2020 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010012

參展科別　數學

作品名稱　正 n 邊形內接正四邊形之探討

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　臺中市立文華高級中等學校

指導教師　陳惠香

作者姓名　傅予潔

關鍵詞　正 n 邊形、內接正四邊形、尺規作圖

作者簡介

數學是我從小最擅長的科目，高中就讀數理資優班後，有更多機會做專題，於是以我最有興趣的幾何圖形來做研究。除了數學，我也很喜歡化學，特別是親自做實驗。從國中開始加入籃球校隊，平時的休閒活動就是運動和交朋友，希望在這次國際科展中，能認識到各國同樣熱愛數學的朋友。

摘要

This article explores inscribed regular quadrilaterals of a regular polygon, that is, regular quadrilaterals whose four vertices are located on four different edges of a regular polygon. We classify inscribed regular quadrilaterals of a regular polygon according to number of edges of the regular polygon. More precisely, in this article, regular polygons are divided into four classes --- polygons with 4k, 4k+1, 4k+2, or 4k+3 edges. Verifying by Geogebra --- a software for mathematical drawing ---, ruler-and-compass construction and mathematical formulas, we obtain the following conclusion: In a regular polygon with 4k edges, there are infintely many inscribed regular quadrilaterals with the same center, while in the other cases, there is only one inscribed regular quadrilateral inside the regular polygon. (The figures are considered to be same if they coincide after rotations and reflections.) In a regular polygon with 4k+2 edges, the inscribed inscribed regular quadrilateral and the regular polygon have the same center. Nevertheless, in a regular polygon with 4k+1 or 4k+3 edges, the center of the inscribed regular quadrilateral is not at the center of the regular polygon. The center of the inscribed regular quadrilateral is on an axis of symmetry of the regular polygon. Finally, we provide a method of obtaining inscribed regular quadrilaterals of a regular polygon via ruler-and-compass construction.

本篇將探討在正 n 邊形中的內接正四邊形，即此正四邊形的四個頂點分別位於正 n 邊形的四個不同邊上。我們將正 n 邊形依邊長數分為 n=4k、4k+1、4k+2、4k+3，透過電腦繪圖、尺規作圖法及公式驗證，得到以下結論:正 n(n=4k)邊形有無限多個共中心內接正四邊形，而其餘正 n 邊形中，皆只有一個(本篇中圖形經過旋轉對稱後，大小、位置相同者為全等，則視為 "同一個")內接正四邊形，且在 n=4k+2 時，內接正四邊形必和正 n 邊形共中心；n=4k+1 或 4k+3 時，內接正四邊形必不和正 n 邊形共中心，但內接正四邊形之中心必在正 n 邊形的一對稱軸上。最後我們提供一個能在所有的正 n 邊形畫出內接正四邊形的尺規作圖法。

壹、研究動機

在閱讀第 54 屆全國中小學科學展覽歷屆作品時，看到在一個正 n 邊形的三個不同邊上可以內接無限多個正三角形，因此好奇：是否在正 n 邊形內也都能接出正四邊形？是否也有無限多個內接正四邊形？因此開始進行研究和探討。

貳、研究目的

一、 首先利用電腦繪圖觀察是否所有的正 n 邊形都存在內接正四邊形，再嘗試以數學式證明之。

二、 內接正四邊形有無限多個嗎？

三、 內接正四邊形是否和正 n 邊形有關聯性。

四、 找一個尺規作圖法畫出所有正 n 邊形的內接正四邊形。

參、研究設備器材

紙、筆、量角器、電腦、Geogebra。

肆、研究方法步驟（一)觀察假設與尺規作圖

一、 定義

(一)以下所有探討之正 n 邊形之 n 個頂點命名為 A_1、A_2、A_3、...、A_n，其內接正四邊形之 4 個頂點命名為 B_1、B_2、B_3、B_4。(皆以逆時針編號)

(二)在同一個正 n 邊形中所作之兩內接正四邊形經旋轉或對稱後能完全重疊者，我們稱為「全等」，視為"同一個")。

(三)將正 n 邊形依邊長數分為 n= 4k、4k+1、4k+2、4k+3，k 是正整數。

二、 以電腦繪圖觀察正 n 邊形是否存在內接正四邊形

(一)為了想確定是否真的能在任意正 n 邊形中內接正四邊形，我們利用數學繪圖軟體 Geogebra 繪製正五、六、七、八、九、十邊形圖形來觀察。步驟為:

1.在正 n 邊形的任意邊上找一動點 B_1 作為正四邊形的第一個頂點

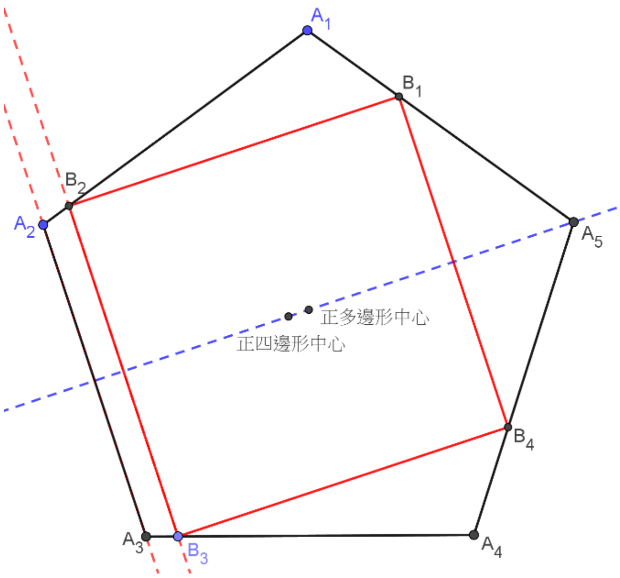
2.猜測內接正四邊形另一頂點 B_2 的位置

3.以$\overline{B_1B_2}$為邊長畫出正四邊形

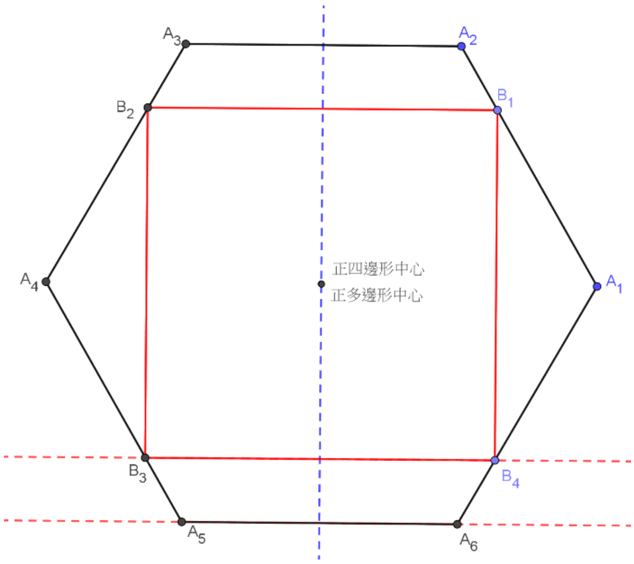
4.藉由移動B_1、B_2的位置來改變正四邊形的位置與大小

5.直到另外兩頂點也落在正 n 邊形的邊長上

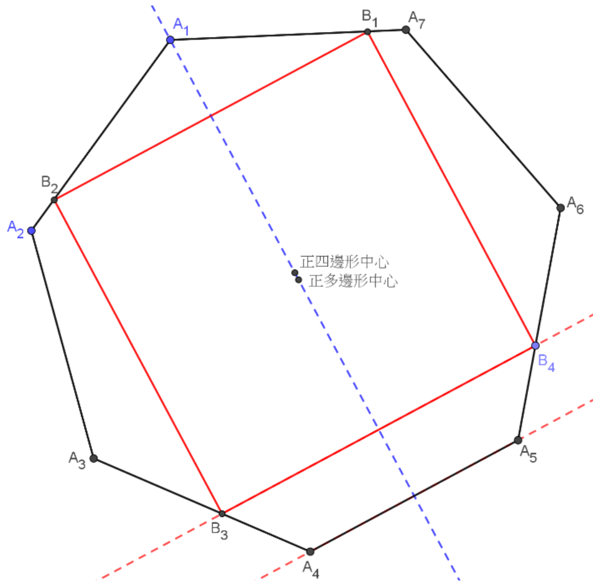
最後繪製圖形如下圖(一)~圖(六)，並觀察正 n 邊形與其內接正四邊形之關聯性。其中圖(一)~圖(六)中，藍色虛線為正 n 邊形與內接正四邊形之對稱軸(過兩圖形中心)，紅色虛線為內接正四邊形與正 n 邊形之平行邊。



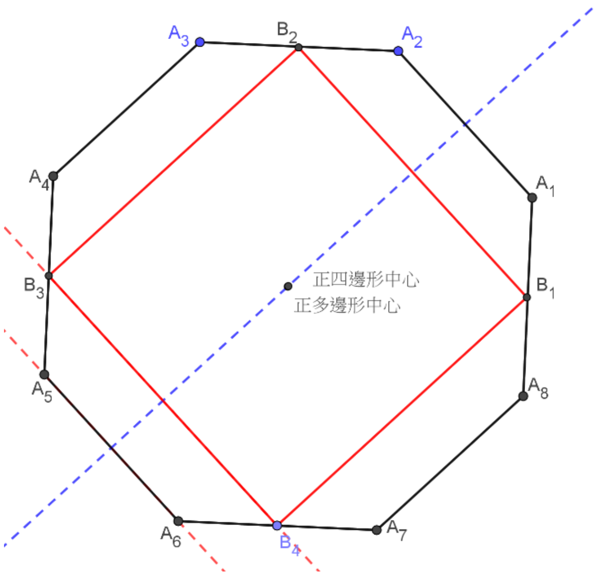
圖(一)正五邊形的一個內接正四邊形



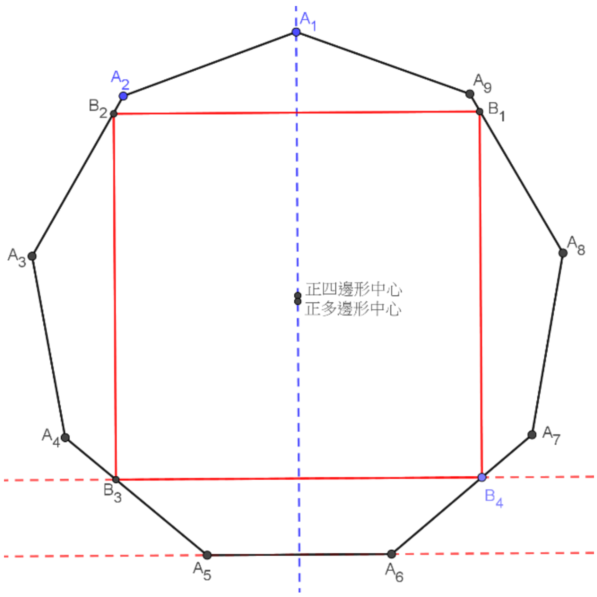
圖(二)正六邊形的一個內接正四邊形



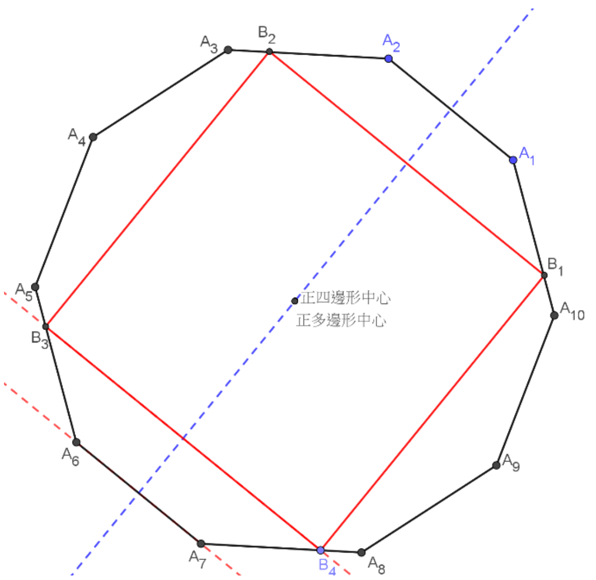
圖(三)正七邊形的一個內接正四邊形



圖(四)正八邊形的一個內接正四邊形



圖(五)正九邊形的一個內接正四邊形



圖(六)正十邊形的一個內接正四邊形

(二) 觀察圖(一)~圖(六)，我們發現以下幾個性質：

1.正五、六、七、八、九、十邊形皆有內接正四邊形，因此猜測所有正 n 邊形皆有內接正四邊形。

2.正六、八、十邊形的其中一個內接正四邊形與其共中心，故推測正 n(n=4k、4k+2)邊形可用中心及對稱的方式作圖。

3.正 n 邊形與內接正四邊形有一共同之對稱軸且內接正四邊形有一與正 n 邊形平行的邊。

（註：起初僅是為了看看能否先找到內接正四邊形，而上述性質 3 是後來使用平行邊的尺規作圖法後，回過頭整理這些圖形時，才發現的特性。又第 3 點中的對稱軸會垂直內接正四邊形與正 n 邊形之平行邊，故在正六、八、十邊形中，我們只呈現垂直平行邊的對稱軸。）

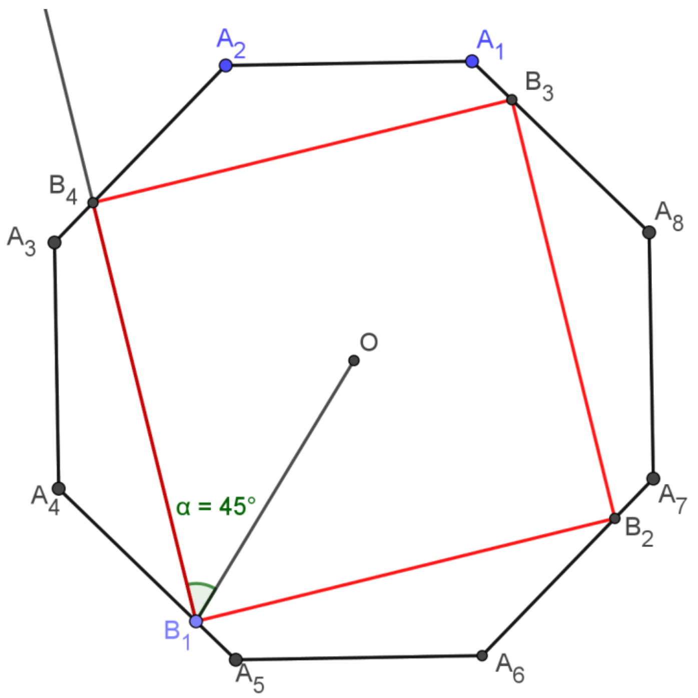
以上僅是利用電腦繪圖軟體初步觀察，以下我們給更精確的尺規作圖。

三、 與正 n(n=4k、4k+2)邊形共中心的內接正四邊形之作圖方法

(一)正 n(n=4k)邊形：

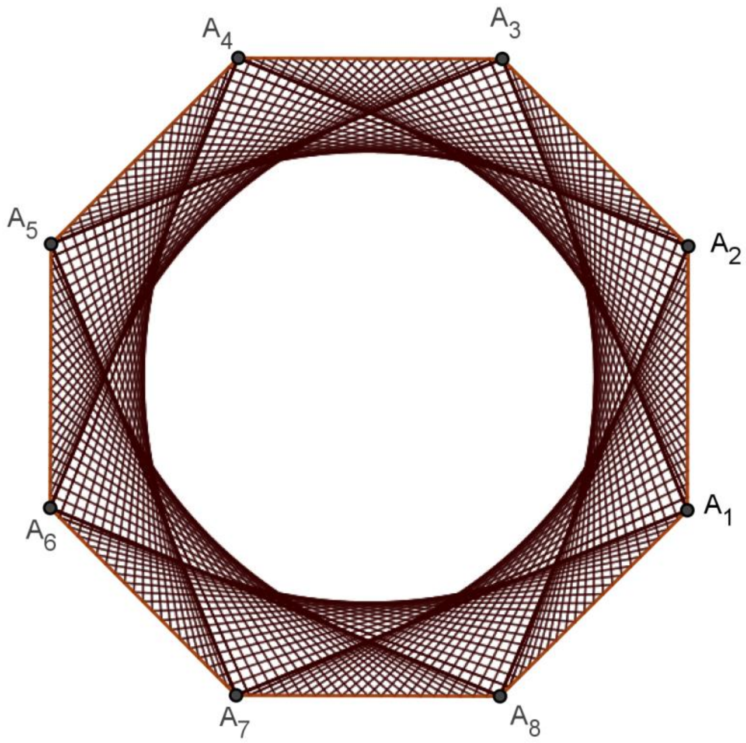
由上述電腦繪圖的觀察中得知，正 n(n=4k)邊形和內接正四邊形有對稱和共中心的特性。因此可以利用正 n 邊形的中心來作圖，下面我們以正八邊形為例(如圖(七))：

1. 取正 n 邊形的中心 O
2. 在正 n 邊形的邊長上取任意一點 B_1 作為正四邊形之一頂點
3. 以 B_1 為頂點，$\overleftrightarrow{OB_1}$ 旋轉 45°，和正多邊形交於 B_4
4. 以 $\overline{B_1B_4}$ 為邊長作正四邊形
5. 正四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即所求



圖(七)正八邊形共中心的內接正四邊形作圖法

圖(七)中，當我們移動 B_1 時，其餘四個頂點依舊在正 n 邊形上，故我們發現，只要$\overline{A_5B_1}$、$\overline{A_3B_4}$、$\overline{A_1B_3}$、$\overline{A_7B_2}$等長，就能形成一內接正四邊形，因此正八邊形有無限個內接正四邊形(如圖(八))，我們稱其有「連續性」，且其有頂點上的內接正四邊形，如圖(八)中的正四邊形$A_1A_3A_5A_7$即為一內接正四邊形。

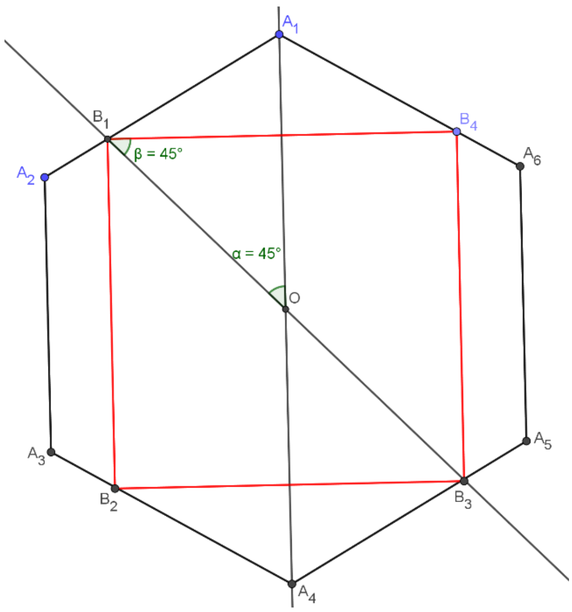


圖(八)正八邊形內接正四邊形的狀況(可找到無限個)

(二) 正 n(n=4k+2)邊形：

從前面的繪圖觀察中，我們發現正 n(n=4k+2)邊形有一個和其共中心的內接正四邊形，也一樣擁有對稱的性質，因此我們利用正 n 邊形的中心來作圖，下面我們以正六邊形為例(如圖(九))：

1. 取正 n 邊形的中心 O
2. 以一頂點A_1和 O 連線
3. 以O為頂點，將$\overleftrightarrow{OA_1}$旋轉45°，並和正 n 邊形交於點$B_1$
4. 以B_1為頂點，將$\overleftrightarrow{B_1O}$旋轉 45°，並和正 n 邊形交於點$B_4$
5. 以$\overline{B_1B_4}$為邊長做正四邊形
6. 正四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即所求



圖(九)正六邊形的內接正四邊形作圖法

四、 與正 n 邊形共對稱軸之內接正四邊形之作圖方法，且此時正 n 邊形和其內接正四邊形有一組平行邊

此方法可用於所有的正 n 邊形，由上述觀察我們發現正 n 邊形和其內接正四邊形有一組平行邊，我們利用此性質作圖如下:

（註:上述我們已用共中心作出正六、八邊形之內接正四邊形，而正五、七、九邊形的內接正四邊形並無共中心的特性，故下方僅呈現正五、七、九邊形，即 n=4k+1、4k+3 的作圖。）

(一) 以平行底邊方式作圖，我們稱之為「平行法」:

1. 利用內接正四邊形底邊平行正 n 邊形底邊之特性，作圖觀察如下:

(1) 在正 n 邊形上選一邊作為底邊(這裡我們選定$\overline{A_1A_n}$，此選擇乃與後方找尋內接正四邊形頂點位置而定。)

(2) 在 $\overline{A_1A_2}$上取一點B_1作為正四邊形之一頂點

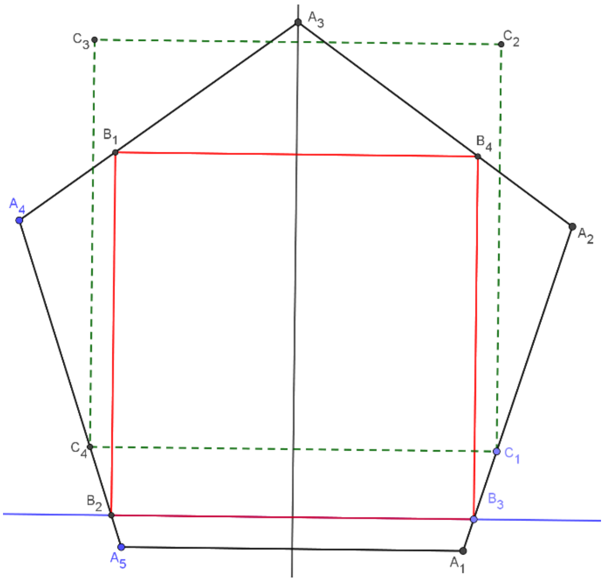
(3) 作一平行線過B_1且交正 n 邊形於B_4

(4) 以$\overline{B_1B_4}$為邊長作一正四邊形

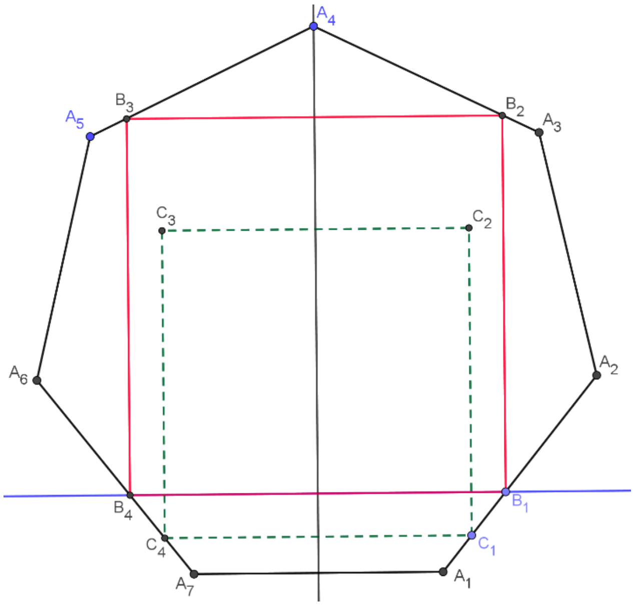
(5) 移動B_1使正四邊形四個頂點皆位於正 n 邊形邊上(如圖(十)、圖(十一)、圖(十二))

（註 1：因為B_1 、B_4已在正四邊形邊上，當移動B_1點時，正四邊形放大縮小時，必能找到B_2 、B_3在正 n 邊形上，圖中正四邊形$C_1C_2C_3C_4$為移動過程中出現的正四邊形。

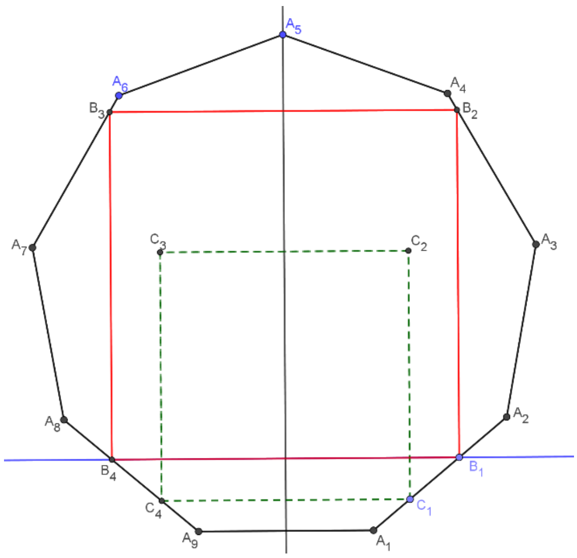
註 2：圖中垂直平行邊且過兩圖形中心之直線為正 n 邊行與內接正四邊形的共用對稱軸。）



圖(十)正五邊形平行法作圖

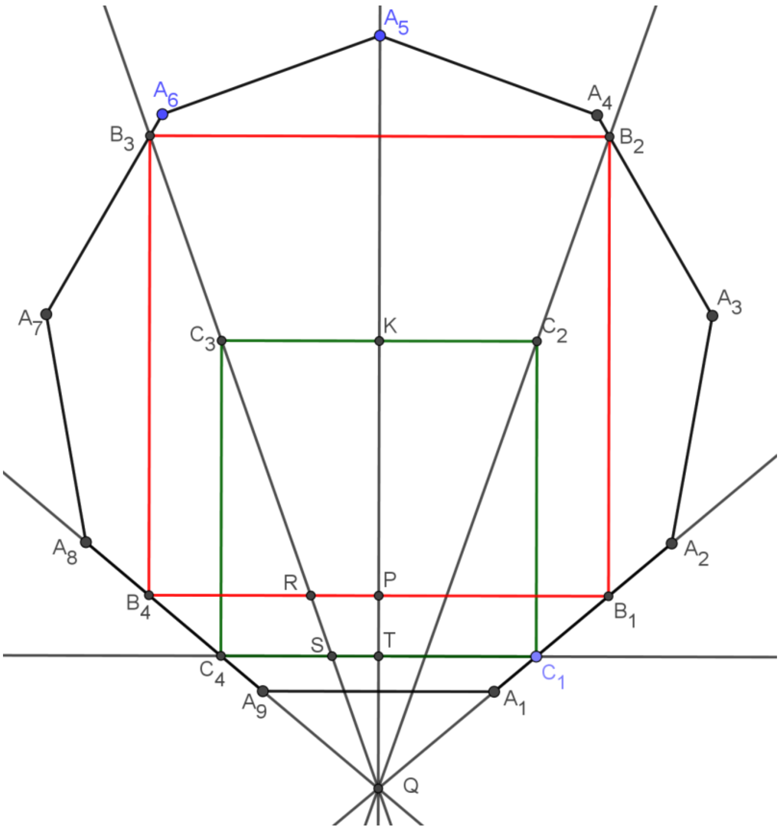


圖(十一)正七邊形平行法作圖



圖(十二)正九邊形平行法作圖

2. 平行法的尺規作圖步驟：上面我們利用移動 B_1 的方式找出內接正四邊形，下面我們給一個平行法的尺規作圖法，以下我們以正九邊形為例(如圖(十三))：
   (1) 作一正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$(輔助正四邊形)，使 C_1、C_4 分別位在正 n 邊行的兩邊上，且$\overline{C_1C_4}$平行正 n 邊形的底邊$\overline{A_1A_9}$
   (2) 延長$\overline{A_1A_2}$及$\overline{A_8A_9}$交於點 Q
   (3) 連接$\overleftrightarrow{QC_2}$及$\overleftrightarrow{QC_3}$和正九邊形分別交於點$B_2$、$B_3$
   (4) 以$\overline{B_2B_3}$為邊作一正四邊形
   (5) 正四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即所求



圖(十三)正九邊形以尺規作圖呈現平行法之作圖情形

上述的尺規作圖中，如何確認 B_1、B_4 必在正 n 邊形上呢？

假設以$\overline{B_2B_3}$為邊所作之正四邊形頂點 B_4 不在$\overline{A_8A_9}$上，則表 B_4 、C_4 、Q不共線，則ΔB_4RQ與$\Delta\angle C_4SQ$不相似，得$\overline{RQ}:\overline{SQ}\neq\overline{SC_4}:\overline{RB_4}$

又$\Delta RPQ\sim\Delta STQ\sim\Delta SC_4C_3\sim\Delta RB_4B_3$(如圖(十三))， 故

$\overline{RQ}:\overline{SQ}=\overline{SC_3}:\overline{RB_3}=\overline{SC_4}:\overline{RB_4}$(矛盾)

故 B_4 、C_4 、Q共線，B_4 在$\overline{A_8A_9}$上，B_1 同理$\overline{A_1A_2}$上，故四邊形$B_1B_2B_3B_4$ 為內接正四邊形。

3. 確認內接正四邊形頂點位置

在此作圖法中，隨著 n 變大，B_1不會永遠都在$\overline{A_1A_2}$上，故為找到B_1的位置，

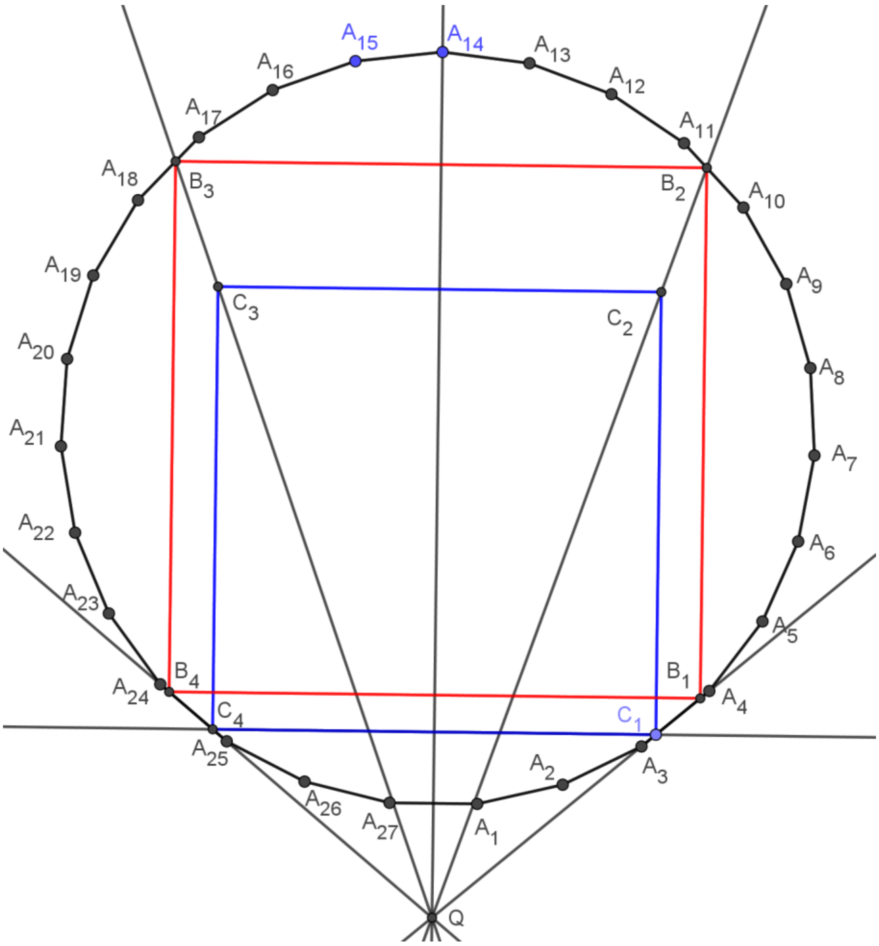
我們定義 $d=\left[\dfrac{\frac{n}{4}-1}{2}\right]$，其中[ ]為高斯記號，則$B_1$在$\overline{A_{d+1}A_{d+2}}$。又因為我們是利

用相似形作圖，故輔助正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 之頂點 C_1 必在$\overline{A_{d+1}A_{d+2}}$上。

其中我們所定義的 $d=\left[\dfrac{\frac{n}{4}-1}{2}\right]$，$\dfrac{n}{4}$是在計算兩頂點間的邊長數，又因為平行底

邊，所以減 1，又因左右對稱，所以除以 2，得到的數值為從 A_1 逆時針計算的邊長數，取高斯後可知頂點位置。)

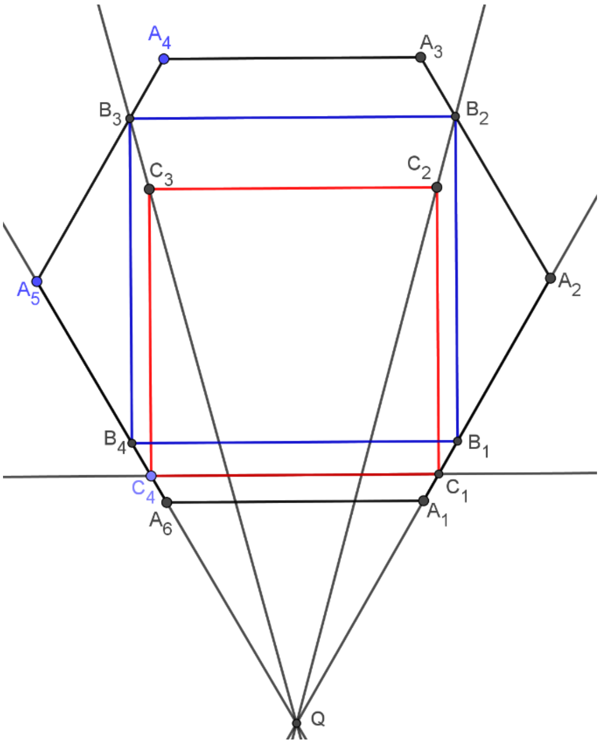
下面我們以正二十七邊形為例 $d=\left[\dfrac{\frac{27}{4}-1}{2}\right]=2$，則$B_1$、$C_1$在$\overline{A_3A_4}$，如圖(十四)



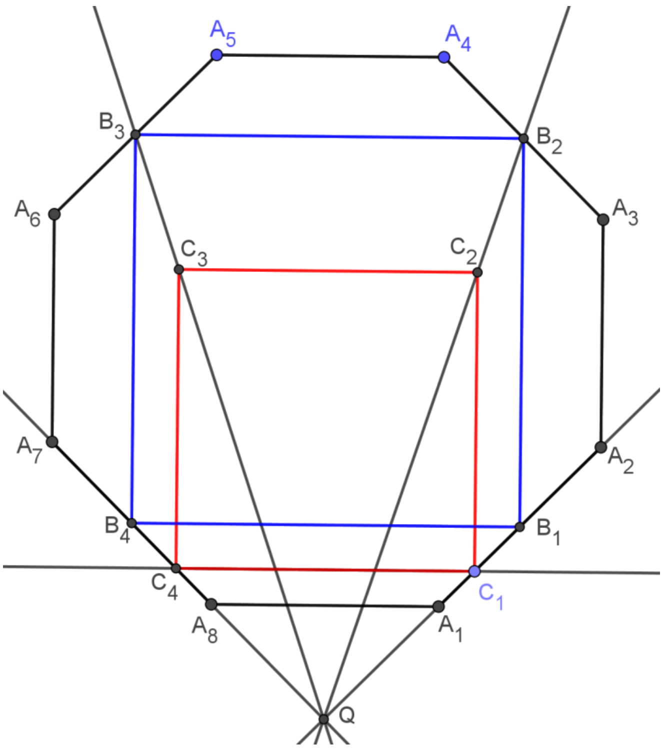
圖(十四)正二十七邊形內接正四邊形

而此方法能適用在所有正 n 邊形上，當然在正 n(n=4k、4k+2)邊形中，也能適用，

圖(十五)、圖(十六)為正六、八邊形使用平行法作圖的圖形。



圖(十五)正六邊形以尺規作圖法作圖情形

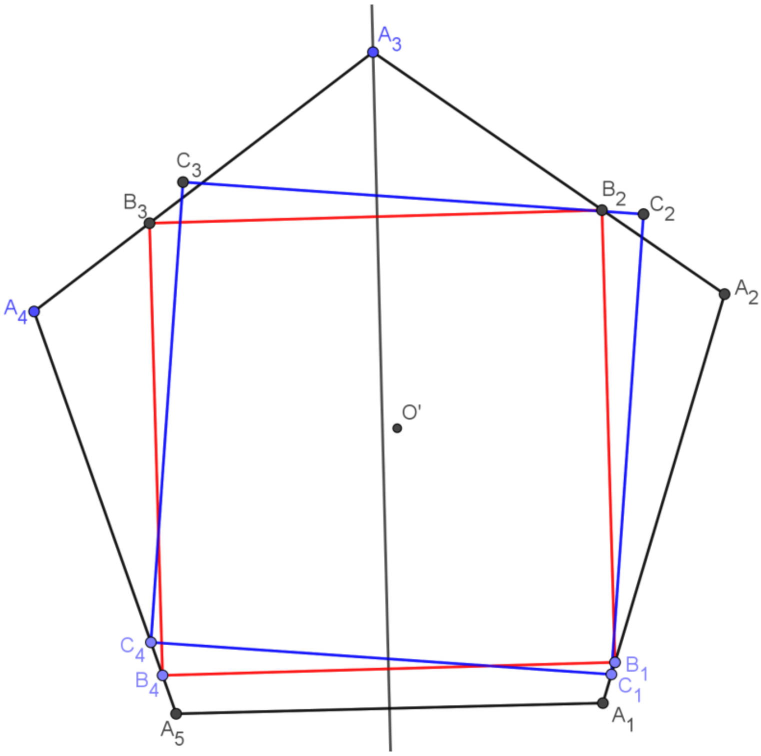


圖(十六)正八邊形以尺規作圖法作圖情形

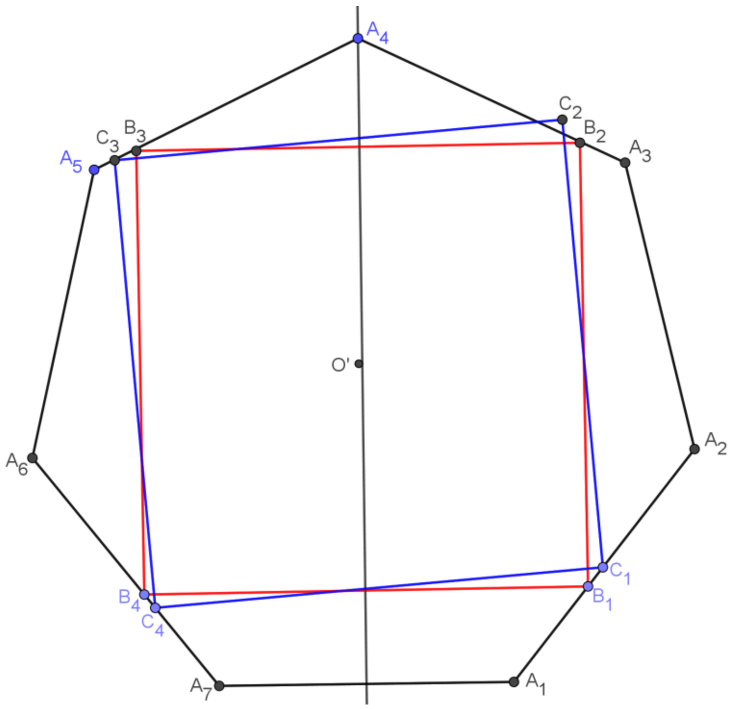
(二) 正 n(n=4k+1、4k+3)邊形的內接正四邊形個數

一開始在我們使用繪圖觀察時(P.1~2 所呈現的方法)，並無法確定在正 n(n=4k+1 或 4k+3)邊形中可以找到幾個內接正四邊形。而現在我們將上面用平行法在正五邊形及正七邊形內所找到的內接正四邊形之其中兩個頂點固定在正多邊形的邊上，並移動這兩個頂點，在移動的過程中，正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 無法都在邊上(如

圖(十七) 、圖(十八))，且正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 的中心O'也不在正 n 邊形的對稱軸上。

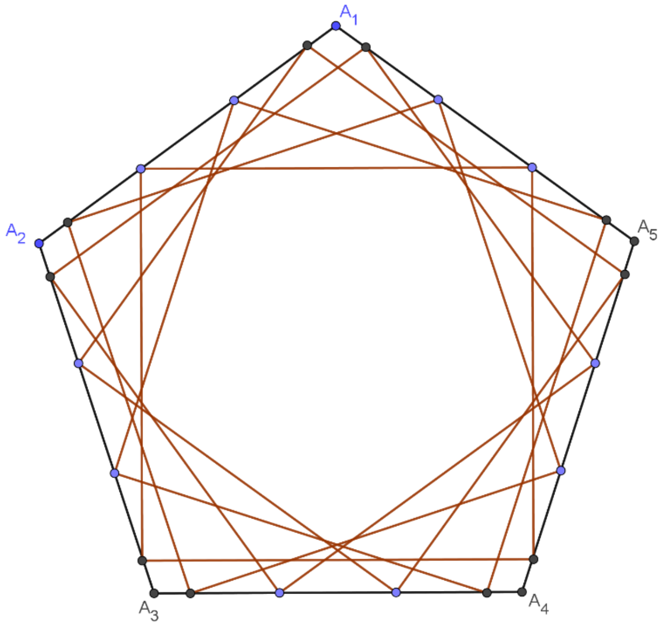


圖(十七)正五邊形內接正四邊形移動後情形

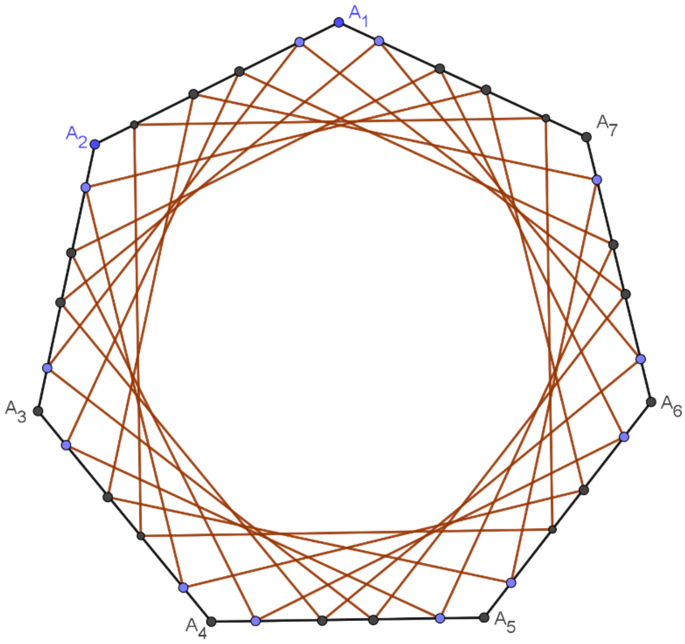


圖(十八)正七邊形內接正四邊形移動後情形

再將以上能作為內接正四邊形的留下，我們發現，這些正四邊形分別是平行於正多邊形的不同邊，皆為全等，因此我們猜測只存在一個內接正四邊形。如圖(十九)、圖(二十)：

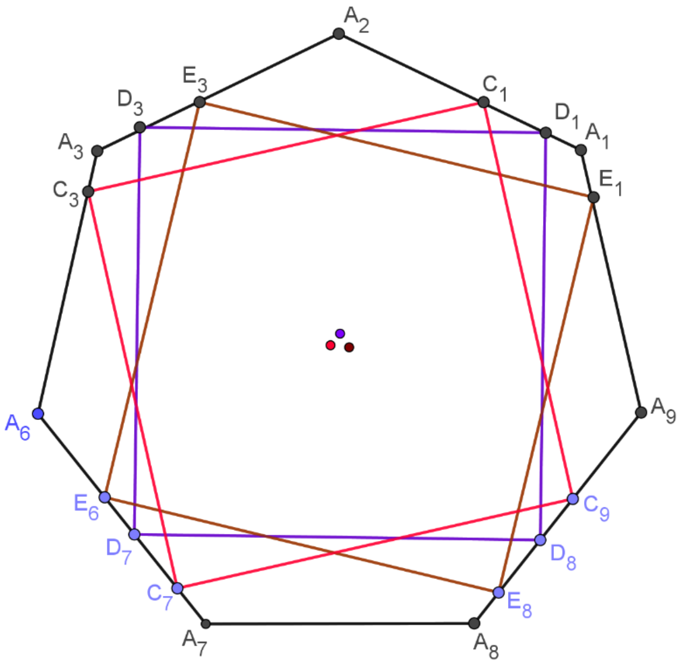


圖(十九)正五邊形內找到的所有正四邊形



圖(二十)正七邊形內找到的所有正四邊形

上圖中，看似有七個內接正四邊形，下圖(二十一)中，我們僅呈現其中三個，可觀察出正四邊形$C_1C_3C_7C_9$：可由$\overline{C_1C_9}$平行$\overline{A_1A_9}$所作；正四邊形$D_1D_3D_7D_8$:可由$\overline{D_7D_8}$平行$\overline{A_7A_8}$所作；正四邊形$E_1E_3E_6E_8$：可由$\overline{E_3E_6}$平行$\overline{A_3A_6}$所作。



圖(二十一)正七邊形的其中三內接正四邊形(全等)

(三)觀察結果整理

經由電腦繪圖及尺規作圖的觀察，我們得到以下猜測，整理如表一：

	4k	4k+1	4k+2	4k+3
有無內接正四邊形	有	有	有	有
有無與正 n 邊形共中心	有	無	有	無
有無與正 n 邊形共對稱軸	有	有	有	有
非全等內接正四邊形的個數	無限多個	1 個	1 個	1 個

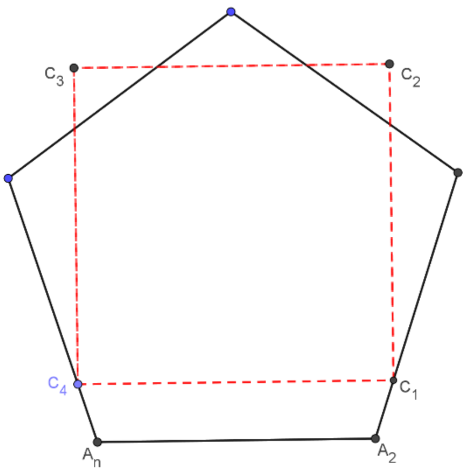
表(一)正 n 邊形內接正四邊形之結論

以下我們將以數學式驗證之。

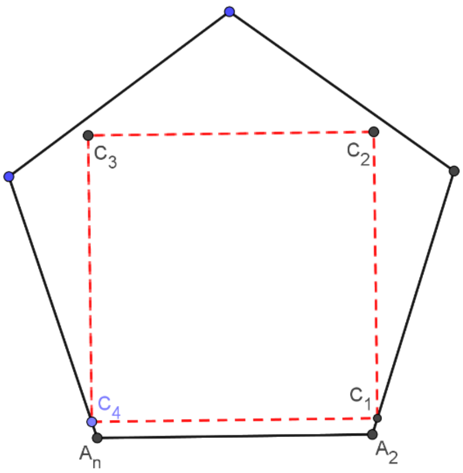
伍、研究方法與步驟(二)驗證

一、所有的正 n 邊形皆有內接正四邊形(存在性)

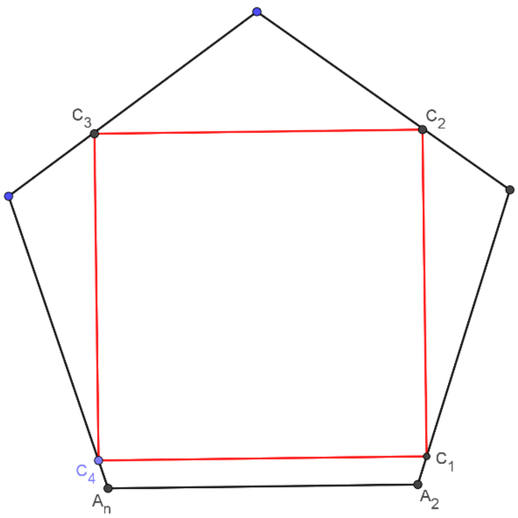
由上述平行法(P.6)，我們確定了內接正四邊形的兩頂點位置，即B_1在$\overline{A_{d+1}A_{d+2}}$上且$\overline{B_1B_4}//\overline{A_1A_n}$，當我們取輔助正四邊形$C_1C_2C_3C_4$並沿$\overline{A_{1+d}A_{2+d}}$移動$C_1$時(如圖(二十二)、圖(二十三))，此為一連續過程，故根據勘根定理，必可找到一個正四邊形$C_1C_2C_3C_4$(如圖(二十四))，使其另外兩頂點C_2、C_3亦落在正 n 邊形上，此正四邊形即為所求。



圖(二十二) C_1移動過程



圖(二十三) C_1移動過程



圖(二十四) 所求之內接正四邊形

二、正 n(n=4k)邊形有無限多個內接正四邊形

證：

在正 n 邊形(n=4k)中，

令$A_1(1,0)$

，$A_2(cos(\frac{360^o}{n}), sin(\frac{360^o}{n})) = (cos(\frac{90^o}{k}), sin(\frac{90^o}{k}))$ …..

，$A_i(cos(\frac{360^o(i-1)}{n}), sin(\frac{360^o(i-1)}{n}))$…… ，$A_n(cos(\frac{360^o(n-1)}{n}), sin(\frac{360^o(n-1)}{n}))$

取正四邊形頂點

$B_1(a\ \ cos(\theta), a\ \ sin(\theta)) = (\alpha, \beta)$，則

$B_2(a\,cos(90^o+\theta), a\,sin(90^o+\theta)) = (-a\,sin(\theta), a\,cos(\theta)) = (-\beta, \alpha)$

因為$\frac{n}{4} = \frac{4k}{4} = k$，故若取$B_1 \in \overline{A_1A_2}$，則$B_2 \in \overline{A_{k+1}A_{k+2}}$。其中

又$A_{k+1}(cos(\frac{360^o(k)}{n}), sin(\frac{360^o(k)}{n})) = (cos\,90°, sin\,90°) = (0,1)$，

$A_{k+2}(\cos(\frac{360^o(\text{k}+1)}{\text{n}}), sin(\frac{360^o(\text{k}+1)}{\text{n}}) = (-sin(\frac{90°}{\text{k}}), cos(\frac{90°}{\text{k}}))$，

$$\overleftrightarrow{A_1A_2}: y = \frac{sin(\frac{90°}{\text{k}})}{cos(\frac{90°}{\text{k}}) - 1} x - \frac{sin(\frac{90°}{\text{k}})}{cos(\frac{90°}{\text{k}}) - 1}$$

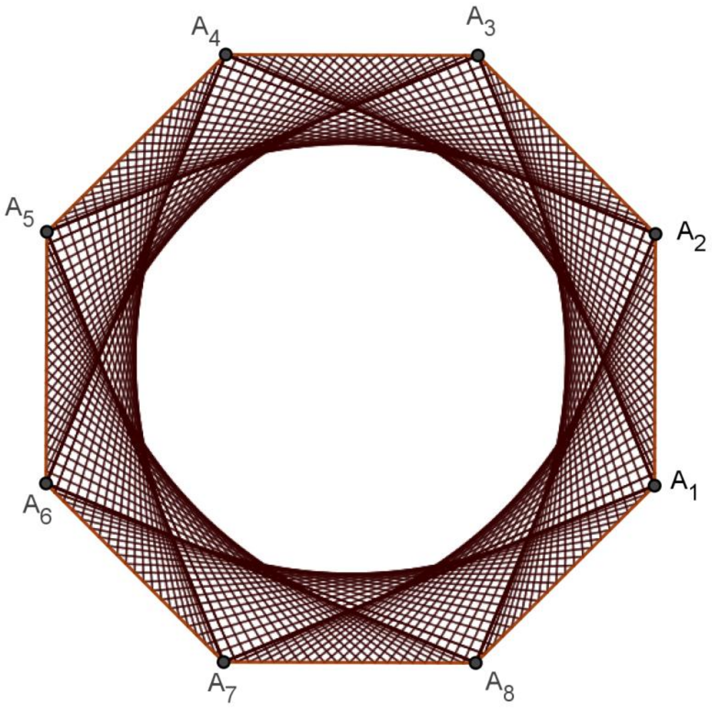
$$\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}: \text{y} = -\frac{cos(\frac{90°}{\text{k}})-1}{sin(\frac{90°}{\text{k}})} x + 1$$

$$\text{則}\begin{cases} \beta = \frac{sin(\frac{90^o}{k})}{cos(\frac{90^o}{k})-1}\alpha - \frac{sin(\frac{90^o}{k})}{cos(\frac{90^o}{k})-1} \ldots\ldots.(1) \\ \alpha = \frac{cos(\frac{90^o}{k})-1}{-sin(\frac{90^o}{k})}(-\beta) + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases} \qquad (*)$$

(1) 經整理後得 $\dfrac{\cos(\frac{90^o}{k})-1}{\sin(\frac{90^o}{k})}\beta = \alpha - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

其中(3)式經移項後與(2)式相同，故可知聯立方程式(*) 有無限多解，故正n邊形(n=4k)可作無限多個內接正四邊形。

又 $\overline{A_1B_1} = \sqrt{(1-a\ \cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}$ ；$\overline{A_{k+1}B_2} = \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (1-a\ \cos\theta)^2}$ ，故只要取 $\overline{A_1B_1} = \overline{A_{k+1}B_2}$ ，並以 B_1 、B_2 為兩頂點即可做出正 n 邊形(n=4k)的內接正四邊形。



圖(二十五)正八邊形內接正四邊形連續性(可作無限多個內接正四邊形)

三、正 n(n=4k+2)邊形只有一個與其共中心的內接正四邊形

(一) 確認與正 n(n=4k+2)邊形共中心的正四邊形的頂點位置

在正 n(n=4k+2)邊形中，

$A_1(1,0)$， $A_2(\cos\frac{360°}{n}, sin\frac{360°}{n})$...... $A_i(\cos\frac{360°(i-1)}{n}, sin\frac{360°(i-1)}{n})$

取正四邊形頂點$B_1(a\cos\theta, a\ sin\theta) \in \overline{A_k A_{k+1}}$，$\frac{360°(k-1)}{n} < \theta < \frac{360°k}{n}$

$$\text{則 } B_2(a\cos(\theta+90^o), a\sin(\theta+90^o)) \in \overline{A_x A_{x+1}} \text{，且}$$

$$\frac{360°(k-1)}{n} + 90° < \theta + 90° < \frac{360°k}{n} + 90°$$

因 n=4k+2，則$\frac{360^o(k-1)}{n}+90^o = \frac{360^o(k-1)+90^o(4k+2)}{n} = \frac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n}$

故$\frac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n} < \theta+90^o < \frac{360^o(2k+\frac{1}{2})}{n}$，又$B_2 \in \overline{A_x A_{x+1}}$，

所以$\frac{360^o(x-1)}{n} < \frac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n} < \theta+90^o < \frac{360^o(2k+\frac{1}{2})}{n} < \frac{360^o(x-1)}{n}$且 x 為正整數

得 x =2k 或 2k+1，故$B_2 \in \overline{A_{2k}A_{2k+1}}$或$\in \overline{A_{2k+1}A_{2k+2}}$

(二) 與正六邊形共中心的內接正四邊形只有一個

證：在正六邊形中，令$A_1(1,0)$，

$$A_2(\cos60°, \sin60°) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$A_3(\cos120°, \sin120°) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$A_4(\cos180°, \sin180°) = (-1,0)$$

$$A_5(\cos240°, \sin240°) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$A_6(\cos300°, \sin300°) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

正四邊形中，設$\overline{OB_1} = a$，$\angle B_1OA_1 = \theta$，

$$\text{則} B_1(a\ cos\theta, a\ sin\theta) = (\alpha, \beta)\ \epsilon \overline{A_1A_2}$$

$$B_2(a\cos(\theta+90°), a\sin(\theta+90°)) = (-a\ sin\theta, a\ cos\theta)$$

$$= (-\beta, \alpha)\ \epsilon \overline{A_2A_3} \text{或 } \overline{A_3A_4}$$

Case1. 若$B_2 \in \overline{A_2A_3}$，因為 $\overleftrightarrow{A_1A_2} : y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$$\overline{A_2A_3} : y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

則$\begin{cases}\beta = -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3} \\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，得 $\beta = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

故可以找到一個正四邊形，其 $a= \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{6 - \sqrt{3}}$

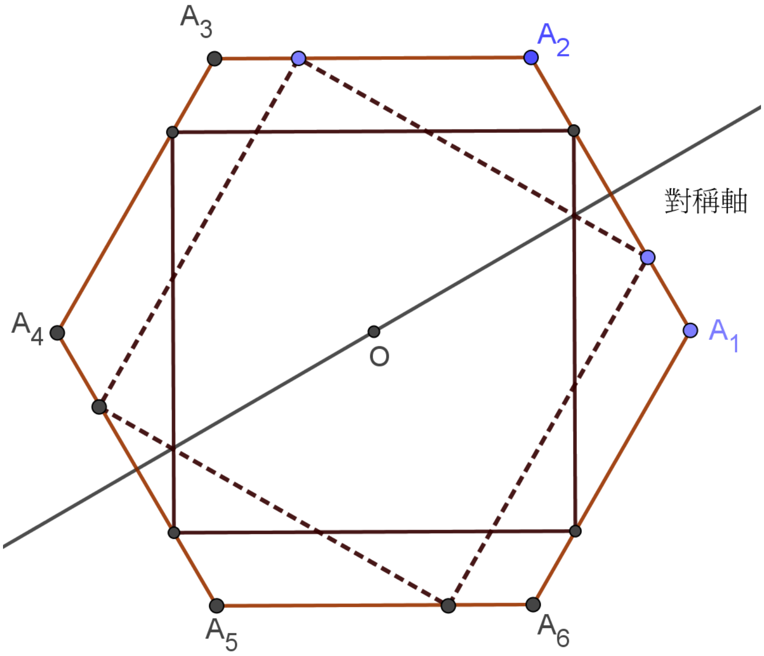
Case2. 若$B_2 \in \overline{A_3A_4}$，因為$\overleftrightarrow{A_1A_2} : y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$$\overline{A_2A_3}: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

則$\begin{cases}\beta = -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3} \\ \alpha = \sqrt{3}(-\beta) + \sqrt{3}\end{cases}$，得 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

故可以找到一個正四邊形，其 $a= \sqrt{(\frac{3-\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{3-\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{6 - \sqrt{3}}$

因 case1 和 case2 的半對角線一樣，故 case1 和 case2 的正四邊形為全等，故與正六邊形共中心的內接正四邊形只有一個。



圖(二十六)case1 和 case2 正四邊形內接情形(兩正四邊形為全等)

(三) 正六邊形無不共中心內接正四邊形

證：在正六邊形中， 令 $A_1(2,0)$ ，

$A_2(2\cos 60°, 2\sin 60°) = (1, \sqrt{3})$

$A_3(2\cos 120°, 2\sin 120°) = (-1, \sqrt{3})$

$A_4(2\cos 180°, 2\sin 180°) = (-2, 0)$

$A_5(2\cos 240°, 2\sin 240°) = (-1, -\sqrt{3})$

$A_6(2\cos 300°, 2\sin 300°) = (1, -\sqrt{3})$

中心(0,0)

若內接正四邊形四頂點分別為B_1、B_2、B_3、B_4，其中心$O'(a, b) \neq (0,0)$

設 $y=\mathrm{m}x+\mathrm{n}$為過O'之直線，分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$： $\mathrm{y}=-\sqrt{3}\mathrm{x}+2\sqrt{3}$ 和 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$：$\mathrm{y}=-\sqrt{3}\mathrm{x}-2\sqrt{3}$ 於B_1、B_3(如圖(二十七))

$\begin{cases} y=mx+n \\ \overleftrightarrow{A_3A_4}: y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3} \end{cases}$，得$B_1(\frac{2\sqrt{3}-n}{m+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}\mathrm{n}-6}{m+\sqrt{3}}+2\sqrt{3})$

$\begin{cases} y=mx+n \\ \overleftrightarrow{A_1A_6}: y=-\sqrt{3}x-2\sqrt{3} \end{cases}$，得$B_3(\frac{-2\sqrt{3}-n}{m+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}\mathrm{n}+6}{m+\sqrt{3}}-2\sqrt{3})$

B_1和B_3 中點(即正四邊形中心O')$=(\frac{-n}{m+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}\mathrm{n}}{m+\sqrt{3}})$

又過O'且和$\overleftrightarrow{B_1B_3}$垂直的直線為 $y=-\frac{1}{m}x+\frac{(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{m(m+\sqrt{3})}$，

交正六邊形於B_2、B_4

$\begin{cases} y=-\frac{1}{m}x+\frac{(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{m(m+\sqrt{3})} \\ y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3} \end{cases}$，得

$B_2(\frac{2\sqrt{3}m^2+6m+(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}, \frac{6m^2+6\sqrt{3}m+(3\mathrm{m}-\sqrt{3})\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}-2\sqrt{3})$

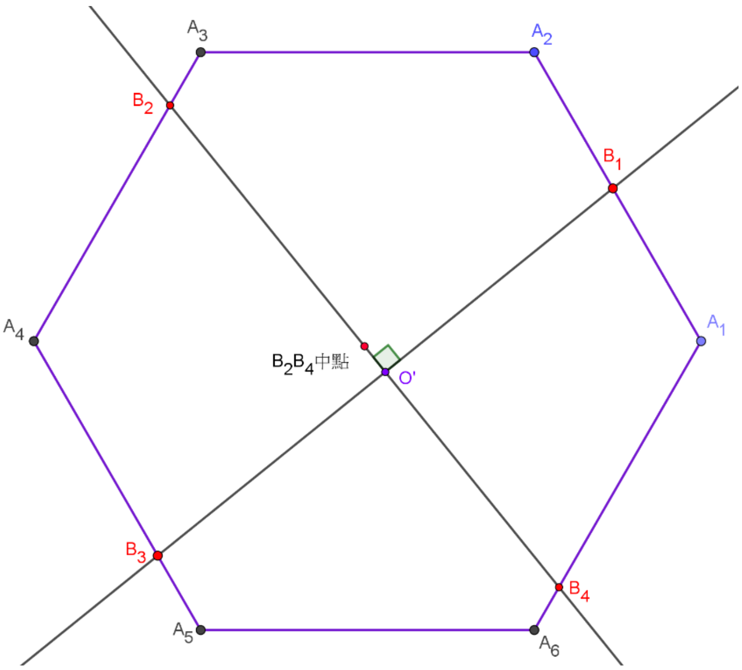
$\begin{cases} y=-\frac{1}{m}x+\frac{(\sqrt{3}m-1)n}{m(m+\sqrt{3})} \\ y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3} \end{cases}$，得

$B_4(\frac{-2\sqrt{3}m^2-6m+(\sqrt{3}m-1)n}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}m+1)}, \frac{-6m^2-6\sqrt{3}m+(3m-\sqrt{3})n}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}m+1)}+2\sqrt{3})$

B_2和B_4 中點 $\left(\frac{(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}, \frac{(3\mathrm{m}-\sqrt{3})\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}\right)$即$O'$

則$\begin{cases} \frac{-n}{m+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)} \\ \frac{\sqrt{3}\mathrm{n}}{m+\sqrt{3}}=\frac{(3\mathrm{m}-\sqrt{3})\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)} \end{cases}$，得 n=0

因 n=0，故正四邊形中心為(0 ,0)，必和正六邊形共中心。



圖(二十七)正六邊形的內接正四邊形是否與其共中心之示意圖

(四)正 n(n=4k+2)邊形無不共中心之內接正四邊形

證:

令$A_1(1,0)$，

$$A_2(cos(\frac{360^o}{n}),sin(\frac{360^o}{n}))=(cos(\frac{90^o}{k}),sin(\frac{90^o}{k}))\ldots\ldots$$

$$A_i(cos(\frac{360^o(i-1)}{n}),sin(\frac{360^o(i-1)}{n}))\ldots\ldots A_n(cos(\frac{360^o(n-1)}{n}),sin(\frac{360^o(n-1)}{n}))$$

設$y=mx+n$分別交$\overline{A_1A_2}(y=\frac{-\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}x+\frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}})$ 於B_1 及

$\overline{A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}}(y=\frac{-\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}x-\frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}})$於$B_3$

令$\frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}=a$ ，

$\begin{cases} y=mx+n \\ y=-ax+a \end{cases}$ ，得$B_1(\frac{n-a}{-a-m},\frac{-a(n+m)}{a-m})$

$\begin{cases} y=mx+n \\ y=-ax-a \end{cases}$ ，得$B_3(\frac{a+n}{-a-m},\frac{-a(n-m)}{-a-m})$

B_1和B_3 中點(即正四邊形中心$0'$)= $(\frac{n}{-a-m},\frac{-an}{-a-m})$

又過$0'$且和 $\overleftrightarrow{B_1B_3}$ 垂直的直線為 $y=-\frac{1}{m}x+\frac{(am+n)n}{m(a-m)}$，

交正 n 邊形於B_2、B_4

設B_2位於 $y=bx+c$ ，B_4位於 $y=bx-c$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m}x + \frac{(am-1)n}{m(a+m)} \\ y = bx + c \end{cases}，得B_2\left(\frac{-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}+c}{-\frac{1}{m}-b},\frac{-\frac{c}{m}-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}b}{-\frac{1}{m}-b}\right)，$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m}x + \frac{(am-1)n}{m(a+m)} \\ y = bx - c \end{cases}，得B_4\left(\frac{-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}-c}{-\frac{1}{m}-b},\frac{\frac{c}{m}-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}b}{-\frac{1}{m}-b}\right)$$

B_2和B_4 中點 $\left(\frac{(am+1)n}{(a+m)(1+mb)},\frac{(am+1)nb}{(a+m)(1+mb)}\right)$即$O'$

$$則\begin{cases} \frac{n}{-a-m} = \frac{(am+1)n}{(a+m)(1+mb)} \\ \frac{-an}{-a-m} = \frac{(am+1)nb}{(a+m)(1+mb)} \end{cases}$$

則 $n=0$，故正四邊形中心為(0 ,0)，必和正 n(n=4k+2)邊形共中心。

四、正 n(n=4k+1、4k+3)邊形只有一個與其不共中心的內接正四邊形

(一)沒有共中心之內接正四邊形

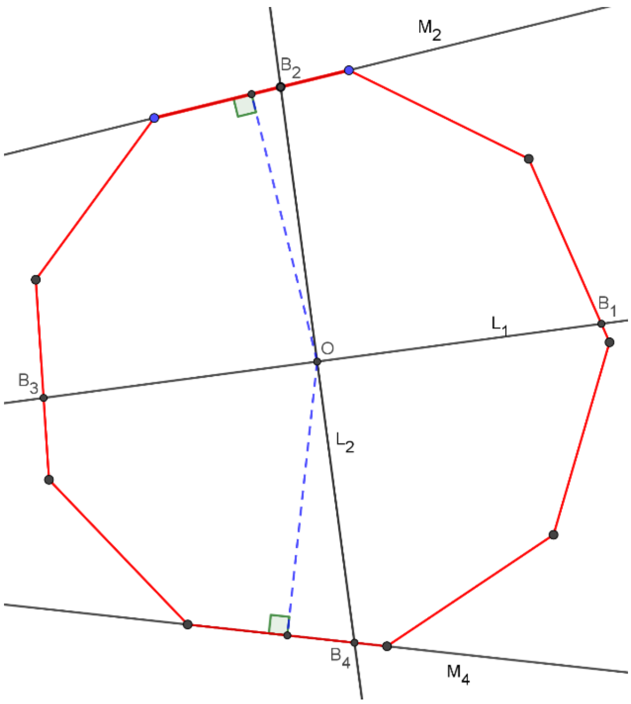
證: 設兩圖形共中心(0,0)，

則存在一直線過(0,0)且交正 n 邊形於B_1、B_3使$\overline{B_1O} = \overline{B_3O}$(半對角線)

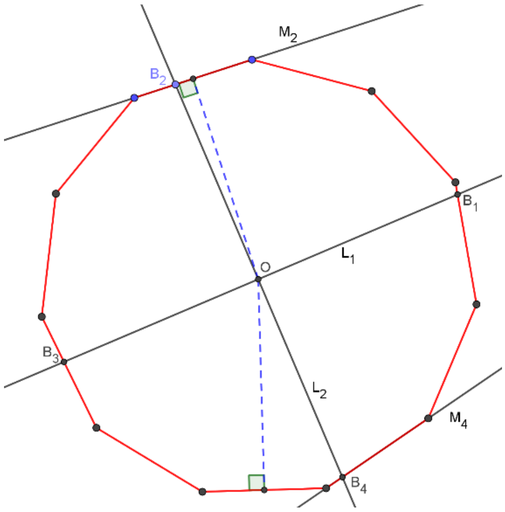
做一直線$L_2 \perp L_1$且過(0,0)，交正 n 邊形於B_2、B_4，使$\overline{B_2O} = \overline{B_4O} = \overline{B_1O} = \overline{B_3O}$

則正四邊形$B_1B_2B_3B_4$為內接正四邊形。

正 n 邊形中，B_2所在的邊定為M_2且B_4所在的邊定為M_4，如圖(二十八)、圖(二十九)：

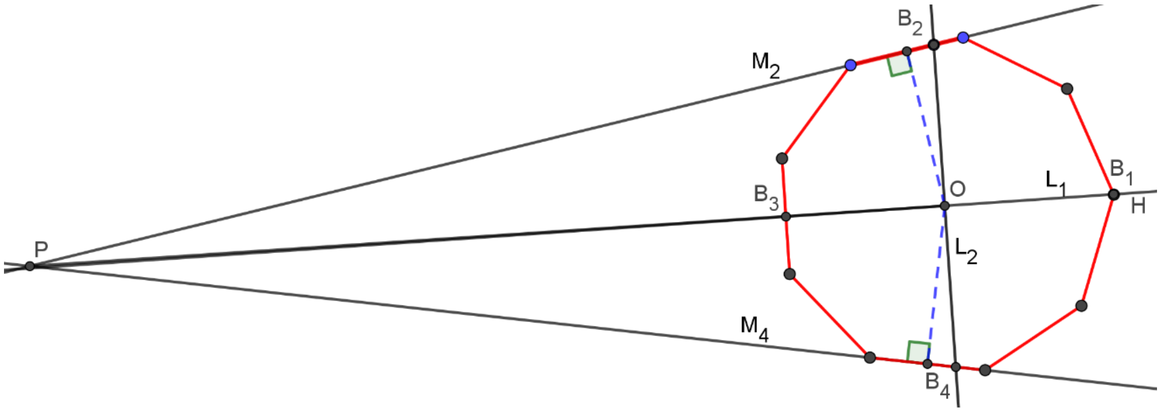


圖(二十八)正 n(n=4k+1)邊形示意圖，以正九邊形為例

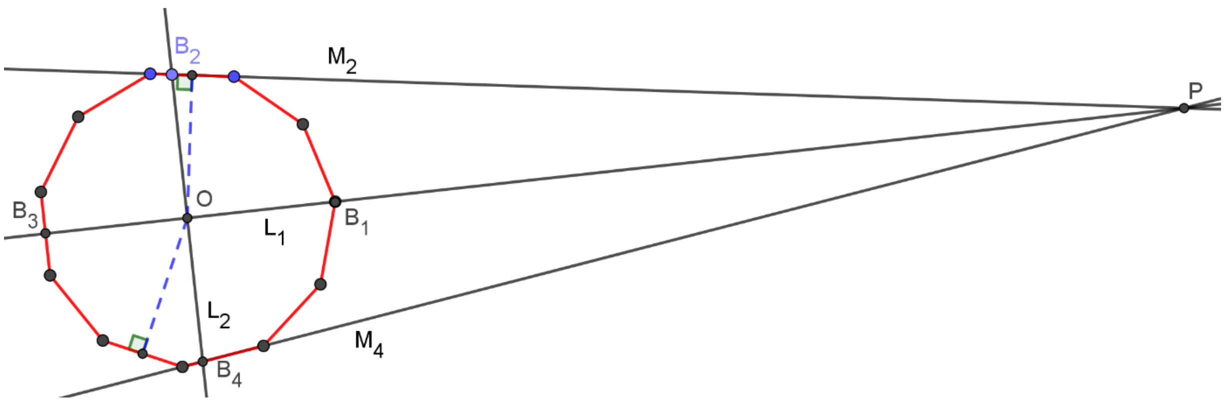


圖(二十九) 正 n(n=4k+3)邊形示意圖，以正十一邊形為例

$\because \overline{B_2O} = \overline{B_4O} \therefore d(O\,;M_2) = d(O\,;M_4)$ (即為圖中虛線段)
延伸M_2、M_4交於 P 點，連接$\overline{OP}$，
因為$d(O\,;M_2) = d(O\,;M_4)$，因此$\overline{OP}$必為正 n 邊形之角平分線(如圖(三十)、圖(三十一))，又正 n 邊形任取兩邊所作之角平分線必為其對稱軸(會過一頂點)，
故$\overline{B_1O} \neq \overline{B_3O}$(矛盾)
則正 n(n=4k+1、4k+3)邊形必無共中心之內接正四邊形。



圖(三十)正九邊形兩邊所作之角平分線必為其對稱軸



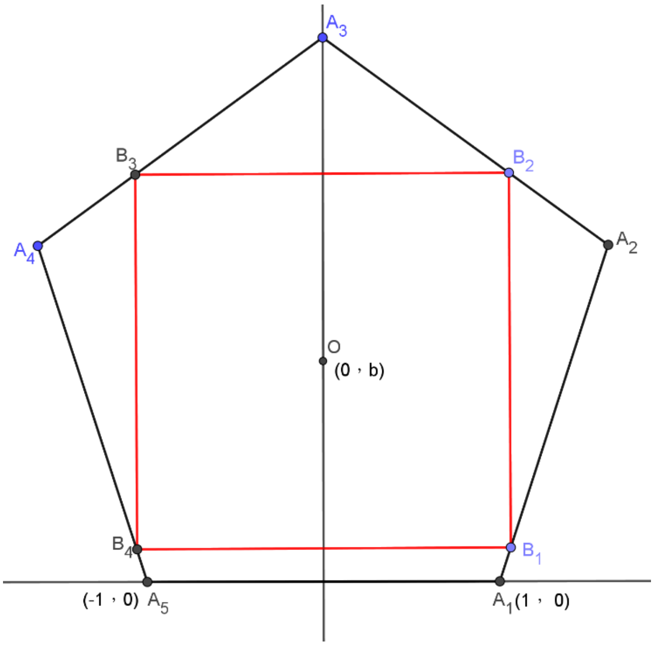
圖(三十一)正十一邊形兩邊所作之角平分線必為其對稱軸

(二) 內接正四邊形的中心在正 n 邊形的對稱軸上

由上述 四之(一) 的結論可知，當$\overline{B_2O}=\overline{B_4O}=\overline{B_1O}=\overline{B_3O}$，正四邊形的中心必在正 n 邊形的對稱軸上。

(三) 正五邊形只有一個內接正四邊形

證: 由(二)可知內接正四邊形的中心在正五邊形的對稱軸上



圖(三十二) 證明正五邊形只有一個內接正四邊形示意圖

如圖(三十二)，假設對稱軸為 y=0， $A_1(1,0)$、$A_5(-1,0)$在 x 軸上、正四邊形中心為O_2(0,b)，則正五邊形中心為$O_1(0\,,tan54°)$、$A_3(0,tan54°+sec54°)$

$B_1(x_1,y_1)\in\overleftrightarrow{A_1A_2}$ $:y=\tan72^\circ x-\tan72^\circ$

$B_2(x_2,y_2)\in\overleftrightarrow{A_2A_3}$ $:y=-\tan36^\circ x+tan54°+sec54°$

$B_3(x_3,y_3)\in\overleftrightarrow{A_3A_4}$ $:y=\tan36^\circ x+tan54°+sec54°$

$B_4(x_4,y_4)\in\overleftrightarrow{A_4A_5}$ $:y=-\tan72^\circ x-\tan72^\circ$

又 $\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}=0$，$\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}$=b

則$x_1=-x_3$，$x_2=-x_4$ ，$y_1+y_3=y_2+y_4$

$y_1=\tan72^\circ x_1-\tan72^\circ$

$y_2=-\tan36^\circ x_2+tan54°+sec54°$

$y_3=-\tan36^\circ x_1+tan54°+sec54°$

$y_4=\tan72^\circ x_2-\tan72^\circ$

則 $\tan72^\circ x_1-\tan72^\circ+\ -\tan36^\circ x_1+tan54°+sec54°=$

$-\tan36^\circ x_2+tan54°+sec54°+\ \tan72^\circ x_2-\tan72^\circ$

得$x_1=x_2$，故 $x_1=x_2=-x_3=-x_4$，且 $y_1=y_4$ (表$\overline{B_1B_4}//\overline{A_1A_5}//x$軸)

又 $\overline{B_1B_4}=x_1-x_4=\overline{B_1B_2}=y_2-y_1$

$$2x_1=-\tan 36^o\cdot x_2+\tan 54^o+\sec 54^o-\tan 72^o\cdot x_1-\tan 72^o$$

得 $x_1=\dfrac{\tan 54^o+\sec 54^o-\tan 72^o}{2+\tan 36^o+\tan 72^o}$ 為唯一解，故中心在對稱軸上的內接正四邊形只有一個。

(四) 正 n(n=4k+1,4k+3)邊形只有一個內接正四邊形

證：由(二)可知內接正四邊形的中心在正 n 邊形的對稱軸上，假設正 n 邊形的對稱軸為 x=0， $A_1(1,0)$、$A_n(-1,0)$ 在 x 軸上、正四邊形中心為O_2(0,b)。

設內接正四邊形四個頂點分別為 $B_1(x_1,y_1)$ 、 $B_2(x_2,y_2)$ 、 $B_3(x_3,y_3)$ 、 $B_4(x_4,y_4)$ ，

且 $\dfrac{x_1+x_3}{2}=\dfrac{x_2+x_4}{2}=0$ 、 $\dfrac{y_1+y_3}{2}=\dfrac{y_2+y_4}{2}=b$ ，得 $x_1=x_2=-x_3=-x_4$，又正 n 邊形以 y=0 為對稱軸(故左右對稱)，則 B_1 和 B_4 對稱於 y 軸，故 $y_1=y_4$，同理 $y_2=y_3$；

若B_1交正 n 邊形於直線M_1 ：$y=m_1x+b_1$上、

B_2 交正 n 邊形於直線M_2 ：$y=m_2x+b_2$上、

B_3交正 n 邊形於直線M_3 ：$y=-m_2x+b_2$ 上、

B_4 交正 n 邊形於直線M_4 ：$y=-m_1x+b_1$上

（註：根據對稱性，不難假設 M_1、M_2、M_3、M_4）

又$\overline{B_1B_2}=\overline{B_1B_4}$，故 $y_2-y_1=x_1-x_4=2x_1$，推得 $m_2x_2+b_2-m_1x_1-b_1=2x_1$ ，故

$x_1=\dfrac{b_2-b_1}{2+m_1-m_2}$ 為唯一解，故正 n(n=4k+1,4k+3)邊形只有一個內接正四邊形。

(五)勘跟定理證明

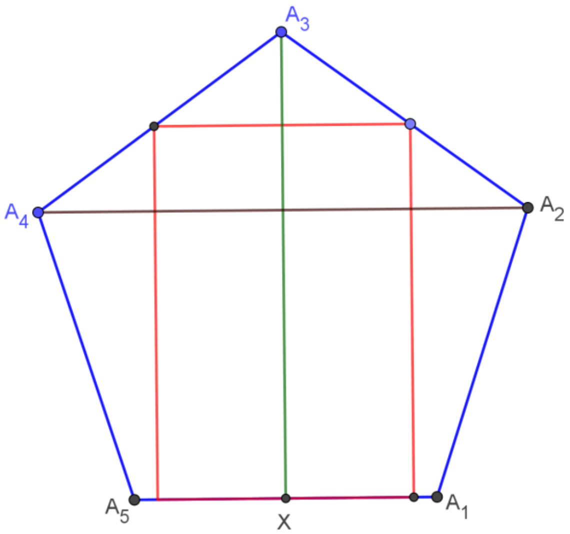
我們在正 n 邊形內接一長方形，其中平形底邊的邊稱為寬，垂直底邊的邊稱為長。

定義f(x) = 長 − 寬 ，以圖(三十三)為例，

當長方形頂點在A_3和 X(A_1和A_5中點)時，長為最大，且寬為零，f(x) > 0，

當長方形頂點在A_2和A_4時，長為零，寬為最大，f(x) < 0，

則 $-(\overline{A_2A_4}$線段長) ≤ f(x) ≤ $\overline{A_3X}$線段長 ，因此必存在一點為f(x) = 0 (長=寬)，即為一內接正四邊形。



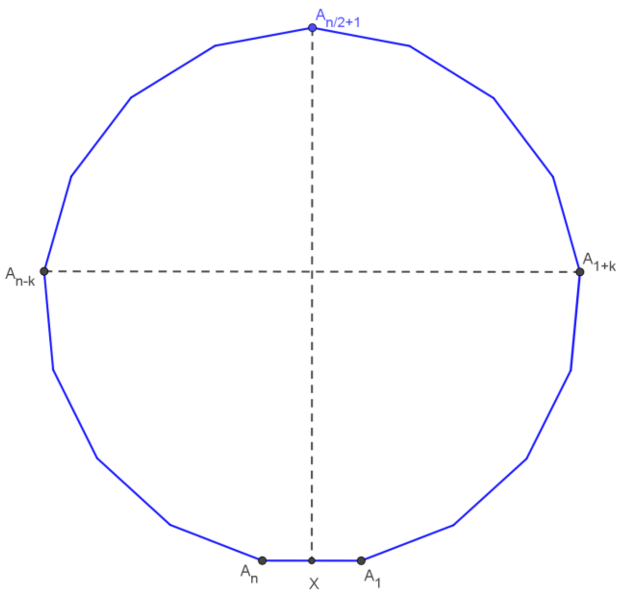
圖(三十三)勘跟證明示意圖

1.正 n(n=4k+1 或 4+3)邊形

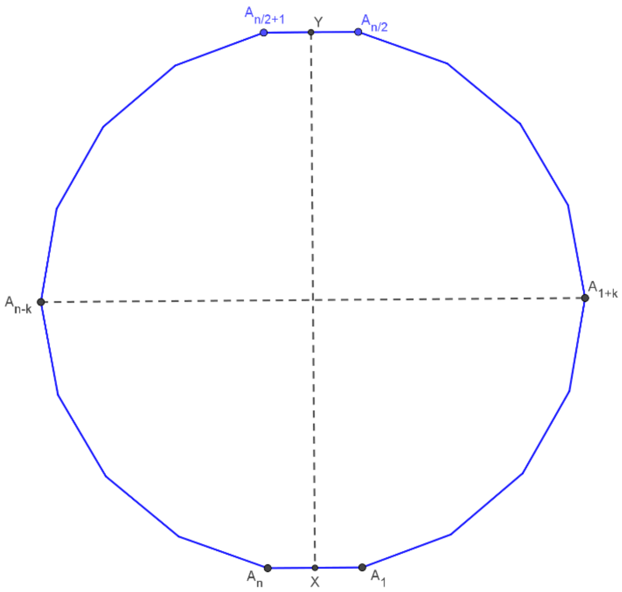
$$-\left(\overline{A_{1+k}A_{n-k}}\text{ 線段長}\right) \le f(x) \le \overline{A_{\frac{n}{2}+1}X}\text{ 線段長}$$

2. 正 n(n=4k 或 4+2)邊形

$$-\left(\overline{A_{1+k}A_{n-k}}\text{ 線段長}\right) \le f(x) \le \overline{XY} = \overline{A_1A_{\frac{n}{2}}}\text{ 線段長}$$



圖(三十四)正 n(n=4k+1 或 4+3)邊形情形



圖(三十五)正 n(n=4k 或 4+2)邊形情形

陸、研究結果

一、所有正 n 邊形皆有內接正四邊形。

二、正 n 邊形與內接正四邊形共對稱軸。

三、正 n 邊形的內接正四邊形之相異處：

	4k	4k+1	4k+2	4k+3
有無與正 n 邊形共中心	有	無	有	無
非全等內接正四邊形的個數	無限多個	1 個	1 個	1 個

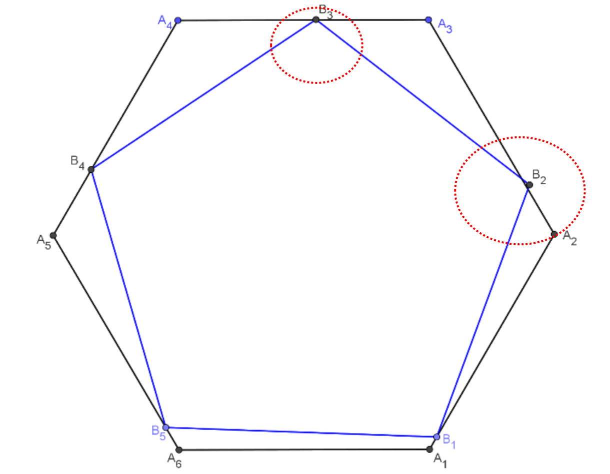
表(二)正 n 邊形內接正四邊形之結論

四、可利用同一尺規作圖「平行法」在所有正 n 邊形內找到一內接正四邊形。

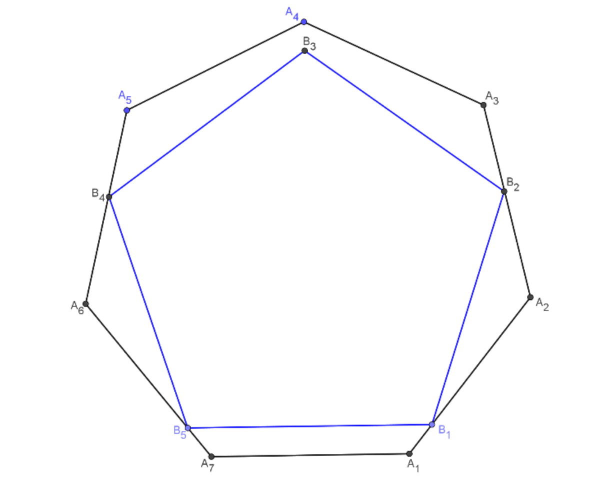
柒、討論與未來展望

在中華民國第 54 屆中小學科展 <探討正 n 邊形內接正三角形>中提到，正 n 邊形的內接正三角形有無限多個，而我們的研究發現，除了在 n=4k 時有無限多個內接正四邊形外，其餘皆只有一個(即有「唯一性」)，實際上，我們本來的想像是可能可以作出很多個，只是大小不同，這裡的唯一性，讓我們覺得驚奇，於是我們嘗試先用電腦軟體繪圖觀察正 n 邊形內接正 m(m>4)邊形的情況，起初我們想像只要位置喬的夠好，應該可以將正 m 邊形塞入正 n 邊形中，但經過我們移動圖形後發現：

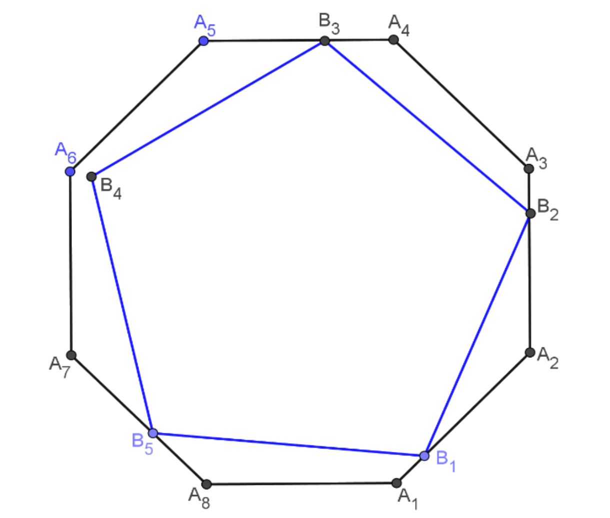
一、內接正五邊形：除了 n 為五的倍數外，並無法作出圖形，如下表(三)



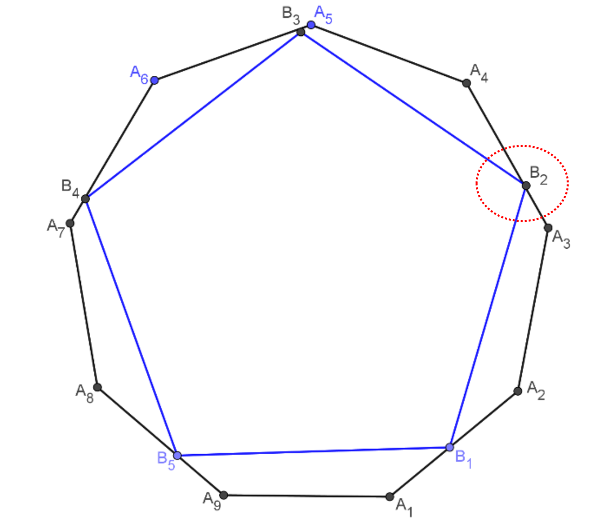
圖(三十六)正六邊形內接正五邊形(無內接)



圖(三十七)正七邊形內接正五邊形(無內接)



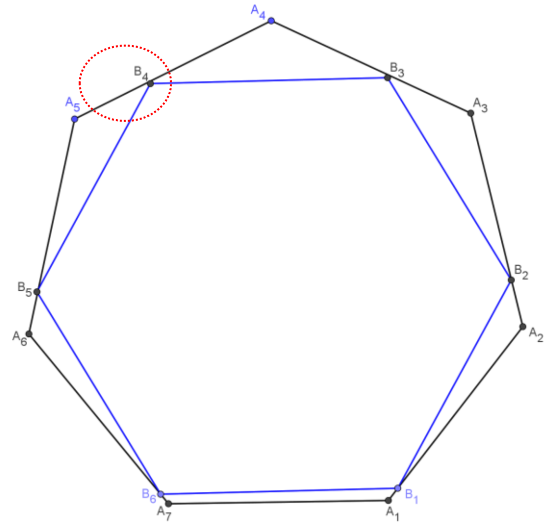
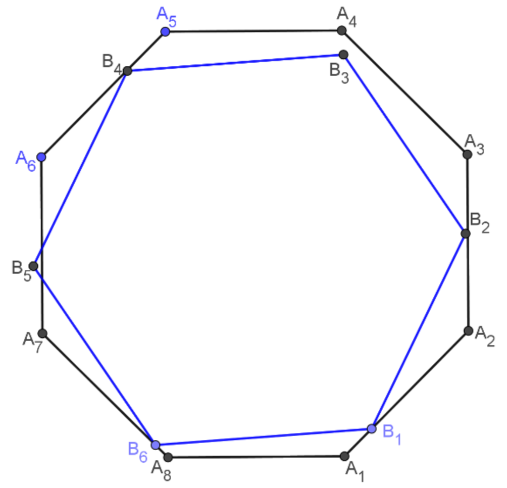
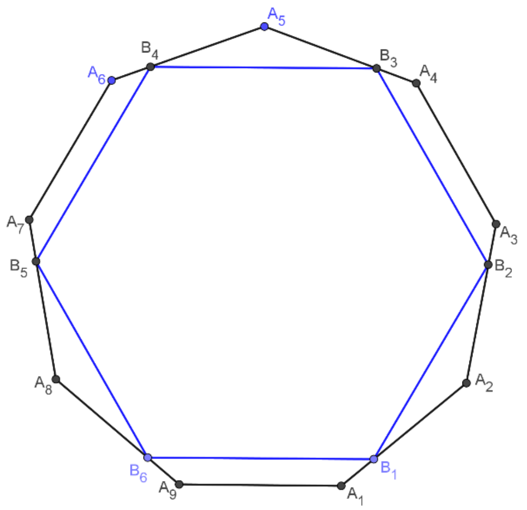
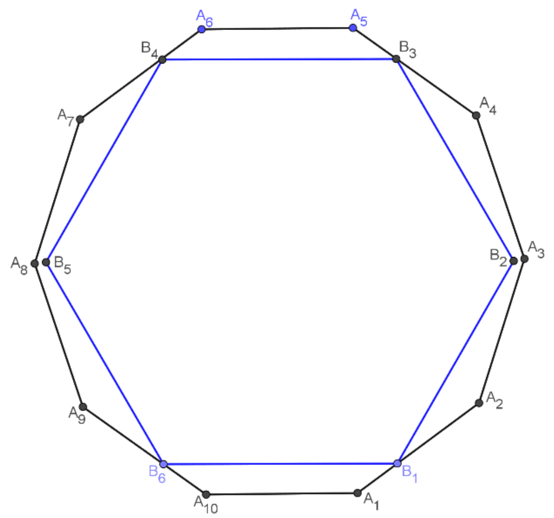
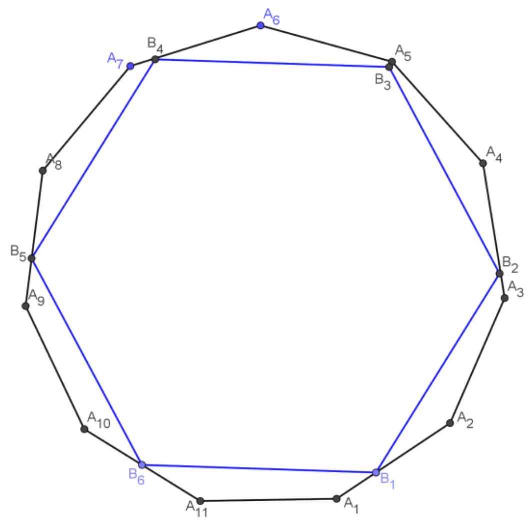
圖(三十八)正八邊形內接正五邊形(無內接)



圖(三十九)正九邊形內接正五邊形(無內接)

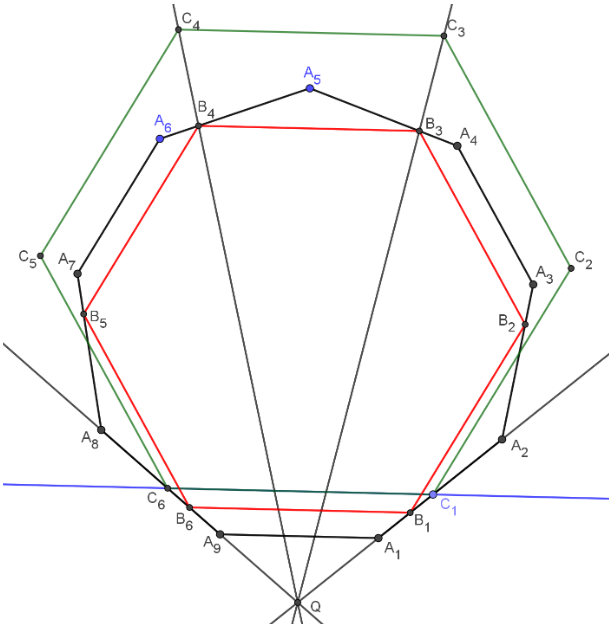
表(三) 嘗試在正六、七、八、九邊形內接正五邊形

二、內接正六邊形：除了 n 為六的倍數以及 n=9 外，n=7,8,10,11 皆無法成功畫出其他內接正多邊形，如下表(四)：

 圖(四十)正七邊形內接正六邊形(無內接)	 圖(四十一)正八邊形內接正六邊形(無內接)
 圖(四十二)正九邊形內接正六邊形(有內接)	 圖(四十三)正十邊形內接正六邊形(無內接)
 圖(四十四)正十一邊形內接正六邊形(無內接)	

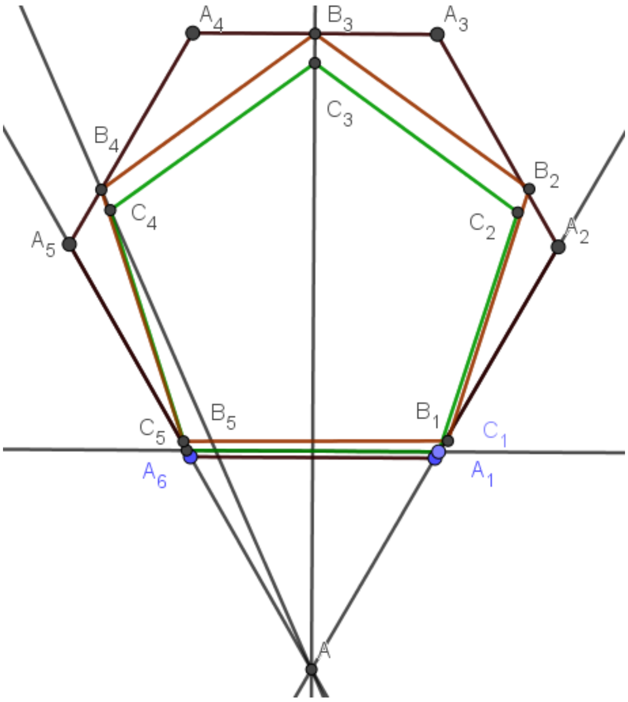
表(四) 嘗試在正七、八、九、十、十一邊形內接正六邊形

三、平行法的推廣：由本篇討論的作圖中，我們知道若正 n 邊形與其內接正 m 邊形有一組平行邊，則可以使用平行法作法，而在上述我們僅發現在正九邊形中可以內接正六邊形，且有一組平行邊，於是嘗試使用平行法作圖，找尋內接正六邊形的頂點時，我們修正 $d=\left[\dfrac{\frac{n}{m}-1}{2}\right]$，其中[ ]為高斯記號，作圖如下(圖(四十五))：



圖(四十五)以平行法在正九邊形內接正六邊形(可內接)

（註：一開始我們是想把平行法推廣到 m>4 的情況，所以嘗試以平行法繪製 n=6、m=5 的圖，如圖(四十五)，發現失敗了，所以回過頭用繪圖觀察，發現了上述表(三)、表(四)的狀況）



圖(四十六)以平行法嘗試在正六邊形內接正五邊形(無法內接，B_2 不在正六邊形上)

四、未來展望：而除了在 n 和 m 具有倍數關係的情形時，正 n 邊形可以作出無限多個內接正 m 邊形外，其他還有哪些可以作出內接圖形呢？而這些圖形的 m,n 有何關聯？其內接的正 m 邊形又有幾個呢？是無限多個？(若有無限多個，其共同性質為何？) 亦或是只有一個呢？(若只有一個，其共同性質為何？)，另外有內接正 m 邊形的情況中，有哪些是可以使用平行法作圖的呢？這些都是值得我們繼續探討的問題。

捌、參考資料

一、中華民國第 54 屆中小學科展 **<探討正 n 邊形內接正三角形>**

二、羅驥韡。**GeoGebra 幾何與代數的美麗邂逅(第二版)**。臺北市:五南。2017

三、盧建民、蔡盛鴻、盧家潔、李姿樺。**難題剋星（13）幾何圖形與尺規作圖**。高雄市:前程出版社。(2008)

【評語】010012

本作品探討正ｎ邊形內接正四邊形之所有情形，除了ｎ恰為４的倍數時有無窮多個內接正四邊形，其餘狀況皆只有一個，並給出一個「平行法」的尺規作圖作出內接四邊形。整個作品的呈現，邏輯清晰，結論也很完整，若能推廣到其他情形，內容會更加豐富。