blue or green of each ball on the other levels is determined by the beneath four balls touched on the immediate lower level under a rule formulated by us. The purpose of this research is to investigate what color of the ball on the top level will be. Through mathematical modeling we transform this question into a matrix of mod 3 problem and are able to obtain the method of how to obtain the answer rapidest. In addition, through matrix's reversibility, we are also able to know the color of every ball in the quadrangular pyramid once the color of some balls in the pyramid are given at first.

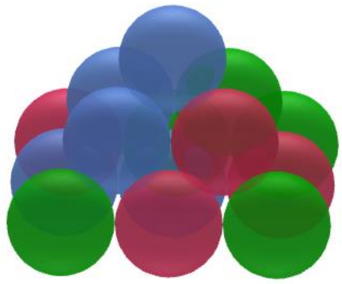
壹、前言

一、研究動機

曾在專題課討論到「數學傳播」中的一篇文章，引起了我們的興趣，文章內容為「先將紅、藍、綠三種顏色的彩球共n顆排成第一列並將其稱為『題目』，接下來重複在第k列上方擺放第$k+1$列，使第$k+1$列的每顆球皆位於第k列相鄰兩球的正上方，且第$k+1$列擺放規則為若下方相鄰兩球同色，則上方擺放相同顏色的球；反之，則擺放第三種顏色的球。」如圖(一)、(二)，依此規則擺放彩球直到第n列只剩一顆球，將此球的顏色稱為「解」。我們將擺放方式變為四角垛，如圖(三)，並且自訂遊戲規則作為本文研究的題目。


圖(一)


圖(二)


圖(三)

二、研究目的

(一) 給定最底層所有彩球之球色，求出最頂層彩球之球色。

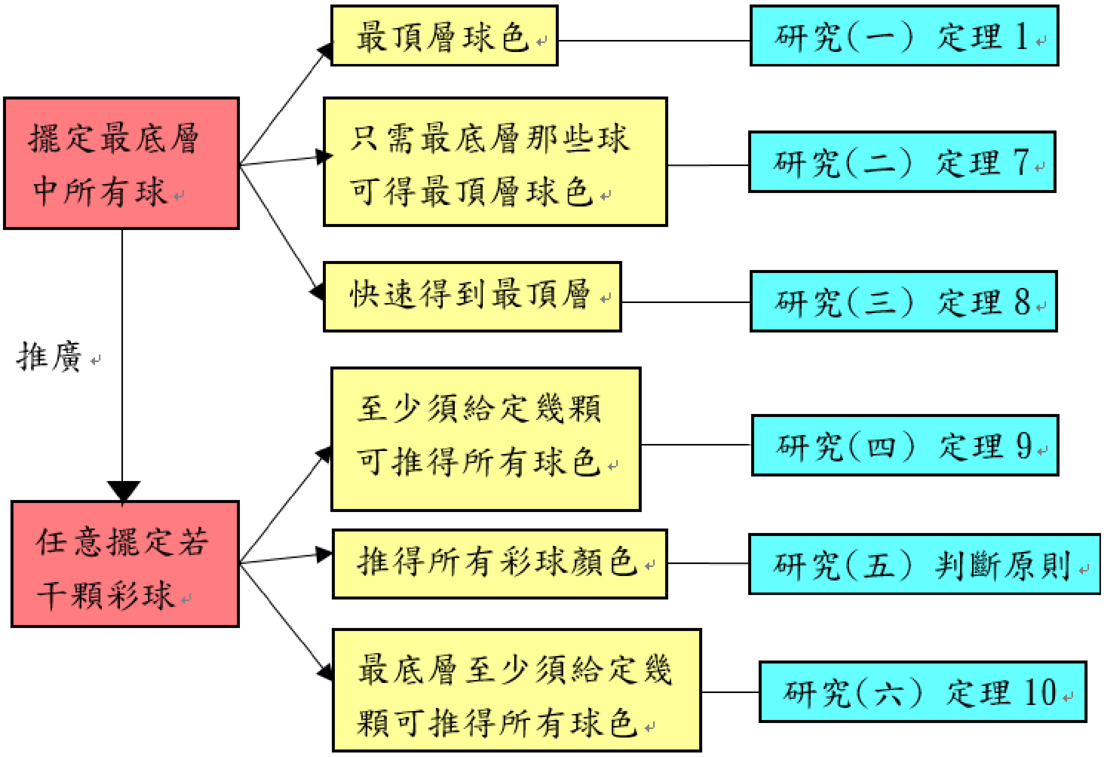
(二) 給定最底層所有彩球之球色，求出最快得知最頂層彩球之球色的方法。

(三) 找出判斷「給定四角垛哪些位置彩球的顏色後，便可推得四角垛每顆彩球的顏色」的方法。

(四) 找出至少需給定幾顆彩球的顏色，便有擺放策略，而推得四角垛每顆彩球的顏色。

(五) 找出最底層至少需給定幾顆彩球的顏色，便有擺放策略，而推得四角垛每顆彩球的顏色。

三、研究架構

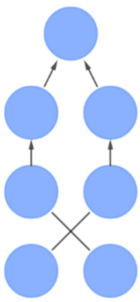
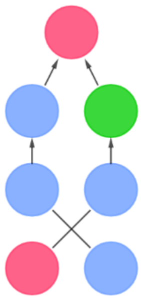
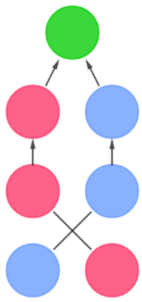
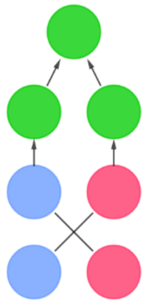
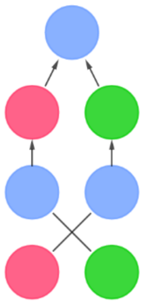
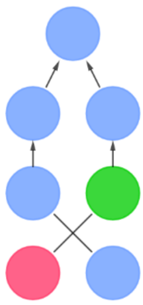


擺定最底層中所有球
最頂層球色
研究(一) 定理 1
只需最底層那些球可得最頂層球色
研究(二) 定理 7
快速得到最頂層
研究(三) 定理 8
推廣
任意擺定若干顆彩球
至少須給定幾顆可推得所有球色
研究(四) 定理 9
推得所有彩球顏色
研究(五) 判斷原則
最底層至少須給定幾顆可推得所有球色
研究(六) 定理 10

貳、研究方法與過程

一、名詞解釋

(一) 遊戲規則：當四角垛最底層彩球用紅藍綠三種彩球擺定，第 k+1 層每顆球的顏色由第 k 層所接觸的四顆彩球決定，其球色決定方法為：先將第 k 層四顆球所形成的正方形以對角線兩兩一組，若此兩球顏色相同，則得出相同顏色；若顏色相異，則得出兩色外的一色，再由得出的兩球顏色依相同的規則得出最終球色。如圖(四)至(九)所示：


圖(四)

圖(五)

圖(六)

圖(七)

圖(八)

圖(九)

重複此規則，一層一層往上擺，則第 $k+1$ 層比第 k 層少 $2k-1$ 顆球，擺放到第 n 層只剩一顆球。

(二) 建立數學模型：將紅球標示為 0，藍球標示為 1，綠球標示為 2。

(三) 第一層每顆球的球號稱為「已知數」。

(四) 第 n 層唯一球的球號稱為「最終解」。

(五) 以 $A(m,i,j)$ 表示位在第 m 層，第 i 列，第 j 行位置球的球號。

(六) 以 $A(k+1,i,j) \equiv A(k,i,j)+A(k,i+1,j)+A(k,i,j+1)+A(k,i+1,j+1)$ 表示

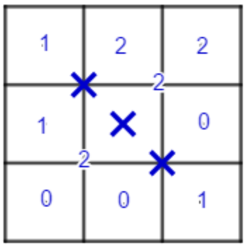
$$A(k+1,i,j) \equiv A(k,i,j)+A(k,i+1,j)+A(k,i,j+1)+A(k,i+1,j+1) \pmod 3$$

(七) 以 $A(k,i,j)+A(k,i+1,j)+A(k,i,j+1)+A(k,i+1,j+1)-A(k+1,i,j) \equiv 0$ 表示

$$A(k,i,j)+A(k,i+1,j)+A(k,i,j+1)+A(k,i+1,j+1)-A(k+1,i,j)\equiv 0(\bmod 3)$$

(八) 一步：每四顆球的球號就能決定另一顆球的球號之運算稱為一步。

(九) 圖中所呈現的是看三層四角垛立體圖的上視圖，忽略第三層部分。以九個方框內的數字表示第一層 9 顆球的球號。以四個十字交叉處代表第二層 4 顆球的位置，圖中交叉處的「╳」代表此位置的球號未給。交叉處的數字 2 代表此位置的球號，如圖(十)中 $A(1,1,1)$ 代表其球號為 1， $A(1,2,3)$ 其球號為 0， $A(1,2,2)$ 表示該位置的球號未給，第二層中 $A(2,1,1)$ 該位置的球號未給， $A(2,2,1)$ 該位置球號為 2。

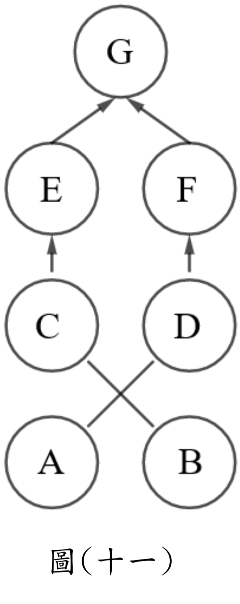


圖(十)

(十) 以 $O_{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 的零矩陣。

二、研究過程

首先，本文先說明將給定之規則來決定其顏色，透過數學建模後，其上層每顆球的球號與其下層所接觸的四顆球之球號的關係式為何？



圖（十一）

A 球之球號為 x_A ， D 球之球號為 x_D ， $x_A, x_D \in \{0,1,2\}$

若 $x_A = x_D$ ，則 F 球之球號為 x_F ，可推得 $x_A + x_D + x_F \equiv 0(\bmod 3)$ ；

若 $x_A \neq x_D$ ，則 x_F 為集合 $\{0,1,2\}$ 扣除 $\{x_A, x_D\}$ 此二球號所剩的數，可推得 $x_A + x_D + x_F \equiv 0(\bmod 3)$ 。

所以，可得 $x_F \equiv -(x_A + x_D)(\bmod 3)$ ，同理 $x_E \equiv -(x_B + x_C)(\bmod 3)$

$$x_G \equiv -(x_E + x_F) \equiv x_A + x_B + x_C + x_D (\bmod 3)$$

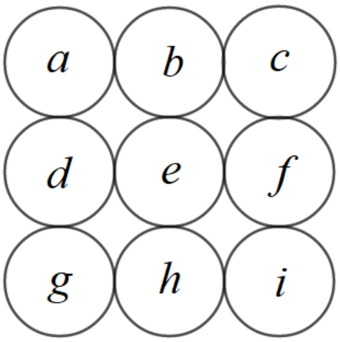
接著，先觀察四角垛為 3 層的狀況：

如圖(十二)，若第一層的 9 顆球分別為a、b、c、d、e、f、g、h、i，即

$A(1,1,1)=a$、$A(1,1,2)=b$、$A(1,1,3)=c$

$A(1,2,1)=d$、$A(1,2,2)=e$、$A(1,2,3)=f$

$A(1,3,1)=g$、$A(1,3,2)=h$、$A(1,3,3)=i$



圖(十二)

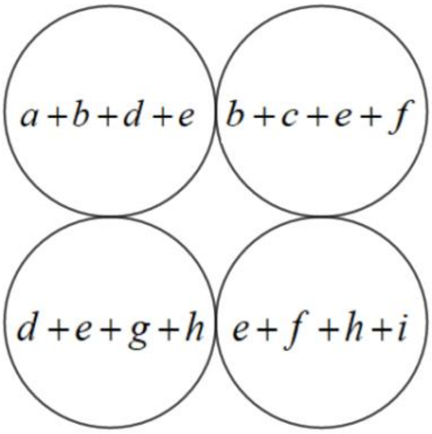
如圖(十三)，則第二層的 4 顆球的一般式分別為

$$A(2,1,1)\equiv(a+b+d+e)\equiv\sum_{k'=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}C_{k'}^{1}C_{k}^{1}A(1,1+k',1+k)$$

$$A(2,1,2)\equiv(b+c+e+f)\equiv\sum_{k'=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}C_{k'}^{1}C_{k}^{1}A(1,1+k',2+k)$$

$$A(2,2,1)\equiv(d+e+g+h)\equiv\sum_{k'=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}C_{k'}^{1}C_{k}^{1}A(1,2+k',1+k)$$

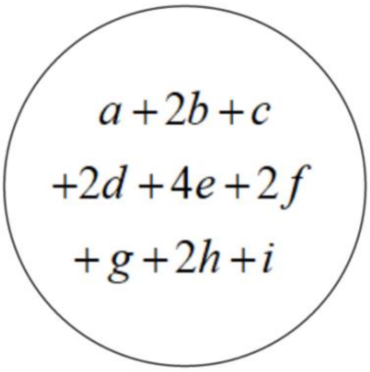
$$A(2,2,2)\equiv(e+f+h+i)\equiv\sum_{k'=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}C_{k'}^{1}C_{k}^{1}A(1,2+k',2+k)$$



圖（十三）

如圖(十四)，最終解的一般式為：

$$\begin{aligned}A(3,1,1)&\equiv(a+b+d+e)+(b+c+e+f)\\&+(d+e+g+h)+(e+f+h+i)\\&\equiv a+2b+c+2d+4e+2f+g+2h+i\\&\equiv\sum_{k'=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}C_{k'}^{2}C_{k}^{2}A(1,1+k',1+k)\end{aligned}$$



圖（十四）

研究(一)：若四角垛共有n層，給定第一層的「已知數」，則其它層的每顆球，如何以第一層的「已知數」來表達其一般式呢？「最終解」如何以第一層的「已知數」來表達其一般式呢？證明於定理 1。

定理 1： $A(m,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}C_{k'}^{m-1}C_{k}^{m-1}A(1,i+k',j+k)$ ，$\forall m\in\mathbb{N}$

【證明】

(1)當 $m=1$時， $A(1,i,j)\equiv C_k^{1-1}\cdot C_k^{1-1}\cdot A(1,i,j)$

$m=2$ 時， $A(2,i,j)\equiv A(1,i,j)+A(1,i,j+1)+A(1,i+1,j)+A(1,i+1,j+1)$

$$\equiv\sum_{k'=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}C_{k'}^{1}C_k^{1}A(1,i+k',j+k)$$

成立

(2)若 $m=\alpha\left(\alpha\geq 1\right)$ 成立，即 $A(\alpha,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}\cdot A(1,i+k',j+k)$

則 $m=\alpha+1$時，

$$\begin{aligned}A(\alpha+1,i,j)&\equiv A(\alpha,i,j)+A(\alpha,i,j+1)+A(\alpha,i+1,j)+A(\alpha,i+1,j+1)\\
&\equiv\left[\sum_{k'=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k',j+k)\right]+\left[\sum_{k'=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k',j+k+1)\right]\\
&\quad+\left[\sum_{k'=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+k)\right]+\left[\sum_{k'=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+k+1)\right]\\
&\equiv\sum_{k'=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}\left[(C_0^{\alpha-1}A(1,i+k',j)+\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k',j+k)\right]\\
&\quad+\sum_{k'=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}\left[\sum_{k=0}^{\alpha-2}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k',j+k+1)+C_{\alpha-1}^{\alpha-1}A(1,i+k',j+\alpha)\right]\\
&\quad+\sum_{k'=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}\left[(C_0^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j)+\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+k)\right]\\
&\quad+\sum_{k'=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}\left[\sum_{k=0}^{\alpha-2}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+k+1)+C_{\alpha-1}^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+\alpha)\right]\end{aligned}$$

因為 $C_k^{\alpha-1}+C_{k-1}^{\alpha-1}=C_k^{\alpha}$ ，所以，

$$\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k',j+k)+\sum_{k=0}^{\alpha-2}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k',j+k+1)=\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha}A(1,i+k',j+k)$$

$$\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+k)+\sum_{k=0}^{\alpha-2}C_k^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+k+1)=\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha}A(1,i+k'+1,j+k)$$

$$\begin{aligned}A(\alpha+1,i,j)&\equiv\sum_{k'=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}\left[C_0^{\alpha-1}A(1,i+k',j)+\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha}A(1,i+k',j+k)+C_{\alpha-1}^{\alpha-1}A(1,i+k',j+\alpha))\right]\\
&\quad+\sum_{k'=0}^{\alpha-1}C_{k'}^{\alpha-1}\left[C_0^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j)+\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_k^{\alpha}A(1,i+k'+1,j+k)+C_{\alpha-1}^{\alpha-1}A(1,i+k'+1,j+\alpha))\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A(\alpha+1,i,j) &\equiv \sum_{k'=0}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha-1}\left[\sum_{k=0}^{\alpha} C_k^{\alpha} A(1,i+k',j+k)\right] + \sum_{k'=0}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha-1}\left[\sum_{k=0}^{\alpha} C_k^{\alpha} A(1,i+k'+1,j+k)\right] \\
&\equiv \sum_{k=0}^{\alpha} C_k^{\alpha}\left[\sum_{k'=0}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha-1} A(1,i+k',j+k)\right] + \sum_{k=0}^{\alpha} C_k^{\alpha}\left[\sum_{k'=0}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha-1} A(1,i+k'+1,j+k)\right] \\
&\equiv \sum_{k=0}^{\alpha} C_k^{\alpha}\left[C_0^{\alpha-1} A(1,i,j+k) + \sum_{k'=1}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha-1} A(1,i+k',j+k)\right] + \\
&\quad \sum_{k=0}^{\alpha} C_k^{\alpha}\left[\sum_{k'=0}^{\alpha-2} C_{k'}^{\alpha-1} A(1,i+k'+1,j+k) + C_{\alpha-1}^{\alpha-1} A(1,i+\alpha,j+k)\right]
\end{aligned}
$$

同理， $\sum_{k'=1}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha-1} A(1,i+k',j+k) + \sum_{k'=0}^{\alpha-2} C_{k'}^{\alpha-1} A(1,i+k'+1,j+k) = \sum_{k'=1}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha} A(1,i+k',j+k)$

$$
\begin{aligned}
A(\alpha+1,i,j) &\equiv \sum_{k=0}^{\alpha} C_k^{\alpha}\left[C_0^{\alpha-1} A(1,i,j+k) + \sum_{k'=1}^{\alpha-1} C_{k'}^{\alpha} A(1,i+k',j+k) + C_{\alpha-1}^{\alpha-1} A(1,i+\alpha,j+k)\right] \\
&\equiv \sum_{k=0}^{\alpha}\sum_{k'=0}^{\alpha} C_k^{\alpha} C_{k'}^{\alpha} A(1,i+k',j+k) \equiv \sum_{k'=0}^{\alpha}\sum_{k=0}^{\alpha} C_{k'}^{\alpha} C_k^{\alpha} A(1,i+k',j+k)
\end{aligned}
$$

成立

由數學歸納法得知， $A(m,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} C_{k'}^{m-1} C_k^{m-1} A(1,i+k',j+k)$ ， $\forall m \in \mathbb{N}$ 。 Q.E.D.

定理 2： $A(m,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{m-n}\sum_{k=0}^{m-n} C_{k'}^{m-n} C_k^{m-n} A(n,i+k',j+k)$ ， $\forall m,n \in \mathbb{N}$ ， $m \ge n$

【證明】

將定理 1 改寫成

$A(1+h,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{h}\sum_{k=0}^{h} C_{k'}^{h} C_k^{h} A(1,i+k',j+k)$ ， $\forall h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (*1)

因為每層往上擺放的規則一樣，所以可以將 (*1) 推廣成

$A(1+h+l,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{h}\sum_{k=0}^{h} C_{k'}^{h} C_k^{h} A(1+l,i+k',j+k)$ ， $\forall h,l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

讓 $l = n-1$ ， $h = m-n$ ，即為定理 2。 Q.E.D.

由定理 2 得知，只要任意兩層間的層數差固定，用下層球號的線性組合表示上層球號的一般式，其相對位置前的係數皆相同。

經觀察發現:四角垛的每顆球以「已知數」的線性組合表達，且其係數為組合數。因為

組合數的同餘性質，如: $C_k^3 \equiv 0 \pmod 3$ ，$k \in \{1,2\}$ ；$C_k^9 \equiv 0 \pmod 3$ ， $k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ，所以我們更進一步去探討特殊層是否只需要由某些「已知數」的線性組合表示即可？證明於定理 3。

定理 3：當 $m = 3^t + 1$時，其中$t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，則

$$A(m,i,j) \equiv A(1,i,j) + A(1,i,j+3^t) + A(1,i+3^t,j) + A(1,i+3^t,j+3^t)$$

即 $A(3^t+1,i,j) \equiv A(1,i,j) + A(1,i,j+3^t) + A(1,i+3^t,j) + A(1,i+3^t,j+3^t)$

【證明】

若$m = 3^t + 1$時， $m-1 = 3^t$ ，則$(m-1)$的三進位表示法為$\left(\underbrace{100...00}_{t+1}\right)_3$

依據盧卡斯定理可知： $C_k^{m-1} \equiv 0 \pmod 3$ ，$1 \le k \le m-2$ ，$\forall k \in \mathbb{N}$

則

$$\begin{aligned}
A(m,i,j) &\equiv \sum_{k'=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} C_{k'}^{m-1} C_k^{m-1} A(1,i+k',j+k) \\
&\equiv \sum_{k'=0}^{m-1} C_{k'}^{m-1}\left[A(1,i+k',j) + A(1,i+k',j+m-1)\right] \\
&\equiv A(1,i,j) + A(1,i,j+m-1) + A(1,i+m-1,j) + A(1,i+m-1,j+m-1) \\
&\equiv A(1,i,j) + A(1,i,j+3^t) + A(1,i+3^t,j) + A(1,i+3^t,j+3^t)
\end{aligned}$$

即 $A(3^t+1,i,j) \equiv A(1,i,j) + A(1,i,j+3^t) + A(1,i+3^t,j) + A(1,i+3^t,j+3^t)$ 。 Q.E.D.

從定理 3 發現，若整個四角垛為(3^t+1)層時，則我們只需要第一層的 4 個已知數，就可以馬上知道「最終解」。例如：整個四角垛為$4 = 3^1 + 1$層時，則 $A(4,1,1) \equiv A(1,1,1) + A(1,1,4) + A(1,4,1) + A(1,4,4)$ ；整個四角垛為$10 = 3^2 + 1$層時，則 $A(10,1,1) \equiv A(1,1,1) + A(1,1,10) + A(1,10,1) + A(1,10,10)$ 。而且此 4 個已知數位於第一層正方形之 4 個角的位置。

另一方面，也可以知道：若我們想知道第(3^t+1)層，第i列，第j行此位置的球號，則只需要知道第一層的 $A(1,i,j)$ 、 $A(1,i,j+3^t)$ 、 $A(1,i+3^t,j)$ 、 $A(1,i+3^t,j+3^t)$ 這 4 顆即可。

同理，我們運用從定理 1 推廣到定理 2 的概念，也可將定理 3 推廣成定理 4。

定理 4：當 $m=3^t+n$ 時，其中 $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ，$n\in\mathbb{N}$ ，則

$$A(m,i,j)\equiv A(n,i,j)+A(n,i,j+3^t)+A(n,i+3^t,j)+A(n,i+3^t,j+3^t)$$

即 $A(3^t+n,i,j)\equiv A(n,i,j)+A(n,i,j+3^t)+A(n,i+3^t,j)+A(n,i+3^t,j+3^t)$

【證明】

直觀地，由定理 2 與定理 3 即可得證。 Q.E.D.

定理 4 說明了只要任意兩個層數差為 3^t 時，則上層的球號只需要知道 4 個下層球號，即「一步」，就可得知。

進一步，本文也對於 $m=s\cdot 3^t+1$ 的形式去探討，討論結果於定理 5。

定理 5：當 $m=s\cdot 3^t+1$ ，時，其中 $s,t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ，則

$$A(m,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{s}\sum_{k=0}^{s}C_{k'}^{s}C_{k}^{s}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)$$

（其證明手法如定理 1，過程詳見附錄(1)。）

同理，我們也將定理 5 推廣成定理 6

定理 6：當 $m=s\cdot 3^t+n$ ，時，其中 $s,t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ，$n\in\mathbb{N}$ ，則

$$A(m,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{s}\sum_{k=0}^{s}C_{k'}^{s}C_{k}^{s}A(n,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)$$

【證明】

直觀地，由定理 2 與定理 5 即可得證。 Q.E.D.

觀察定理 5，

(1) 若 $s=m-1$ ，$t=0$ ，則 $A(m,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}C_{k'}^{m-1}C_{k}^{m-1}A(1,i+k',j+k)$ ，

此為定理 1。

(2) 若 $s=1$， $t\in N\cup\{0\}$，則

$$A(3^t+1,i,j)\equiv A(1,i,j)+A(1,i,j+3^t)+A(1,i+3^t,j)+A(1,i+3^t,j+3^t)$$ ，

此為定理 3。且只需要 4 個「已知數」與「一步」，便可知道 $A(3^t+1,i,j)$

(3) 若 $s=2$ ，$t\in N\cup\{0\}$ ，則

$$\begin{aligned}A(2\cdot 3^t+1,i,j)&\equiv\sum_{k'=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}C_{k'}^2C_k^2A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\\&\equiv C_0^2\left[C_0^2A(1,i,j)+C_1^2A(1,i,j+3^t)+C_0^2A(1,i,j+2\cdot 3^t)\right]\\&+C_1^2\left[C_0^2A(1,i+3^t,j)+C_1^2A(1,i+3^t,j+3^t)+C_0^2A(1,i+3^t,j+2\cdot 3^t)\right]\\&+C_2^2\left[C_0^2A(1,i+2\cdot 3^t,j)+C_1^2A(1,i+2\cdot 3^t,j+3^t)+C_0^2A(1,i+2\cdot 3^t,j+2\cdot 3^t)\right]\end{aligned}$$

且需要 9 個「已知數」，便可知道 $A(2\cdot 3^t+1,i,j)$

(4) 若 $s=3$ ，$t\in N\cup\{0\}$ ，則 $A(3\cdot 3^t+1,i,j)=A(3^{t+1}+1,i,j)$ 此為定理 3。且只需要 4 個「已知數」便可知道 $A(3\cdot 3^t+1,i,j)$

我們以 $m=10$ 為例， $10=9\times 3^0+1=3\times 3^1+1=1\times 3^2+1$

Case1：若 $s=9$ ，$t=0$，每次皆跨 1 層，跨了 9 次，即為定理 1

則 $A(10,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{9}\sum_{k=0}^{9}C_{k'}^9C_k^9A(1,i+k',j+k)$ ，需步數必大於 14 步。

Case2：若 $s=3$ ，$t=1$，每次皆跨 3 層，跨了 3 次，

則 $A(10,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{3}\sum_{k=0}^{3}C_{k'}^3C_k^3A(1,i+3\cdot k',j+3\cdot k)$ ，需步數為 14 步

Case3：若 $s=1$ ，$t=2$，跨 9 層，跨了 1 次，即為定理 3

則 $A(10,i,j)\equiv A(1,i,j)+A(1,i,j+9)+A(1,i+9,j)+A(1,i+9,j+9)$

只需步數為 1 步

無論是 Case1、Case2、Case3，經過化簡後， $A(10,i,j)$ 只需由 $A(1,i,j)$ 、 $A(1,i,j+9)$ 、 $A(1,i+9,j)$ 、 $A(1,i+9,j+9)$ 做線性組合，但所需的步數不同。

本研究繼續探討二個問題：

研究(二)：是否每層球用「已知數」表達其線性組合，表示法唯一，不會受到跨層數順序影響？

研究(三)：是否有最佳策略，找到最少步數，求得最終解？

本文於定理 7 與定理 8 回答了上述兩個研究。

> 定理 7：設第一層擺了 n^2 顆球，若要計算出「最終解」，則需要給定第一層的球數為 $\left(\prod_{i\geq 0}(a_i+1)\right)^2$ 顆球。其中 $(n-1)$ 以三進位表示為 $(a_s a_{s-1}...a_1 a_0)_3$ ，$a_s\in\{1,2\}$ ，$a_i\in\{0,1,2\},\forall 0\leq i\leq s-1, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 。即若要計算出「最終解」，則需要給「已知數」有 $\left(\prod_{i\geq 0}(a_i+1)\right)^2$ 個。

【證明】

考慮最底層第一層為 n^2 顆球，其中 $(n-1)$ 以三進位表示為 $(a_s a_{s-1}...a_1 a_0)_3$ ，$a_s\in\{1,2\}$ ，

$a_i\in\{0,1,2\},\forall 0\leq i\leq s-1, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ，

由定理 1 得知 $A(n,1,1)\equiv\sum_{k'=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_{k'}^{n-1}C_k^{n-1}A(1,1+k',1+k)$

$(n-1)$ 以三進位表示為 $(a_s a_{s-1}...a_1 a_0)_3$ ，$a_s\in\{1,2\}$ ，$a_i\in\{0,1,2\},\forall 0\leq i\leq s-1$

根據盧卡斯定理知 $C_m^{n-1}\equiv\prod_{i\geq 0}C_{b_i}^{a_i}\pmod 3$ ，其中 m 以三進位表示為 $(b_s b_{s-1}...b_1 b_0)_3$ ，

$b_i\in\{0,1,2\},\forall 0\leq i\leq s$

只會有 $C_0^0\equiv 1\pmod 3$ 、$C_0^1\equiv 1\pmod 3$ 、$C_1^1\equiv 1\pmod 3$ 、$C_0^2\equiv 1\pmod 3$ 、$C_1^2\equiv 2\pmod 3$ 、

$C_2^2\equiv 1\pmod 3$

若存在一個 i 使得 $a_i<b_i$ ，則 $C_{b_i}^{a_i}\equiv 0\pmod 3$ ，即 $C_m^{n-1}\equiv\prod_{i\geq 0}C_{b_i}^{a_i}\equiv 0\pmod 3$

最後只會剩下 $C_m^{n-1}\equiv\prod_{i\geq 0}C_{b_i}^{a_i}\pmod 3$ ，其中 $m=(b_s b_{s-1}...b_1 b_0)_3$ ，$n-1=(a_s a_{s-1}...a_1 a_0)_3$ ，而且

$0\leq b_i\leq a_i$ ，$\forall 0\leq i\leq s$ ，

也就是 b_i 有 (a_i+1) 個選擇，$\forall 0\leq i\leq s$ ，

因此，若要計算出「最終解」，則需要第一層的球數為$\left(\prod_{i\ge 0}(a_i+1)\right)^2$顆球。即已知數為

$\left(\prod_{i\ge 0}(a_i+1)\right)^2$個。 Q.E.D.

從證明過程中，也可得知「最終解」的一般式是由哪些「已知數」做線性組合表示。

舉例來說，第一層擺了8^2顆球，其中$(8-1)$以三進位表示為$(21)_3$，

最後會剩下$C_7^7\equiv 1(\bmod 3)$、$C_6^7\equiv 1(\bmod 3)$、$C_4^7\equiv 2(\bmod 3)$、$C_3^7\equiv 2(\bmod 3)$、

$C_1^7\equiv 1(\bmod 3)$、$C_0^7\equiv 1(\bmod 3)$，而其餘$C_2^7\equiv C_5^7\equiv 0(\bmod 3)$，需要第一層的球數為 36 顆球。

且此 36 顆球為$A(1,1+k',1+k)$，$k',k\in\{0,1,3,4,6,7\}$。

綜合定理 5 與定理 6，當$m=s\cdot 3^t+n$時，若想要「步數」達到最少，則先選擇t越大越好，且若$s=1$，則只需要「一步」就可從第n層得到第m層。再考慮$n=s_1\cdot 3^{t_1}+n_1$，重複相同的步驟。所以，若想要「步數」達到最少，只會考慮$s=1$與$s=2$。

舉例來說： $8=2\cdot 3^1+2=2\cdot 3^1+1+1$

觀察如下：

Case1:選擇走法為第 1 層到第 4 層，第 4 層到第 7 層，最後從第 7 層到第 8 層：

$A(8,1,1)\equiv A(7,1,1)+A(7,2,1)+A(7,1,2)+A(7,2,2)$

若知道$A(7,1,1)$、$A(7,2,1)$、$A(7,1,2)$、$A(7,2,2)$，只需要 1 步，即可求得$A(8,1,1)$。

$A(7,1,1)\equiv A(4,1,1)+A(4,4,1)+A(4,1,4)+A(4,4,4)$

$A(7,2,1)\equiv A(4,2,1)+A(4,5,1)+A(4,2,4)+A(4,5,4)$

$A(7,1,2)\equiv A(4,1,2)+A(4,4,2)+A(4,1,5)+A(4,4,5)$

$A(7,2,2)\equiv A(4,2,2)+A(4,5,2)+A(4,2,5)+A(4,5,5)$

若知道第 4 層的 16 顆球的顏色，步數需要 4 步，即可求得$A(7,1,1)$、$A(7,2,1)$、$A(7,1,2)$、$A(7,2,2)$。從第 1 層到第 4 層，要知道第 4 層的 16 顆球的顏色，所需步數為16步。則總共

需要$1^2+2^2+4^2=21$步。

Case2: 選擇走法為第 1 層到第 4 層，第 4 層到第 5 層，最後從第 5 層到第 8 層：

$A(8,1,1)\equiv A(5,1,1)+A(5,4,1)+A(5,1,4)+A(5,4,4)$

若知道 $A(5,1,1)$ 、 $A(5,4,1)$ 、 $A(5,1,4)$ 、 $A(5,4,4)$ ，步數只需要 1 步，即可求得 $A(8,1,1)$ 。

$A(5,1,1)\equiv A(4,1,1)+A(4,2,1)+A(4,1,2)+A(4,2,2)$

$A(5,4,1)\equiv A(4,4,1)+A(4,5,1)+A(4,4,2)+A(4,5,2)$

$A(5,1,4)\equiv A(4,1,4)+A(4,2,4)+A(4,1,5)+A(4,2,5)$

$A(5,4,4)\equiv A(4,4,4)+A(4,5,4)+A(4,4,5)+A(4,5,5)$

若知道第 4 層的 16 顆球的顏色，步數需要 4 步，即可求得 $A(5,1,1)$ 、 $A(5,4,1)$ 、 $A(5,1,4)$ 、 $A(5,4,4)$ 。從第 1 層到第 4 層，要知道第 4 層的 16 顆球的顏色，所需步數為 16 步。則總共需要$1^2+2^2+4^2=21$步。

Case3: 選擇走法為第 1 層到第 2 層，第 2 層到第 5 層，最後從第 5 層到第 8 層：

$A(8,1,1)\equiv A(5,1,1)+A(5,4,1)+A(5,1,4)+A(5,4,4)$

若知道 $A(5,1,1)$ 、 $A(5,4,1)$ 、 $A(5,1,4)$ 、 $A(5,4,4)$ ，步數只需要 1 步，即可求得 $A(8,1,1)$ 。

$A(5,1,1)\equiv A(2,1,1)+A(2,4,1)+A(2,1,4)+A(2,4,4)$

$A(5,4,1)\equiv A(2,4,1)+A(2,7,1)+A(2,4,4)+A(2,7,4)$

$A(5,1,4)\equiv A(2,1,4)+A(2,4,4)+A(2,1,7)+A(2,4,7)$

$A(5,4,4)\equiv A(2,4,4)+A(2,7,4)+A(2,4,7)+A(2,7,7)$

若知道第 2 層的 9 顆球的顏色，步數需要 4 步，即可求得 $A(5,1,1)$ 、 $A(5,4,1)$ 、 $A(5,1,4)$ 、 $A(5,4,4)$ 。從第 1 層到第 2 層，只需要知道第 2 層的 9 顆球的顏色，所需步數為 9 步。則總共需要$1^2+2^2+3^2=14$步。

雖然由定理 5 與定理 6 知道每次可以跨最大3^t層為原則，可以透過最少步數而得到「最終解」

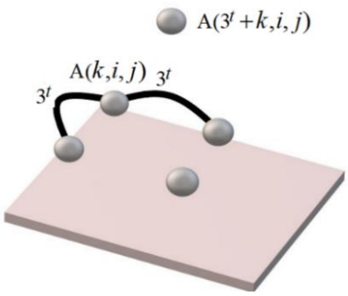
但從上述例子中發現：會因為所跨的層數順序不同，所以得到「最終解」所需要的步數也不同。

於定理 8 的證明過程中，我們去探討如何決定所跨層數的順序，而得出「最終解」所需要的步數最少，並於定理 8 的內容中給了得到「最終解」所需最少步數的公式。

定理 8：四角垛共 n 層，需要跨 $(n-1)$ 層，將 $(n-1)$ 以三進位表示為 $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_3$ ，其中 $a_k \in \{1,2\}$ ， $a_i \in \{0,1,2\}, \forall 0 \le i \le k-1, i \in N \cup \{0\}$ 。若其中有 x 個 2， y 個 1，則得出「最終解」所需最少步數為 $\dfrac{8 \times 9^x \times 4^y + 7 \times 9^x - 15}{24}$ 。

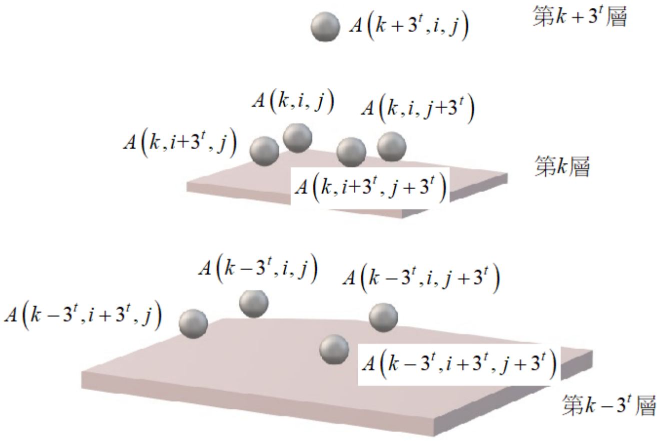
【證明】

(1) 從定理 4 可知，若想知道每層中任一顆球的顏色，可從距該層 3^t 層中 4 顆特定球推得，此四球中有一球的列座標與行座標與上層該球相同，其餘三顆球與此球形成邊長為 3^t 的正方形，如圖(十五)。



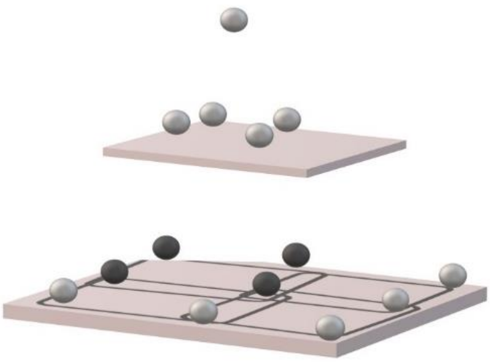
圖(十五)

若相同層數 3^t 再跨一次， k 層每球均需 $(k-3^t)$ 層中四球決定顏色，其中有一球 $A(k-3^t,i,j)$ 的列座標與行座標 $A(k,i,j)$ 相同，其餘三顆球 $A(k-3^t,i,j+3^t)$ 、 $A(k-3^t,i+3^t,j)$ 、 $A(k-3^t,i+3^t,j+3^t)$ 與 $A(k-3^t,i,j)$ 形成邊長為 3^t 的正方形，如圖(十六)。



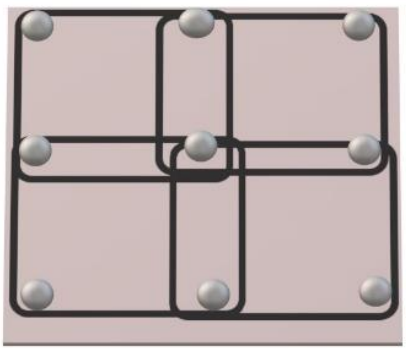
圖(十六)

在第k層中的其他三顆$A(k,i,j+3^t)$、$A(k,i+3^t,j)$、$A(k,i+3^t,j+3^t)$，其所需要第$k-3^t$層中的四球也分別形成邊長為3^t的正方形，如圖(十七)。



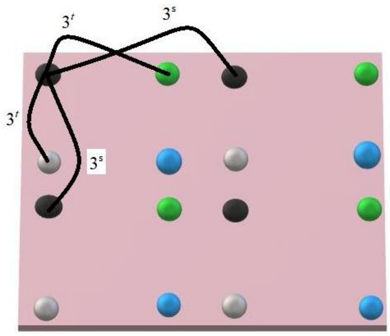
圖(十七)

觀察圖(十八)，此時有 4 個位置的球$A(k-3^t,i,j+3^t)$、$A(k-3^t,i+3^t,j)$、$A(k-3^t,i+3^t,j+2\cdot 3^t)$、$A(k-3^t,i+2\cdot 3^t,j+3^t)$重複一次，而$A(k-3^t,i+3^t,j+3^t)$重複三次，所以$\left(k-3^t\right)$層所需球數為$16-4-3=9$顆。

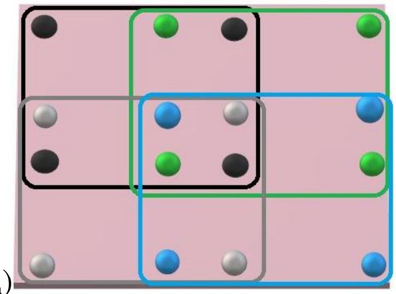


圖(十八)

若跨一次3^t後緊接著跨一不同的層數3^s，因為$s \neq t$且$s > t$，k層中的 4 球分別在$k-3^s$層中所需之四球形成邊長為3^s的正方形，則不會有任意一球重疊到，如圖(十九)、(二十)。所以所需球數為$4 \times 4 = 16$球。



圖(十九)


圖(二十)

由上述討論可知：所跨層數的步驟分成二類，由上層往下層順序為

$\left(k+3^t\right) \to k \to \left(k-3^t\right)$或$\left(k+3^t\right) \to k \to \left(k-3^s\right)$，其中$k \in \mathbb{N}$，$s,t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, s \neq t$。

第k層所需球數為（第$\left(k+3^t\right)$層所需球數$\times 4$），接著第$\left(k-3^t\right)$層所需球數為（第k層所需球數$\times \dfrac{9}{4}$）或者第$\left(k-3^s\right)$層所需球數為（第k層所需球數$\times 4$）。

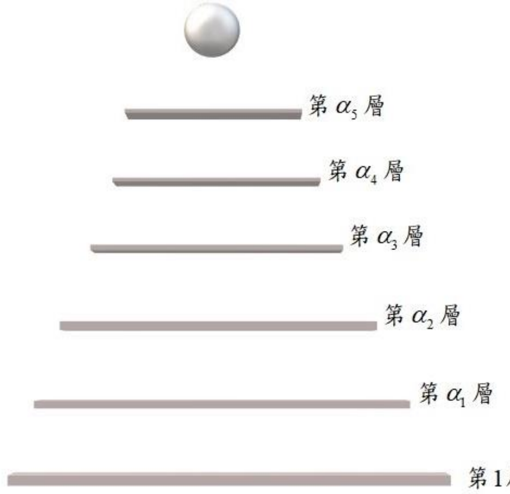
結論：每層所需球數跟上層所需球數關係為（上層所需球數$\times 4$）或（上層所需球數$\times \dfrac{9}{4}$）。

(2) 因為最終解所需步數＝其他層所需之球數和(除了第一層外)+1，但所需要的球數和會因為所跨的層數順序不同而有所不同。所以，在接下來的主要目標是：如何決定跨層數的順序，使得其他層所需之球數和(除了第一層外)達到最小，也就是得出「最終解」所需步數達到最少。

(3) 若想求得k層任一球號，到k層需跨$(k-1)$層，將$(k-1)$三進位表示後會有m個 2，n個 1，表示有m種不同的層數為3^t需跨兩次，n種不同的層數為3^s只需跨一次。

在此，我們先討論$m=2$，$n=2$的狀況。到第k層中間會經過 5 層(不含第k層與最底層)共跨六次，跨層數有3^t、3^t、3^s、3^s、3^m、3^n，其中t、s、m、n任意兩個皆不相

同。從第k層到第1層總共需要$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$(\times 4)$，如圖(二十一)。



圖(二十一)

第k層到第1層一定會有$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$(\times 4)$這些步驟，我們要去思考如何擺放$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$(\times 4)$這些步驟的順序，才能使得所需要的球數和最少。

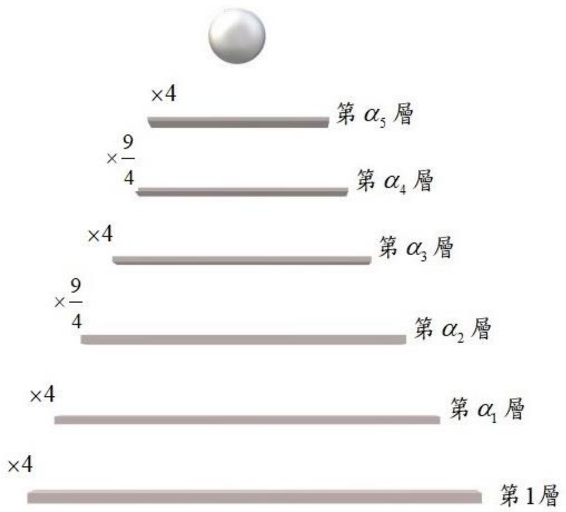
因為$\left(\times\frac{9}{4}\right)$表示跨相同層數有二遍，所以$\left(\times\frac{9}{4}\right)$前面會放一個$(\times 4)$，但不一定需要相鄰。

另一方面，從定理 7 可知，第一層所需的球數為$\left(\prod_{i\geq 0}(a_i+1)\right)^2=36^2$顆。前面順序不會影響第一層所需球數。

若$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$所需球數一樣的話，會選擇放$(\times 4)$，使得第$\alpha_1$層所需較少的球數為$(9\times 36)$顆。同理，到第$\alpha_1$層也一定會有$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$這些步驟，所以從第$\alpha_2$層到第$\alpha_1$層會選擇放$(\times 4)$，使得第$\alpha_3$層所需較少的球數為$(9\times 9)$顆。到第$\alpha_2$層有$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$、$(\times 4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$這些步驟，但因為$\left(\times\frac{9}{4}\right)$前會放一個$(\times 4)$，剩下的兩個$(\times 4)$要分別放在$\left(\times\frac{9}{4}\right)$前，所以從第$\alpha_3$層到第$\alpha_2$層會選擇放$\left(\times\frac{9}{4}\right)$，使得第$\alpha_3$層所需較少的球數為$(9\times 4)$顆。同理，從第$\alpha_4$層到第$\alpha_3$層會選擇放$(\times 4)$，使得第$\alpha_4$層所需較

少的球數為 9 顆。從第α_5層到第α_4層會選擇放$\left(\times\frac{9}{4}\right)$，使得第$\alpha_5$層所需較少的球數為 4 顆。

得出「最終解」所需最少步數為$4+9+(9\times4)+(9\times9)+(9\times36)+1$，如圖(二十二)。



圖(二十二)

排法為由上往下$(\times4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$相間排，排完$\left(\times\frac{9}{4}\right)$再排$(\times4)$對應到跨層數排法，$(\times4)$、$\left(\times\frac{9}{4}\right)$為連跨兩次相同層數，$(\times4)$為只跨一次。

(4) 從以上的討論過程中，我們有以下最佳策略的走法，可以透過最少步數而得到「最終解」：

策略一：若不同的步數3^t、3^s連續各走 1 次，則順序不會影響；即$3^t\to3^s$或$3^s\to3^t$一樣。

策略二：若不同的步數3^t、3^s連續各走 2 次，則順序不會影響；即$3^t\to3^t\to3^s\to3^s$或$3^s\to3^s\to3^t\to3^t$一樣。

策略三：若相同的步數3^t需要走 2 次，則必須連續走完。

策略四：必須先走需要走 1 次的步數，再走需要走 2 次步數

策略五：在最佳策略的走法下，所需要的最少步數只跟幾個3^t、3^s有關。

因此，若四角垛共有n層，需要跨$(n-1)$層，先將$(n-1)$以三進位表示為$(a_k a_{k-1}\ldots a_1 a_0)_3$，其中$a_k\in\{1,2\}$，$a_i\in\{0,1,2\},\forall 0\le i\le k-1, i\in N\cup\{0\}$。

若$\left(n-1\right)$的三進位表示法中有 x 個 2， y 個 1，則最佳策略的走法下，得出「最終解」所需最少步數為

$$1^2+\sum_{r=0}^{x-1}(2^2+3^2)9^r+\sum_{s=0}^{y-2}(9^x\times 4)4^s=1+\frac{13\left(9^x-1\right)}{9-1}+\frac{(9^x\times 4)\left(4^{y-1}-1\right)}{4-1}=\frac{8\times 9^x\times 4^y+7\times 9^x-15}{24}$$

Q.E.D.

研究(四)：原先遊戲的目的是：若給第一層的所有球色（已知數），則如何求出最頂層的球色(最終解)？現在我們改變遊戲目的：能否選出若干顆球，這些球的顏色任給，不違背遊戲規則下，是否可以確定四角垛中所有球的顏色？

以下是本文對於最少顆球決定四角垛中所有球之球色問題探討的過程：

(1) 若 $n=2$ ，方程式為 $A(2,1,1)\equiv A(1,1,1)+A(1,1,2)+A(1,2,1)+A(1,2,2)$ ，

只要任意給 4 顆球色，可以將四角垛中所有球的顏色確定。

(2) 若 $n=3$ ，方程式為$\begin{cases} A(1,1,1)+A(1,1,2)+A(1,2,1)+A(1,2,2)-A(2,1,1)\equiv 0 \\ A(1,1,2)+A(1,1,3)+A(1,2,2)+A(1,2,3)-A(2,1,2)\equiv 0 \\ A(1,2,1)+A(1,2,2)+A(1,3,1)+A(1,3,2)-A(2,2,1)\equiv 0 \\ A(1,2,2)+A(1,2,3)+A(1,3,2)+A(1,3,3)-A(2,2,2)\equiv 0 \\ A(2,1,1)+A(2,1,2)+A(2,2,1)+A(2,2,2)-A(3,1,1)\equiv 0 \end{cases}$

共有 14 顆，直觀的看法：必須至少給 9 顆。

定理 9：若全部有 n 層且第一層為 n^2 顆球的四角垛，則至少須給 n^2 顆球的顏色方可確定四角垛中所有球的顏色。

【證明】

若有 n 層的四角垛，則有$1^2+2^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 顆球，

有$1^2+2^2+...+(n-1)^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ 個聯立方程組。

將 $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ 個聯立方程組寫成矩陣 M 形式，矩陣 M 為

$\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)\times\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$階矩陣，且 $rank\left(M\right)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ ，

由矩陣的維度定理，$rank\left(M\right)+nullity\left(M\right)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，

則解空間的維度為 n^2 ，且解空間是由 n^2 個線性獨立的向量所組成。

因此，選擇適當的 n^2 顆球的顏色，就可以確定四角垛中所有球的顏色。 Q.E.D.

研究(五)：在四角垛中任給某些球的顏色，如何判斷可由這些球色得知所有球的顏色？

本文將以 3 層的四角垛的所有狀況進行觀察與討論：

四角垛只有 3 層，共有 14 顆球，其關係為

$$\begin{cases} A(1,1,1)+A(1,1,2)+A(1,2,1)+A(1,2,2)-A(2,1,1)\equiv 0 \\ A(1,1,2)+A(1,1,3)+A(1,2,2)+A(1,2,3)-A(2,1,2)\equiv 0 \\ A(1,2,1)+A(1,2,2)+A(1,3,1)+A(1,3,2)-A(2,2,1)\equiv 0 \\ A(1,2,2)+A(1,2,3)+A(1,3,2)+A(1,3,3)-A(2,2,2)\equiv 0 \\ A(2,1,1)+A(2,1,2)+A(2,2,1)+A(2,2,2)-A(3,1,1)\equiv 0 \end{cases}$$

寫成矩陣形式，如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(1,1,1) \\ A(1,1,2) \\ A(1,1,3) \\ A(1,2,1) \\ A(1,2,2) \\ A(1,2,3) \\ A(1,3,1) \\ A(1,3,2) \\ A(1,3,3) \\ A(2,1,1) \\ A(2,1,2) \\ A(2,2,1) \\ A(2,2,2) \\ A(3,1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (*2)$$

讓 $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

因為矩陣 M 為 5×14 階矩陣，且 $rank\left(M\right)=5$ ，依據矩陣的維度定理，

$rank(M)+nullity(M)=14$，則解空間的維度為 9，且解空間是由 9 個線性獨立的向量所組成。

因此，我們選擇適當的 9 顆球的顏色可以將四角垛中所有球的顏色確定。

(1) 若最底層的 9 顆球給定，即 $A(1,1,1)$，$A(1,1,2)$，$A(1,1,3)$，$A(1,2,1)$，$A(1,2,2)$，$A(1,2,3)$，$A(1,3,1)$，$A(1,3,2)$，$A(1,3,3)$ 變成常數，就可以把 $(*2)$ 移到等號右邊，變成：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(2,1,1) \\ A(2,1,2) \\ A(2,2,1) \\ A(2,2,2) \\ A(3,1,1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -A(1,1,1)-A(1,1,2)-A(1,2,1)-A(1,2,2) \\ -A(1,1,2)-A(1,1,3)-A(1,2,2)-A(1,2,3) \\ -A(1,2,1)-A(1,2,2)-A(1,3,1)-A(1,3,2) \\ -A(1,2,2)-A(1,2,3)-A(1,3,2)-A(1,3,3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*3)$$

此時左邊的係數矩陣，即為矩陣 M 只留下未給定 $A(2,1,1)$，$A(2,1,2)$，$A(2,2,1)$，$A(2,2,2)$，$A(3,1,1)$ 對應的 5 行

因為 $\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)=-1$，

所以方程式 $(*3)$ 有唯一解，可得整個四角垛中所有球的球色。

(2) 若最底層只給定 8 個，其中 $A(1,1,1)$ 未給，另外給 $A(2,1,2)$，則此時左邊的係數矩陣，即為矩陣 M 只留下未給定 $A(1,1,1)$，$A(2,1,1)$，$A(2,2,1)$，$A(2,2,2)$，$A(3,1,1)$ 對應的 5 行

因為 $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)=0$，所以無法唯一決定四角垛中所有球的球色。

從上述的分析中，有了以下判斷的方法，

判斷原則

在四角垛中任給某些球的顏色，判斷可由這些球色得知所有球之顏色的方法為：

Step1:先找出四角垛所對應的矩陣 M

Step2:再找出未給球號所對應的矩陣 T

Step3:計算 $\det(T)$ 的值

若 $\det(T)\neq 0$，則方程式有唯一解 $\Rightarrow$ 可推出四角垛中所有球的球色

若 $\det(T)=0$，則方程式沒有唯一解 $\Rightarrow$ 不可推出四角垛中所有球的球色

以下是我們經由 $\det(T)$ 的值，對所有 3 層的四角垛之狀況做分類與討論。

(1) 第一層給定球數 9 個：

因為第一層給 9 個，則未給球號所對應的 5 行而形成的矩陣 T 必為

$$T=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$，則 $\det(T)=-1$，所以皆可推出四角垛中所有球的顏色。

(2) 第一層給定球數 8 個：

Case1：若未給 $A(3,1,1)$，則未給球號所對應的 5 行而形成的矩陣 T 中必有一行為 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，可以

根據此行做降階計算 $\det(T)$

(i)若給 $A(2,1,1)$，且假設第一層未給的球號所對應的行為 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$，

則矩陣$T_1=\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，則$\det(T_1)=x_1$，也就是若第一層未給的球號為

$A(1,1,1)$、$A(1,1,2)$、$A(1,2,1)$、$A(1,2,2)$其中之一，則可推出四角垛中所有球的球色。反之，無法唯一決定四角垛中所有球的球色。

(ii)若給$A(2,1,2)$，且假設第一層未給的球號所對應的行為$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$，

則矩陣$T_2=\begin{bmatrix} x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，因為行列式的運算性質中，任二列（行）對調，其值變號。

所以由$\det(T_1)=x_1$，而得$\det(T_2)=-x_2$，即若第一層未給的球號為$A(1,1,2)$、$A(1,1,3)$、$A(1,2,2)$、$A(1,2,3)$其中之一， 則可推出四角垛中所有球的球色。反之，無法決定。同理，我們可以做其他狀況的討論，而得到相同的結論。若第一層給定 8 個，第二層要給 1 個時，此球必須與第一層未給球號的球有所接觸，才能推出四角垛中所有球的球色。

Case2：若給$A(3,1,1)$，且假設第一層未給球號所對應的行為$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$，

則矩陣$T=\begin{bmatrix} x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，則$\det(T)=x_1+x_2+x_3+x_4$，即無論第一層未給的球號為哪顆，皆可推出四角垛中所有球的球色。

綜合 Case1 與 Case2，第一層給定 8 個時，若給定與第一層未給球號有碰觸的球或 $A(3,1,1)$ ，則可推出四角垛中所有球的球色。

(3)第一層給定球數 7 個：

Case1：若未給 $A(3,1,1)$ ，

因為行列式的運算性質中，任二列（行）對調，其值變號。所以，我們先討論未給 $A(2,1,1)$ 與 $A(2,1,2)$ 的狀況，其餘的狀況可以類推。

矩陣 $T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & -1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，則 $\det(T)=-\det\left(\begin{bmatrix} t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix}\right)=-t_{31}t_{42}+t_{32}t_{41}$

我們觀察 $\begin{bmatrix} t_{31} \\ t_{41} \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} t_{32} \\ t_{42} \end{bmatrix}$ 有可能的情況有 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，經各種組合搭配，有以下結論：在未給定 $A(3,1,1)$ 的情況下，若給定第二層的兩顆球，且此兩球所接觸到第一層的球中，分別取一顆球未給其球號，其行列式值必不為 0，即可得知四角垛中所有球的球色。

Case2：若給 $A(3,1,1)$ ，

因為行列式的運算性質中，任二列（行）對調，其值變號。所以，我們先討論未給 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 與 $A(2,2,1)$ 的狀況，其餘的狀況可以類推。

矩陣 $T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & -1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 & -1 \\ t_{41} & t_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，則

$$\det(T)=-\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & -1 \\ t_{41} & t_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)+\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & -1 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 \\ t_{41} & t_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)-\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & 0 \end{bmatrix}\right)-\det\left(\begin{bmatrix} t_{21} & t_{22} & -1 \\ t_{31} & t_{32} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix} t_{11}+t_{21}+t_{31} & t_{12}+t_{22}+t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix}\right)=(t_{11}+t_{21}+t_{31})t_{42}-(t_{21}+t_{22}+t_{32})t_{41}\text{，}$$

$\det(T)=\det\left(\begin{bmatrix} t_{11}+t_{21}+t_{31} & t_{12}+t_{22}+t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix}\right)$，我們觀察$\begin{bmatrix} t_{11}+t_{21}+t_{31} \\ t_{41} \end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix} t_{12}+t_{22}+t_{32} \\ t_{42} \end{bmatrix}$有可能

的情況有$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，經各種組合，計算其行列式的值，

有以下結論：在給定 $A(3,1,1)$ 的狀況下，若給定第二層的一顆球，且此球所接觸到第一層的球至少一顆未給其球號，則其行列式值必不為 0，即可得出四角垛中所有球的球色。

綜合 Case1 與 Case2，第一層給定 7 個時，若第二層所給球號皆至少會分別與第一層一個未給球號之球接觸，則可推出四角垛中所有球的球色。

(4)第一層給定球數 6 個：

Case1：若未給 $A(3,1,1)$ ，

因為行列式的運算性質中，任二列（行）對調，其值變號。所以，我們先討論也未給 $A(2,1,1)$ 的狀況，其餘的狀況可以類推。

矩陣$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & -1 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，則$\det(T)=-\det\left(\begin{bmatrix} t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \end{bmatrix}\right)$，

將第一層未給球號的位置分為以下三種：

(i)與 $A(2,1,1)$ 接觸的給 2 個。

(ii)與 $A(2,1,1)$ 接觸的給 1 個。

(iii)與 $A(2,1,1)$ 接觸的給 0 個。

因上列三種情況多且複雜，本文於附錄(2)將有解情況一一列出。

Case2：若給 $A(3,1,1)$ ，因第二層兩個未給球號的位置是否相鄰會有不同的結果，故將兩者分

開討論，

(i)若第二層兩個未給球號之位置相鄰，不失一般性，假設未給 $A(2,1,1)$ 與 $A(2,1,2)$ 的狀況，其餘的狀況可以類推。

矩陣 $T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & -1 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 & -1 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，則

$$\det(T)=\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & -1 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)+\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & -1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix} t_{11}+t_{21} & t_{12}+t_{22} & t_{13}+t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \end{bmatrix}\right)$$

將第一層未給球號之位置分為以下三種：

(a)皆不與 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 接觸的給 2 個。

(b)皆不與 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 接觸的給 1 個。

(c)皆不與 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 接觸的給 0 個。

(ii)若第二層兩個未給球號之位置不相鄰，不失一般性，假設未給 $A(2,1,2)$ 與 $A(2,2,1)$ 的狀況，其餘的狀況可以類推。

矩陣 $T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & -1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 & -1 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，則 $\det(T)=\det\left(\begin{bmatrix} t_{21}+t_{31} & t_{22}+t_{32} & t_{23}+t_{33} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \end{bmatrix}\right)$，

將第一層未給球號之位置分為以下三種：

(a)皆不與 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,2,2)$ 接觸的給 2 個。

(b)皆不與 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,2,2)$ 接觸的給 1 個。

(c)皆不與 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,2,2)$ 接觸的給 0 個。

因上列三種情況多且複雜，本文於附錄(3)將有解情況一一列出。

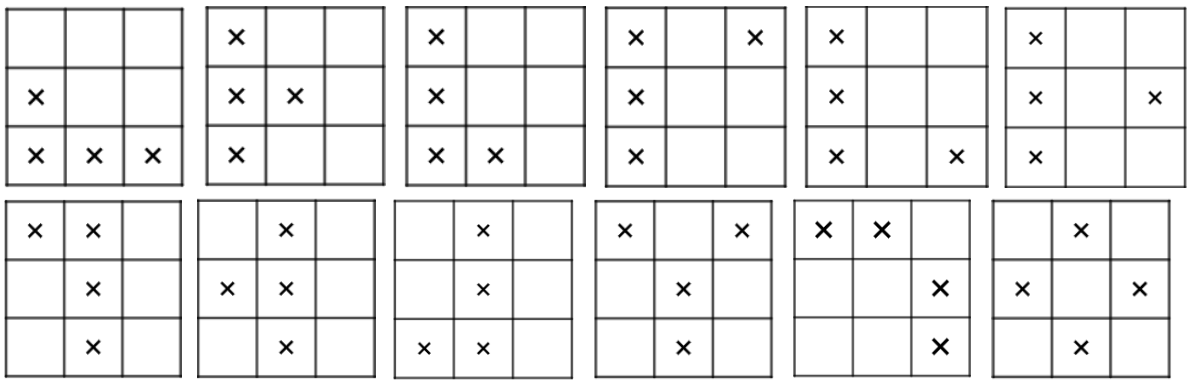
(5)第一層給定球數 5 個：

因為第一層給 5 個，則未給球號所對應的 5 行而形成的矩陣 T 必為

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{或} T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(T)=\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}\right) \text{或} \det(T)=-\det\left(\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}\right)$$

結論：決定是否可以確定整個四角垛中所有球之球色的關鍵只看第一層給定球號 5 個位置而定，與是否給 $A(3,1,1)$ 無關。經行列式計算，可得出第一層除下列 12 種及其經旋轉後的情況外，其餘皆可以確定四角垛中所有球之球色。



(6)第一層給定球數 4 個：

因為第一層給定球數 4 個，則未給球號所對應的 5 行而形成的矩陣 T 中必

有一列為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，可以根據此列做降階計算 $\det T=0$，則無法唯一決定四角垛中所有球之球色。

本文在定理 9 中說明了若全部有 n 層且第一層為 n^2 顆球的四角垛，則至少須給 n^2 顆球的顏色方可確定四角垛中所有球的顏色。由於上述的討論，我們想繼續研究以下問題。

研究(六)：第一層需要至少給幾顆，皆可有適當的選法搭配其他層的球，可以確定四角垛中所有球的顏色？證明於定理 10。

定理 10：當四角垛有 n 層時，第一層給 k 顆，其中 $2n-1 \le k \le n^2$ ，皆有選法可以使得對應矩陣的行列式不為 0，可以確定四角垛的所有球的顏色。

當 $k < 2n-1$ 顆時，任意選法皆會使得對應矩陣的行列式為 0，無法唯一確定四角垛的所有球的顏色。

【證明】

(1) 當四角垛有 n 層時，所對應到的矩陣的規則皆與 $n=4$ 對應到的矩陣規則相同。所以，以下我們證明 $n=4$ 的狀況，其他四角垛的狀況證明手法如同，也可推得定理 10 的結論。

(2) $n=4$ 時，14 個聯立方程組寫成矩陣形式為 $MX = O_{14\times 1}$ ，其中 $M = [M_1\ M_2]_{14\times 30}$ ，

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{30\times 1} ,\quad M_1 = \begin{bmatrix}
1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}_{14\times 16}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{14\times 14}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} A(1,1,1) \\ A(1,1,2) \\ A(1,1,3) \\ A(1,1,4) \\ A(1,2,1) \\ A(1,2,2) \\ A(1,2,3) \\ A(1,2,4) \\ A(1,3,1) \\ A(1,3,2) \\ A(1,3,3) \\ A(1,3,4) \\ A(1,4,1) \\ A(1,4,2) \\ A(1,4,3) \\ A(1,4,4) \end{bmatrix}_{16\times 1}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} A(2,1,1) \\ A(2,1,2) \\ A(2,1,3) \\ A(2,2,1) \\ A(2,2,2) \\ A(2,2,3) \\ A(2,3,1) \\ A(2,3,2) \\ A(2,3,3) \\ A(3,1,1) \\ A(3,1,2) \\ A(3,2,1) \\ A(3,2,2) \\ A(4,1,1) \end{bmatrix}_{14\times 1}$$

我們去探討矩陣 M 中，若只留下未給球號所對應的 14 行而形成的矩陣 T ，經由計算 $\det(T)$ 的值，判斷方程式是否有唯一解，就可以確定四角垛中所有球的顏色。

(3) 以下是經由 $\det(T)$ 的值去討論。

Case1:若第一層給 16 顆，則 $T = M_2$ ， $\det(T) = 1$ ，就可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case2：若第一層給 15 顆，不給 $A(1,1,1)$，給 $A(2,1,1)$，則 $T_1=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$，其中

$A_1=[1]$，$B_1=O_{1\times 13}$，$C_1=O_{13\times 1}$

$$D_1=\begin{bmatrix}
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&-1
\end{bmatrix}_{13\times 13},$$

矩陣 D_1 為矩陣 M_2 拿掉第一列與第一行所形成的新矩陣

因為 $B_1=O_{1\times 13}$，$C_1=O_{13\times 1}$，所以 $\det(T_1)=\det(A_1)\times\det(D_1)=-1$，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case3：若第一層給 14 顆，不給 $A(1,1,1)$、$A(1,1,2)$，給 $A(2,1,1)$、$A(2,1,2)$，則

$T_2=\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$，其中 $A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B_2=O_{2\times 12}$，$C_2=O_{12\times 2}$

矩陣 D_2 為矩陣 M_2 拿掉第 i 列、第 j 行所形成的新矩陣，其中 $i,j\in\{1,2\}$

因為 $B_2=O_{2\times 12}$，$C_2=O_{12\times 2}$，所以 $\det(T_2)=\det(A_2)\times\det(D_2)=1$，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case4：若第一層給 13 顆，不給 $A(1,1,1)$、$A(1,1,2)$、$A(1,1,3)$，給 $A(2,1,1)$、$A(2,1,2)$、

$A(2,1,3)$，則$T_3=\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix}$，其中$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B_3=O_{3\times 11}$，　$C_3=O_{11\times 3}$

矩陣D_3為矩陣M_2拿掉第i列、第j行所形成的新矩陣，其中$i,j\in\{1,2,3\}$

因為$B_3=O_{3\times 11}$，$C_3=O_{11\times 3}$，所以$\det(T_3)=\det(A_3)\times\det(D_3)=-1$，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case5：若第一層給 12 顆，不給$A(1,1,1)$、$A(1,1,2)$、$A(1,1,3)$、$A(1,2,1)$，給$A(2,1,1)$、$A(2,1,2)$、$A(2,1,3)$、$A(2,2,1)$，則$T_4=\begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix}$，其中

$A_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B_4=O_{4\times 10}$，　$C_4=O_{10\times 4}$

矩陣D_4為矩陣M_2拿掉第i列、第j行所形成的新矩陣，其中$i,j\in\{1,2,3,4\}$

因為$B_4=O_{4\times 10}$，$C_4=O_{10\times 4}$，所以$\det(T_4)=\det(A_4)\times\det(D_4)=1$，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case6：若第一層給 11 顆，不給$A(1,1,1)$、$A(1,1,2)$、$A(1,1,3)$、$A(1,2,1)$、$A(1,2,2)$，給$A(2,1,1)$、$A(2,1,2)$、$A(2,1,3)$、$A(2,2,1)$、$A(2,2,2)$，則$T_5=\begin{bmatrix} A_5 & B_5 \\ C_5 & D_5 \end{bmatrix}$，其中

$A_5=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B_5=O_{5\times 9}$，　$C_5=O_{9\times 5}$

矩陣D_5為矩陣M_2拿掉第i列、第j行所形成的新矩陣，其中$i,j\in\{1,2,3,4,5\}$

因為$B_5=O_{5\times 9}$，$C_5=O_{9\times 5}$，所以$\det(T_5)=\det(A_5)\times\det(D_5)=-1$，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case7：若第一層給 10 顆，不給 $A(1,1,1)$ 、 $A(1,1,2)$ 、 $A(1,1,3)$ 、 $A(1,2,1)$ 、 $A(1,2,2)$ 、 $A(1,2,3)$ ，給 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,1,3)$ 、 $A(2,2,1)$ 、 $A(2,2,2)$ 、 $A(2,2,3)$ ，則

$T_6=\begin{bmatrix} A_6 & B_6 \\ C_6 & D_6 \end{bmatrix}$ ，其中

$$A_6=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，B_6=O_{6\times 8}， \quad C_6=O_{8\times 6}$$

矩陣 D_6 為矩陣 M_2 拿掉第 i 列、第 j 行所形成的新矩陣，其中 $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$

因為 $B_6=O_{6\times 8}$ ， $C_6=O_{8\times 6}$ ，所以 $\det(T_6)=\det(A_6)\times\det(D_6)=1$ ，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case8：若第一層給 9 顆，不給 $A(1,1,1)$ 、 $A(1,1,2)$ 、 $A(1,1,3)$ 、 $A(1,2,1)$ 、 $A(1,2,2)$ 、 $A(1,2,3)$ 、 $A(1,3,1)$ ，給 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,1,3)$ 、 $A(2,2,1)$ 、 $A(2,2,2)$ 、 $A(2,2,3)$ 、 $A(2,3,1)$ ，則 $T_7=\begin{bmatrix} A_7 & B_7 \\ C_7 & D_7 \end{bmatrix}$ ，其中

$$A_7=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，B_7=O_{7\times 7}， \quad C_7=O_{7\times 7}$$

矩陣 D_7 為矩陣 M_2 拿掉第 i 列、第 j 行所形成的新矩陣，其中 $i,j\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$

因為 $B_7=O_{7\times 7}$ ， $C_7=O_{7\times 7}$ ，所以 $\det(T_7)=\det(A_7)\times\det(D_7)=-1$ ，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case9：若第一層給 8 顆，不給 $A(1,1,1)$ 、 $A(1,1,2)$ 、 $A(1,1,3)$ 、 $A(1,2,1)$ 、 $A(1,2,2)$ 、

$A(1,2,3)$ 、 $A(1,3,1)$ 、 $A(1,3,2)$ ，給 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,1,3)$ 、 $A(2,2,1)$ 、 $A(2,2,2)$ 、

$A(2,2,3)$ 、 $A(2,3,1)$ 、 $A(2,3,2)$ ，則 $T_8 = \begin{bmatrix} A_8 & B_8 \\ C_8 & D_8 \end{bmatrix}$ ，其中

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ，B_8 = O_{8\times 6} ，C_8 = O_{6\times 8}$$

矩陣 D_8 為矩陣 M_2 拿掉第 i 列、第 j 行所形成的新矩陣，其中 $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

因為 $B_8 = O_{8\times 6}$ ， $C_8 = O_{6\times 8}$ ，所以 $\det(T_8) = \det(A_8) \times \det(D_8) = 1$ ，可以確定四角垛中所有球的顏色。

Case10：若第一層給 7 顆，不給 $A(1,1,1)$ 、 $A(1,1,2)$ 、 $A(1,1,3)$ 、 $A(1,2,1)$ 、 $A(1,2,2)$ 、 $A(1,2,3)$ 、 $A(1,3,1)$ 、 $A(1,3,2)$ 、 $A(1,3,3)$ ，給 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,1,3)$ 、 $A(2,2,1)$ 、 $A(2,2,2)$ 、 $A(2,2,3)$ 、 $A(2,3,1)$ 、 $A(2,3,2)$ 、 $A(2,3,3)$ ，則 $T_9 = \begin{bmatrix} A_9 & B_9 \\ C_9 & D_9 \end{bmatrix}$ ，其中

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ，B_9 = O_{9\times 5} ，C_9 = O_{5\times 9}$$

矩陣 D_9 為矩陣 M_2 拿掉第 i 列、第 j 行所形成的新矩陣，其中 $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

因為 $B_9 = O_{9\times 5}$ ， $C_9 = O_{5\times 9}$ ，所以 $\det(T_9) = \det(A_9) \times \det(D_9) = -1$ ，可以確定四角垛中所有球的

顏色。

依照上述的規則，當最底層給 n 顆，不給特定的 $16-n$ 顆，給第二層特定的 $16-n$ 顆，其中 $7 \le n \le 16$，皆可使對應矩陣的行列式不為 0，可以確定四角垛中所有球的顏色。

(4) 但是當第一層任意給 6 顆，則所對應的矩陣為 $T_{10} = \begin{bmatrix} A_{10} & B_{10} \\ C_{10} & D_{10} \end{bmatrix}$，其中矩陣 $\begin{bmatrix} A_{10} \\ C_{10} \end{bmatrix}$ 為矩陣 M_1 任選 10 行所形成的矩陣，則矩陣 A_{10} 的最後一列必為 $O_{1\times 10}$，　$C_{10} = O_{4\times 10}$，則 $\det\left(T_{10}\right) = \det\left(A_{10}\right) \times \det\left(D_{10}\right) = 0$。

(5) 同理，當第一層任意給少於 6 顆，皆可使對應矩陣的行列式為 0，無法唯一確定四角垛中所有球的顏色。

所以，當四角垛有 4 層時，最底層給 n 顆，不給特定的 $16-n$ 顆，給第二層特定的 $16-n$ 顆，其中 $7 \le n \le 16$，皆有選法可以使得對應矩陣的行列式不為 0，可以確定四角垛中所有球的顏色。當 $n \le 6$ 顆時，任意選法皆會使得對應矩陣的行列式為 0，無法唯一確定四角垛中所有球的顏色。 **Q.E.D.**

最後，本文中在處理 3 層的四角垛，想找出給定哪 9 顆，方能決定四角垛中所有球之顏色，過程中需要運算 5 階行列式判斷是否有解？處理 4 層的四角垛時，過程中需要運算 16 階行列式判斷是否有解？所以，我們用 C++撰寫出運算程式，並將以 $A(1,1,1)$ 定為編號 1，$A(1,1,2)$ 定為編號 2......，將未給球號之位置編號輸入，用電腦輔助執行行列式運算判斷是否有解。(程式碼置於附錄(4))

參、研究結果與討論

一、研究結果

【定理 1】 $A(m,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{m-1} C_{k'}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{m-1} A(1,i+k',j+k)$ ， $\forall m \in \mathbb{N}$

從定理 1 知道，每一層的每顆球，以第一層的「已知數」做線性組合表達其一般式。以及「最終解」的一般式為 $A(m,1,1) \equiv \sum_{k'=0}^{m-1} C_{k'}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{m-1} A(1,1+k',1+k)$

【定理 2】 $A(m,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{m-n} \sum_{k=0}^{m-n} C_{k'}^{m-n} C_k^{m-n} A(n,i+k',j+k)$ ， $\forall m,n \in \mathbb{N}$ ， $m \geq n$

從定理 2 知道，只要任意兩層間的層數差固定，用下層球號的線性組合表示上層球號的一般式，其相對位置前的係數皆相同。

【定理 3】 $A(3^t+1,i,j) \equiv A(1,i,j) + A(1,i,j+3^t) + A(1,i+3^t,j) + A(1,i+3^t,j+3^t)$

從定理 3 得知，若想知道第 $\left(3^t+1\right)$ 層，第 i 列，第 j 行所代表的球號，只需要知道第一層 4 顆球即可。尤其是整個四角垛為 $\left(3^t+1\right)$ 層時，則只需要第一層的 4 個已知數，就可以知道「最終解」。

【定理 4】 $A(3^t+n,i,j) \equiv A(n,i,j) + A(n,i,j+3^t) + A(n,i+3^t,j) + A(n,i+3^t,j+3^t)$

從定理 4，若任意兩個層數差為 3^t 時，則只需要步數「一步」，就可知道上層的球號。

【定理 5】當 $m = s \cdot 3^t + 1$ 時，其中 $s,t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，則 $A(m,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{s} \sum_{k=0}^{s} C_{k'}^{s} C_k^{s} A(1,i+3^t \cdot k',j+3^t \cdot k)$

【定理 6】當 $m = s \cdot 3^t + n$ 時，其中 $s,t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，則

$$A(m,i,j) \equiv \sum_{k'=0}^{s} \sum_{k=0}^{s} C_{k'}^{s} C_k^{s} A(n,i+3^t \cdot k',j+3^t \cdot k)$$

將定理 3、定理 4 做延伸探討

【定理 7】設第一層擺了 n^2 顆球，若要計算出「最終解」，則需要給定第一層的球數為

$\left(\prod_{i\geq 0}(a_i+1)\right)^2$ 顆球。其中 $(n-1)$ 以三進位表示為 $\left(a_s a_{s-1}\ldots a_1 a_0\right)_3$，$a_s\in\{1,2\}$，

$a_i\in\{0,1,2\},\forall 0\leq i\leq s-1, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。即若要計算出「最終解」，則需要給「已知數」有

$\left(\prod_{i\geq 0}(a_i+1)\right)^2$ 個。

從定理 7 證明中也看到以第一層的「已知數」做線性組合表達「最終解」的一般式表示法唯一。

【定理 8】n 層四角垛，需要跨 $(n-1)$ 層，將 $(n-1)$ 以三進位表示為 $\left(a_k a_{k-1}\ldots a_1 a_0\right)_3$，其中

$a_k\in\{1,2\}$，$a_i\in\{0,1,2\},\forall 0\leq i\leq k-1, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。若其中有 x 個 2，y 個 1，則得出「最終解」所需最少步數 $\dfrac{8\times 9^x\times 4^y+7\times 9^x-15}{24}$。

從定理 8 證明中給出得到最少步數的策略與最少步數的公式。

【定理 9】若全部有 n 層且第一層為 n^2 顆球的四角垛，則至少須給 n^2 顆球的顏色方可確定四角垛所有球的顏色。

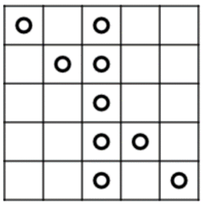
【定理 10】：當四角垛有 n 層時，第一層給 k 顆，其中 $2n-1\leq k\leq n^2$，皆有擺法可以使得對應矩陣的行列式不為 0，可以確定四角垛的所有球的顏色。當 $k<2n-1$ 顆時，任意擺法皆會使得對應矩陣的行列式為 0，無法確定四角垛的所有球的顏色。

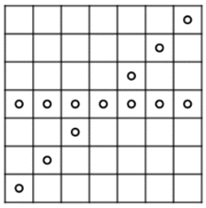
本文在最後改變遊戲目的：探討能否選出若干顆球，這些球的顏色任給，不違背遊戲規則下，是否可以把四角垛中所有球的顏色確定？而定理 9 與定理 10 給了至少需要給多少球數，才能決定四角垛中所有球的顏色，並也給該如何給哪些位置的球，皆能確定整個四角垛中所有球的顏色。

二、討論

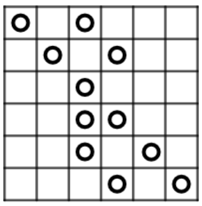
本文進一步去討論：當四角垛有n層時，第一層給$(2n-1)$顆球且第二層全給的情況下，第一層的$(2n-1)$顆球有選定策略，皆能確定整個四角垛的所有球的顏色。

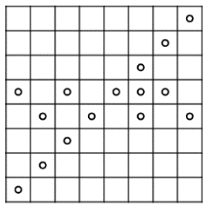
(一) n為奇數，若在第一層給$(2n-1)$顆球，且這些球排法為有n顆皆排於最中間之行或皆排在最中間之列，剩餘$(n-1)$顆球排成一對角線。(如圖(二十三) 以$n=5$為例，圖(二十四)以$n=7$為例)，則必能確定整個四角垛中所有球的顏色。


圖(二十三)


圖(二十四)

(二) n為偶數，若在第一層給$(2n-1)$顆球，且這些球排法為有n顆皆交錯排列排在最中間兩行或排在最中間的兩列，再將$(n-2)$顆球排成一對角線，排出一對角線皆有放球。最後，在最中間兩行中選一個尚未擺球的位置任意擺放 1 顆。（如圖(二十五)以$n=6$為例，圖(二十六)以$n=8$為例），則必能確定整個四角垛中所有球的顏色。


圖(二十五)


圖(二十六)

肆、結論與未來展望

一、結論

在本文中，我們運用數學建模，將顏色轉換為數字找出以第一層的「已知數」做線性組合表達「最終解」的一般式。利用盧卡斯定理知道，若四角垛為$\left(3^{t}+1\right)$層時，則我們只需要位於第一層正方形之 4 個角的已知數，便可知道「最終解」。進而找出最終解的最少步數為$\dfrac{8\times 9^{x}\times 4^{y}+7\times 9^{x}-15}{24}$步。最後，本文研究方向為：若給四角垛中若干球之球色，是否能確定整個四角垛中所有球之球色？判斷方法為找出未給球號所對應之矩陣T，經由計算$\det(T)$的值，判斷方程式是否有唯一解，就可以確定四角垛中所有球色。也推出至少需給四角垛中球的個數，皆有擺法可確定整個四角垛中所有球色；以及當四角垛有n層時，第一層給k顆，其中$2n-1\le k\le n^{2}$，皆有擺法可以確定四角垛中所有球的顏色。當$k<2n-1$顆時，任意擺法皆無法確定四角垛中所有球的顏色。

二、未來展望

未來還有兩個問題想研究：一為探討四角垛在給定幾種不同顏色數目或給定不同顏色規則時的結果變化情形；二為將用三角垛取代來討論此問題。

伍、參考文獻

1.徐祥俊、郭君逸　2017　<單人彩球遊戲>　數學傳播　41 卷 3 期　12 頁。

2.張丰秐、黃胤兟、蔡慈　2017　<神機妙算>　中華民國第 57 屆國中小科學展覽會國中組第一名　32 頁。

附錄：

附錄(1)

定理 5：當 $m=s\cdot 3^t+1$，時，其中 $s,t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則

$$A(m,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{s}\sum_{k=0}^{s}C_{k'}^{s}C_{k}^{s}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)$$

【證明】

(1)當 $s=0$， $A(1,i,j)\equiv A(1,i,j)$

當 $s=1$，由定理二知 $A(3^t+1,i,j)\equiv A(1,i,j)+A(1,i,j+3^t)+A(1,i+3^t,j)+A(1,i+3^t,j+3^t)$

(2)若 $s=n$ 時成立，即 $A(n\cdot 3^t+1,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{k}^{n}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)$

則 $s=n+1$ 時，由定理三得知

$$A\big((n+1)\cdot 3^t+1,i,j\big)\equiv A\big((3^t+(n\cdot 3^t+1),i,j\big)$$

$$\equiv A\big((n\cdot 3^t+1),i,j\big)+A\big((n\cdot 3^t+1),i,j+3^t\big)+A\big((n\cdot 3^t+1),i+3^t,j\big)+A\big((n\cdot 3^t+1),i+3^t,j+3^t\big)$$

$$\equiv\left[\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{k}^{n}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]+\left[\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{k}^{n}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot k)\right]$$

$$+\left[\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{k}^{n}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]+\left[\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{k}^{n}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot k)\right]$$

$$\equiv\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[C_0^nA(1,i+3^t\cdot k',j)+\sum_{k=1}^{n}C_k^nA(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]$$

$$+\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_k^nA(1,i+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot k)+C_n^nA(1,i+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot n)\right]$$

$$+\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[C_0^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j)+\sum_{k=1}^{n}C_k^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]$$

$$+\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_k^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot k)+C_n^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot n)\right]$$

因為

$$\sum_{k=1}^{n}C_k^nA(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)+\sum_{k=0}^{n-1}C_k^nA(1,i+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot k)=\sum_{k=1}^{n}C_k^{n+1}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)$$

$$\sum_{k=1}^{n}C_k^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)+\sum_{k=0}^{n-1}C_k^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_k^{n+1}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)$$

所以

$$
\begin{aligned}
&A\big((n+1)\cdot 3^t+1,i,j\big)\\
&\equiv\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[C_0^nA(1,i+3^t\cdot k',j)+\sum_{k=1}^{n}C_k^{n+1}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)+C_n^nA(1,i+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot n)\right]\\
&+\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[C_0^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j)+\sum_{k=1}^{n}C_k^{n+1}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)+C_n^nA(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t+3^t\cdot n)\right]\\
&\equiv\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]+\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]\\
&\equiv\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}\left[\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]+\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}\left[\sum_{k'=0}^{n}C_{k'}^{n}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]\\
&\equiv\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}\left[C_0^nA(1,i,j+3^t\cdot k)+\sum_{k'=1}^{n}C_{k'}^{n}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\right]\\
&+\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}\left[\sum_{k'=0}^{n-1}C_{k'}^{n}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)+C_n^nA(1,i+3^t+3^t\cdot n,j+3^t\cdot k)\right]
\end{aligned}
$$

同理

$$
\sum_{k'=1}^{n}C_{k'}^{n}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)+\sum_{k'=0}^{n-1}C_{k'}^{n}A(1,i+3^t+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)=\sum_{k'=1}^{n}C_{k'}^{n+1}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&A\big((n+1)\cdot 3^t+1,i,j\big)\\
&\equiv\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}\left[C_0^nA(1,i,j+3^t\cdot k)+\sum_{k'=1}^{n}C_{k'}^{n+1}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)+C_n^nA(1,i+3^t+3^t\cdot n,j+3^t\cdot k)\right]\\
&\equiv\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}\sum_{k'=0}^{n+1}C_{k'}^{n+1}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)\\
&\equiv\sum_{k'=0}^{n+1}C_{k'}^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)
\end{aligned}
$$

成立

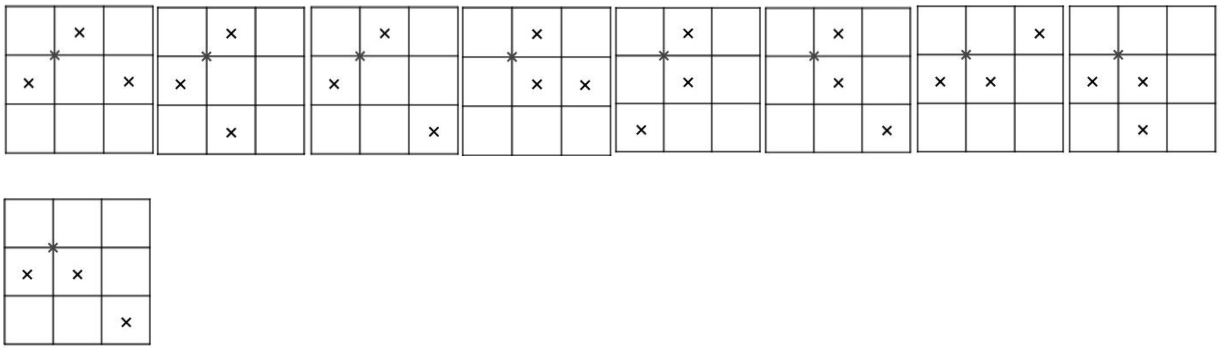
由數學歸納法得知，當 $m=s\cdot 3^t+1$ ，時，其中 $s,t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ，則

$A(m,i,j)\equiv\sum_{k'=0}^{s}C_{k'}^{s}\sum_{k=0}^{s}C_k^{s}A(1,i+3^t\cdot k',j+3^t\cdot k)$ 。 Q.E.D.

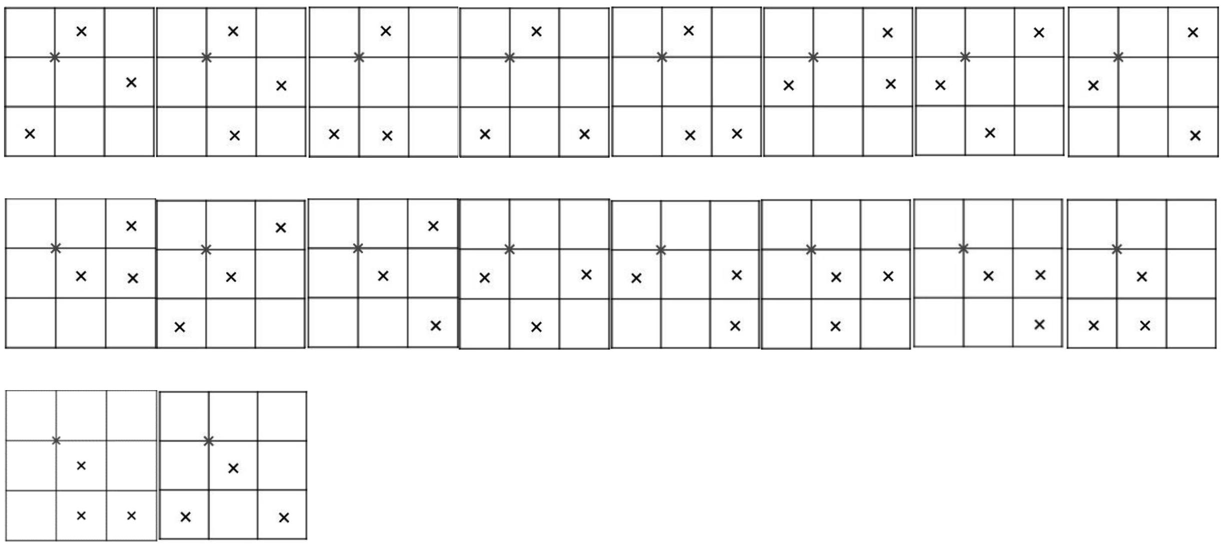
附錄(2)

Case1 第一層給定 6 個已知、且未給定 $A(3,1,1)$

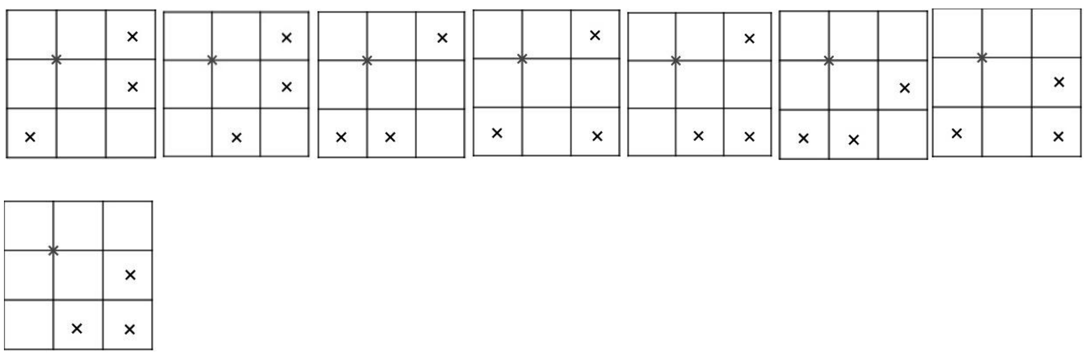
(i)與 $A(2,1,1)$ 接觸的給 2 個



(ii)與 $A(2,1,1)$ 接觸的給 1 個



(iii)與 $A(2,1,1)$ 接觸的給 0 個

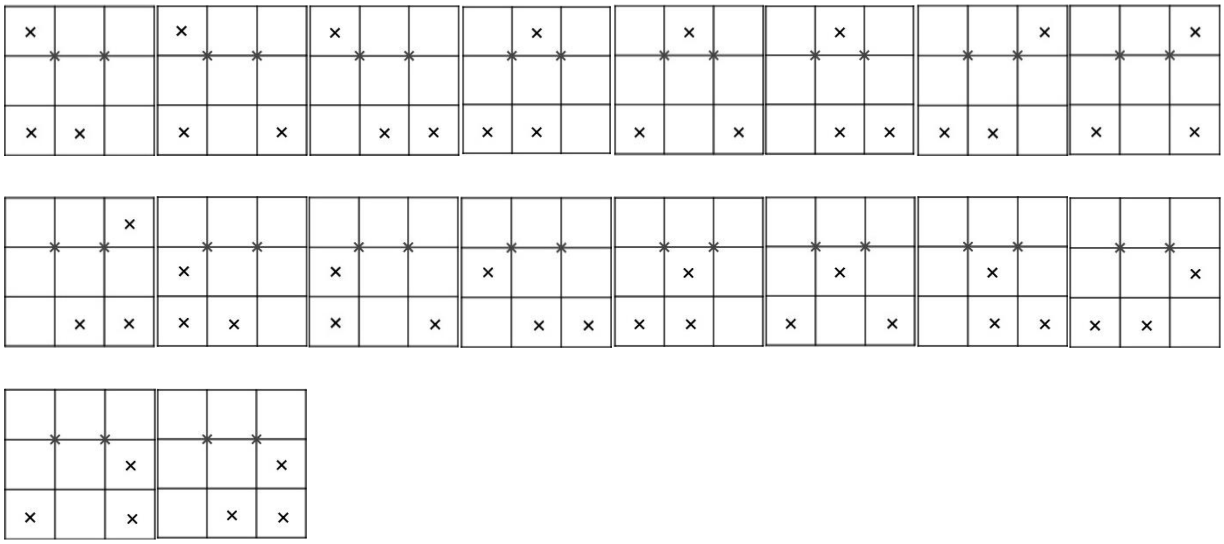


附錄(3)

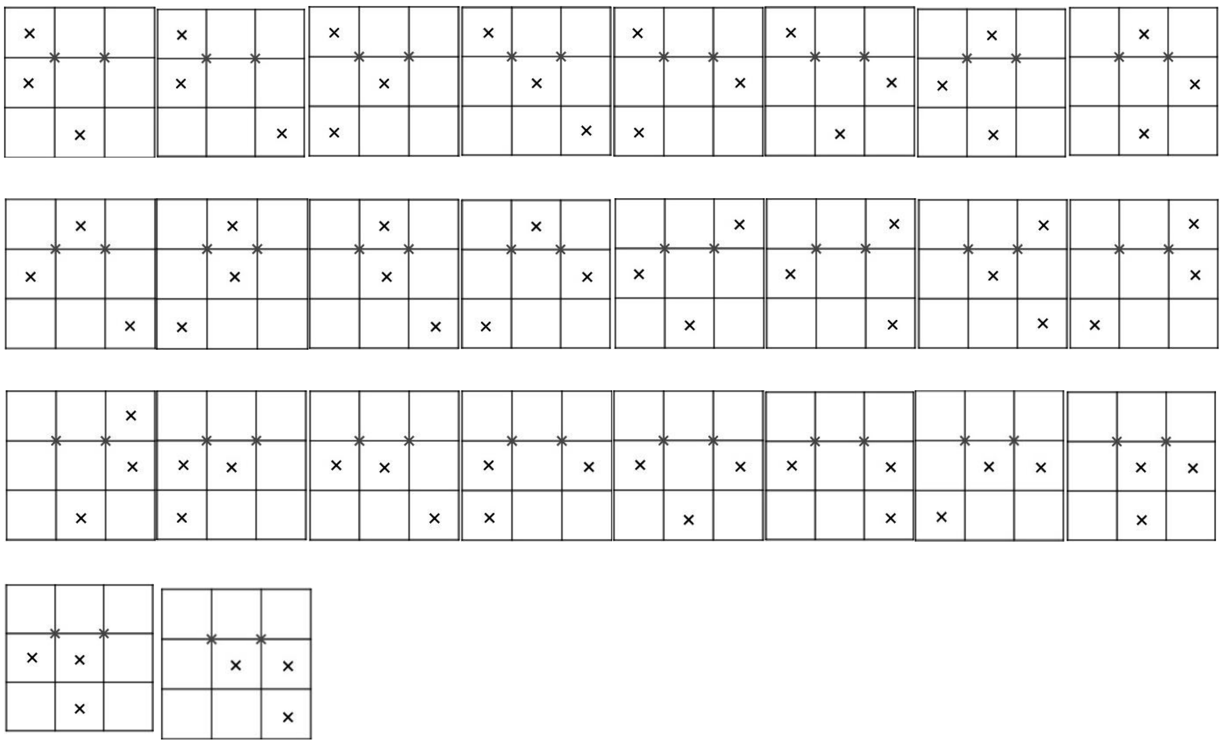
Case2 第一層給定 6 個已知且給定 $A(3,1,1)$

(i)若第二層兩個未知球的相鄰，不失一般性，假設未給 $A(2,1,1)$ 與 $A(2,1,2)$

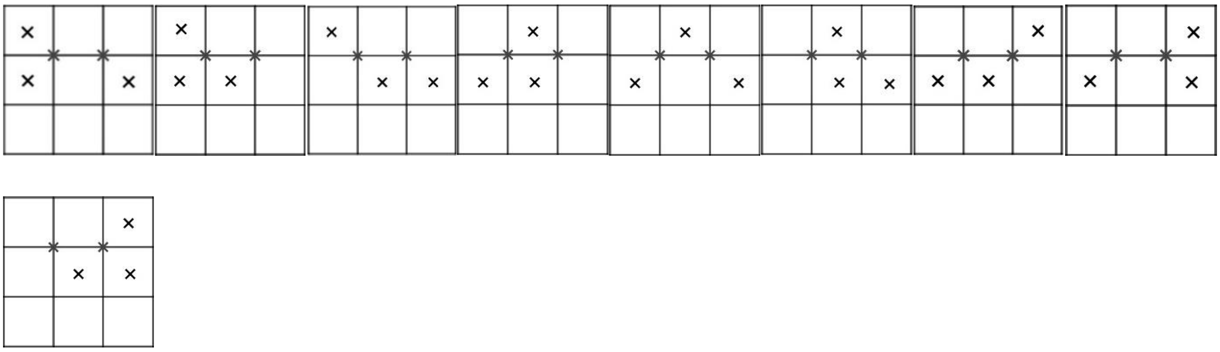
(a)皆不與 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 接觸的給 2 個



(b)皆不與 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 接觸的給 1 個

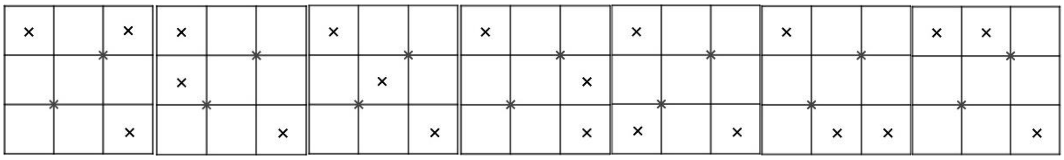


(c)皆不與 $A(2,1,1)$ 、 $A(2,1,2)$ 接觸的給 0 個

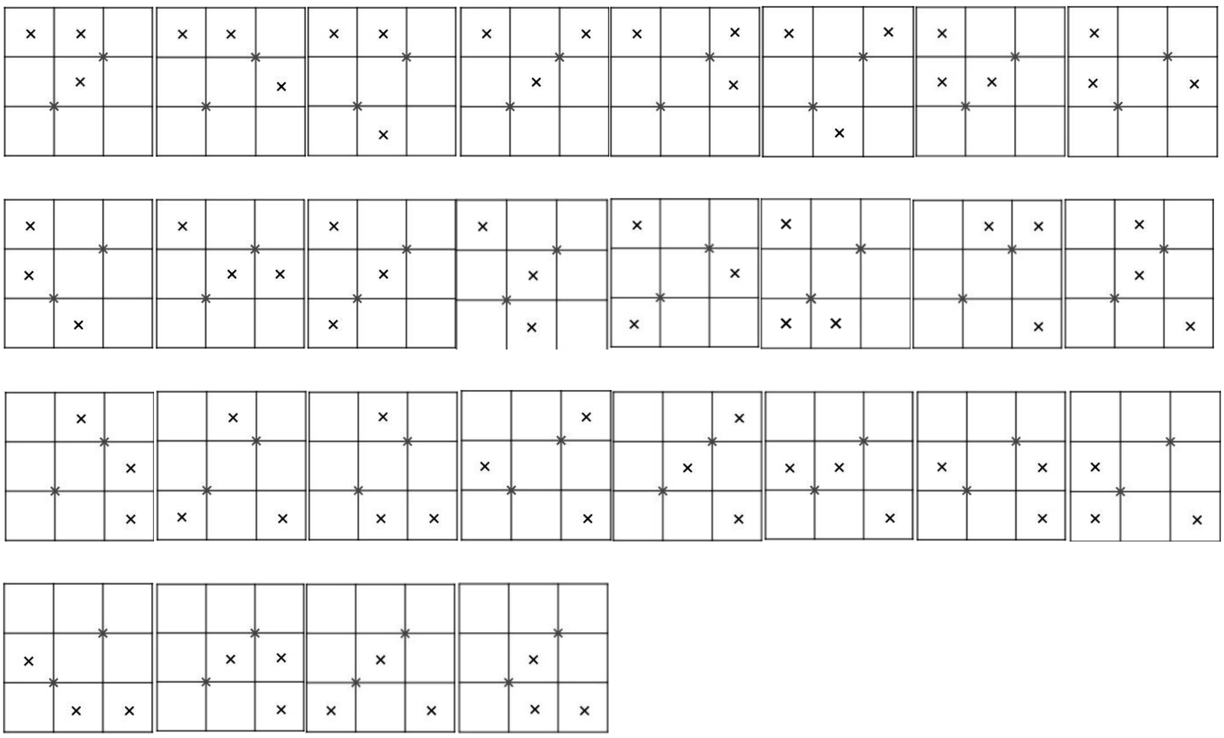


(ii)若第二層兩個未知球的不相鄰，不失一般性，假設未給 $A(2,1,2)$ 與 $A(2,2,1)$

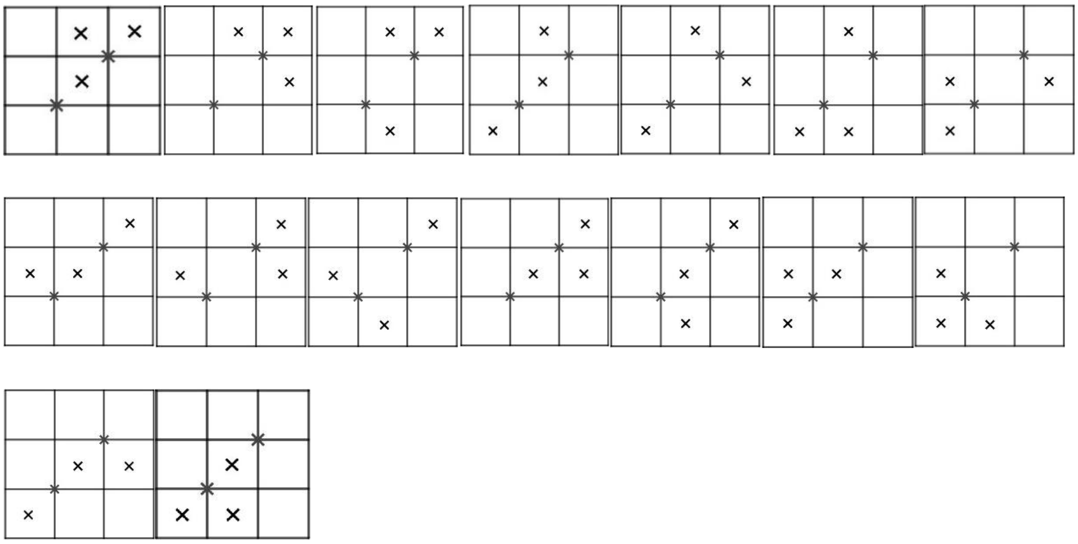
(a)皆不與 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,2,1)$ 接觸的給 2 個



(b)皆不與 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,2,1)$ 接觸的給 1 個



(c)皆不與 $A(2,1,2)$ 、 $A(2,2,1)$ 接觸的給 0 個



附錄(4) 判斷行列式 det(T) 是否為 0 之 C++程式碼

```
#include<iostream>
#include<vector>
#include<math.h>
#include<cmath>
using namespace std;

int det_compute(int size,int** matrix)
{
        int ** sub_matrix=new int* [size-1];
        int sum=0,i=0,row=0,col=0;
        if(size==1)
        {
        sum=matrix[0][0];
        }
        else
        {
                for (i=0; i<size-1; i++)
                {
                        sub_matrix[i] = new int[size-1];
                }
                for (i=0; i<size; i++)
                {
                        for (row=0; row<size-1; row++)
                        {
                                for (col=0; col<size-1; col++)
                                {
                                        if (col<i)
                                                sub_matrix[row][col] = matrix[row+1][col];

                                        if (col>=i)
                                                sub_matrix[row][col] = matrix[row+1][col+1];
                                }
                        }
                if(matrix[0][i] != 0)
                        sum = sum + (pow(-1, i % 2 ) * matrix[0][i] * det_compute(size-1,sub_matrix));
                else
                        sum = sum + 0;
                }
        }
        return sum;
}

int main()
{
        vector<vector<int> > input_matrix;
        int number;

        cout << "input the dimension : ";
        cin >>  number;

        int row=0,col=0;

        for(int i=1;i<=number;i++)
        {
                col = col + pow(i,2);
        }
        for(int i=1;i<number;i++)
        {
                row = row + pow(i,2);
        }

        input_matrix.resize(row);
        for(int i=0;i<row;i++)
                input_matrix[i].resize(col);

        for(int i=0;i<row;i++)
        {
                for(int j=0;j<col;j++)
                {
                        input_matrix[i][j] = 0;
                }
```

```
}

int plus = 0;
int check_plus = 0;
for(int i=0;i< (number-1) * (number-1);i++)
{
        int check = i + 1 + check_plus;
```

```
                        input_matrix[i][col_index+count+plus] = 1;
                        input_matrix[i][col_index+1+count+plus] = 1;
                        input_matrix[i][col_index+used_layer+count+plus] = 1;
                        input_matrix[i][col_index+used_layer+1+count+plus] = 1;

                        input_matrix[i][col_index + used_layer * used_layer + count] = -1;
                        count = count + 1;
                }
                else
                {
                        plus = plus + 1;

                        input_matrix[i][col_index+count+plus] = 1;
                        input_matrix[i][col_index+1+count+plus] = 1;
                        input_matrix[i][col_index+used_layer+count+plus] = 1;
                        input_matrix[i][col_index+used_layer+1+count+plus] = 1;

                        input_matrix[i][col_index + used_layer * used_layer + count] = -1;
                        count = count + 1;

                        check_plus = check_plus + 1;
                }
        }

        used_layer = used_layer - 1;
}

int last_four_column = col-5;

for(int i=0;i<4;i++)
        input_matrix[row-1][last_four_column + i] = 1;

input_matrix[row-1][col-1] = -1;

cout << endl;
cout << "your input matrix: " << endl;

for(int i=0;i<row;i++)
{
        for(int j=0;j<col;j++)
```

```
        {
                poll_col = input_vec[i];
                for(int j=0;j<row;j++)
                {
                        determinant_matrix[j][i] = input_matrix[j][poll_col];
                }
        }
```

```
        {
                cout << input_matrix[i][j];
        }
        cout << endl;
}

///////////////////////////
while(1)
{
        cout << "輸入要取出的行(請從" << col << "行中選取" << row << "行) " << endl;
        int input_col;

        vector<int>input_vec;
        for(int i=0;i<row;i++)
        {
                cin >> input_col;
                input_vec.push_back(input_col-1);
        }

        int **determinant_matrix;
        determinant_matrix= new int*[row];
        for(int i=0;i<row;i++)
                determinant_matrix[i]=new int[row];
```

```
            int poll_col;
            int sum = 0;
            col = row;
            for(int i=0;i<col;i++)
            {

                    {
                            cout << determinant_matrix[i][j] << " ";
                    }
                    cout << endl;
             }

             sum=abs(det_compute(row,determinant_matrix));
             cout << "行列式值為 : " << sum << endl;

        }
        return 0;
}
```

【評語】010018

本四角垜彩球遊戲，基本上是回答文獻[1]最後面所留的問題，將[1]的結果由平面推展到四角垜。然而，整個技巧與手法，幾乎可以沿用[1]的方法，因此，就數學的創新性來說，本作品稍嫌不足。本作品較深入的部分，是算出最終解所需要給定的最少已知個數(定理七)，但是該定理應該將「已知數」的座標解集合(可能很多個)表示出來才算完整。定理八的最少步數公式雖然給出，但同樣未給出「如何走」的策略公式。定理九之後全數改用線性代數(與[1]相似)，但作者對於 M、T 兩個關鍵矩陣完全沒有給定義，後半部的作品因此多不完備。