2020 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010009

參展科別　數學

作品名稱　二元 3 平衡 n 字串之排列數探討

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　臺中市立臺中第一高級中學

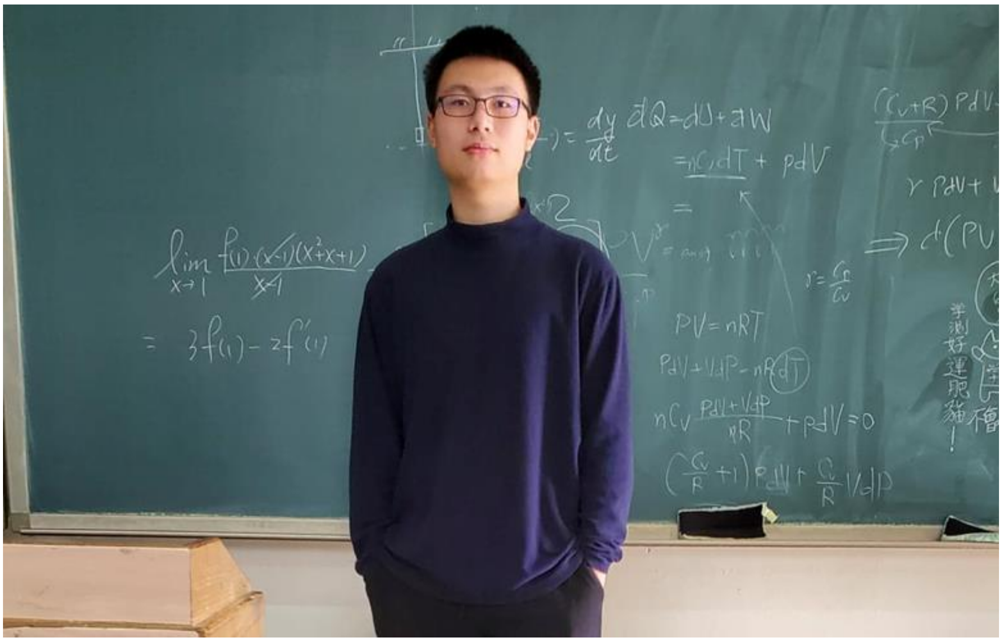
指導教師　董展宏

作者姓名　曹瑋、李謙

關鍵詞　字串、階差數列、排列組合

作者簡介

我是曹瑋，就讀臺中一中三年 22 班，我喜歡思考、喜歡運動，也喜歡和朋友聊天。在科展的日子裡，最享受的是不設限的思考過程以及和夥伴老師討論想法的時光，雖然遇到很多的瓶頸，但也瞭解到研究的困難，更感受到想出解決辦法或發現美麗性質瞬間的欣喜與感動。研究，散發著一種探索未知的魅力，吸引我不斷地沉浸在其中。這兩年的科展是我高中難忘且珍貴的回憶！



我是李謙，就讀於台中一中三年22班，目前參與高中科學班計畫，自進入高中便進行數學專題的相關研究，也因此發現了平衡字串的諸多性質，成為這次科展的主題。在研究的過程中我們遇到了許多瓶頸，即便到了最終仍有一些難以破解的結果，然而我們也因此發展出了自創的理論模型，以及許多獨創的公式，我認為是極具有意義的。

摘要

本研究旨在探討由 0 與 1 組成長度為 n 的二元字串中滿足000-子字串數和111-子字串數相同（稱為平衡）之排列方法數。我們分成 3 個部分來探討：一、首先我們利用程式計算二元 3 平衡 n 字串和二元 3 非平衡 n 字串的個數，並觀察在不同 n 值下，平衡與非平衡字串個數之規律性；二、接著我們發現非平衡字串個數在000-子字串和111-子字串之差值為一固定形式時，不同長度之字串符合個數會形成一階差數列，我們對此猜測提出證明並嘗試利用此性質推導出二元 3 平衡 n 字串個數之一般式；三、最後探討二元 3 平衡 n 字串個數之成長速度，推論當 n 值極大時，二元 3 平衡 $n+1$ 字串的個數大約為二元 3 平衡 n 字串的個數的 2 倍。同時，我們也將 3 平衡推廣至 r 平衡，提出一些相關的結果。

Abstract

This research is aimed at exploring the number of binary n-strings which satisfy that in the strings, the number of 000-substrings is equal to the number of 111-substrings(which we call binary 3-balanced n-string).In this study, we investigate it from the following three parts: First, we calculate the number of 3-balanced n-strings and 3-nonbalanced n-strings by using the program, and observe the regularity of these numbers when we change the number n. Second, through the results, we find that the number of satisfying strings with different length would compose an arithmetic progression of high order when the deviation of the number of 000-substrings and 111-substrings is in a fixed form. In this phase, we prove the property above and, by using this property, we try to derive the general expression of the number of 3-balanced n-strings. Third, we look into the growing speed of the number of 3-balanced n-strings. We thus make an inference that the number of 3-balanced (n+1)-strings would be approximately two times as many as that of 3-balanced n-strings when n approach infinity. Besides, we generalize some property from 3-balanced n-string to r-balanced n-string, and present some related results.

一、　前言

(一) 研究動機

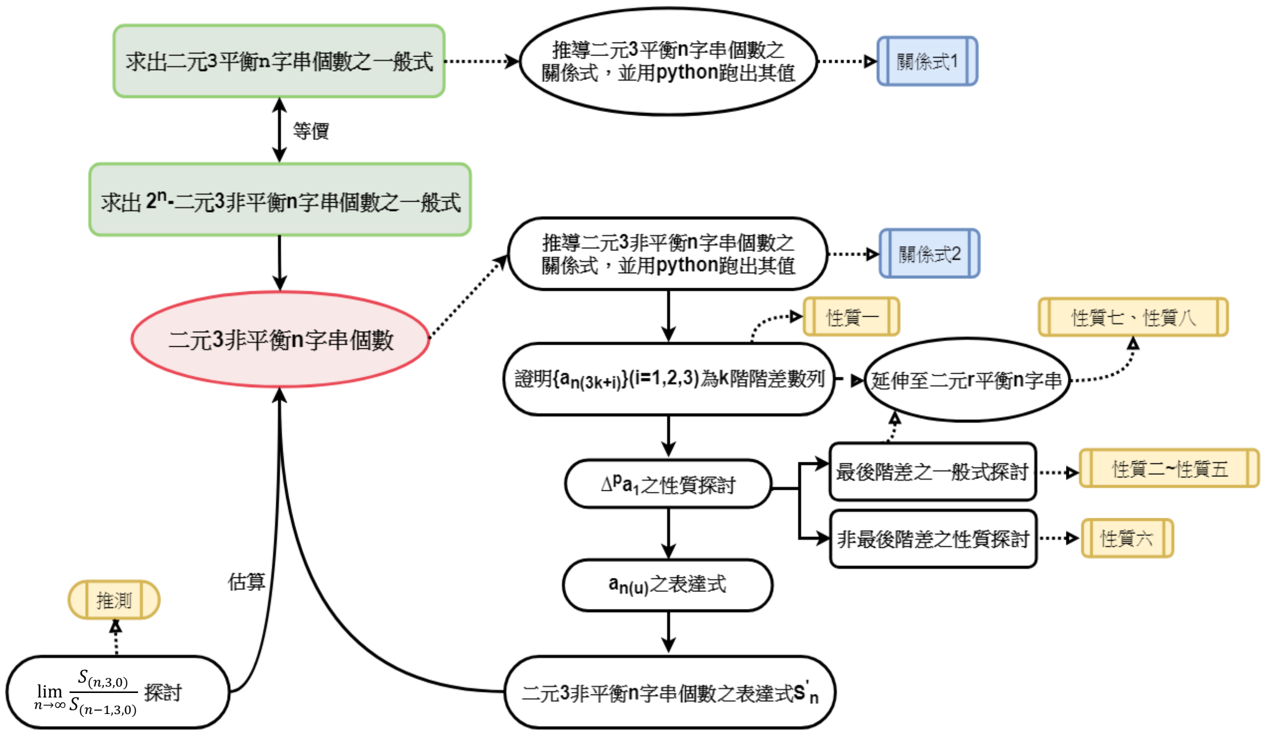
在 100 學年度全國高中數學能力競賽的題目中，有一道題目內容如下：「由 0, 1 排成長度 n 的字串，稱為二元 n 字串。若一個二元 n 字串中出現字串 00 和字串 11 的個數一樣多，則稱為長度 n 的二元平衡字串。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，已知 $a_1 = a_2 = a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ a_5 = 6$，試求 a_n 的一般公式。」但題目給出的解法卻是特例解，只有在 00-子字串, 11-子字串平衡的狀況下才適用，因此我們便想要改變作法，試圖用一個一般化的解法來處理這個問題。此外，我們也想將此問題拓展，討論在 000-子字串,111-子字串平衡時，n 位數列排列之符合個數是否也有一般解，也就是二元 3 平衡 n 字串個數是否有一般式。因此，我們便展開了一段有趣的數學研究之旅。

(二) 研究目的

1. 原題目之非特例解。
2. 二元 3 平衡 n 字串之關係式探討。
3. 二元 r 平衡 n 字串在滿足字串中無連續 r 個 0 或連續 r 個 1 時之個數遞迴式探討。
4. 二元 3 非平衡 n 字串之關係式探討。
5. 觀察二元 3 非平衡 n 字串在改變 000-子字串及 111-子字串之差值或字串之長度時，符合個數彼此間有何性質存在？
6. 階差數列中各階階差首項值之求解過程與性質。
7. 將第五點推廣至二元 r 非平衡 n 字串。
8. 二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,i,0)}}{S_{(n-1,i,0)}}$ (i = 2,3) 探討，其中$S_{(n,i,0)}$代表長度為n的字串中滿足i-0-子字串(連續i個 0 所形成的子字串)與i-1-子字串(連續i個 1 所形成的子字串)數目相同的個數。

二、　研究方法或過程

(一) 研究架構



(二) 先備知識

1. 組合數與費氏數列$\{F_n\}$之恆等式

恆等式 1 $$C_0^n + C_1^{n-1} + \cdots + C_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{\left[\frac{n+3}{2}\right]} + C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_i^{n-i} = F_{n+1},\ \ n \geq 1$$

【證明】

以下利用數學歸納法來證明此恆等式。

1. 當 $n = 1$ 時，$C_0^1 = 1 = F_2$
2. 當 $n = 2$ 時，$C_0^2 + C_1^1 = 2 = F_3$
3. 設 k 是正整數，且$k \geq 2$。證明：若 $n = k$、$n = k - 1$ 時原式成立，則

   $n = k + 1$ 時原式亦成立。

   假設 $n = k$，$n = k - 1$ 時原式成立，考慮 $n = k + 1$ 時情形：

(1) $k+1$ 為偶數時

$$\mathrm{C}_0^{k+1}+\mathrm{C}_1^{k}+\cdots+\mathrm{C}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+4}{2}\right]}+\mathrm{C}_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]}=\mathrm{C}_0^{k+1}+\mathrm{C}_1^{k}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+3}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+1}{2}}$$

$$=\mathrm{C}_0^{k}+\left(\mathrm{C}_0^{k-1}+\mathrm{C}_1^{k-1}\right)+\cdots+\left(\mathrm{C}_{\frac{k-3}{2}}^{\frac{k+1}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}}\right)+\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}}$$

$$=\left(\mathrm{C}_0^{k}+\mathrm{C}_1^{k-1}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}}\right)+\left(\mathrm{C}_0^{k-1}+\mathrm{C}_1^{k-2}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{k-3}{2}}^{\frac{k+1}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\mathrm{C}_i^{k-i}+\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\mathrm{C}_i^{k-1-i}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\mathrm{C}_i^{k-i}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\mathrm{C}_i^{k-1-i}=F_{k+1}+F_k=F_{k+2}.$$

(2) $k+1$ 為奇數時

$$\mathrm{C}_0^{k+1}+\mathrm{C}_1^{k}+\cdots+\mathrm{C}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+4}{2}\right]}+\mathrm{C}_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]}=\mathrm{C}_0^{k+1}+\mathrm{C}_1^{k}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k+4}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+2}{2}}$$

$$=\mathrm{C}_0^{k}+\left(\mathrm{C}_0^{k-1}+\mathrm{C}_1^{k-1}\right)+\cdots+\left(\mathrm{C}_{\frac{k-4}{2}}^{\frac{k+2}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k+2}{2}}\right)+(\mathrm{C}_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}})$$

$$=\left(\mathrm{C}_0^{k}+\mathrm{C}_1^{k-1}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k+2}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}\right)+\left(\mathrm{C}_0^{k-1}+\mathrm{C}_1^{k-2}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{k-4}{2}}^{\frac{k+2}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k}{2}}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}}\mathrm{C}_i^{k-i}+\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\mathrm{C}_i^{k-1-i}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\mathrm{C}_i^{k-i}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\mathrm{C}_i^{k-1-i}=F_{k+1}+F_k=F_{k+2}.$$

綜合步驟1、2、3，由數學歸納法得證原式成立。

2. 階差數列的定義

「階差數列」又名高階等差數列，其定義如下：「設 $\{a_n\}$ 是一個給定的數列，定義 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n,\ n=1,2,3\ldots$，稱$\{\Delta a_n\}$為 $\{a_n\}$ 的一階等差數列，定義$\Delta^2 a_n=\Delta(\Delta a_n),\ \mathrm{n}=1,2,3\ldots$，稱它為 $\{a_n\}$ 的二階等差數列，一般定義$\Delta^k a_n=\Delta(\Delta^{k-1}a_n),$ $n=1,2,3\ldots$， k 為自然數，稱它為 $\{a_n\}$ 的 k 階等差數列。設 $\{a_n\}$ 是一個給定的數列，若其 p 階等差數列 $\{\Delta^p a_n\}$ 是一非零的常數數列，而 $p+1$ 階等差數列 $\{\Delta^{p+1}a_n\}$ 是零數列，就稱 $\{a_n\}$ 是一個 p 階等差數列。」[參考資料-二]

3. p 階等差數列之組合公式表達

p 階等差數列的通項可表示為

$$a_n=a_1+\Delta a_1 C_1^{n-1}+\Delta^2 a_1 C_2^{n-1}+\cdots+\Delta^p a_1 C_p^{n-1}$$ [參考資料-二]

4. 差分關係式

組合數之差分關係式

$$\Delta C_p^n=C_p^{n+1}-C_p^n=C_{p-1}^n$$ [參考資料-三]

(三) **名詞定義**

1. 區塊($block$)：一個二元 n 字串由一或多個區塊組成，每個區塊內所有的字元均相同，且與每個區塊相鄰的左右兩個字元均與該區塊內所有的字元相異。在此令由 k 個字元組成的區塊記做 $k-block$，由 α 個 0 組成的區塊記做$\alpha-0-block$ (1 個 0 組成的區塊記做 $0-block$，2 個 0 組成的區塊記做 $00-block$)，同理，由 β 個 1 組成的區塊記做 $\beta-1-block$ (1 個 1 組成的區塊記做 $1-block$，2 個 1 組成的區塊記做 $11-block$)。
2. $l_k(0)$表示在二元 n 字串中k-0-子字串的數目， $l_k(1)$ 表示在二元 n 字串中k-1-子字串的數目。(例如：10011010001, $l_2(0)=3,\ l_3(0)=1,\ l_2(1)=1$)。
3. 二元 r 平衡 n 字串表示二元 n 字串中滿足 $l_r(0)=l_r(1)$ 的字串(以下二元 n 字串中滿足 $l_2(0)=l_2(1)$ 簡稱為二元平衡 n 字串)
4. $S_{(n,r,m)}$表二元 n 字串滿足 $|l_r(0)-l_r(1)|=m$ 之個數

三、 研究結果

(一) 原題目之非特例解

定理一
二元平衡 n 字串個數之一般式為 $\begin{cases} S_{(1,2,0)}=S_{(2,2,0)}=2 \\ S_{(n,2,0)}=2C^{n-2}_{\left[\frac{n}{2}\right]-1},\ n\geq 3 \end{cases}$

【證明】

將二元 n 字串分成 a 個區塊，限制 0 只能放入奇數區塊(從最左邊算起)，1 只能放入偶數區塊內。依對稱性可知，其符合條件之方法數會與 1 放入奇數區塊，0 放入偶數區塊之方法數相同，因此只需考慮一種情況即可。起初，先在每個奇數區塊內各填入 1 個 0 並在每個偶數區塊內各填入 1 個 1 保持奇偶交錯。以下將 n 分為奇、偶討論：

1. n 為偶數

$n=2$ 時，$S_{(2,2,0)}=2$。當 $n\geq 4$， $a=1$時，$l_2(0)=n-1>0,\ l_2(1)=0$，矛盾。因此當 $n\geq 4$ 時，有 $2\leq a\leq n$。

(1) a 為偶數時，令 $a=2a'(a'=1,2,\dots,\frac{n}{2})$，由於各區塊內皆已有 1 個字元，因此之後再放入的字元皆會使 $l_2(0)$ 或 $l_2(1)$ 增加 1，故此字串滿足 $l_2(0)+l_2(1)=n-a$ ，且為了符合二元平衡 n 字串之條件，故有 $l_2(0)=l_2(1)=\frac{n-a}{2}$ 。因此，應在 a' 個奇數區塊中填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 0，其方法數為 $H^{\frac{a}{2}}_{\frac{n-a}{2}}=C^{\frac{n}{2}-1}_{\frac{n-a}{2}}=C^{\frac{n}{2}-1}_{\frac{a}{2}-1}=C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}$ ，相同的，在 a' 個偶數區塊中亦須填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 1，其方法數為 $C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}$ 。可得總方法數為 $C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}\times C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}=(C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1})^2$ 。

(2) a 為奇數時，$l_2(0)+l_2(1)=n-a$，且需符合 $l_2(0)=l_2(1)=\frac{n-a}{2}$，但 n 為偶數，a 為奇數，故 $\frac{n-a}{2}$ 不為整數，在此情況下找不到符合的二元平衡 n 字串。

根據上述，當 n 為偶數時，二元平衡 n 字串之個數為

$$S_{(n,2,0)}=2\sum_{a'=1}^{\frac{n}{2}}(C_{a'-1}^{\frac{n}{2}-1})^2=2\sum_{a'=1}^{\frac{n}{2}}C_{a'-1}^{\frac{n}{2}-1}\times C_{\frac{n}{2}-a'}^{\frac{n}{2}-1}$$

以生成多項式的角度來看，可將其視為求

$2\times(x+1)^{n-2}=2\times(x+1)^{\frac{n}{2}-1}\times(x+1)^{\frac{n}{2}-1}$ 之 $x^{\frac{n}{2}-1}$ 項係數，故

$$S_{(n,2,0)}=2\sum_{a'=1}^{\frac{n}{2}}C_{a'-1}^{\frac{n}{2}-1}\times C_{\frac{n}{2}-a'}^{\frac{n}{2}-1}=2C_{\frac{n}{2}-1}^{n-2}=2C_{[\frac{n}{2}]-1}^{n-2}$$

2. n 為奇數

$n=1$ 時，$S_{(1,2,0)}=2$，當$n\geq 3, a=1$時，$l_2(0)\neq l_2(1)$，矛盾，因此 $2\leq a\leq n$。

(1) a 為偶數時，$l_2(0)+l_2(1)=n-a$，須符合 $l_2(0)=l_2(1)=\frac{n-a}{2}$，但 n 為奇數，a 為偶數，故 $\frac{n-a}{2}$ 不為整數，在此情況下找不到符合的二元平衡 n 字串。

(2) a 為奇數時，令 $a=2a'+1,\ a'=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$，$l_2(0)+l_2(1)=n-a$，則 $l_2(0)=l_2(1)=\frac{n-a}{2}$。因此，應在 $\frac{a+1}{2}$ 個奇數區塊中填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 0，其方法數為 $H_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{a+1}{2}}=C_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{n+1}{2}-1}=C_{\frac{a-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}=C_{a'}^{\frac{n-1}{2}}$，並在 $\frac{a-1}{2}$ 個偶數區塊中填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 1，其方法數為 $H_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{a-1}{2}}=C_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{n-1}{2}-1}=C_{\frac{a-3}{2}}^{\frac{n-3}{2}}=C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}$，所以總方法數為 $C_{a'}^{\frac{n-1}{2}}\times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}$。

根據上述，當 n 為偶數時，二元平衡 n 字串之個數為

$$S_{(n,2,0)}=2\sum_{a'=1}^{\frac{n-1}{2}}C_{a'}^{\frac{n-1}{2}}\times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}=2\sum_{a'=1}^{\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-1}{2}-a'}^{\frac{n-1}{2}}\times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}$$

以生成多項式的角度來看，可將其視為求

$2\times(x+1)^{n-2}=2\times(x+1)^{\frac{n-1}{2}}\times(x+1)^{\frac{n-3}{2}}$之$x^{\frac{n-3}{2}}$項係數，故

$$S_{(n,2,0)}=2\sum_{a'=1}^{\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-1}{2}-a'}^{\frac{n-1}{2}}\times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}=2C_{\frac{n-3}{2}}^{n-2}=2C_{[\frac{n}{2}]-1}^{n-2}.$$

(二) 二元 3 平衡 n 字串之關係式

關係式 1

定義$M_{(n,a,b_1,b_2)}$為在$\left[\frac{a+1}{2}\right]$個區塊中取$b_1$個區塊、在$\left[\frac{a}{2}\right]$個區塊中取$b_2$個區塊之總方法數；

$M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$為在b_1個區塊中填入c個0、b_2個區塊中填入c個1之總方法數；

$$\text{集合}A_n=\left\{M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}\,\middle|\,\begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\in\mathbb{N},\\ a\ge 2;\ b_1\le\left[\frac{a+1}{2}\right];b_2\le\left[\frac{a}{2}\right];c\ge 1,\\ a+b_1+b_2+2c=n\end{array}\right\},$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}=\mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times\mathrm{C}_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\times H_c^{b_2}$$

定義 $n(T)$ 代表集合 T 內所有元素的個數；

則有以下公式：

$$S_{(n,3,0)}=2\left(F_{n+1}+\sum_{i=1}^{n(A_n)}x_i\right),$$

其中 $x_i\in A_n$.

【說明】

在推導二元 3 平衡 n 字串之關係式時，我們將利用二元平衡 n 字串之解法加以延伸。並將 $l_3(0)=l_3(1)=0$ 與 $l_3(0)=l_3(1)>0$ 之個數分開討論。

1. $l_3(0)=l_3(1)=0$

假設字串有 x 個單字元區塊($0-block$ 或 $1-block$)， y 個雙字元區塊($00-block$或 $11-block$)，而字串必須符合 $l_3(0)=l_3(1)=0$，因此，不會出現長度為 3 以上的區塊，故有 $x+2y=n,x,y\in\mathbb{N}_0$。我們先討論單字元區塊與雙字元區塊的所有排列情形。

(1) 當 n 為奇數時，其解為$(\mathrm{n},0)$, $(n-2,1)\ldots\left(3,\frac{n-3}{2}\right)$, $\left(1,\frac{n-1}{2}\right)$，則排列數總和為

$$\mathrm{C}_0^{\mathrm{n}}+\mathrm{C}_1^{\mathrm{n}-1}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{n-3}{2}}^{\frac{n+3}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_i^{\mathrm{n-i}}$$

(2) 當 n 為偶數時，其解為$(\mathrm{n},0),(n-2,1)\ldots\left(2,\frac{n-2}{2}\right),\left(0,\frac{n}{2}\right)$，則排列數總和為

$$\mathrm{C}_0^{\mathrm{n}}+\mathrm{C}_1^{\mathrm{n}-1}+\cdots+\mathrm{C}_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}+\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_i^{\mathrm{n-i}}$$

當字串內區塊的排列已決定後，只剩下考慮「第奇數個區塊皆填入 0 且第偶數個區塊皆填入 1」和「第奇數個區塊皆填入 1 且第偶數個區塊皆填入 0」兩種可能。綜合上述二式，得二元 3 平衡 n 字串之個數為

$$2\left(\mathrm{C}_0^{\mathrm{n}}+\mathrm{C}_1^{\mathrm{n}-1}+\cdots+\mathrm{C}_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{\left[\frac{n+3}{2}\right]}+\mathrm{C}_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right)=2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathrm{C}_i^{\mathrm{n-i}},$$

由文獻探討及前置研究(二)得

$$2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{i}^{\mathrm{n-i}} = 2F_{n+1}.$$

2. $l_3(0) = l_3(1) > 0$

 在這個情況中，$l_3(0),\ l_3(1) \ge 1$，故 $n \ge 6$。以下分三個步驟來解決此問題。

 (1) 將二元 n 字串分成 a 個區塊，並限制 0 只能放入第奇數個區塊內，而 1 只能放入第偶數個區塊內。起初，先在奇數區塊內各放入 1 個 0，並在偶數區塊內各放入 1 個 1。此外，因為 $l_3(0),\ l_3(1) > 0$，故 $a \ge 2$。(說明：步驟 1 結束後，此二元 3 平衡 n 字串處於未完成的狀態，每一個區塊皆僅放入 1 個字元。)

 (2) 接著，在奇數區塊中取 b_1 個再各填入 1 個 0 使其成為 $\boldsymbol{00-block}$，而奇數區塊有 $\left[\frac{a+1}{2}\right]$ 個，且須符合 $l_3(0) > 0$，故 $1 \le b_1 \le \left[\frac{a+1}{2}\right]$。在偶數區塊中取 b_2 個再各填入 1 個 1 使其成為 $\boldsymbol{11-block}$，而偶數區塊有 $\left[\frac{a}{2}\right]$ 個，且需符合 $l_3(1) > 0$，故 $1 \le b_2 \le \left[\frac{a}{2}\right]$。其解的個數為 $M_{(n,a,b_1,b_2)}$，則

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} = \mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times \mathrm{C}_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}.$$

 (說明：步驟 2 結束後，此二元 3 平衡 n 字串仍處於未完成的狀態，然而有些區塊已放入 2 個字元，這些區塊成為了 $\boldsymbol{k-block\ (for\ k \ge 3)}$ 的候補。)

 (3) 將剩下的字元填入雙字元區塊中，當每填一個字元進入 $\boldsymbol{2-block}$時，$l_3(0)$或 $l_3(1)$ 便會增加 1，而為符合$l_3(0) = l_3(1)$，剩餘$\mathrm{n-a}-b_1-b_2$個字元必為偶數，0,1各 $\frac{\mathrm{n-a}-b_1-b_2}{2}$ 個。令 $c = \frac{n-a-b_1-b_2}{2}$，為滿足 $l_3(0) = l_3(1) > 0$，故 $c \ge 1$。其方法數為 $M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$，則

$$M_{(n,a,b_1,b_2,c)} = H_c^{b_1} \times H_c^{b_2} = \mathrm{C}_c^{c+b_1-1} \times \mathrm{C}_c^{c+b_2-1}.$$

 其關係式可被歸納為為

$$(a, b_1, b_2, c)\left\{\begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N} \\ a \ge 2;\ b_1 \le \left[\dfrac{a+1}{2}\right];\ b_2 \le \left[\dfrac{a}{2}\right];\ c \ge 1 \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n \end{array}\right.$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c)} = \mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times \mathrm{C}_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} \times H_c^{b_1} \times H_c^{b_2}$$

 將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$$A_n = \left\{ M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c)} \,\middle|\, \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}, \\ a \ge 2;\ b_1 \le \left[\frac{a+1}{2}\right]; b_2 \le \left[\frac{a}{2}\right]; c \ge 1, \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n \end{array} \right\}$$，則在

 $l_3(0) = l_3(1) > 0$ 之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為 $2\sum_{i=1}^{n(A_n)} x_i$。

綜上，

$$S_{(n,3,0)}=2\left(F_{n+1}+\sum_{i=1}^{n(A_n)}x_i\right).$$

我們將上式利用 Python 程式運算 $S_{(n,3,0)}$ 之值，計算 $n=1$ 至 $n=100$ ，皆與 OEIS 資料吻合(參考資料四)，其中前幾項為$2,4,6,10,16,28,46,82,142,256,460$，由於其規律隱晦不明，於是我們轉而探討二元 3 非平衡 n 字串之關係式，並觀察其性質。

(三) 二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 之遞迴式探討

定理二 二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 個數之遞迴式 r_n 為： $r_n=\sum_{i=1}^{r-1}r_{(n-i)}$,當 $n\geq r$

【說明】

將滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 的二元 r 平衡 n 字串分成 $r-1$ 種情況討論：

1. 若此二元 r 平衡 n 字串的開頭為一長度 1 的 $block$，則在此情況下剩餘字元 $n-1$ 個字元的排列方法數須滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$ ，故方法數為 $r_{(n-1)}$。
2. 若此二元 r 平衡 n 字串的開頭為一長度 2 的 $block$，則在此情況下剩餘字元 $n-2$ 個字元的排列方法數須滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$ ，故方法數為 $r_{(n-2)}$。

以此類推， 若此二元 r 平衡 n 字串的開頭為一長度 $r-1$ 的 $block$，則在此情況下剩餘字元 $n-r+1$ 個字元的排列方法數須滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$ ，
故方法數為 $r_{(n-r+1)}$。故二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 之遞迴式 r_n 為

$$r_n=\sum_{i=1}^{r-1}r_{(n-i)}\ ,\text{當 } n\geq r$$

(四) 二元 3 非平衡 n 字串之關係式探討

關係式 2

$$\text{定義集合 } B_n=\left\{C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_2}\ \middle|\ \begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}_0,\\ a\geq 2;\ b_1=0;1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c=m,\\ a+b_2=n-m\end{array}\right\};$$

$$\text{集合 } C_n=\left\{C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\ \middle|\ \begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}_0,\\ a\geq 1;1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];\ b_2=0;c=m,\\ a+b_1=n-m\end{array}\right\};$$

$$\text{集合 } D_n=\left\{M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}\ \middle|\ \begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N},\\ a\geq 2;\ 1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c\geq m,\\ a+b_1+b_2+2c=n+m\end{array}\right\};$$

其中，定義$M_{(n,a,b_1,b_2)}$為在$\left[\frac{a+1}{2}\right]$個區塊中取$b_1$個區塊、

$\left[\frac{a}{2}\right]$個區塊中取b_2個區塊之方法數；

$M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$為在b_1個區塊中填入c個0、b_2個區塊中填入$c-m$個1
或在b_1個區塊中填入$c-m$個0、b_2個區塊中填入c個1之總方法數。

因此 $M_{(n,a,b_1,b_2)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}, M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}=H_c^{b_1}\times H_{c-m}^{b_2}+H_{c-m}^{b_1}\times H_c^{b_2},$

則有以下公式：

$$S_{(n,3,m)}=2\left(\sum_{i=1}^{n(B_n)}x_i+\sum_{i=1}^{\mathrm{n}(C_n)}y_i+\sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)}z_i\right),\mathrm{m}\geq 1,$$

其中$x_i\in B_n,\ y_i\in C_n,\ z_i\in D_n.$

【說明】

我們將二元 3 平衡 n 字串的討論方法延伸以解決此問題，以下變數的涵義亦與上面證明之定義相同。

先考慮 0 為開頭時的個數。假設 $|l_3(0)-l_3(1)|=m$ ，當 $m=0$ 時，字串為一個二元 3 平衡 n 字串，並非我們要討論的範圍，故 $m\geq 1$ ，且$n\geq 3$。而 $\max(m)$ 發生在字串 n 個字元全部為 0 時，$l_3(0)=n-2$，故可知 $m\leq n-2$ ，因此 $1\leq m\leq n-2$，$m\in\mathbb{N}$ 。假設 $n-2\geq c\geq 1$，則當 $l_3(0)=c$ 時，$l_3(1)=c-m$；當 $l_3(0)=c-m$ 時，$l_3(1)=c$。在討論二元 3 平衡 n 字串時，需符合之條件為 $l_3(0)=l_3(1)=c$ ，而此狀況為$(\,l_3(0),l_3(1)\,)=(c,c-m)$或$(c-m,c)$，故滿足之前狀況的方程式$a+b_1+b_2+2c=n$須改為 $a+b_1+b_2+c+(c-m)=n$，以下我們將 b_1 、b_2 分成 4 個狀況討論。

1. $b_1=b_2=0$

   因為$b_1=b_2=0$，代表字串 $l_2(0)=l_2(1)=0$ ，由此可知 $l_3(0)=l_3(1)=0\,,c=0$，所以$m=0<1$，矛盾。

2. $b_1=0,\ b_2>0$

   (1) 因為 $b_2>0$，代表此字串必包含 1，故 $a\geq 2$，且根據二元 3 平衡 n 字串之討論，

$1 \le b_2 \le \left[\frac{a}{2}\right]$。

(2) 因為 $b_1 = 0$，則由(一)知 $l_3(0) = 0$，但 $c \ge 1$，故在此狀況下 $l_3(0) \ne c$，因此 $l_3(0), l_3(1)$只有 1 種可能，即為 $l_3(0) = c - m = 0$，$l_3(1) = c$，並可得 $c = m$。

(3) (a, b_1, b_2, c)須滿足方程式 $a + b_1 + b_2 + c + (c - m) = a + b_2 + m = n$，移項後得$a + b_2 = n - m$。

根據上述，$M_{(n,a,b_1,b_2)} = C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} = C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}$；$M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = H_c^{b_2}$，故其關係式可歸納為

$$(a, b_1, b_2, c)\begin{cases} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \ge 2;\ b_1 = 0; 1 \le b_2 \le \left[\dfrac{a}{2}\right]; c = m, \\ a + b_2 = n - m \end{cases}$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} \times H_c^{b_2}.$$

將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$B_n = \left\{ C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} \times H_c^{b_2} \,\middle|\, \begin{matrix} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \ge 2;\ b_1 = 0; 1 \le b_2 \le \left[\frac{a}{2}\right]; c = m, \\ a + b_2 = n - m \end{matrix} \right\}$，則在 $b_1 = 0,\ b_2 > 0$、$|l_3(0) - l_3(1)| = m$ 之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為$2\sum_{i=1}^{n(B_n)} x_i$，其中 $x_i \in B_n$。

3. $b_1 > 0,\ b_2 = 0$

(1) 因為 $b_2 = 0$，代表此字串有可能不包含 1，故 $a \ge 1$。根據二元 3 平衡 n 字串之討論，可知 $1 \le b_1 \le \left[\frac{a+1}{2}\right]$。

(2) 因為 $b_2 = 0$，由(一)知 $l_3(1) = 0$，但 $c \ge 1$，故在此狀況下 $l_3(1) \ne c$，因此 $l_3(0), l_3(1)$只有 1 種可能，即為 $l_3(0) = c, l_3(1) = c - m = 0$，並可得 $c = m$。

(3) (a, b_1, b_2, c)須滿足方程式 $a + b_1 + b_2 + c + (c - m) = a + b_1 + m = n$，移項後得$a + b_1 = n - m$。

根據上述，$M_{(n,a,b_1,b_2)} = C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} = C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}$；$M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = H_c^{b_1}$，故其關係式可歸納為

$$(a, b_1, b_2, c)\begin{cases} a, b_1, b_2, c\ \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \ge 1; 1 \le b_1 \le \left[\dfrac{a+1}{2}\right];\ b_2 = 0;\ c = m\,, \\ a + b_1 = n - m \end{cases}$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times H_c^{b_1}.$$

將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$$C_n = \left\{ \mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times H_c^{b_1} \,\middle|\, \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \geq 1; 1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right];\ b_2 = 0; c = m, \\ a + b_1 = n - m \end{array} \right\}，則在$$

$b_1 > 0,\ b_2 = 0$、$|l_3(0) - l_3(1)| = m$之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為

$2\sum_{i=1}^{n(C_n)} y_i$，其中 $y_i \in C_n$。

4. $b_1,\ b_2 > 0$
   (1) 因為$b_1,\ b_2 > 0$，因此 $a \geq 2$。根據二元 3 平衡 n 字串之討論，可知

   $1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]$。

   (2) $b_1, b_2 > 0$，代表$0, 1$皆有 $\boldsymbol{2 - block}$，故其皆可再填入最後剩餘字元，因此當 $l_3(0) = \mathrm{c}$ 時，$l_3(1) = c - m$；$l_3(0) = c - m$ 時，$l_3(1) = c$。

   (3) (a, b_1, b_2, c)須滿足方程式$a + b_1 + b_2 + c + (c - m) = n$，移項後得

$$a + b_1 + b_2 + 2c = n + m$$

根據上述，$M_{(n,a,b_1,b_2)} = \mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times \mathrm{C}_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}$；而放入最後剩餘 $2\mathrm{c} - \mathrm{m}$ 個字元時會有兩種狀況，分別是 0 放 c 個，1 放 $c - m$ 個，其方法數為 $H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2}$，及 0 放 $c - m$ 個，1 放 c 個，其方法數為 $H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2}$，故 $M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2} + H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2}$，故其關係式可歸納為

$$(a, b_1, b_2, c) \begin{cases} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}, \\ a \geq 2;\ 1 \leq b_1 \leq \left[\dfrac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\dfrac{a}{2}\right]; c \geq m\,, \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n + m \end{cases}$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = \mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times \mathrm{C}_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} \times (H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2} + H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2})$$

將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$$D_n = \left\{ M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} \,\middle|\, \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}, \\ a \geq 2;\ 1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c \geq m, \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n + m \end{array} \right\}，則$$

在$b_1, b_2 > 0$、$|l_3(0) - l_3(1)| = m$ 之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為 $2\sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)} z_i$，

其中 $z_i \in D_n$。

綜上所述，

$$S_{(n,3,m)} = 2\left(\sum_{i=1}^{n(B_n)} x_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(C_n)} y_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)} z_i \right), \mathrm{m} \geq 1,$$

其中 $x_i \in B_n,\ y_i \in C_n,\ z_i \in D_n$.

(五) 觀察二元 3 非平衡 n 字串改變 m,n 值時彼此間關係

1. 利用 Python 跑出 $S_{(n,3,m)}$ 之值，並製成以下表格

m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n-2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
n-3		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
n-4			10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
n-5				20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
n-6					44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
n-7						84	100	116	132	148	164	180	196	212
n-8							172	214	258	304	352	402	454	508
n-9								332	430	536	650	772	902	1040
n-10									654	876	1122	1392	1686	2004
n-11										1264	1752	2312	2946	3656
n-12											2466	3516	4754	6190
n-13												4760	6972	9652
n-14													9258	13880
n-15														17908

(表一)

在表格中我們發現了一些性質並加以探討。以下研究令 $m=n-2$ 所形成的數列為 $\{a_{n(1)}\}$ ， $m=n-(u+1)$ 所形成之數列為 $\{a_{n(u)}\}$。

2. $\{a_{n(i)}\}$ 之階差探討

性質一
$\{a_{n(3k+1)}\},\{a_{n(3k+2)}\},\{a_{n(3k+3)}\}$為一 k 階等差數列，$k\geq 0$

【證明】

由文獻探討及前置研究(四)可知，若一數列$\{b_n\}$為 p 階等差數列，則有 $\deg b_n=p$。因此我們將問題改為：證明 $\{a_{n(3k+1)}\},\{a_{n(3k+2)}\},\{a_{n(3k+3)}\}$一般式之 $\deg a_{n(3k+1)}=\deg a_{n(3k+2)}=\deg a_{n(3k+3)}=k$。

(說明：$\{a_{n(3k+1)}\}$為$m=n-2-3k, k=0,1,\ldots,\left[\frac{n-3}{3}\right], n\geq 3$所形成的數列，也就是此部分字串皆滿足$|l_3(0)-l_3(1)|=m=n-2-3k$；

而$\{a_{n(3k+2)}\}$為$m = n-3-3k, k=0,1,\dots,\left[\frac{n-4}{3}\right], n\geq 4$所形成的數列；

$\{a_{n(3k+3)}\}$則為$n-4-3k, k=0,1,\dots,\left[\frac{n-5}{3}\right], n\geq 5$所形成的數列。)

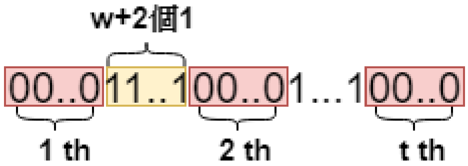
不失一般性，當 $m=n-i-3k$，$i=2,3,4$ 時，假設 $l_3(0)>l_3(1)$、$l_3(1)=w$，則 $l_3(0)=m+l_3(1)=n-i-3k+w$。接著，假設字串中 $\alpha\geq 3$ 之 $\alpha-0-block$ 個數為 t，注意到每個區塊中的前 2 個 0 不能構成一000-子字串，從第三個0起每增加一個0才會多組成一組000子字串，則在 $\alpha-0-block$ 裡0的總數為 $l_3(0)+2t=n-i-3k+w+2t$；同樣地，假設 $\beta\geq 3$ 之 $\beta-1-block$ 個數為 t'，則在 $\beta-1-block$ 裡1的總數為 $l_3(1)+2\,t'=w+2\,t'$，因此，剩餘字元個數為 $n-(n-i-3k+w+2t)-(w+2\,t')=i+3k-2w-2(t+\,t')$。我們先在 t 個 $\alpha-0-block$中各填入 3 個 0，此時 $l_3(0)=t$，之後在這 t 個區塊中再任意放入 $n-i-3k+w-t$ 個 0 以滿足 $l_3(0)=n-i-3k+w$，其方法數為 $H^t_{n-i-3k+w-t}=C^{n-i-3k+w-1}_{t-1}$，也就是此時 n 之最高冪次為 $t-1$；而構成 $\beta-1-block$ 之字元 1 與剩餘字元可填入 $t-1$ 個 $\alpha-0-block$ 之間隔與字串頭尾內，共有 $t+1$ 個位置可選擇，然而其並不會影響 n 之冪次。因此，得出 $\deg a_{n(3k+i)}=\max(t-1)$，$i=1,2,3$，故我們將問題再改為：

證明 $\deg a_{n(3k+i)}=\max(t-1)=k$，也就是證明當

$$m=\begin{cases} n-2-3k, k=0,1,\dots,\left[\frac{n-3}{3}\right], n\geq 3 \\ n-3-3k, k=0,1,\dots,\left[\frac{n-4}{3}\right], n\geq 4 \\ n-4-3k,, k=0,1,\dots,\left[\frac{n-5}{3}\right], n\geq 5 \end{cases},\ l_3(0)>l_3(1)\text{時，}$$

$\alpha\geq 3$ 之 $\alpha-0-block$ 個數 t 最多為 $k+1$ 個。

字串中$\alpha\geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數為 t，且 $\alpha-0-block$ 內 0 之總數為 $n-2-3k+w+2t$ 個。再者，這 t 個區塊彼此間必須包含至少 1 個 1 作為間隔，總共為 $t-1$個，且 $l_3(1)=w$，故至少需再放 $w+1$個 1 進入 1 個 $1-block$內。如下圖所示：(紅色框代表$\alpha-0-block$，黃色框代表$\beta-1-block$)



綜合上述，可得出以下關係式

$$n-i-3k+w+2t+(t-1)+(w+1)\leq n$$

移項後得

$$(2w+1)+3t\leq 3k+1+i, i=2,3,4$$

當 $w=0$ 時 $w+1$ 個 1 亦不需放入 $1-block$ 內，此時不等式為

$$3t\leq 3k+1+i\longrightarrow t\leq k+\left[\frac{1+i}{3}\right], i=2,3,4\longrightarrow t\leq k+1$$

可得 $\max(t-1)=k$，故得證。

3. k 階等差數列之 $\Delta^k a_n$ 一般式

性質二
$$\Delta^k a_{n(3k+1)} = 2,\ \mathrm{k} \geq 0.$$

【證明】

由文獻探討及前置研究(三)、(四)可知，p 階等差數列 $\{a_n\}$ 一般式之 $\deg a_n = p$，且 $\{\Delta^{p+1} a_n\}$ 為一零數列，因此求 $\Delta^k a_{n(3k+1)}$ 不須考慮其一般式之 n^i 項，其中 $i = 0,1,\dots,k-1$。由性質一：$\left\{a_{n(3k+1)}\right\}$為一 k 階等差數列，意即其一般式之 $\deg a_n = k$ ，因此我們只需討論 n^k項即可，而又由性質一之討論可知：此字串為一 $m = n-2-3k$形式之字串，且產生 n^k 之字串發生在 $w = 0,\ t = k+1$ ，也就是字串滿足 $l_3(0) = n-2-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$個數$= k+1$時。

以下我們將上述情況之排列方法分為兩個部分來討論，分別是字串滿足 $l_3(0) = n-2-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$個數$= k+1$時。

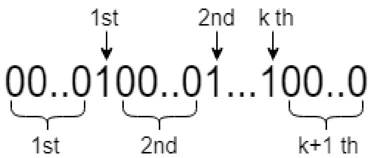
1. $\alpha \geq 3$之 $\alpha - 0 - block$ 內排列方法的個數

此時區塊內0的總數為$n-2-3k+2t = n-2-3k+2(k+1) = n-k$個，且因為每個區塊內0之個數必$\geq 3$，因此我們先在區塊內各填入3個0，則剩餘 $n-4k-3$ 個0則可任意填入這 $k+1$ 個區塊中，其方法數為

$$H_{n-4k-3}^{k+1} = C_k^{n-3k-3}.$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

由 1.知所有 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數內 0 的總數為 $n-k$ 個，故剩餘字元為 k 個，而 $k+1$ 個區塊兩兩間必須用至少 1 個 1 區隔，總共為 k 個，故剩餘字元之排列方法只有 1 個，所成字串為：



由上述 2 點可得，在 $l_3(0) = n-2-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數$= k+1$之條件下，二元 3 非平衡 n 字串排列個數為

$$C_k^{n-3k-3} \times 1 = C_k^{n-3k-3}.$$

依據對稱性，$l_3(1) = n-2-3k,\ l_3(0) = 0$且$\alpha \geq 3$之 $\alpha - 0 - block$ 個數$= k+1$之個數亦為 C_k^{n-3k-3}，故其總數為 $2C_k^{n-3k-3}$ 。

由文獻探討及前置研究(五)—差分關係式可知，$\Delta C_p^n = C_p^{n+1} - C_p^n = C_{p-1}^n$，由此可延伸推出：$\Delta^p C_p^n = \Delta^{p-1} C_{p-1}^n = \Delta^{p-2} C_{p-2}^n = \cdots = \Delta C_1^n = C_0^n = 1$，故

$$\Delta^k a_{n(3k+1)} \equiv \Delta^k 2C_k^{n-3k-3} = 2\Delta^k C_k^{n-3k-3} = 2.$$

性質三
$$\Delta^k a_{n(3k+2)} = 2k+4,\ \mathrm{k} \geq 0.$$

【證明】

由性質一知$\deg a_{n(3k+2)} = k$，又由性質二可知：求 $\Delta^k a_{n(3k+2)}$ 不須考慮其一般式之 n^i 項，其中 $i = 0,1,\dots,k-1$ ，因此在此狀況中也只需考慮 n^k 項即可。依性質

一，其發生於 $w = 0, t = k+1$，也就是字串滿足 $l_3(0) = n-3-3k, l_3(1) = 0$且 $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$= k+1$時。

以下將上述情況之排列方法分為兩個部分來討論，分別是$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內排列方法的個數和剩餘字元排列方法的個數。

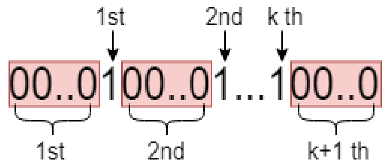
1. $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內排列方法個數

   此時區塊內0之總數為 $n-2-3k+2t = n-3-3k+2(k+1) = n-k-1$ 個，先在各個區塊內填入3個0，因此剩餘 $n-4k-4$ 個0可任意填入這 $k+1$ 個區塊中，其方法數為

$$H_{n-4k-4}^{k+1} = C_k^{n-3k-4}$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

   由 1.知所有$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內 0 的總數為 $n-k-1$ 個，故剩餘字元為 $k+1$ 個，而其中有 k 個 1 必須作為 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha-0-block$ 間彼此之區隔，而最後一個字元的擺放方法如下圖所示(紅色區域內不可放置)：



   若最後一個字元為0，不難發現不管將它擺放於字串何處都會使 $l_3(0)$ 增加 1，而違反條件，故最後一個字元必為1，且1不能放入$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內(紅色方框範圍)，否則會違反原先規則，並改變$l_3(0)$之值，故它只能放入區塊間的間隙與頭尾，共 $k+2$ 個位置，故剩餘字元之排列方法個數為 $k+2$ 個。

由上述 2 點可得：在 $l_3(0) = n-3-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$= k+1$之條件下，二元 3 非平衡 n 字串排列個數為

$$C_k^{n-3k-4} \times (k+2) = (k+2)C_k^{n-3k-4}.$$

依據對稱性，$l_3(1) = n-3-3k,\ l_3(0) = 0$且 $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$= k+1$之個數亦為 $(k+2)C_k^{n-3k-4}$，故其總數為 $(2k+4)C_k^{n-3k-4}$。因此，

$$\Delta^k a_{n(3k+2)} \equiv \Delta^k (2k+4)C_k^{n-3k-4} = (2k+4)\Delta^k C_k^{n-3k-4} = 2k+4.$$

性質四
$$\Delta^k a_{n(3k+3)} = k^2 + 5k + 10.$$

【證明】

由性質一知 $a_{n(3k+3)}$ 為一 k 階多項式，又由性質二之敘述可知，求 $\Delta^k a_{n(3k+3)}$不需考慮其一般式之 n^i 項，其中 $i = 0,1,\ldots,k-1$，因此我們也只需考慮 n^k 項即可。依性質一，其發生於 $w = 0, t = k+1$，也就是字串滿足 $l_3(0) = n-4-3k,\ l_3(1) = 0$ 且$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$= k+1$時。

以下分為兩個部分討論上述情況之排列方法。

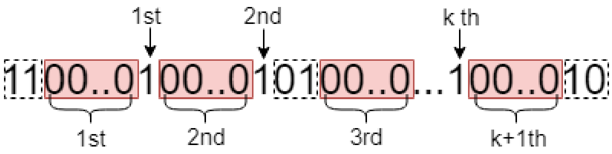
1. $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內排列方法個數

   此時區塊內0之總數為 $n-4-3k+2t = n-k-2$ 個，且先在各個區塊內填入3個0，因此剩餘 $n-4k-5$ 個0可任意填入這 $k+1$ 個區塊中，其方法數為

$$H_{n-4k-5}^{k+1} = C_k^{n-3k-5}.$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

由 1.知所有 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內0的總數為 $n - k - 2$ 個，故剩餘字元為 $k + 2$ 個，而其中有 k 個1必須作為 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 間彼此之區隔，而最後兩個字元的擺放方法如下圖所示：



若最後兩個字元一起填入頭尾，如虛線方框所示，一個位置只有 2 種方法，總共有 2 個位置，故為 4 種方法；若最後兩個字元一起填入 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 之間隙內，如虛線方框所示，一個位置只有 1 種方法，總共有 k 個位置，故為 k 種方法；若最後兩個字元填入不同位置，則如性質三之討論，字元皆必須為 1，故其方法數為從 $k + 2$ 個位置中任取兩個，即 C_2^{k+2} ，故總數為

$$4 + \mathrm{k} + C_2^{k+2} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5$$

由上述 2 點可得，在 $l_3(0) = n - 4 - 3k, l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數$= k + 1$ 之條件下，二元 3 平衡 n 字串排列個數為

$$C_k^{n-3k-5} \times \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5\right) = \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5\right) C_k^{n-3k-5}$$

依據對稱性，$l_3(1) = n - 4 - 3k,\ l_3(0) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數$= k + 1$之個數亦為 $\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5\right) C_k^{n-3k-5}$，故其總數為 $(k^2 + 5k + 10)C_k^{n-3k-5}$ 。

因此，

$$\Delta^k a_{n(3k+3)} \equiv \Delta^k (k^2 + 5k + 10) C_k^{n-3k-5}$$
$$= (k^2 + 5k + 10)\Delta^k C_k^{n-3k-5} = (k^2 + 5k + 10)$$

以下表格為 k 值不同時之 $\Delta^k a_{n(3k+j)},\ j = 1,2,3$

	$\Delta^k a_{n(3k+1)}$	$\Delta^k a_{n(3k+2)}$	$\Delta^k a_{n(3k+3)}$
$k = 0$	2	4	10
$k = 1$	2	6	16
$k = 2$	2	8	24
$k = 3$	2	20	44
$k = 4$	2	12	56
$k = 5$	2	14	70
$k = 6$	2	16	86
$k = 7$	2	18	104

(表二)

性質五

$$\Delta^k a_{n(3k+j)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+j+1)} = \Delta^k a_{n(3k+j+1)}, k \geq 1, j = 1,2$$

【證明】

以下分為 $j = 1, j = 2$來討論

1. $j = 1$

$$\Delta^k a_{n(3k+1)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+2)} = 2 + 2(k-1) + 4 = 2k + 4 = \Delta^k a_{n(3k+2)}$$

2. $j = 2$

$$\Delta^k a_{n(3k+2)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+3)} = 2k + 4 + (k-1)^2 + 5(k-1) + 10$$
$$= k^2 + 5k + 10 = \Delta^k a_{n(3k+3)}.$$

綜上述兩點，原式得證。

(六) $\Delta^t a_1$ 求解過程與性質

以下我們列出一部分在不同 m 值下之 $\Delta^t a_1$ 值：

m	a_1	$\Delta^1 a_1$	$\Delta^2 a_1$	$\Delta^3 a_1$	$\Delta^4 a_1$	$\Delta^5 a_1$	$\Delta^6 a_1$
n − 2	2						
n − 3	4						
n − 4	10						
n − 5	20	2					
n − 6	44	6					
n − 7	84	16					
n − 8	172	42	2				
n − 9	332	98	8				
n − 10	654	222	24				
n − 11	1246	488	72	2			
n − 12	2466	1050	188	10			
n − 13	4760	2212	468	34			
n − 14	9258	4622	1126	112	2		
n − 15	17908	9528	2612	324	12		
n − 16	34792	19520	5918	874	46		
n − 17	67488	29708	13164	2270	164	2	
n − 18	131232	80402	28790	5642	518	14	
n − 19	255168	162080	62172	13618	1504	60	
n − 20	497062	325796	132828	32106	4174	230	2

(表三)

(將每一橫排的 $\Delta^t a_1$ 值帶入前置研究及文獻探討(四)—
$a_n = a_1 + \Delta^1 a_1 C_1^{n-1} + \Delta^2 a_1 C_2^{n-1} + \cdots + \Delta^p a_1 C_p^{n-1}$中即可得出
$m = n - i - 3k,\ i = 2, 3, 4$ 時，其形成的 k 階等差數列之組合表達式。)

將上表每行直排之 $\Delta^t a_1$ 向上移 $3t$ 格，發現每一橫排會形成一 r 階等差數列 $(r=0,1,2\ldots)$，其對應到之 $\Delta^t a_1$ 依 m 值不同其值亦不同，紅、綠、藍排分別表示 $m=n-2-3k, m=n-3-3k, m=n-4-3k$三種 m 之不同形式。令第一列數列為 $b_{(u,0)}$，第μ列數列為$b_{(u,\mu-1)}$。如下表：

		a_1	$\Delta^1 a_1$	$\Delta^2 a_1$	$\Delta^3 a_1$	$\Delta^4 a_1$	$\Delta^5 a_1$	$\Delta^6 a_1$	$\Delta^7 a_1$
0 階	$b_{(u,0)}$ / $\Delta^k a_1$	2	2	2	2	2	2	2	2
1 階	$b_{(u,1)}$ / $\Delta^k a_1$	4	6	8	10	12	14	16	18
2 階	$b_{(u,2)}$ / $\Delta^k a_1$	10	16	24	34	46	60	76	94
3 階	$b_{(u,3)}$ / $\Delta^{k-1} a_1$	20	42	72	112	164	230	312	412
4 階	$b_{(u,4)}$ / $\Delta^{k-1} a_1$	44	98	188	324	518	784	1138	1598
5 階	$b_{(u,5)}$ / $\Delta^{k-1} a_1$	84	222	468	874	1504	2436	3764	5600
6 階	$b_{(u,6)}$ / $\Delta^{k-2} a_1$	172	488	1126	2270	4174	7176	11714	18344
7 階	$b_{(u,7)}$ / $\Delta^{k-2} a_1$	332	1050	2612	5642	11048	20112	34596	56866
8 階	$b_{(u,8)}$ / $\Delta^{k-2} a_1$	654	2212	5918	13618	28232	54164	97824	168280
9 階	$b_{(u,9)}$ / $\Delta^{k-3} a_1$	1246	4622	13164	32106	70200	141438	267320	479822

(表四)

性質六

$\{b_{(u,s)}\}$為一s階等差數列，$s\geq 0$

【證明】

依上表可知，證明$\{b_{(u,s)}\}$為一s階等差數列，等價於證明當 $m=n-i-3k$ $(i=2,3,4)$時，$\{\Delta^{k-j}a_1\}$ $(j=0,1,2\ldots k)$為一 $3j+i'(i'=0,1,2)$階等差數列，又等價於證明$\deg \Delta^{k-j}a_1=3j+i'$(在此將$\Delta^{k-j}a_1$視為一對於 k 值之函數)。

在性質二、三、四中我們已證明了 $j=0$ 時之一般式，也就是 $\Delta^k a_1$ (因為 $m=n-i-3k$ $(i=2,3,4)$所形成之數列$\left\{a_{n(3k+i')}\right\}$ $(i'=1,2,3)$ 其 $\deg a_{n(3k+i')}=k$，故 $\{\Delta^k a_n\}$ 為一常數數列，意即$\Delta^k a_n=\Delta^k a_1$)，分別是：$m=n-2-3k, \Delta^k a_1=2$ (0階等差數列)；$m=n-3-3k, \Delta^k a_1=2k+4$ (1 階等差數列)；$m=n-4-3k,$

$\Delta^k a_1 = k^2 + 5k + 10$(2階等差數列)，其做法皆為在會出現 n^k 之狀況中(即字串滿足 $l_3(0) = n - 2 - 3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數 $= k + 1$)，討論 $\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 外之剩餘字元排列方法數，相似地，在求 $\deg \Delta^{k-j} a_1$ 時，我們考慮數列$\left\{ a_{n(3k+i')} \right\}$ $(i' = 1,2,3)$ 一般式之 n^{k-j} 項係數。

由文獻探討及前置研究(四)-- p 階等差數列之組合表達式可知，會影響 n^{k-j} 之係數的有 $\Delta^k a_1 C_k^{n-1},\ \Delta^{k-1} a_1 C_{k-1}^{n-1} \dots \Delta^{k-j} a_1 C_{k-j}^{n-1}$，且由性質二、三、四可知，$C_{k-\mu}^{n-1}$影響的是n 的冪次(也就是字串 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內排列方法個數)，而 $\Delta^{k-\gamma} a_1$ $(\gamma = 0, 1 \dots j)$影響的則是係數冪次(也就是剩餘字元排列方法個數)。

$\Delta^{k-\gamma} a_n$ $(\gamma = 0, 1 \dots j)$所對應到的 n 之最高冪次為$k - \gamma$，代表$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - \gamma + 1$。假設 $l_3(0) = n - i - 3k + w, l_3(1) = w$ $(i = 2, 3, 4)$，則 $\alpha - 0 - block$ 內0的總數為 $n - i - 3k + w + 2(k - \gamma + 1) = n - i - k + 2 - 2\gamma + w$ 個，因此剩餘個數為 $i + k - 2 + 2\gamma - w$ 個(此時 i, k 為定值)。顯然，$\deg$ **n^{k-j}之係數** (其亦為一對於 k 之函數)發生在剩餘個數最多之時，即$\max(i + k - 2 + 2\gamma - w)$，其為字串在$\gamma = j, w = 0$之狀況下，因此$\max(i + k - 2 + 2\gamma - w) = i + k - 2 + 2j$，也就是$\deg$ **n^{k-j}之係數** $= \deg \Delta^{k-j} a_1$。以下將其分為 3 個部分來討論：

1. 當$m = n - 2 - 3k$，

   此時 $i = 2$，$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - j + 1,$

   max(剩餘個數) $=\ i + k - 2 + 2j = k + 2j$個，而其中有 $k - j$ 個 1 必須作為區塊彼此間之間隔，則剩餘字元個數為 $3j$ 個，因此剩餘之 $3j$ 個字元可以放入 $k - j$ 個間隔與頭尾 2 個位置中，其方法數為

   $$H_{3j}^{k-j+2} = C_{3j}^{k+2j+1},$$

   故得其最高冪次為 $3j$，即 $\deg$ **n^{k-j}之係數** $= 3j$。

2. 當$m = n - 3 - 3k$，

   此時 $i = 3$，$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - j + 1,$

   max(剩餘個數) $=\ i + k - 2 + 2j = k + 2j + 1$個，而其中有 $k - j$ 個 1 必須作為區塊彼此間之間隔，則剩餘字元個數為 $3j + 1$ 個，因此剩餘之 $3j + 1$ 個字元可以放入 $k - j$ 個間隔與頭尾 2 個位置中，其方法數為

   $$H_{3j+1}^{k-j+2} = C_{3j+1}^{k+2j+1},$$

   故得其最高冪次為 $3j + 1$，即 $\deg$ **n^{k-j}之係數** $= 3j + 1$。

3. 當$m = n - 4 - 3k$，

   此時 $i = 4$，$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - j + 1,$

   max(剩餘個數) $=\ i + k - 2 + 2j = k + 2j + 2$個，而其中有 $k - j$ 個 1 必須作為區塊彼此間之間隔，則剩餘字元個數為 $3j + 2$ 個，因此剩餘之 $3j + 2$ 個字元可以放入 $k - j$ 個間隔與頭尾 2 個位置中，其方法數為

   $$H_{3j+2}^{k-j+2} = C_{3j+2}^{k+2j+1},$$

故得其最高冪次為 $3j+1$，即 $\deg \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k-j}}$**之係數** $=3j+2$。

綜合上述，當$m=n-i-3k\ (i=2,3,4)$時，

$\deg \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k-j}}$**之係數** $=3j+i'(i'=0,1,2)=\deg \Delta^{k-j}a_1$，故性質得證。

(七) 二元 3 平衡 n 字串個數之表達式

以下我們列出一些$\{b_{(u,s)}\}, s\geq 0$ 之組合表達式：

$b_{(u,0)}$	2
$b_{(u,1)}$	$2C_1^{u-1}+4$
$b_{(u,2)}$	$2C_2^{u-1}+6C_1^{u-1}+10$
$b_{(u,3)}$	$2C_3^{u-1}+8C_2^{u-1}+22C_1^{u-1}+20$
$b_{(u,4)}$	$2C_4^{u-1}+10C_3^{u-1}+36C_2^{u-1}+54C_1^{u-1}+44$
$b_{(u,5)}$	$2C_5^{u-1}+12C_4^{u-1}+52C_3^{u-1}+108C_2^{u-1}+138C_1^{u-1}+84$
$b_{(u,6)}$	$2C_6^{u-1}+14C_5^{u-1}+70C_4^{u-1}+184C_3^{u-1}+322C_2^{u-1}+316C_1^{u-1}+172$
$b_{(u,7)}$	$2C_7^{u-1}+16C_6^{u-1}+90C_5^{u-1}+284C_4^{u-1}+624C_3^{u-1}+844C_2^{u-1}+718C_1^{u-1}+332$

(表五)

接著，將其帶入 $a_{n(u)}\ (u=1,2\ldots)$之組合表達式內可得

$$a_{n(3k+1)}=b_{(k+1,0)}C_k^{n-1}+b_{(k,3)}C_{k-1}^{n-1}+\cdots+b_{(1,3k)}C_0^{n-1}=\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i)}C_{k-i}^{n-1};$$

$$a_{n(3k+2)}=b_{(k+1,1)}C_k^{n-1}+b_{(k,4)}C_{k-1}^{n-1}+\cdots+b_{(1,3k+1)}C_0^{n-1}=\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+1)}C_{k-i}^{n-1};$$

$$a_{n(3k+3)}=b_{(k+1,2)}C_k^{n-1}+b_{(k,5)}C_{k-1}^{n-1}+\cdots+b_{(1,3k+2)}C_0^{n-1}=\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+2)}C_{k-i}^{n-1}.$$

歸納上式，則

$$a_{n(u)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+1\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+1)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+2\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+2)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+3\end{cases}.$$

有了 $a_{n(u)}$ 之表達式後，就能將二元3非平衡 n 字串個數之表達式表示出來。二元 3 非平衡 n 字串之個數為 $\sum_{m=1}^{n-2}S_{(n,3,m)}$，以下將其令為 $S'_n(n\geq 3)$。二元 3 非平衡 n 字串個數之表達式為：

S'_3	$a_{1(1)}$
S'_4	$a_{2(1)}+a_{1(2)}$
S'_5	$a_{3(1)}+a_{2(2)}+a_{1(3)}$
S'_6	$a_{4(1)}+a_{3(2)}+a_{2(3)}+a_{1(4)}$
S'_7	$a_{5(1)}+a_{4(2)}+a_{3(3)}+a_{2(4)}+a_{1(5)}$
S'_8	$a_{6(1)}+a_{5(2)}+a_{4(3)}+a_{3(4)}+a_{2(5)}+a_{1(6)}$

(表六)

由上表可得

$$S'_n=a_{n-2(1)}+a_{n-3(2)}+\cdots+a_{1(n-2)}=\sum_{i=1}^{n-2}a_{n-1-i(i)}.$$

因此，二元平衡 n 字串個數之表達式為

$$S_{(n,3,0)}=\begin{cases}2, & n=1\\ 4, & n=2\\ 2^n-S'_n, & n\geq 3\end{cases}.$$

(八) 二元 r 非平衡 n 字串改變 m,n 值時彼此間關係

當我們將二元3非平衡 n 字串之特性推廣到二元 r 非平衡 n 字串時，能得出相關特性與特徵方程式。以下之研究令 $m=n-(r-1)$ 所形成的數列為 $\{c_{n(1)}\}$，$m=n-(r+i-2)$ 所形成之數列為 $\{c_{n(i)}\}$。

性質七

二元 r 非平衡 n 字串$\{c_{n(rk+1)}\},\{c_{n(rk+2)}\},\dots,\{c_{n(rk+r)}\}$為一 k 階等差數列　，$k\geq 0$

【證明】

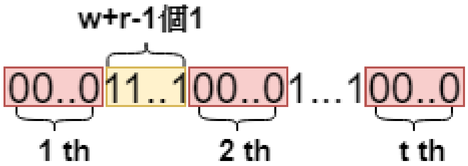
由性質一之證明可知，證明$\{c_{n(rk+1)}\},\{c_{n(rk+2)}\},\dots,\{c_{n(rk+r)}\}$為一 k 階等差數列等價於證明 $\deg c_{n(rk+1)}=\deg c_{n(rk+2)}=\cdots=\deg c_{n(rk+r)}=k$。(此為一關於 n 之函數)

(說明：$\{c_{n(rk+1)}\}$為一 $m=n-(r-1)-rk,k=1,2,\dots,\left[\frac{n-r}{r}\right],n\geq r$ 所形成之數列，也就是此部分字串皆滿足$|l_r(0)-l_r(1)|=m=n-(r-1)-rk$；而 $\{c_{n(rk+2)}\}$為一 $n-r-rk,k=1,2,\dots,\left[\frac{n-r-1}{r}\right],n\geq r+1$ 所形成之數列，以此類推；$\{c_{n(rk+r)}\}$為 $m=n-(2r-2)-rk,k=1,2,\dots,\left[\frac{n-2r+1}{r}\right],n\geq 2r-1$ 所形成之數列。)

不失一般性，當 $m=n-i-rk,i=(r-1),r,\dots,(2r-2)$ 時，假設 $l_r(0)>l_r(1)$、 $l_r(1)=w$，則$l_r(0)=m+l_r(1)=n-i-rk+w$。接著，假設$\alpha\geq r$ 之 $\alpha-0-block$ 個數為 t，注意到每個區塊中的前 r − 1個0不能構成一r-0-子字串，從第r個0起每增加一個0才會多組成一組r-0子字串，則 $\alpha-0-block$ 裡0的總數為 $l_r(0)+(r-1)t=n-i-rk+w+rt-t$個；同理，假設$\beta\geq r$ 之 $\beta-1-block$ 個數為 t'，則 $\beta-1-block$ 裡1的總數為 $l_r(1)+(r-1)t'=w+rt'-t'$個，因此，剩餘字元個數為 $n-(n-i-rk+w+rt-t)-(w+rt'-t')=i+rk-2w-(r-1)(t+t')$

個。我們先在t 個 $\alpha-0-block$中各填入 r 個 0，此時 $l_r(0)=t$，之後在這 t 個區塊中再任意填入 $n-i-rk+w-t$ 個0以滿足 $l_r(0)=n-i-rk+w$，其方法數為 $H^{t}_{n-i-rk+w-t}=C^{n-i-rk+w-1}_{t-1}$，其形成 n 之最高冪次為 $t-1$，而構成 $\beta-1-block$ 之字元1與剩餘字元可填入 $t-1$ 個 $\alpha-0-block$ 之間隔與字串頭尾內，共有 $t+1$ 個位置可選擇，然而其並不會影響 n 之冪次。因此能得出 $\deg c_{n(rk+i)}=\max(t-1),i=1,2\ldots r$，故我們將問題改為：
證明$\deg c_{n(rk+i)}=\max(t-1)=k$，意即證明 $\max t\ =k+1$。

字串中$\alpha\geq r$之 $\alpha-0-block$ 個數為 t ，且 $\alpha-0-block$ 內 0 的總數為$n-i-rk+w+rt-t$個。再者，而在 t 個區塊兩兩間至少需填入 1 個 1 作為區隔，總共為 $t-1$個，且 $l_r(1)=w$，因此至少需再填入 $w+r-2$ 個 1 進入其中一個區塊間隔內。如下圖所示：(紅色框為$\alpha-0-block$，黃色框為$\beta-1-block$)



故能得出以下關係式

$$(n-i-rk+w+tr-t)+(t-1)+(w+r-2)\leq n，$$

移項後得

$$tr+(2w+r-2)\leq rk+1+i,i=r-1,r,\ldots,2r-2$$

當 $w=0$ 時，$w+r-2$個 1 亦不須放入$1-block$內，此時不等式為

$$tr\leq rk+1+i,i=r-1,r,\ldots,2r-2$$

$$\Rightarrow t\leq k+\left[\frac{j}{r}\right],j=r,r+1,\ldots,2r-1$$

$$\Rightarrow t\leq k+1,$$

可得 $\max(t-1)=k$，故得證。

性質八

$$\Delta^k c_{n(u)}=\begin{cases} 2, & u=rk+1\\ 2k+4, & u=rk+2\\ 2\times\left(\sum_{\delta=0}^{a-1}C^{k+2}_{a-\delta}\times C^{a-1}_{\delta}\times 2^{\delta}\right), & u=rk+i\ (i=3,4\ldots r-1)\\ 2\times\left[\left(\sum_{\delta=0}^{r-2}C^{k+2}_{r-1-\delta}\times C^{r-2}_{\delta}\times 2^{\delta}\right)-k\right], & u=rk+r\end{cases}$$

$$(a=i-(r-1))$$

【證明】

由性質七知，$\{c_{n(rk+1)}\},\{c_{n(rk+2)}\},\ldots,\{c_{n(rk+r)}\}$一般式之 $\deg c_{n(rk+1)}=\ \deg c_{n(rk+2)}=\cdots=\ \deg c_{n(rk+r)}=k$，且由性質二之敘述可知，求 $\Delta^k c_{n(rk+i)},i=1,2,\ldots,r$ 不需考慮其一般式之 $n^{i'}$ 項，其中$i'=0,1,\ldots,\ k-1$，因此只需考慮 n^k 項即可。依性質七， n^k 項對應的排列情形為$w=0,\ t=k+1$，也就是字串滿

足$l_r(0) = n - i - rk\ (i = r-1, r, \ldots, 2r-2)$, $l_r(1) = 0$，且$\alpha \geq r$之 $\alpha - 0 - block$ 個數為$k+1$時。

首先討論 $l_r(0) > l_r(1)$之狀況。以下將此排列情形分成兩部分討論。

1. $\alpha \geq r$之$\alpha - 0 - block$內排列方法個數

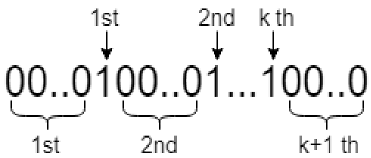
   此時$\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n - i - rk + (r-1)(k+1) = n + r - k - 1 - i, i = r-1, r, \ldots, 2r-2$個。我們先在 $k+1$ 個區塊內各放入 r 個 0，而剩餘 $n - rk - k - 1 - i$ 個 0 則可任意填入 $k+1$ 個區塊內，方法數為：

$$H_{n-rk-k-1-i}^{k+1} = C_k^{n-rk-1-i}$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

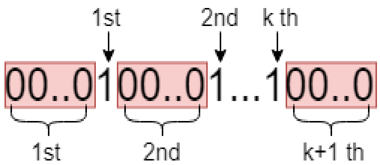
   (1) $i = r-1 \Rightarrow m = n - (r-1) - rk$

   由 1.知 $\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n + r - k - 1 - i = n + r - k - 1 - (r-1) = n - k$個，則剩餘字元數為 k 個。在 $k+1$ 個區塊彼此間至少須用 1 個 1 作為區隔，總共為 k 個，故此排列方法為 1 個。其形式如下：



   (2) $i = r \Rightarrow m = n - r - rk$

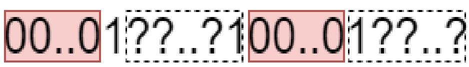
   由 1.知$\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n + r - k - 1 - i = n + r - k - 1 - r = n - k - 1$個，則剩餘字元數為 $k+1$ 個。將 k 個作為區塊間之間隔後還剩餘 1 個，它可填入方式如下圖所示：



   若最後一個字元為 0，不管將它擺放於字串何處都會使$l_r(0)$增加 1，違反條件，故最後一個字元為 1，且 1 不能放入 $\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內(紅色方框範圍)，否則會違反規則且改變 $l_r(0)$ 之值，故它只能放入區塊間的間隙與字串頭尾，共 $k+2$ 個位置，因此剩餘字元之排列方法個數為 $k+2$ 個。

   (3) $m = n - i - rk,\ i = r+1, r+2 \ldots 2r-3$

   由 1.知$\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n + r - k - 1 - i$, $i = r+1, r+2, \ldots, 2r-3$個，故剩餘字元數為 $k + i - (r-1)$個，將 k 個字元作為區塊間之間隔後還剩下 $i - (r-1)$ 個字元。設 $a = i - (r-1)$, $i = r+1, r+2 \ldots 2r-3$，則 $a = 2, 3, \ldots, r-2$，其填入字串方法如圖所示：



   字串共有 $k+2$ 個位置可使剩餘字元填入，假設填入位置數量為 j,

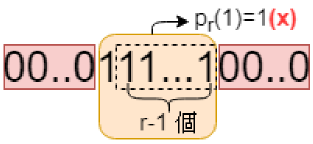
$j=1,2,\ldots,a$，則其選擇位置方法有 C_j^{k+2} 種方式。再者，每個選擇的位置皆會有一個字元與紅色方框相鄰，故其只能填入1以保持 $l_r(0)$ 不變，共有j個 (即虛線方框中的1，前虛線方框為間隙之填法，而後虛線方框為字串頭尾之填法)，共有 j 個。而剩下 $a-j$ 個字元可任意填入 j 個位置內，方法數為 $H_{a-j}^{j}=C_{j-1}^{a-1}$, j = 1,2, … , a，且max(任一間隙中的字元數目) $=a+1$

$=r-1$，無法組成任何一組 $r-0-block$ 或 $r-1-block$，故剩餘 $a-j$ 個字元可填入 0 或 1，方法數為 2^{a-j}。令 $\delta=a-j$ ，其總方法數為

$$\sum_{j=1}^{a} C_j^{k+2}\times C_{j-1}^{a-1}\times 2^{a-j}=\sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2}\times C_{\delta}^{a-1}\times 2^{\delta}$$

(4) $i=2r-2\Rightarrow m=\ n-(2r-2)-rk$

由 1.知$\alpha\geq r$ 之 $\alpha-0-block$ 內 0 的總數為 $n+r-k-1-i=n+r-k-1-(2r-2)=n-r-k+1$個，故剩餘字元數為 $r+k-1$ 個，將 k 個字元作為區塊間之間隔後還剩$r-1$ 個字元。其填入方法與情況三類似，差異在當 $j=1$ 時，若其位置為兩兩區塊間的間隙，且全部字元均為 1，會與原本作為區隔的 1 形成一組 $r-1-block$，$l_r(1)=1$，違反條件，故須扣除此情形，因共有 k 個間隙，故不符合之情形為 k 個。不符合方法如下圖所示：



在此狀況下 $a=r-1$，故總方法數為

$$\left(\sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2}\times C_{\delta}^{a-1}\times 2^{\delta}\right)-k=\left(\sum_{\delta=0}^{r-2} C_{r-1-\delta}^{k+2}\times C_{\delta}^{r-2}\times 2^{\delta}\right)-k.$$

依據對稱性，$l_r(1)>l_r(0)$之個數$=l_r(0)>l_r(1)$之個數，故總數需$\times 2$。由性質二、三、四可知，$\Delta^k C_k^{n-rk-1-i}=1$，故

$$\Delta^k c_{n(rk+s)}, s=1,2,\ldots,r=2\times(\text{剩餘字元排列方法的個數})$$

(九) 二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,i,0)}}{S_{(n-1,i,0)}}$ $(i=2,3)$之探討

1. 二元平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}}$探討

定理三
二元平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}}=2$

【證明】

由研究結果二可得二元平衡 n 字串個數之一般式為 $\begin{cases} S_{(1,2,0)} = S_{(2,2,0)} = 2 \\ n \geq 3, S_{(n,2,0)} = 2C^{n-2}_{[\frac{n}{2}]-1} \end{cases}$，以下將 n 分為奇偶來證明。

1. n 為奇數

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2C^{n-2}_{[\frac{n}{2}]-1}}{2C^{n-3}_{[\frac{n-1}{2}]-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{C^{n-2}_{\frac{n-3}{2}}}{C^{n-3}_{\frac{n-3}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \times \frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\frac{n-1}{2}} = 2.$$

2. n 為偶數

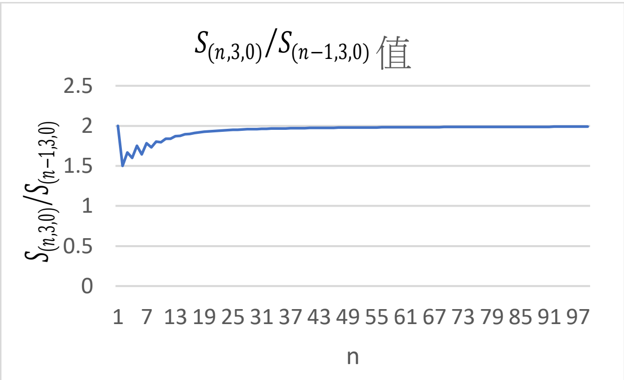
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2C^{n-2}_{[\frac{n}{2}]-1}}{2C^{n-3}_{[\frac{n-1}{2}]-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}}{C^{n-3}_{\frac{n-4}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!} \times \frac{\left(\frac{n-4}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{(n-3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\frac{n-2}{2}} = 2.$$

故得證。

2. 二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$ 探討

在這個狀況中我們尚無法給出完整的證明，但將 $\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$ 值製作成折線圖，如下：



由折線圖可以觀察到，隨著 n 值變大，$\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$ 會漸趨近於 2，因此我們推測 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}} = 2$。

四、　討論及未來展望

(一) 嘗試利用遞迴式解決本研究問題

在進行本研究時，我們曾嘗試不同方式來解決二元 3 平衡 n 字串之一般式。我們從討論$\alpha \geq 3, \boldsymbol{\alpha - 0 - block}$的數目，發現其不同數目之排列情形可前後對應，據此推導出**滿足 $\boldsymbol{l_3(0) = m, l_3(1) = 0}$之二元 3 非平衡 $\boldsymbol{n}$ 字串個數之遞迴式**，我們將會在附錄中提供此遞迴式的完整推導過程。這方法雖然突破了先前方法無法求得的結果。然而其缺點在於當$l_3(1)$變大時，需討論的排列狀況會越來越繁雜，故我們也還未能利用此法解決二元 3 平衡 n 字串之一般式。

(二) 證明 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}} = 2}$ 之可能辦法

本研究希望利用$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$來估算二元3平衡$n$字串個數之成長速度。而我們認為未來可以先利用**證明當字串數目增加1時，排列方法數增加的量不會比原本字串數目之排列方法數多**，證明$\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$會收斂，接著可以嘗試利用**夾擠定理**探討 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$之值。

(三) 針對多列階差數列所組成之表格進行延伸探討

我們在研究前述的多列階差數列所形成的表格(表四)中，發現了一個有趣的性質：將任一個由多列階差數列各項所形成的表格持續經由一個特定方式的操作後，原表格將會**收斂**至另一個表格，且會呈現巴斯卡三角形的性質。我們的專題現在遇到的困難為無法求出表四中多列階差數列所組成的數字，這個性質對我們專題的幫助在於它使我們的表格**由發散變為收斂**，這使我們需要計算的數字量變少很多，我們認為只要再加些初始條件，應會有很大的突破。這個性質將會在附錄提供完整的介紹與證明。

(四) 未來展望

未來，我們除了繼續探討二元 3 平衡 n 字串之一般式外，也希望能將二元 3 平衡 n 字串諸多性質延伸至二元 r 平衡 n 字串上，最後能推導出二元 r 平衡 n 字串之一般式。

五、　結論與應用

(一) 結論

我們先給出二元平衡 n 字串的新解法，接著延伸探討二元 3 平衡 n 字串、二元 3 非平衡 n 字串之個數，給出其關係式並用 $python$ 跑出其值，其關係式如下：

1. 二元平衡 n 字串個數之一般式為 $\begin{cases} S_{(1,2,0)} = S_{(2,2,0)} = 2 \\ S_{(n,2,0)} = 2C^{n-2}_{[\frac{n}{2}]-1}, n \geq 3 \end{cases}$。

2.　二元 3 平衡 n 字串個數之關係式為

$$S_{(n,3,0)} = 2\left(F_{n+1} + \sum_{i=1}^{n(A_n)} x_i\right)$$

$$\text{其中 } x_i \in A_n \left\{ M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c)} \middle| \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N} \\ a \geq 2;\ b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c \geq 1 \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n \end{array} \right\},$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c)} = C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} \times H_c^{b_1} \times H_c^{b_2}.$$

3.　二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0) = l_r(1) = 0$ 個數之遞迴式 r_n 為

$$r_n = \sum_{i=1}^{r-1} r_{(n-i)} \text{ ，當 } n \geq r.$$

4.　二元 3 非平衡 n 字串個數之關係式為

$$S_{(n,3,m)} = 2\left(\sum_{i=1}^{n(B_n)} x_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(C_n)} y_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)} z_i\right), \mathrm{m} \geq 1$$

$$\text{其中} x_i \in A_n = \left\{ C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} \times H_c^{b_2} \middle| \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \geq 2;\ b_1 = 0; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c = m, \\ a + b_2 = n - m \end{array} \right\};$$

$$y_i \in B_n = \left\{ C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times H_c^{b_1} \middle| \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \geq 1; 1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right];\ b_2 = 0; c = m, \\ a + b_1 = n - m \end{array} \right\};$$

$$z_i \in C_n = \left\{ M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} \middle| \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}, \\ a \geq 2;\ 1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c \geq m, \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n + m \end{array} \right\};$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} = C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}, M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2} + H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2}.$$

接著，我們發現二元 3 非平衡 n 字串個數在不同 n, m 值時會產生如下之特性：

5.　$\{a_{n(3k+1)}\}, \{a_{n(3k+2)}\}, \{a_{n(3k+3)}\}$為一 k 階等差數列，$k \geq 0$。

6.　k 階等差數列之 $\Delta^k a_n$ 一般式：$\begin{cases} \Delta^k a_{n(3k+1)} = 2 \\ \Delta^k a_{n(3k+2)} = 2k + 4 \\ \Delta^k a_{n(3k+3)} = k^2 + 5k + 10 \end{cases}$，$k \geq 0.$

7.　$\Delta^k a_{n(3k+j)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+j+1)} = \Delta^k a_{n(3k+j+1)}, k \geq 1,\ j = 1,2.$

進一步地，我們探討$\Delta^t a_1$的性質：

8.　$\{b_{(u,s)}\}$為一s階等差數列，$\mathrm{s} \geq 0$。

綜合上述性質，將二元 3 平衡 n 字串之表達式表示出來：

9. 以下列出一些$\{b_{(n,s-1)}\}$之組合表達式：

$b_{(n,0)}$	2
$b_{(n,1)}$	$2C_1^{n-1}+4$
$b_{(n,2)}$	$2C_2^{n-1}+6C_1^{n-1}+10$
$b_{(n,3)}$	$2C_3^{n-1}+8C_2^{n-1}+22C_1^{n-1}+20$
$b_{(n,4)}$	$2C_4^{n-1}+10C_3^{n-1}+36C_2^{n-1}+54C_1^{n-1}+44$
$b_{(n,5)}$	$2C_5^{n-1}+12C_4^{n-1}+52C_3^{n-1}+108C_2^{n-1}+138C_1^{n-1}+84$
$b_{(n,6)}$	$2C_6^{n-1}+14C_5^{n-1}+70C_4^{n-1}+184C_3^{n-1}+322C_2^{n-1}+316C_1^{n-1}+172$

10. $a_{n(u)}$ 之表達式：

$$a_{n(u)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+1\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i+1)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+2\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i+2)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+3\end{cases}.$$

11. 二元 3 非平衡 n 字串⇒二元 3 平衡 n 字串個數之表達式：

$$S'_n=\sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1-i(i)} \;\Rightarrow\; S_{(n,3,0)}=\begin{cases}2, & n=1\\ 4, & n=2\\ 2^n-S'_n, & n\geq 3\end{cases}.$$

我們將其推廣到二元非 r 平衡 n 字串，發現也有類似性質。如下：

12. 二元 r 平衡 n 字串$\{c_{n(rk+1)}\},\{c_{n(rk+2)}\},\dots,\{c_{n(rk+r)}\}$為一 k 階等差數列，其中$k\geq 0$。

13. 二元 r 平衡 n 字串之最高階差一般式（以下$a=i-(r-1)$）

$$\Delta^k c_{n(u)}=\begin{cases}2, & u=rk+1\\ 2k+4, & u=rk+2\\ 2\times\left(\displaystyle\sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2}\times C_{\delta}^{a-1}\times 2^{\delta}\right), & u=rk+i\ (i=3,4\dots r-1)\\ 2\times\left[\left(\displaystyle\sum_{\delta=0}^{r-2} C_{r-1-\delta}^{k+2}\times C_{\delta}^{r-2}\times 2^{\delta}\right)-k\right], & u=rk+r\end{cases}$$

最後，我們探討二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{(n,i,0)}}{S_{(n-1,i,0)}}, i=2,3$。如下：

14. 二元平衡 n 字串之 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}}=2$。

15. **推測**二元 3 平衡 n 字串之 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}=2$。

總結來說，本研究以三個部分來探討二元 3 平衡 n 字串個數的問題，其成果分別為：**直接推導出算式**：可將數學表達式輸入 *python*，計算二元 3 平衡/非平衡 n 字串之符合個數，幫助我們發現非平衡時字串的諸多性質；**反面解法**：此為本研究重點，發現、證明了非平衡字串個數彼此間存在漂亮的階差性質，並嘗試利用這些性質推導二元 3 平衡 n 字串個數的一般式；**個數成長速度**：推論當 n 很大時，二元 3 平衡 $n+1$ 字串的個數大約為二元 3 平衡 n 字串的個數的 2 倍。

再者，此專題是探討有關 $0, 1$ 排列的問題，未來若有進一步的研究與探討，可以將其應用在**密碼學**上，拓展加解密之方法。

六、 參考文獻與連結

[1] 作者：王佳怡、吳思穎，<階差數列的解法初探>
http://www.shs.edu.tw/works/essay/2011/11/2011110815042866.pdf

[2] 林開亮，106 年出版，<微積分之前奏(或變奏)：高階等差數列的求和>，數學傳播，41 卷 1 期，p.61-79。 https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d411/41107.pdf

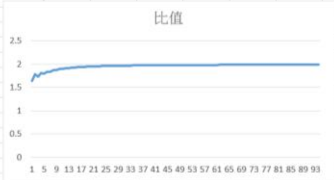
[3] 全國高中數學能力競賽歷屆試題

[4] 整數數列線上大全 https://oeis.org/A158422

附錄

一、二元 3 平衡 n 字串之個數及其前後項比值

	A	B	C	D	E	F
1		p3(0)=p3(1)=0	p3(0)=p3(1)>0	總和		前後兩項比值
2	n=6	26	2	28		1.642857143
3	n=7	42	4	46		1.782608696
4	n=8	68	14	82		1.731707317
5	n=9	110	32	142		1.802816901
6	n=10	178	78	256		1.796875
7	n=11	288	172	460		1.839130435
8	n=12	466	380	846		1.839243499
9	n=13	754	802	1556		1.871465296
10	n=14	1220	1692	2912		1.87293956
11	n=15	1974	3480	5454		1.894389439
12	n=16	3194	7138	10332		1.89876113
13	n=17	5168	14450	19618		1.911815679
14	n=18	8362	29144	37506		1.916866635
15	n=19	13530	58364	71894		1.925501433
16	n=20	21892	116540	138432		1.929727231
17	n=21	35422	231714	267136		1.935875359
18	n=22	57314	459828	517142		1.939320341
19	n=23	92736	910168	1002904		1.943721433
20	n=24	150050	1799316	1949366		1.946625723
21	n=25	242786	3551900	3794686		1.949847761
22	n=26	392836	7006224	7399060		1.952273938
23	n=27	635622	13809370	14444992		1.954755392
24	n=28	1028458	27207968	28236426		1.956762942
25	n=29	1664080	53587912	55251992		1.958749614
26	n=30	2692538	105532280	108224818		1.960430721
27	n=31	4356618	207810640	212167258		1.962058057
28	n=32	7049156	409235322	416284478		1.963488372
29	n=33	11405774	805963958	817369732		1.964849768
30	n=34	18454930	1587553798	1606008728		1.966079463



二、二元 3 非平衡 n 字串之個數及前後項差值(即數列$\{a_{n(u)}\},\{\Delta^1 a_{n(u)}\},\{\Delta^2 a_{n(u)}\}$)

- $a_{n(u)}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1		m=n-2	m=n-3	m=n-4	m=n-5	m=n-6	m=n-7	m=n-8	m=n-9	m=n-10	m=n-11	m=n-12	m=n-13	m=n-14	m=n-15	m=n-16	m=n-17	m=n-18	m=n-19	m=n-20	m=n-21	m=n-22
2	n=3	2																				
3	n=4	2	4																			
4	n=5	2	4	10																		
5	n=6	2	4	10	20																	
6	n=7	2	4	10	22	44																
7	n=8	2	4	10	24	50	84															
8	n=9	2	4	10	26	56	100	172														
9	n=10	2	4	10	28	62	116	214	332													
10	n=11	2	4	10	30	68	132	258	430	654												
11	n=12	2	4	10	32	74	148	304	536	876	1264											
12	n=13	2	4	10	34	80	164	352	650	1122	1752	2466										
13	n=14	2	4	10	36	86	180	402	772	1392	2312	3516	4760									
14	n=15	2	4	10	38	92	196	454	902	1686	2946	4754	6972	9258								
15	n=16	2	4	10	40	98	212	508	1040	2004	3656	6190	9652	13880	17908							
16	n=17	2	4	10	42	104	228	564	1186	2346	4444	7834	12834	19628	27436	34792						
17	n=18	2	4	10	44	110	244	622	1340	2712	5312	9696	16552	26614	39576	54312	67488					
18	n=19	2	4	10	46	116	260	682	1502	3102	6262	11786	20840	34952	54652	79750	107196	131232				
19	n=20	2	4	10	48	122	276	744	1672	3516	7296	14114	25732	44758	73000	111980	160068	211634	255168			
20	n=21	2	4	10	50	128	292	808	1850	3954	8416	16690	31262	56150	94968	151922	228374	320826	417248	497062		
21	n=22	2	4	10	52	134	308	874	2036	4416	9624	19524	37464	69248	120916	200542	314548	464450	641500	822858	968652	
22	n=23	2	4	10	54	140	324	942	2230	4902	10922	22626	44372	84174	151216	258852	421190	648666	941542	1281482	1621594	189
23	n=24	2	4	10	56	146	340	1012	2432	5412	12312	26006	52020	101052	186252	327910	551068	880166	1332496	1905040	2555688	319
24	n=25	2	4	10	58	152	356	1084	2642	5946	13796	29674	60442	120008	226420	408820	707120	1166188	1831048	2729812	3845036	509
25	n=26	2	4	10	60	158	372	1158	2860	6504	15376	33640	69672	141170	272128	502732	892456	1514530	2455508	3796482	5574788	774
26	n=27	2	4	10	62	164	388	1234	3086	7086	17054	37914	79744	164668	323796	610842	1110360	1933564	3225870	5150370	7841926	1135
27	n=28	2	4	10	64	170	404	1312	3320	7692	18832	42506	90692	190634	381856	734392	1364292	2432250	4163872	6841666	10756064	1615

- $\Delta^1 a_{n(u)}$

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	6	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	2	6	16	42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2	6	16	44	98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	2	6	16	46	106	222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	2	6	16	48	114	246	488	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2	6	16	50	122	270	560	1050	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	2	6	16	52	130	294	634	1238	2212	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	2	6	16	54	138	318	710	1436	2680	4622	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	2	6	16	56	146	342	788	1644	3182	5748	9528	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	2	6	16	58	154	366	868	1862	3718	6986	12140	19520	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	2	6	16	60	162	390	950	2090	4288	8338	15076	25438	39708	0	0	0	0	0	0	0	0
18	2	6	16	62	170	414	1034	2328	4892	9806	18348	32230	52872	80402	0	0	0	0	0	0	0
19	2	6	16	64	178	438	1120	2576	5530	11392	21968	39942	68306	109192	162080	0	0	0	0	0	0
20	2	6	16	66	186	462	1208	2834	6202	13098	25948	48620	86174	143624	224252	325796	0	0	0	0	0
21	2	6	16	68	194	486	1298	3102	6908	14926	30300	58310	106642	184216	300042	458624	652942	0	0	0	0
22	2	6	16	70	202	510	1390	3380	7648	16878	35036	69058	129878	231500	390954	623558	934094	1306122	0	0	0
23	2	6	16	72	210	534	1484	3668	8422	18956	40168	80910	156052	286022	498552	824772	1289348	1896762	2607860	0	0
24	2	6	16	74	218	558	1580	3966	9230	21162	45708	93912	185336	348342	624460	1066670	1729752	2655600	3840556	5200154	0
25	2	6	16	76	226	582	1678	4274	10072	23498	51668	108110	217904	419034	770362	1353888	2267138	3610868	5449620	7758526	10357138
26	2	6	16	78	234	606	1778	4592	10948	25966	58060	123550	253932	498686	938002	1691296	2914138	4793234	7505252	11148624	15641582
27	2	6	16	80	242	630	1880	4920	11858	28568	64896	140278	293598	587900	1129184	2084000	3684200	6235878	10084828	15540736	22744888
28	2	6	16	82	250	654	1984	5258	12802	31306	72188	158340	337082	687292	1345772	2537344	4591604	7974568	13273212	21125262	32071928

- $\Delta^2 a_{n(u)}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	8	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2	8	24	72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	2	8	24	74	188	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	8	24	76	198	468	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	8	24	78	208	502	1126	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	2	8	24	80	218	536	1238	2612	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2	8	24	82	228	570	1352	2936	5918	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	2	8	24	84	238	604	1468	3272	6792	13164	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	2	8	24	86	248	638	1586	3620	7712	15434	28790	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2	8	24	88	258	672	1706	3980	8678	17868	34432	62172	0	0	0	0	0	0	0
13	2	8	24	90	268	706	1828	4352	9690	20468	40592	75790	132828	0	0	0	0	0	0
14	2	8	24	92	278	740	1952	4736	10748	23236	47284	90912	164934	281152	0	0	0	0	0
15	2	8	24	94	288	774	2078	5132	11852	26174	54522	107598	201214	355254	590640	0	0	0	0
16	2	8	24	96	298	808	2206	5540	13002	29284	62320	125908	241898	440404	758838	1232696	0	0	0
17	2	8	24	98	308	842	2336	5960	14198	32568	70692	145902	287218	537386	955268	1609064	2558372	0	0
18	2	8	24	100	318	876	2468	6392	15440	36028	79652	167640	337408	647000	1182366	2055632	3390098	5284444	0
19	2	8	24	102	328	910	2602	6836	16728	39666	89214	191182	392704	770062	1442644	2579576	4392112	7103306	10870298
20	2	8	24	104	338	944	2738	7292	18062	43484	99392	216588	453344	907404	1738690	3188384	5584526	9327040	14811474
21	2	8	24	106	348	978	2876	7760	19442	47484	110200	243918	519568	1059874	2073168	3889858	6988590	12009810	19698886
22	2	8	24	108	358	1012	3016	8240	20868	51668	121652	273232	591618	1228336	2448818	4692116	8626710	15209544	25673972

- $\Delta^3 a_{n(u)}$

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
11	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	2	10	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	2	10	34	112	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	2	10	34	114	324	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	2	10	34	116	336	874	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	2	10	34	118	348	920	2270	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	2	10	34	120	360	966	2434	5642	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	2	10	34	122	372	1012	2600	6160	13618	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	2	10	34	124	384	1058	2768	6692	15122	32106	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	2	10	34	126	396	1104	2938	7238	16686	36280	74102	0	0	0	0	0	0	0	0
22	2	10	34	128	408	1150	3110	7798	18310	40684	85150	168198	0	0	0	0	0	0	0
23	2	10	34	130	420	1196	3284	8372	19994	45320	96982	196430	376368	0	0	0	0	0	0
24	2	10	34	132	432	1242	3460	8960	21738	50190	109614	227098	446568	831726	0	0	0	0	0
25	2	10	34	134	444	1288	3638	9562	23542	55296	123062	260278	523944	1002014	1818862	0	0	0	0
26	2	10	34	136	456	1334	3818	10178	25406	60640	137342	296046	608808	1192414	2223734	3941176	0	0	0
27	2	10	34	138	468	1380	4000	10808	27330	66224	152470	334478	701474	1404064	2682770	4887412	8471648	0	0
28	2	10	34	140	480	1426	4184	11452	29314	72050	168462	375650	802258	1638120	3199734	5975086	10649952	18083208	0
29	2	10	34	142	492	1472	4370	12110	31358	78120	185334	419638	911478	1895756	3778484	7215912	13187568	23033394	38361710
30	2	10	34	144	504	1518	4558	12782	33462	84436	203102	466518	1029454	2178164	4422972	8622016	16119092	28875656	49483562
31	2	10	34	146	516	1564	4748	13468	35626	91000	221782	516366	1156508	2486554	5137244	10205938	19480718	35707818	62777204
32	2	10	34	148	528	1610	4940	14168	37850	97814	241390	569258	1292964	2822154	5925440	11980634	23310258	43633304	78509956

三、二元 4 非平衡 n 字串之個數

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		m=n-3	m=n-4	m=n-5	m=n-6	m=n-7	m=n-8	m=n-9	m=n-10	m=n-11	m=n-12	m=n-13	m=n-14	m=n-15	m=n-16	m=n-17	m=n-18	m=n-19	m=n-20	m=n-21	m=n-22
2	n=4	2																			
3	n=5	2	4																		
4	n=6	2	4	10																	
5	n=7	2	4	10	24																
6	n=8	2	4	10	24	52															
7	n=9	2	4	10	24	54	116														
8	n=10	2	4	10	24	56	122	244													
9	n=11	2	4	10	24	58	128	262	516												
10	n=12	2	4	10	24	60	134	280	564	1070											
11	n=13	2	4	10	24	62	140	298	612	1194	2220										
12	n=14	2	4	10	24	64	146	316	660	1320	2526	4536									
13	n=15	2	4	10	24	66	152	334	708	1448	2840	5260	9288								
14	n=16	2	4	10	24	68	158	352	756	1578	3162	6012	10974	18846							
15	n=17	2	4	10	24	70	164	370	804	1710	3492	6792	12744	22680	38264						
16	n=18	2	4	10	24	72	170	388	852	1844	3830	7600	14598	26756	46890	77240					
17	n=19	2	4	10	24	74	176	406	900	1980	4176	8436	16536	31076	56176	96314	155996				
18	n=20	2	4	10	24	76	182	424	948	2118	4530	9300	18558	35642	66132	117102	197878	313908			
19	n=21	2	4	10	24	78	188	442	996	2258	4892	10192	20664	40456	76768	139644	244096	404842	631778		
20	n=22	2	4	10	24	80	194	460	1044	2400	5262	11112	22854	45520	88094	163980	294784	506448	828050	1268728	
21	n=23	2	4	10	24	82	200	478	1092	2544	5640	12060	25128	50836	100120	190150	350076	619148	1050112	1689022	2548090
22	n=24	2	4	10	24	84	206	496	1140	2690	6026	13036	27486	56406	112856	218194	410106	743366	1299218	2170414	3443962
23	n=25	2	4	10	24	86	212	514	1188	2838	6420	14040	29928	62232	126312	248152	475008	879528	1576634	2716434	4482722
24	n=26	2	4	10	24	88	218	532	1236	2988	6822	15072	32454	68316	140498	280064	544916	1028062	1883638	3330666	5673976

四、二元非平衡 n 字串、二元 3 非平衡 n 字串個數之程式碼

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Jan 29 16:31:57 2019


"""

def ex(i):
    re=1
    if(i==0):
        return 1
    for x in range(1,i+1):
        re=re*x
    return re

def combine(a,b):
    l=ex(a)//ex(b)//ex(a-b)
    return l

def calc(a,c,m):
    l=combine((a+1)//2+c-1,c)
    m1=combine((a//2)+c-m-1,c-m)
    n=combine((a+1)//2+c-m-1,c-m)
    o=combine((a//2)+c-1,c)
    return l*m1+n*o

while (1):
    n=int(input('輸入n: '))
    if(n==0):
        break
    for m in range(1,n):
        sum=0
        for a in range(2,n+m):
            c=(n+m-a)//2
            if((n+m-a)%2==0 and c>=m and (n+m-a)>=0):
                sum+=calc(a,c,m)
        print(2*sum)
```

二元非平衡 n 字串個數之程式碼

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sat Jan 19 14:01:37 2019

"""

def 階乘(a):
    if(a<=0):
        return 1
    return a*階乘(a-1)


def combine(a,b):
    u=階乘(a)//階乘(b)//階乘(a-b)
    return u


def calc(a,b1,b2,c,m1):
    if(b1==0):
        l=combine(a//2,b2)*combine(b2+c-1,c)
        return l
    if(b2==0):
        l=combine((a+1)//2,b1)*combine(b1+c-1,c)
        return l
    l=combine(a//2,b2)
    m=combine((a+1)//2,b1)
    n=combine(b1+c-1,c)
    o=combine(b2+c-m1-1,c-m1)
    p=combine(b1+c-m1-1,(c-m1))
    q=combine(b2+c-1,c)
    return l*m*n*o+l*m*p*q

while (1):
    n=int(input('輸入n: '))
    if(n==0):
        break
    for m in range(1,n-1):
        sum=0
        for a in range(1,n+m):
            for b1 in range(0,(a+1)//2+1):
                for b2 in range(0,a//2+1):
                    c=(n+m-(a+b1+b2))
                    if(c%2==0):
                        c=c//2
                    else:
                        continue
                    if((b1==b2 and b2==0)or(c>m and b1*b2==0)):
                        continue
                    if(c<m):
                        break
                    else:
                        sum=sum+calc(a,b1,b2,c,m)
        print(2*sum)
```

二元 3 非平衡 n 字串之程式碼

(二元 4 非平衡 n 字串個數之程式碼同理)

五、滿足 $l_3(0)=m, l_3(1)=0$之二元 3 非平衡 n 字串個數--遞迴式推導過程

引理一

若有兩二元字串，滿足其長度和為 d、首位字元固定，且兩字串$l_3(0)=l_3(1)=0$，則滿足條件之方法數

$$f_d=\sum_{i=1}^{d+1} F_i \times F_{d+2-i}$$

【證明】

由研究結果三-(一)可知，一個二元 n 字串，滿足 $l_3(0)=l_3(1)=0$，其排列方法數為 $2F_{n+1}$。依據對稱性，首位字元為 1 之方法數=首位字元為 0 之方法數，故當首位字元固定時，其方法數為 F_{n+1}。現有首位固定之兩字串，長度和為 d，令兩字串長度各為 n_1, n_2，則 $(n_1,n_2)=(0,d),(1,d-1)\ldots(d,0)$。令總方法數為 f_d，

則：

$$f_d = F_1F_{d+1} + F_2F_d + \cdots + F_{d+1}F_1 = f_d = \sum_{i=1}^{d+1} F_i \times F_{d+2-i}$$

$$f_d = \sum_{i=1}^{d+1} F_i \times F_{d+2-i}$$

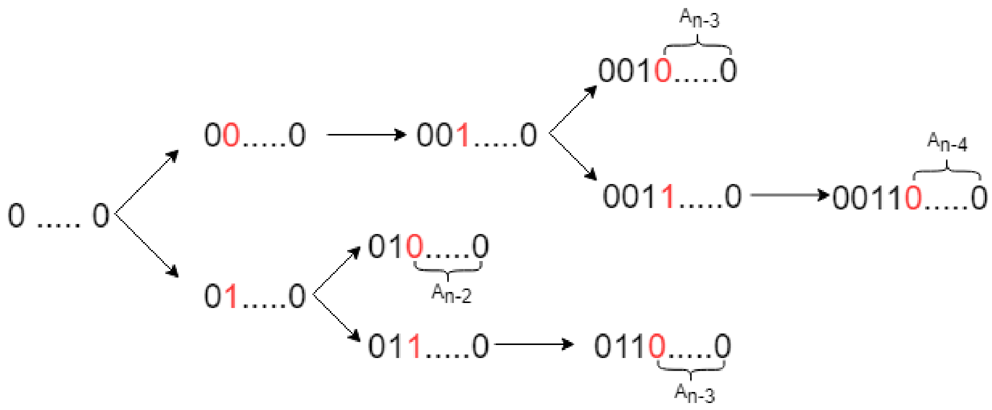
引理二

若一個二元 n 字串，滿足頭尾字元固定且相同，且 $l_3(0) = l_3(1) = 0$，則其方法數 A_n 為：

$$A_n = A_{n-2} + 2A_{n-3} + A_{n-4}, \qquad for\ n \geq 5$$

【證明】

假設首尾字元皆為 0，$A_1 = 1(0), A_2 = 1(00), A_3 = 1(010)$, $A_4 = 3(0010,0100,0110)$。當$n \geq 4$時，為滿足 $l_3(0) = l_3(1) = 0$，當一字串出現兩個連續字元時，下個字元必為相異字；當剩餘字串出現原條件形式時，即停止繼續討論。考慮以下 4 個狀況：



由圖可知，二元 n 字串最後回到原形式時分別用去了 3 個、4 個、2 個、3 個字元，故：

$$A_n = A_{n-2} + 2A_{n-3} + A_{n-4}, \qquad for\ n \geq 5$$

推導過程

假設字串共可組成 t 個$\alpha \geq 3, \boldsymbol{\alpha - 0 - block}$。以下兩部分來討論，分別是 $\alpha \geq 3$之 $\alpha - 0 - block$ 內排列方法的個數與剩餘字元之排列方法個數。

1. $\alpha \geq 3$之 $\alpha - 0 - block$ 內排列方法的個數

因為 $l_3(0) = m$，$\alpha \geq 3, \boldsymbol{\alpha - 0 - block}$的個數$= t$，故此時區塊內0的總數為 $l_3(0) + 2t = m + 2t$個，且因為每個區塊內0之個數必≥ 3，因此我們先在區塊內各填入3個0，則剩餘 $m - t$ 個0則可任意填入這 t 個區塊中，其方法數為：

$$H_{m+2t}^{t} = C_{t-1}^{m+3t-1}$$

2. 剩餘字元之排列方法個數。

由 1.知剩餘字元數為$n-(m+2t)=n-m-2t$個，其可填入的位置為$t-1$個$\boldsymbol{\alpha-0-block}$的間隙與字串頭尾。(以下令$\boldsymbol{\alpha-0-block}$的個數$=t$，且剩餘字元個數為$u$時，其排列方法數為$B_{(u,t)}$)

(1) 當$t=1$時

剩餘字元數為$n-m-2t=n-m-2$個，可放在字串頭尾，形成兩$l_3(0)=l_3(1)=0$，長度和為$n-m-2$且與區塊相鄰之字元必為 1 之子字串，由引理一可知，其方法數為$f_{n-m-2}=B_{(n-m-2,1)}$。

(2) 當$t=2$時

剩餘字元數為$n-m-2t=n-m-4$個，可放在三個位置，分別是1個$\boldsymbol{\alpha-0-block}$的間隙與字串頭跟字串尾。假設放在$\boldsymbol{\alpha-0-block}$間隙之字元數目為$\gamma$個，$1\le\gamma\le n-m-4$，則放在字串頭尾之字元數為$n-m-4-\gamma$個。依據引理一、引理二，得其排列方法數為：

$$B_{(n-m-4,2)}=\sum_{\gamma=1}^{n-m-4}A_\gamma\times f_{n-m-4-\gamma}=\sum_{\gamma=1}^{n-m-4}A_\gamma\times B_{(n-m-4,1)}$$

(3) 當$t=3$時

剩餘字元數為$n-m-2t=n-m-6$個，可放在四個位置，分別是2個$\boldsymbol{\alpha-0-block}$的間隙與字串頭尾。假設放在第一個$\boldsymbol{\alpha-0-block}$間隙之字元數目為$\gamma$個，$1\le\gamma\le n-m-6$，則放在字串頭尾與第二個$\boldsymbol{\alpha-0-block}$間隙之字元數為$n-m-6-\gamma$個。依據引理一、引理二，得其排列方法數為：

$$B_{(n-m-6,3)}=\sum_{\gamma=1}^{n-m-6}A_\gamma\times B_{(n-m-6-\gamma,2)}$$

※ 以此類推，可歸納出$\boldsymbol{\alpha-0-block}$的個數$=t,t\ge2$，且剩餘個數為$u$時，其排列方法數為

$$B_{(u,t)}=\sum_{\gamma=1}^{u}A_\gamma\times B_{(u-\gamma,t-1)}$$

因為剩餘字元數$n-m-2t\ge0$，故$\max t=\left[\frac{n-m}{2}\right]$，因此二元 3 非平衡 n 字串在$l_3(0)=m,l_3(1)=0$時之排列個數為

$$\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]}B_{(n-m-2t,t)}\times C_{t-1}^{m+3t-1}$$

其中$B_{(u,1)}=f_u,B_{(u,t)}=\sum_{\gamma=1}^{u}A_\gamma\times B_{(u-\gamma,t-1)},for\ t\ge2$。

六、多列階差數列所形成表格之性質

對於 s 排階差數列，滿足第一排是常數數列，第$k+1$排比第k牌多一個階差，如以下此表：

$a_1(k)=2.$
$a_2(k)=k+1.$
$a_3(k)=2k^2+3k-1.$
$a_4(k)=k^3.$
$a_5(k)=k^4-2k^2+5.$
…

接著我們對於這些數列進行以下的操作：

(1) 先列出這些數列的每一項，如以下：將此表格稱為「表 a」。

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$a_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$a_2(k)$	2	3	4	5	6	7	…
$a_3(k)$	4	13	26	43	64	89	…
$a_4(k)$	1	8	27	64	125	216	…
$a_5(k)$	4	13	68	229	580	1229	…
…	…	…	…	…	…	…	…

(2) 以以下形式構造新的數列，得出新的數列$b_i(k)$：

$b_1(k)=a_1(1)=2.$
$b_2(k)=a_2(1)+a_1(2)C_1^{k-1}=2+2C_1^{k-1}.$
$b_3(k)=a_3(1)+a_2(2)\times C_1^{k-1}+a_1(3)\times C_2^{k-1}=4+3C_1^{k-1}+2C_2^{k-1}.$
$b_4(k)=a_4(1)+a_3(2)\times C_1^{k-1}+a_2(3)\times C_2^{k-1}+a_1(4)\times C_3^{k-1}$ $=1+13C_1^{k-1}+4C_2^{k-1}+2C_3^{k-1}.$
$b_5(k)=a_5(1)+a_4(2)\times C_1^{k-1}+a_3(3)\times C_2^{k-1}+a_2(4)\times C_3^{k-1}+a_1(5)\times C_4^{k-1}$ $=4+8C_1^{k-1}+26C_2^{k-1}+5C_3^{k-1}+2C_4^{k-1}.$
…

(3) 以以下形式構造新的數列，得出新的數列$b_i(k)$：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$b_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$b_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$b_3(k)$	4	7	12	19	28	39	…
$b_4(k)$	1	14	31	54	85	126	…
$b_5(k)$	4	12	46	111	214	364	…
…	…	…	…	…	…	…	…

(4) 重複步驟(2)構造新的數列：

$c_1(k) = b_1(1) = 2.$
$c_2(k) = b_2(1) + b_1(2)C_1^{k-1} = 2 + 2C_1^{k-1}.$
$c_3(k) = b_3(1) + b_2(2) \times C_1^{k-1} + b_1(3) \times C_2^{k-1} = 4 + 4C_1^{k-1} + 2C_2^{k-1}.$
$c_4(k) = b_4(1) + b_3(2) \times C_1^{k-1} + b_2(3) \times C_2^{k-1} + b_1(4) \times C_3^{k-1}$ $= 1 + 7C_1^{k-1} + 6C_2^{k-1} + 2C_3^{k-1}.$
$c_5(k) = b_5(1) + b_4(2) \times C_1^{k-1} + b_3(3) \times C_2^{k-1} + b_2(4) \times C_3^{k-1} + b_1(5) \times C_4^{k-1}$ $= 4 + 14C_1^{k-1} + 12C_2^{k-1} + 8C_3^{k-1} + 2C_4^{k-1}.$
…

(5) 再將新數列各項列出：將此表格稱為「表 c」

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$c_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$c_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$c_3(k)$	4	8	14	22	32	44	…
$c_4(k)$	1	8	21	42	73	116	…
$c_5(k)$	4	18	44	90	166	284	…
…	…	…	…	…	…	…	…

(6) 重複步驟(2)構造新的數列：

$d_1(k) = c_1(1) = 2.$
$d_2(k) = c_2(1) + c_1(2)C_1^{k-1} = 2 + 2C_1^{k-1}.$
$d_3(k) = c_3(1) + c_2(2) \times C_1^{k-1} + c_1(3) \times C_2^{k-1} = 4 + 4C_1^{k-1} + 2C_2^{k-1}.$
$d_4(k) = c_4(1) + c_3(2) \times C_1^{k-1} + c_2(3) \times C_2^{k-1} + c_1(4) \times C_3^{k-1}$ $= 1 + 8C_1^{k-1} + 6C_2^{k-1} + 2C_3^{k-1}.$
$d_5(k) = c_5(1) + c_4(2) \times C_1^{k-1} + c_3(3) \times C_2^{k-1} + c_2(4) \times C_3^{k-1} + c_1(5) \times C_4^{k-1}$ $= 4 + 8C_1^{k-1} + 14C_2^{k-1} + 8C_3^{k-1} + 2C_4^{k-1}.$
…

(7) 再將新數列各項列出：將此表格稱為「表 d」

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$d_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$d_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$d_3(k)$	4	8	14	22	32	44	…
$d_4(k)$	1	9	23	45	77	121	…
$d_5(k)$	4	12	34	78	154	274	…
…	…	…	…	…	…	…	…

(8) 觀察以下此表：第一橫排為$a_1(k), k = 1,2,3, \dots$，第一直排為$a_i(1), i = 1,2,3, \dots$，除了第一橫排和第一直排外，其他數字皆為其上以及其左數值的和，亦即滿足巴斯卡三角形的條件：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$P_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$P_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$P_3(k)$	4	8	14	22	32	44	…
$P_4(k)$	1	9	23	45	77	121	…
$P_5(k)$	4	13	36	81	158	279	…
…	…	…	…	…	…	…	…

將此表格稱為「表 P」。

將表 a、表 b、表 c、表 d 和表 P 比較，可以發現表 a、表 b、表 c、表 d 和表 P 的相似度越來越高，每操作一次，原表格和表 P 的吻合度即多一個橫排。

表 a 和表 P 相同處：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$a_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$a_2(k)$	2	3	4	5	6	7	…
$a_3(k)$	4	13	26	43	64	89	…
$a_4(k)$	1	8	27	64	125	216	…
$a_5(k)$	4	13	68	229	580	1229	…
…	…	…	…	…	…	…	…

表 b 和表 P 相同處：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$b_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$b_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$b_3(k)$	4	7	12	19	28	39	…
$b_4(k)$	1	14	31	54	85	126	…
$b_5(k)$	4	12	46	111	214	364	…
…	…	…	…	…	…	…	…

表 c 和表 P 相同處：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$c_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$c_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$c_3(k)$	4	8	14	22	32	44	…
$c_4(k)$	1	8	21	42	73	116	…
$c_5(k)$	4	18	44	90	166	284	…
…	…	…	…	…	…	…	…

表 d 和表 P 相同處：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$d_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$d_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$d_3(k)$	4	8	14	22	32	44	…
$d_4(k)$	1	9	23	45	77	121	…
$d_5(k)$	4	12	34	78	154	274	…
…	…	…	…	…	…	…	…

於是我們認為此操作模式有將表格內的個數值向巴斯卡三角形收斂的趨勢。

表 a 滿足巴斯卡三角形的部分(除了第一橫排和第一直排外，其他數字皆為其上以及其左數值的和)：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$a_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$a_2(k)$	2	3	4	5	6	7	…
$a_3(k)$	4	13	26	43	64	89	…
$a_4(k)$	1	8	27	64	125	216	…
$a_5(k)$	4	13	68	229	580	1229	…
…	…	…	…	…	…	…	…

表 b 滿足巴斯卡三角形的部分：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$b_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$b_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$b_3(k)$	4	7	12	19	28	39	…
$b_4(k)$	1	14	31	54	85	126	…
$b_5(k)$	4	12	46	111	214	364	…
…	…	…	…	…	…	…	…

表 c 滿足巴斯卡三角形的部分：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$c_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$c_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$c_3(k)$	4	8	14	22	32	44	…
$c_4(k)$	1	8	21	42	73	116	…
$c_5(k)$	4	18	44	90	166	284	…
…	…	…	…	…	…	…	…

表 d 滿足巴斯卡三角形的部分：

	k=1	k =2	k=3	k=4	k=5	k=6	…
$d_1(k)$	2	2	2	2	2	2	…
$d_2(k)$	2	4	6	8	10	12	…
$d_3(k)$	4	8	14	22	32	44	…
$d_4(k)$	1	9	23	45	77	121	…
$d_5(k)$	4	12	34	78	154	274	…
…	…	…	…	…	…	…	…

證明

一表格中，滿足第一橫排是常數數列，第 $k+1$ 排比第 k 牌多一個階差，持續將此表格進行上述的操作後，該表格將滿足巴斯卡三角形的性質(除了第一橫排和第一直排外，其他數字皆為其上以及其左數值的和)。

令初始的數值表格中第 i 橫排第 j 個數為 $a_{(i,j)}$，如以下：

$a_{(1,1)}$	$a_{(1,2)}$	$a_{(1,3)}$	$a_{(1,4)}$	…
$a_{(2,1)}$	$a_{(2,2)}$	$a_{(2,3)}$	$a_{(2,4)}$	…
$a_{(3,1)}$	$a_{(3,2)}$	$a_{(3,3)}$	$a_{(3,4)}$	…
$a_{(4,1)}$	$a_{(4,2)}$	$a_{(4,3)}$	$a_{(4,4)}$	…
…	…	…	…	…

其中$a_{(1,1)}$、$a_{(1,2)}$、$a_{(1,3)}$、$a_{(1,4)}$…是常數數列；$a_{(2,1)}$、$a_{(2,2)}$、$a_{(2,3)}$、$a_{(2,4)}$…是一階階差數列(等差數列)；$a_{(3,1)}$、$a_{(3,2)}$、$a_{(3,3)}$、$a_{(3,4)}$…是二階階差數列；$a_{(4,1)}$、$a_{(4,2)}$、$a_{(4,3)}$、$a_{(4,4)}$…是三階階差數列，而且上表格中$a_{(2,1)}+a_{(1,2)}\neq a_{(2,2)}$。

現將上表格操作一次後，原表格各排的一般式變為如下：

$a_{(1,1)}$.
$a_{(2,1)}+a_{(1,2)}\times C_1^{k-1}$.
$a_{(3,1)}+a_{(2,2)}\times C_1^{k-1}+a_{(1,3)}\times C_2^{k-1}$.
$a_{(4,1)}+a_{(2,3)}\times C_1^{k-1}+a_{(3,2)}\times C_2^{k-1}+a_{(1,4)}\times C_3^{k-1}$.
…

故新表格如下：

$a_{(1,1)}$	$a_{(1,1)}$	$a_{(1,1)}$	$a_{(1,1)}$	…
$a_{(2,1)}$	$a_{(2,1)}+a_{(1,2)}$	$a_{(2,1)}+2a_{(1,2)}$	$a_{(2,1)}+3a_{(1,2)}$	…
$a_{(3,1)}$	$a_{(3,1)}+a_{(2,2)}$	$a_{(3,1)}+2a_{(2,2)}$ $+a_{(1,3)}$	$a_{(3,1)}+3a_{(2,2)}$ $+3a_{(1,3)}$	…
$a_{(4,1)}$	$a_{(4,1)}+a_{(2,3)}$	$a_{(4,1)}+2a_{(2,3)}$ $+a_{(3,2)}$	$a_{(4,1)}+3a_{(2,3)}$ $+3a_{(3,2)}+a_{(1,4)}$	…
…	…	…	…	…

可以發現圖中著色的部分(三個斜排)已經滿足巴斯卡三角形($a_{(2,1)}+a_{(1,2)}=a_{(2,1)}+a_{(1,1)}$)，再將上表操作一次，各橫排數列的一般式變為如下：

$a_{(1,1)}$.
$a_{(2,1)}+a_{(1,1)}\times C_1^{k-1}$.
$a_{(3,1)}+\left[a_{(2,1)}+a_{(1,2)}\right]\times C_1^{k-1}+a_{(1,1)}\times C_2^{k-1}$.
$a_{(4,1)}+\left[a_{(3,1)}+a_{(2,2)}\right]\times C_1^{k-1}+\left[a_{(2,1)}+2a_{(1,2)}\right]\times C_2^{k-1}+a_{(1,1)}\times C_3^{k-1}$.
…

故新表格如下：

$a_{(1,1)}$	$a_{(1,1)}$	$a_{(1,1)}$	$a_{(1,1)}$	…
$a_{(2,1)}$	$a_{(2,1)}+a_{(1,2)}$	$a_{(2,1)}+2a_{(1,2)}$	$a_{(2,1)}+3a_{(1,2)}$	…
$a_{(3,1)}$	$a_{(3,1)}+\left[a_{(2,1)}+a_{(1,2)}\right]$	$a_{(3,1)}+2\left[a_{(2,1)}+a_{(1,2)}\right]+a_{(1,1)}.$	$a_{(3,1)}+3\left[a_{(2,1)}+a_{(1,2)}\right]+3a_{(1,1)}.$	…
$a_{(4,1)}$	$a_{(4,1)}+\left[a_{(3,1)}+a_{(2,2)}\right]$	$a_{(4,1)}+2\left[a_{(3,1)}+a_{(2,2)}\right]+\left[a_{(2,1)}+2a_{(1,2)}\right]$	$a_{(4,1)}+3\left[a_{(3,1)}+a_{(2,2)}\right]+3\left[a_{(2,1)}+2a_{(1,2)}\right]+a_{(1,1)}$	…
…	…	…	…	…

可以發現圖中著色的部分(4 個斜排)已經滿足巴斯卡三角形的特徵。

現假設操作$n-2$ $(n\geq 2)$次後，第 i 排第 j 個數為$m_{(i,j)}$，前 n 斜排滿足巴斯卡三角形，如下表綠色的部分：

$m_{(1,1)}$	$m_{(1,2)}$	$m_{(1,3)}$	$m_{(1,4)}$	$m_{(1,5)}$	…	$m_{(1,n-1)}$	$m_{(1,n)}$	$m_{(1,n+1)}$
$m_{(2,1)}$	$m_{(2,2)}$	$m_{(2,3)}$	$m_{(2,4)}$	$m_{(2,5)}$	…	$m_{(2,n-1)}$	$m_{(2,n)}$	$m_{(2,n+1)}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$m_{(n-3,1)}$	$m_{(n-3,2)}$	$m_{(n-3,3)}$	$m_{(n-3,4)}$	$m_{(n-3,5)}$	…	…	…	…
$m_{(n-2,1)}$	$m_{(n-2,2)}$	$m_{(n-2,3)}$	$m_{(n-2,4)}$	$m_{(n-2,5)}$	…	…	…	…
$m_{(n-1,1)}$	$m_{(n-1,2)}$	$m_{(n-1,3)}$	$m_{(n-1,4)}$	$m_{(n-1,5)}$	…	…	…	…
$m_{(n,1)}$	$m_{(n,2)}$	$m_{(n,3)}$	$m_{(n,4)}$	$m_{(n,5)}$	…	…	…	…
$m_{(n+1,1)}$	$m_{(n+1,2)}$	$m_{(n+1,3)}$	$m_{(n+1,4)}$	$m_{(n+1,5)}$	…	…	…	…

現在欲證明：再操作一次(共操作 $n-1$ 次)後，上表的第 $n+1$ 斜排也會滿足巴斯卡三角形的形式，亦即證明操作過後，

$$m'_{(i,n+2-i)}=m_{(i,n+1-i)}+m_{(i-1,n+2-i)}\text{，}1\leq i\leq n+1\text{。}$$

又操作過後，

$$m'_{(i,j)}=m'_{(i,n+2-i)}=m_{(i,1)}+m_{(i-1,2)}\times C_1^{j-1}+m_{(i-2,3)}\times C_2^{j-1}\cdots m_{(1,i)}\times C_{i-1}^{j-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{i}\left[m_{(i-k+1,k)}\times C_{k-1}^{j-1}\right]=\sum_{k=1}^{i}\left[m_{(i-k+1,k)}\times C_{k-1}^{n+1-i}\right]$$

因為前 n 排滿足巴斯卡三角形，所以對於 $x,y\in\mathbb{N},x>1,y>1,\ x+y\leq n-1$，必有：

$$m_{(x,y)}=m_{(x-1,y)}+m_{(x,y-1)}$$

因此，

$$m_{(i,n+1-i)}+m_{(i-1,n+2-i)}$$

$$=\left[m_{(i-1,n+1-i)}+m_{(i,n-i)}\right]+\left[m_{(i-2,n+2-i)}+m_{(i-1,n+1-i)}\right]$$

$$=m_{(i,n-i)}+2m_{(i-1,n+1-i)}+m_{(i-2,n+2-i)}$$

$$=\left[m_{(i-1,n-i)}+m_{(i,n-i-1)}\right]+2\left[m_{(i-2,n+1-i)}+m_{(i-1,n-i)}\right]$$

$$+\left[m_{(i-3,n+2-i)}+m_{(i-2,n+1-i)}\right]$$

$$=m_{(i-3,n+2-i)}+3m_{(i-2,n+1-i)}+3m_{(i-1,n-i)}+m_{(i,n-i-1)}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$=\sum_{k=1}^{i}\left[m_{(i-k+1,k)}\times C_{k-1}^{n+1-i}\right]$$

故 $m'_{(i,n+2-i)}=m_{(i,n+1-i)}+m_{(i-1,n+2-i)}$。

由數學歸納法可知此等式對於所有正整數 n 皆成立，故原命題得證。

■

【評語】010009

　　作者利用區塊(block)的概念，去討論二元 3 平衡/非平衡的關係式。之所以說是關係式，而不是公式，是因為關係式中 A_n, B_n, C_n, D_n 等解集合僅為形式描述，不具有具體可驗證之方法或數學分析。就算用 Python 程式去幫助計算，二元 3 平衡 n 字串的個數，網路也已經計算到 500 項，作者卻只跑到 100 項。作品後半部觀察二元 3 非平衡 n 字串的 m, n 表格，發現每三橫列都具有階差數列的性質，且作者都可以求出公差的公式，算是整個作品的亮點。由於作者分析平衡和非平衡的技巧手法類似，不知道是不是可以將平衡和非平衡放在一起討論？畢竟，當 n=k，m=n-k=0 時，就是平衡的狀態。