

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051817

雲深不知處總得鹽水瘋泡—利用水模擬大氣中
密度差界面的紊流穿透及混和

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者： 高二 薛晏閔 高二 莊祐嘉	指導老師： 賴悅聖
-------------------------	--------------

關鍵詞：紊流、理查森數、雷射誘導螢光

摘要

本研究旨在探討層雲結構產生上的一些物理機制，一般情況為地表附近空氣經由日照加熱而對流上升，而後與冷空氣混和凝結，我們藉由建立一些相關的模型來探討此一現象，利用水中紊流模擬大氣，設計密度界面模擬大氣中密度層變界面，透過染劑以及雷射誘導螢光等技術來觀察，而後探討紊流穿透界面或與界面上溶液混和時的相關現象，並利用一些計算，例如達西-魏斯巴赫方程或渦量方程式等，去解釋這樣的模型，配合電腦程式輔助分析紊流的速度及形狀等特性的關係，再用不確定度去評估實驗精確性，連結這個紊流模式與大氣流體中的現象，並可推廣至諸如海底火山噴泉或是工廠污染物排放。

壹、研究動機

大幅大幅成匹飛揚的雲綴飾著蔚藍蒼穹，那膨鬆綿軟正自悠悠，但何曾想過其形狀各異的背後，是怎樣一般的物理機制？對流層密切的影響著我們的天氣，而垂直的密度分布會導致不同的雲層結構，是否與雲層形成的情況有其關聯？基於對此感到好奇而後我們決定對此投入研究，我們對層雲的結構尤其感興趣，直觀預測他們是從下方空氣上升凝結，而上升過程在溫度層變界面導致不同結構出現。在翻閱部分文獻後，我們將此一現象與紊流在密度界面的行為連結，嘗試去分析此一現象的產生。

貳、研究目的

- 一、透過水流之紊流模擬並探討探討積雲形成形狀之大氣現象
- 二、利用紊流穿透密度界面探討以密度差造成的不同理查森數下的穿透情形
- 三、利用不同初始流速改變雷諾數探討其穿透密度界面情形
- 四、利用紊流穿透密度界面探討以密度差造成的不同理查森數下的混和情形
- 五、利用不同初始流速改變雷諾數探討其穿透密度界面混和之情形

參、研究設備及器材

一、實驗操作器材

(一)水缸

(二)補注水缸

(三)特製水缸

(四)止瀉帶

(五)量筒

(六)湯匙

(七)水桶

(八)容量瓶

(九)燒杯

(十)電子秤

(十一) 流量閥

(十二) 橡皮管

(十三) 塑膠管

(十四) 可調式鐵架

(十五) 鐵梯

(十六) 比重計

(十七) 四層鐵架

(十八) 防水膠帶

(十九) 染劑

(二十) 台鹽高級碘鹽

(二十一) 對照用直尺

(二十二) 雷射器材

(二十三) 螢光鹽



(圖一)補注水缸



(圖二)水缸



(圖三)止瀉帶



(圖四)螢光鹽

二、計算分析器材

(一)筆記型電腦

(二)錄影器材

(三)筆

(四)紙

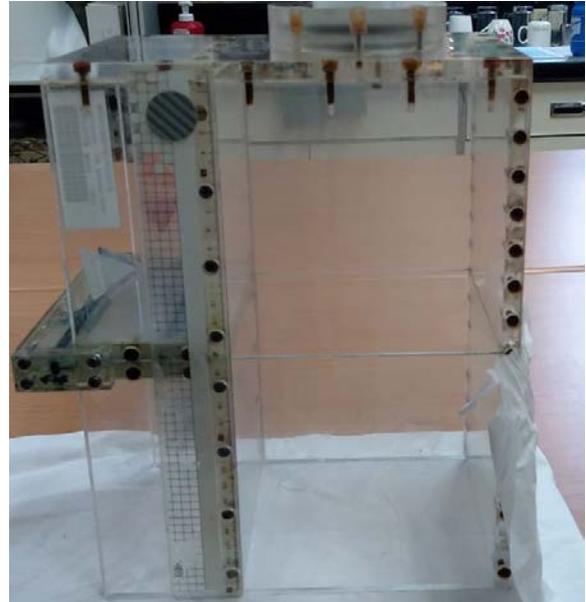
(五)筆記本

(六)隨身碟

三、計算分析程式

(一)Excel

(二)Tracker



(圖五)特製水缸



(圖六)雷射器材

肆、研究過程與方法

一、實驗構想與設計

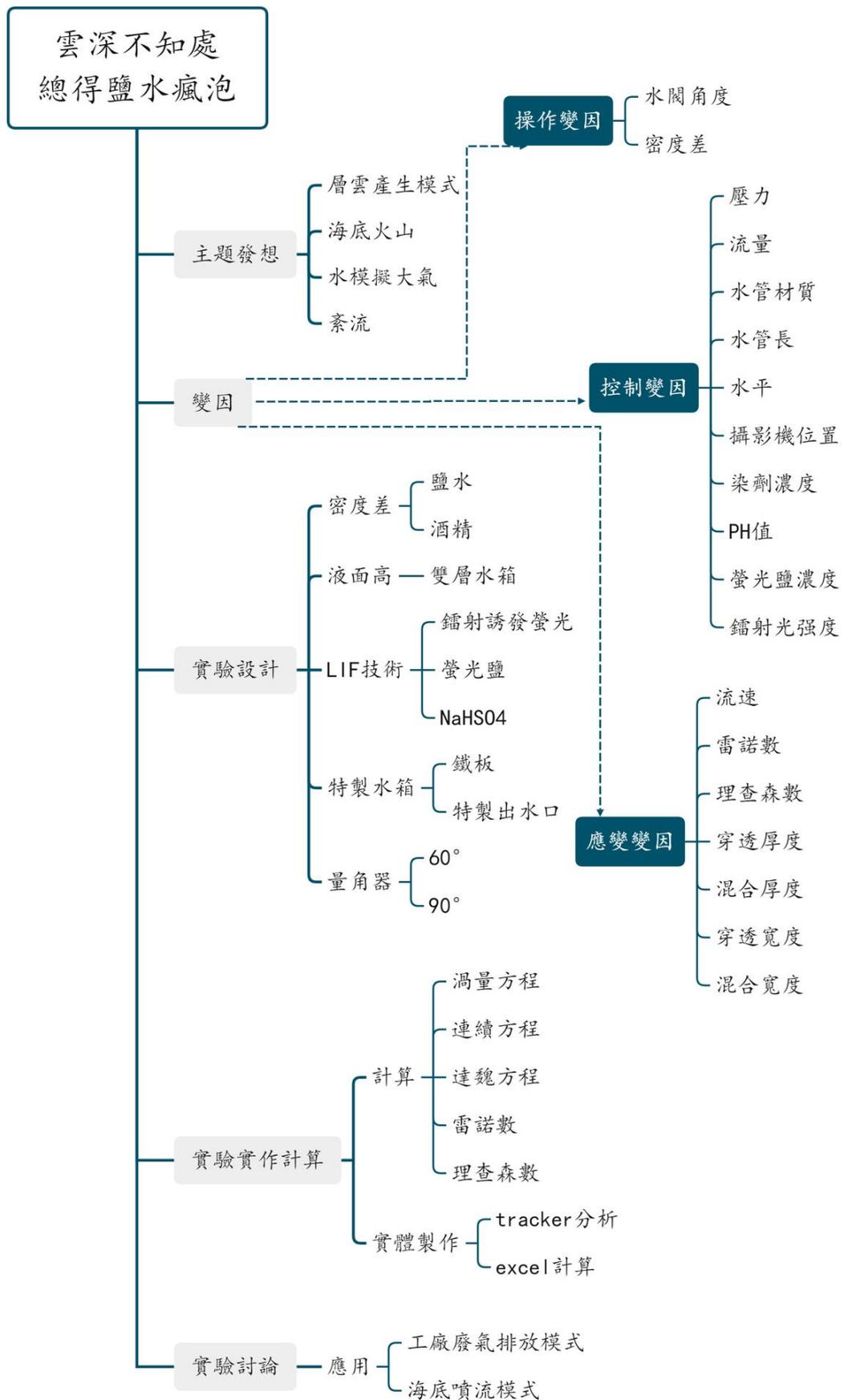
(一)實驗設計背景

積雲(Cumulus clouds)，是由地表加熱的空氣上升時，通過大氣對流形成。隨著空氣的上升，大氣密度下降，溫度也下降，導致相對濕度上升。如果對流達到一定程度，也就是相對濕度達到 100%時，濕絕熱階段開始。此時會出現正回饋：由於相對溼度高於 100%，水蒸氣冷凝，釋放潛熱，使空氣變暖，而後刺激進一步的對流。

在這個階段，水蒸氣凝結在空氣中的各種原子核上，形成積雲。這產生了與積雲相關的特徵性平底浮腫形狀。雲的高度（從其底部到頂部）取決於大氣的溫度分佈以及是否存在任何逆溫。在對流過程中，周圍的空氣被熱量夾帶（混合），上升空氣的總質量增加。

由以上積雲相關成因我們可以發現，其形成形狀和大氣中溫度分布有關，而這樣的溫度梯度會使得大氣產生密度層變，因而導致氣團通過密度層變時會有不同形狀的變化。另一方面，其形成過程會與周圍空氣混和冷凝。所以我們就這兩方面設計出相關的實驗內容如下，由於水具有比大氣更好觀測及控制等因素，因此我們決定用水來模擬大氣流體的部分，具體裝置包含產生紊流的高低差水缸，包含密度界面的特製水缸兩部分。當紊流流經密度界面時，即可觀察其相關混和情形和穿透情形，藉此，得以更進一步了解層雲相關發展情形及形狀演化。

(二)實驗設計概念圖(圖七)



二、紊流壓力損失的預測

(一) 簡介

一般而言，為了簡化計算，關於流速的預測大多僅止於用白努力定律這類無摩擦無黏滯假設，這在低流速及不考慮邊界條件及材質、寬度合式下的特殊條件下可適用，但在流速較高或是較一般的情形卻不是這麼一回事，牽涉到的變因更加的廣泛，本部分嘗試利用達西-魏斯巴赫方程（Darcy-Weisbach equation），這個方程式為一個經驗公式，為目前流體力學上一個準確且普遍的公式，我們將其用於對我們裝置設計進行一個較為可靠的預估。

(二) 計算

本實驗用以產生紊流速度的裝置如圖右

已知以下數值：

R（水管半徑）=0.856cm

$L_1 \gg R$, $L_2 \gg R$

S=136cm

管長（L）=204cm

水在室溫的粘滯係數 $\sim 0.01\text{cm}^2/\text{s}$

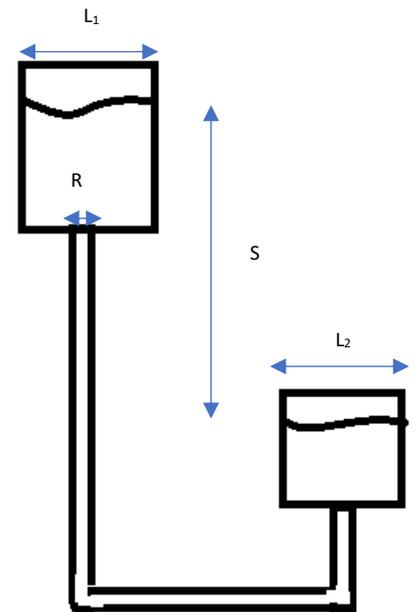
由達西-魏斯巴赫方程（Darcy-Weisbach equation）可知：

$$\Delta p = f_D \times \frac{\rho}{2} L \times \frac{v^2}{R}$$

其中 Δp 為壓力損失

f_D 為達西摩擦係數

v 為平均速度



（圖八）流速裝置概圖

再由能量守恆：

$$P_1 V_1 = \frac{1}{2} \rho V_2 \cdot v^2 + P_2 V_2 + \Delta P V_2$$

又因水可約略滿足不可壓縮假設，即進入之 v_1 和出去之 v_2 相等。

因此可將等號兩邊改為：

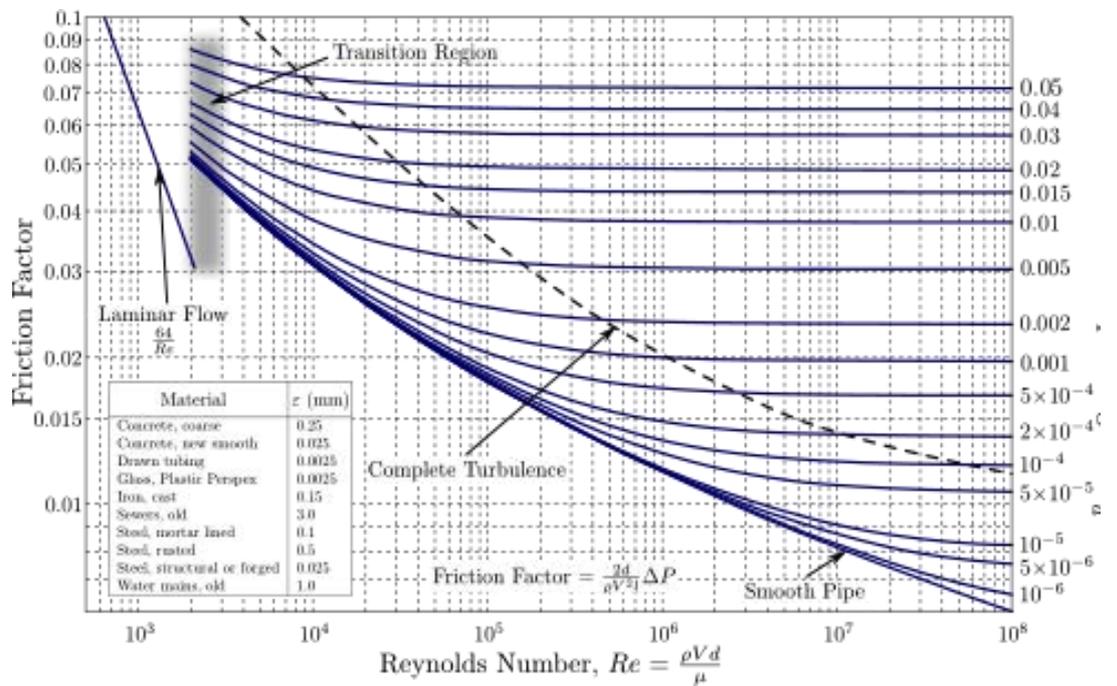
$$P_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + P_2 + \Delta P$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + P_2 + f_D \times \frac{\rho}{2} L \times \frac{v^2}{R}$$

$$2 (P_1 - P_2) = \left(\rho + \frac{f_D \rho L}{R} \right) v^2$$

$$\frac{2gS}{\left(\rho + \frac{f_D \rho L}{R} \right)} = v^2$$

配合穆迪圖 (Moody chart, 一個流體力學中的無因次圖，描述一個圓形管路中其達西摩擦因子、雷諾數及相對粗糙度之間的關係) 查閱塑膠平滑水管的達西摩擦係數值約為 0.33：



帶入所有數值即知

$$v \approx 173.40 \text{ cm/s}$$

(圖九)穆迪圖 (Moody chart)

三、穿透厚度對不同理查森數的關係

(一) 理論背景

1. 理查森數

理查森數(Richardson Number, 簡稱 Ri), 是一個無因次量, 理查遜數代表浮力與慣性力效應之比。當理查森數愈大, 流體受浮力驅動的效應越為顯著, 反之, 若理查森數越小, 則主要由慣性力影響。在大氣、海洋、湖泊等流場會因為溫度或密度分佈的不均勻而有密度差異, 在重力方向上有密度分層的現象, 而理查遜數便可用來評估密度分層的強弱, 或浮力對流場的影響。而我們本次在設計實驗時, 即透過食鹽影響特製水缸上下密度差, 進而改變理查森數。

經過我們查閱諸多文獻, 最後決定使用的定義如下:

$$R_i = g \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} \times \frac{w}{v^2}$$

其中

g 為重力加速度, 單位是 cm^2/s^2

$\Delta \rho$ 是上下層密度的差值, 單位是 g/cm^3

$\bar{\rho}$ 是上下層密度的平均值, 單位是 g/cm^3

w 是當地流體的寬度, 單位是 cm

v 是當地流體的速度, 單位是 cm/s

2. 雷諾數

雷諾數 (Reynold Number, 簡稱 Re)，雷諾數以英國物理學家奧斯包恩·雷諾 (Osborne Reynolds) 命名，其描述了流體慣性力與黏滯力的比值，分子描述了流體有多大的慣性；而分母為黏滯係數 μ ，是流體黏滯性的衡量。雷諾數較小時，黏滯力對流場的影響大於慣性力，流場中流速的擾動會因黏滯力而衰減，流體流動穩定，為層流；反之，若雷諾數較大時，慣性力對流場的影響大於黏滯力，流體流動較不穩定，流速的微小變化容易發展、增強，形成紊亂、不規則的紊流流場。在無因次的 NS 方程式中，可以發現只要雷諾數固定，不同流體力學系統是由相同的方程式支配。

我們使用的雷諾數定義如下：

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

其中

ρ 為流體密度，單位為 g/cm^3

v 為流體速度，單位為 cm/s

D 為流體寬度，單位為 cm

μ 為流體動力黏度，單位為 $\text{dyne}\cdot\text{s/cm}^2$

ν 為流體運動黏度 ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$)，單位是 cm^2/s

3. 斜壓

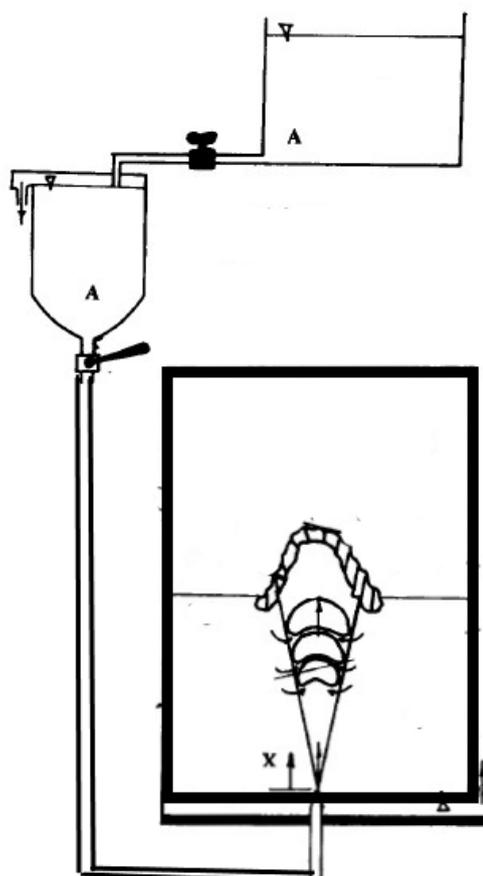
斜壓是用以衡量流體分層中密度梯度和壓力梯度偏差程度，與等壓面和等密度面的夾角成正比，當等密度表面與等壓表面未對齊時，斜壓就會導致渦量的改變，稱為斜壓不穩定性。壓流動表示斜壓為零的情況下，一般而言這在大氣接近赤道的熱帶地區是個良好的近似。

(二) 實驗設計概念

本實驗透過改變特製水缸上下密度差造成不同的 Ri ，藉由不同的 Ri 來觀測打
入流體穿透密度界面的變化，並透過染劑來追蹤流線，具體實驗裝置如下
圖。



(圖十) 實驗架設實際圖



(圖十一) 實驗架設概念圖

其中最上層水缸用以補注第二層水缸使其維持高度不變，第二層水缸到下方
特製水缸為壓力差來源高度，產生之紊流由最下方注入。

(三) 實驗步驟

1. 配置鹽水溶液，密度為 1.0220、1.0331、1.0445、1.0559 (g/cm^3)。
2. 加入藍色染劑，攪拌均勻使其完全溶解。
3. 利用比重計測量密度，確認與預設值相符。
4. 若不符，則重新調整食鹽水比例直到與預設值相同。
5. 器材（如圖三）架設完畢後，將藍色鹽水溶液到至最上層水缸至足夠使第二層水缸液面保持的高度，確保第二層水缸高度不隨時間變化。
6. 開起水閥，使第二層水缸液面保持最高，並使水管內充滿水溶液。
7. 確定無氣泡後關閉水閥，清理特製水缸內部多餘溶液。
8. 將密度和藍色鹽水溶液相同之透明鹽水溶液沿著缸壁倒入特製水缸下層至界限位置，避免與出口藍色溶液混合。
9. 以玻棒清理壁上氣泡，使其不會影響觀測結果。
10. 將鐵板插入，避免與稍後倒入之純水混合。
11. 特製水缸上層注入純水，使液面高至鐵板距離為 9 公分。
12. 將鐵板以足夠緩慢之速度抽出，避免上下兩層溶液混合。
13. 稍微等待水面靜止，避免抽板時微小水流運動影響結果。
14. 開起錄影設備，並開始錄影。
15. 開起水閥至 90° 位置，觀察由下方注入之紊流。
16. 開啟一段時間，使紊流注入界面形狀不再變化，且確保時間夠短使得特製水缸高度上升量小到可忽略。
17. 清理特製水缸內混合後之溶液，重複(5)至(16)，但水閥開起角度改為 60° 。
18. 將最上層藍色水溶液替換成(1)之其他密度，重複(2)至(17)。

四、混和厚度對不同理查森數的關係

(一) 理論背景

1. 觀測技術原理

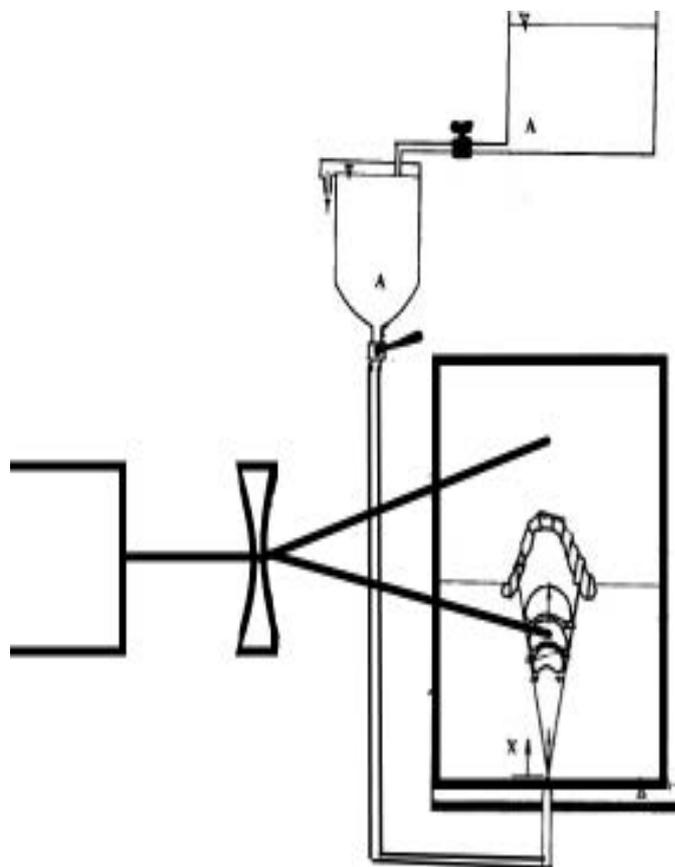
雷射誘發螢光(Laser Induced Fluorescence 簡稱 LIF)，是以雷射光照射樣品產生螢光的觀測方法，基本原理是以雷射激發分子或自由基至電子激發態，再觀測分子或自由基回到基態時放出的螢光技術，借此描繪出流場中流體形狀。而我們在本實驗中使用二鈉螢光素。

($C_{20}H_{10}Na_2O_5$)，外表呈橙黃色，發射光譜範圍從大約 480nm 到 630 nm，效果最好約是在波長為 520 nm。且為了達成觀測噴流與上層溶液混和的情形，本次使用的螢光指示劑會在 pH 值較低(<4)時不發光，而在 pH 較高(>4)時發光，因此可由此原理將初始下層水缸中 pH 控制於 3，特製水缸上層 pH 約莫為 6.6，初始噴流中含低濃度(約莫 10⁻⁵M)的螢光鹽，當氫離子雷射照射至水缸時，由於上下層接不含螢光鹽，因此在暗室下，攝影機所拍攝的畫面皆為一片漆黑，而當噴流與上層流體混合時，pH 升高，就會發出螢光，下層液體因為酸性，故當螢光鹽與之混合時不會發光，因此我們可有效觀察流體混合厚度和寬度。

(二) 實驗設計概念



(圖十二)實驗架設實際圖



(圖十三)實驗架設概念圖

基本架設如上圖，螢光鹽置放在上層水缸(A)，開筏後藉由連通水管將水由下方向上送入，而穿過密度界面，單束雷射光發射器通過凹透鏡後散開可照射整個水缸，若寒櫻光鹽的噴流與上層溶液混和，即可發出螢光而被觀測。

(三) 實驗步驟

1. 利用標準液校正 pH 計。
2. 配置硫酸水溶液，pH 約為 3，密度與水相同，均為 $0.998(\text{g}/\text{cm}^3)$ 。
3. 配置含螢光鹽硫酸水溶液，pH 約為 3，密度與水相同，為 $0.9980(\text{g}/\text{cm}^3)$ 。
4. 配置不同濃度酒精水溶液，密度分別為 0.9765、0.9656、0.9557、
 $0.9470(\text{g}/\text{cm}^3)$ 。
5. 若不符，則重新調整酒精比例直到與預設值相同。
6. 器材（如圖三）架設完畢後，將含螢光鹽硫酸溶液到至最上層水缸至足夠使第二層水缸液面保持的高度，確保第二層水缸高度不隨時間變化。
7. 開起水閥，使第二層水缸液面保持最高，並使水管內充滿水溶液。
8. 確定無氣泡後關閉水閥，清理特製水缸內部多餘溶液。
9. 將不含螢光鹽硫酸水溶液液沿著缸壁倒入特製水缸下層至界限位置，避免與出口與含螢光鹽溶液混合。
10. 以玻棒清理壁上氣泡，使其不會影響觀測結果。
11. 將鐵板插入，避免與稍後倒入之純水混合。
12. 特製水缸上層注入純水，使液面高至鐵板距離為 9 公分。
13. 將鐵板以足夠緩慢之速度抽出，避免上下兩層溶液混合。
14. 稍微等待水面靜止，避免抽板時微小水流運動影響結果。
15. 開啟雷射設備，使雷射光通過特製水缸。
16. 開起錄影設備，並開始錄影。
17. 開起水閥至 90° 位置，觀察由下方注入之紊流。
18. 開啟一段時間，使紊流注入界面形狀不再變化，且確保時間夠短使得特製水缸高度上升量小到可忽略。
19. 清理特製水缸內混合後之溶液，重複(6)至(18)，但水閥開起角度改為 60° 。
20. 將最上層藍色水溶液替換成(1)之其他密度，重複(6)至(19)。

伍、研究結果

一、紊流壓力損失的預測

(一) 計算分析步驟

1. 開啟 tracker 檔案，並匯入影片。
2. 利用校正桿對準影片正中央對照之橫線，並進行長度校正。
3. 將影片逐格撥放，找到開始入注水流的點。
4. 追蹤液面高度之微小位置變化。
5. 利用 excel 推求其位置時間圖的斜率。
6. 利用流體力學連續方程式計算實際情況下，水流出之初速，和前文理論計算之結果相比較。

(二) 數據計算

由 tracker 軌跡計算出的的速率經多次平均後為 4.28cm/s

不可壓縮下的流體連續方程簡化如下：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

A 為截面積，單位 cm^2 。

v 為速度，單位 cm/s 。

又已知我們特製水缸截面積為 225.00cm^2 。

已知利用游標尺測得圓形水管內徑 0.856cm 。

帶入三個參數可知管內流速為 167.55cm/s 。

與前頁計算之 173.40cm/s 相差比例約在 3.4%，在可接受範圍內。

二、穿透厚度對不同理查森數的關係

(一) 計算分析步驟

1. 開啟 **tracker** 檔案並匯入影片。
2. 利用校正桿對準影片正中央對照之橫線，並進行長度校正。
3. 將影片逐格撥放，找到開始入注水流的點。
4. 對準紊流中的一點，追蹤其在界面附近的位置。
5. 利用 **excel** 計算其位置函數的斜率，即為其速率。
6. 繼續撥放影片，找到紊流通過界面形狀固定的點。
7. 測量此時的紊流寬度。
8. 繼續撥放影片，找到穿透形狀已不再變化的點。
9. 測量此時的穿透厚度。

(二) 計算部分

我們嘗試用一個簡單的物理模型去解釋這個穿透的過程，先考慮一個軸對稱圓形湍流，應可被視為一連串大型渦旋，當第一個漩渦向上推進穿過界面，設其具有初始局部速度 v 和局部長度 L 。由環量的定義我們可以近似出這個渦流的環量(Γ)。

$$\Gamma = \oint_c v \cdot dS \approx vL$$

且此渦流中渦量(ω)也可被估計，即：

$$\omega = \nabla \times v$$

透過斯托克斯定理(**Stokes' Law**)可將環量與渦量連結：

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A} \approx \omega L^2$$

經過界面後，渦狀團與密度界面相互作用，其初始渦量(ω)開始減少，在粘性效應不重要下，其主要受到界面斜壓影響，設 T 為通過界面後渦流包裹被破壞的時間，也就是累積穿透厚度的時間：

$$T = \frac{\omega}{(d\omega / dt)}$$

又斜壓產生的渦量變化可由渦量方程得知，並使用 Boussinesq 近似，令 $g' = g(\Delta \rho / \rho)$ ，即為：

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} \approx \frac{\Delta \rho g}{L\rho} \equiv \frac{g'}{L}$$

接著估計穿透厚度(Z)，且先不考慮前置常數：

$$Z = g'T^2 = \frac{w^2}{g'}$$

定義 ξ 為 Z/L ，為一個形狀的特性，與 Ri 同為無因次，接下來即可觀察此量與 Ri 的關係。

$$\xi \equiv \frac{Z}{L}$$

由於前面的計算並非完全精準，所以無法保證穿透厚度比例(ξ)必跟 Ri 的倒數成正比，流體力學要考慮的性質及邊界條件太過複雜，因此我們這部分的計算僅用於確定實驗作圖對象。

(三) 數據部分

以下為圖表中代號名稱

1. Rad 代表開啟水閥門的角度，以弧度計算。
2. 下表中 ρ 代表下層鹽水密度，單位是(g/cm³)。
3. ρ_0 代表上層水密度，當天為 1.0000g/cm³。

4. v 代表流體在接近界面的速度，單位是 cm/s 。
5. w 為在界面的寬度，單位為 cm 。
6. Re 和 Ri 分別為雷諾數和理查森數，無因次。
7. Z 為穿透厚度，單位為 cm 。
8. ξ 為穿透厚度比例，無單位。

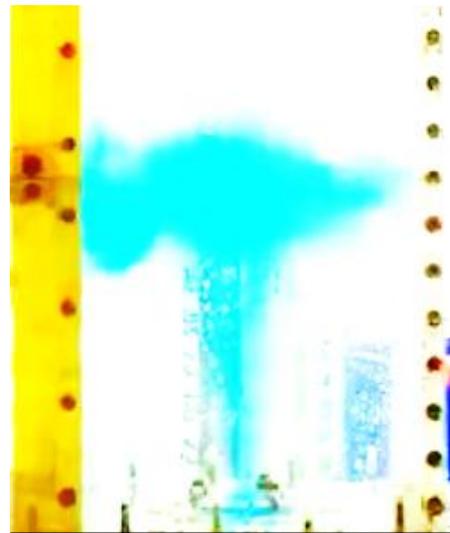
本實驗操作不同 ρ 改變 Ri 觀察 Z 的變化，固定初始開啟角度。

(表一)固定開啟水閥角度穿透厚度比例對不同理查森數_數據一覽表

Rad	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	1.0220	1.0332	1.0445	1.0559
ρ_0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
v	6.35	7.26	10.03	10.35
w	7.18	7.02	5.27	5.10
Re	4559.30	5096.52	5285.81	5278.50
Ri	3.80	4.26	2.24	2.54
Z	3.98	3.74	3.45	3.36
ξ	0.55	0.53	0.65	0.66



(圖十四) $Re=6202.87$,
 $Ri=1.93$ ，穿透情形



(圖十五) $Re=5322.15$,
 $Ri=2.19$ ，穿透情形

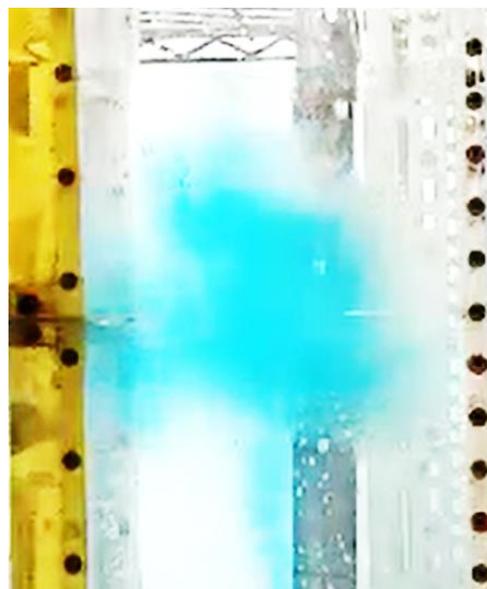
而後改變開啟水閥角度，重新操作不同 ρ 改變 Ri 觀察 Z 的變化，固定初始開啟角度。

(表二)固定開啟水閥角度穿透厚度比例對不同理查森數_數據一覽表

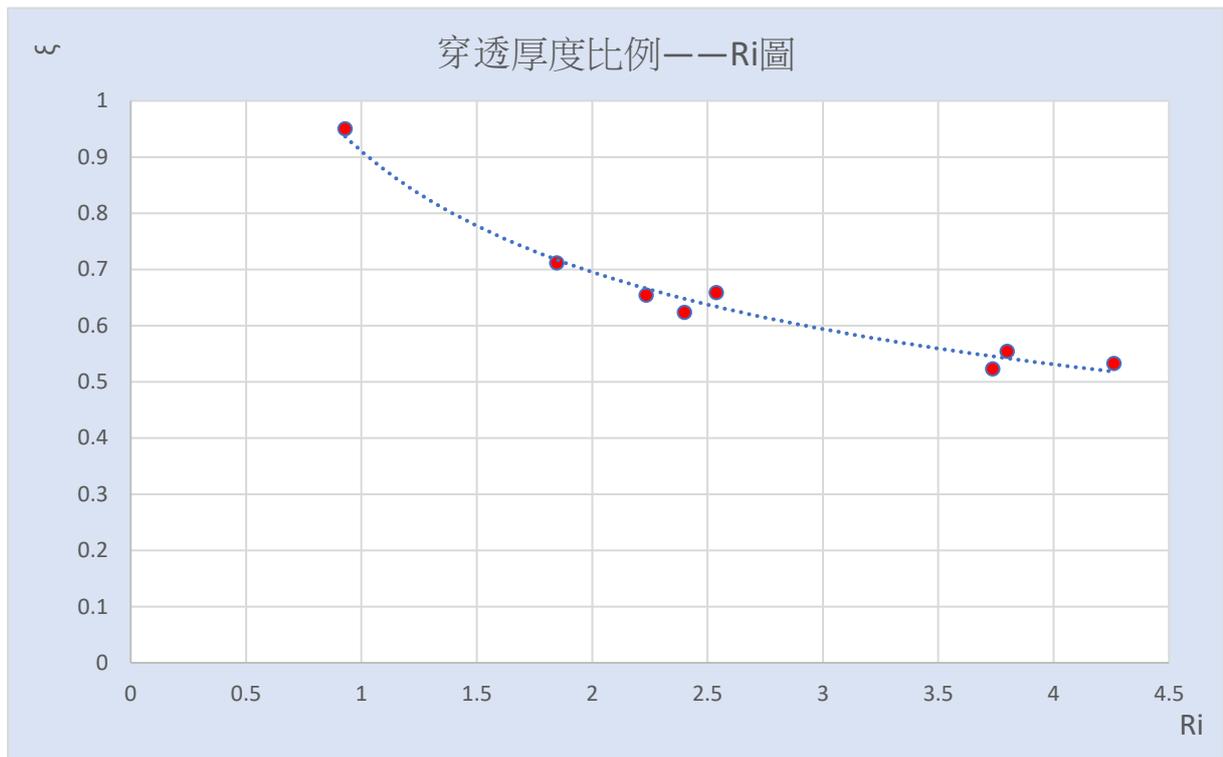
Rad	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1.0220	1.0332	1.0445	1.0559
ρ_0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
v	12.52	10.41	13.54	11.84
w	6.83	8.13	7.94	9.82
Re	8551.16	8463.33	10750.76	11626.88
Ri	0.93	2.40	1.85	3.74
Z	6.49	5.07	5.65	5.14
ξ	0.95	0.62	0.71	0.52



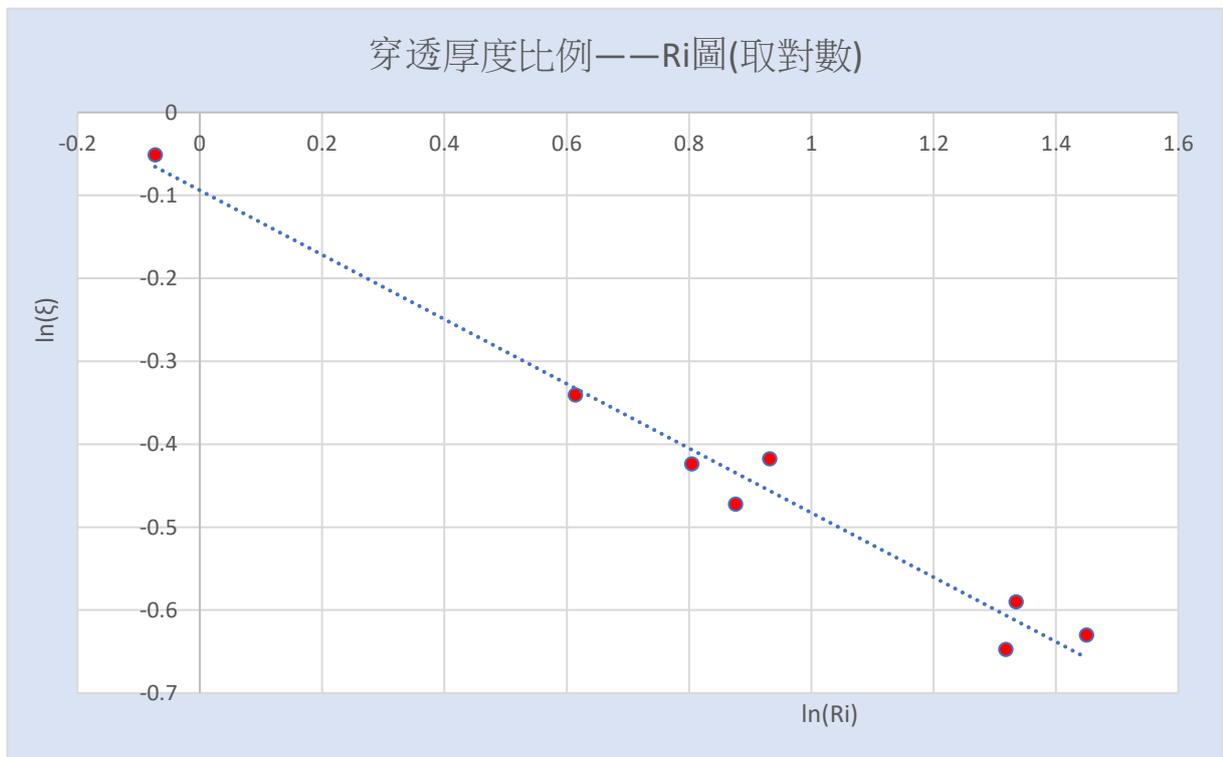
(圖十六) Re=9165.97, Ri=0.99，穿透情形



(圖十七) Re=10078.13, Ri=2.72，穿透情形



(圖十八)穿透厚度比例對 R_i 作圖



(圖十九)穿透厚度比例對 R_i 作圖(取自然對數)

由(圖十六)及(圖十七)可知在雷諾數接近的情況下， Ri 大者穿透能力明顯比較小。

經由前頁的分析可發現， Ri 和穿透厚度比例 ξ 均屬無因次，可有任意的函數關係，所以由第二張圖取自然對數(以 e 為底)觀察其關係。

對數圖中：

相關係數(R)=-0.99

斜率(k)=-0.39

截距(U)=-0.09

合理推斷 Ri 的-0.39 次方呈現高度相關，公式為：

$$\ln \xi = -0.39 \ln Ri - 0.09$$

(四) 不準確度分析部分

上表中僅呈現測量平均值，這部份加上誤差分析(即不確定度)的探討，由於密度測量的位數相對寬度、速度、厚度等更為精準，所以不確定度分析的部份我們著重在後者的變量上。

考慮不確定度傳遞公式(簡單的加減不準確度就不特別列出)：

$$\Delta y(x_1, x_2 \dots x_n)^2 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1^2 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2^2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n^2$$

$$\Delta R_i = 2g \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} \sqrt{\left(\frac{-2w}{v^3} \Delta v\right)^2 + \left(\frac{\Delta w}{v^2}\right)^2}$$

再考慮取對數後的不準確度：

$$x' = \ln x$$

$$\Delta x' = \frac{\partial \ln x}{\partial x} \Delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

可得以下兩份表格。

(表三)不確定度分析

	1	2	3	4	5	6	7	8
V	12.52±0.33	10.41±0.25	13.54±0.30	11.84±0.51	6.35±0.12	7.26±0.17	10.03±0.24	10.35±0.25
W	6.83±0.14	8.13±0.31	7.94±0.20	9.82±0.23	7.18±0.06	7.02±0.13	5.27±0.08	5.1±0.17
Z	6.49±0.09	5.07±0.16	5.65±0.10	5.14±0.11	3.98±0.08	3.74±0.03	3.45±0.08	3.36±0.08
Ri	0.92±0.05	2.40±0.15	1.85±0.09	3.73±0.33	3.80±0.15	4.26±0.21	2.24±0.11	2.54±0.15
ξ	0.95±0.04	0.62±0.03	0.71±0.03	0.52±0.03	0.55±0.02	0.53±0.02	0.65±0.02	0.66±0.03

(表四)取自然對數後不確定度分析

	1	2	3	4	5	6	7	8
lnRi	-0.07±0.06	0.88±0.07	0.61±0.06	1.32±0.09	1.33±0.04	1.45±0.06	0.8±0.06	0.93±0.06
ln ξ	-0.05±0.04	-0.47±0.05	-0.34±0.04	-0.65±0.05	-0.59±0.03	-0.63±0.03	-0.42±0.03	-0.42±0.05

(表三)以及(表四)中第一列的編號代表的依序是開啟九十度密度差從小到大(編號一到四)和開啟六十度密度差由小到大(五到八)。

由從以上的數據分析、製表以及不準確度的運算，我們能更進一步闡明穿透厚度比例與理察森數的關聯性，以及我們實驗上的精確性。

由上表可見，初始測量的數值不確定度都頗低，普遍在百分之五以內。而在第二表中，受限於對數運算的影響，取對數變負值的那項不準確度會大幅飆升，但除此之外，其餘不確定度都相對在可接受範圍，顯示出本實驗有一定的可靠性。

三、混和厚度對不同理查森數的關係

(一) 計算分析步驟

1. 開啟 **tracker** 檔案並匯入影片。
2. 利用校正桿對準影片正中央對照之橫線，並進行長度校正。
3. 將影片逐格撥放，找到開始入注水流的點。
4. 對準紊流中的一點，追蹤其在界面附近的位置。
5. 利用 **excel** 計算其位置函數的斜率，即為其速率。
6. 繼續撥放影片，找到紊流通過界面形狀固定的點。
7. 測量此時的紊流寬度。
8. 繼續撥放影片，找到混和形狀已不再變化的點。
9. 測量此時的混和厚度。

(二) 計算部分

這部分牽涉到混和層的問題，相對穿透比較難以用數學模型分析其定量結果，但我們仍可透過一些定性概念以及我們的數據來描述他的定性關係。

可預見的，混和部分應來自於通過界面產生兩側的渦漩，固定 Ri 下，高 Re 流前部可受到較強的斜壓而捲曲，因而有更好的混和效果，反之低 Re 流混和效果應該也較差。

(三) 數據部分

以下為圖表中代號名稱

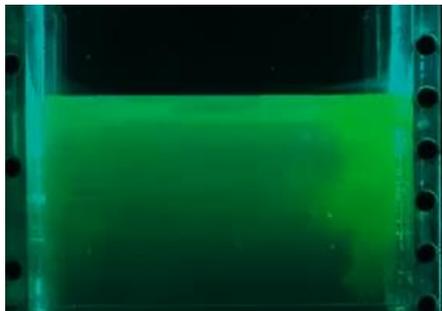
1. Rad 代表開啟水閥門的角度，以弧度計算。

2. 下表中 ρ 代表下層鹽水密度，單位是(g/cm³)。
3. ρ_0 代表上層水密度，當天為 0.9980g/cm³。
4. v 代表流體在接近界面的速度，單位是 cm/s。
5. w 為在界面的寬度，單位為 cm。
6. Re 和 Ri 分別為雷諾數和理查森數，無因次。
7. Z 為混和厚度，單位為 cm。
8. ζ 為混和厚度比例，無單位。

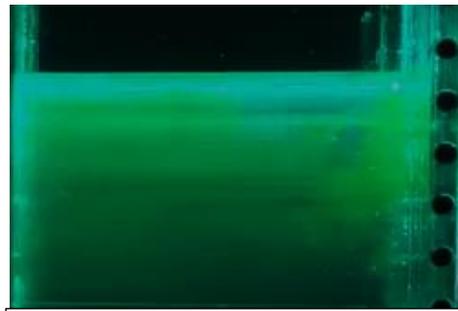
本實驗操作不同 ρ 改變 Ri 觀察 Z 的變化，固定初始開啟角度。

(表五)固定開啟水閥角度混和厚度比例對不同理查森數_數據一覽表

Rad	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0.9765	0.9632	0.9509	0.9455
ρ_0	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980
v	18.10	16.14	17.27	19.06
w	5.93	6.41	8.05	6.29
Re	10733.30	10345.74	13902.35	11988.74
Ri	0.39	0.86	1.28	0.92
Z	8.96	5.33	4.19	5.28
ζ	1.51	0.83	0.52	0.84



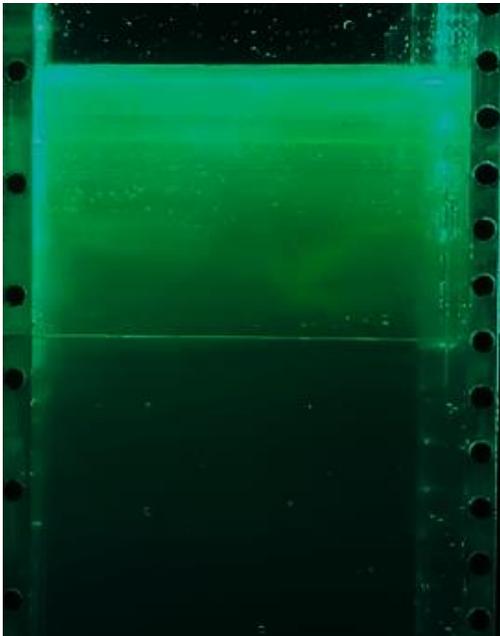
(圖二十) $Re=10733.30, Ri=0.39$



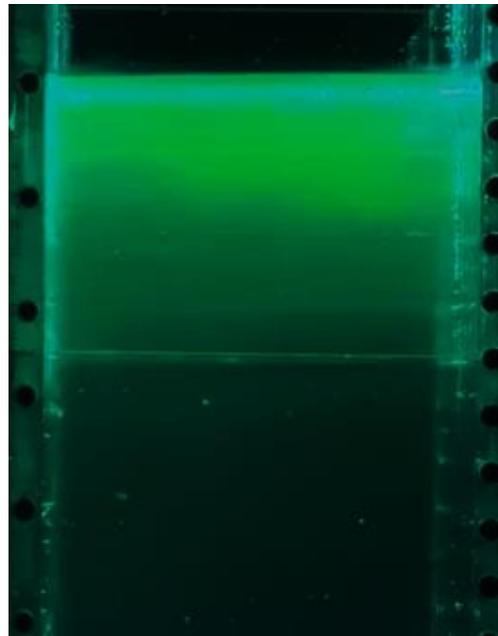
(圖二十一) $Re=11998.84, Ri=0.92$

(表六)固定開啟水閥角度混和厚度比例對不同理查森數_數據一覽表

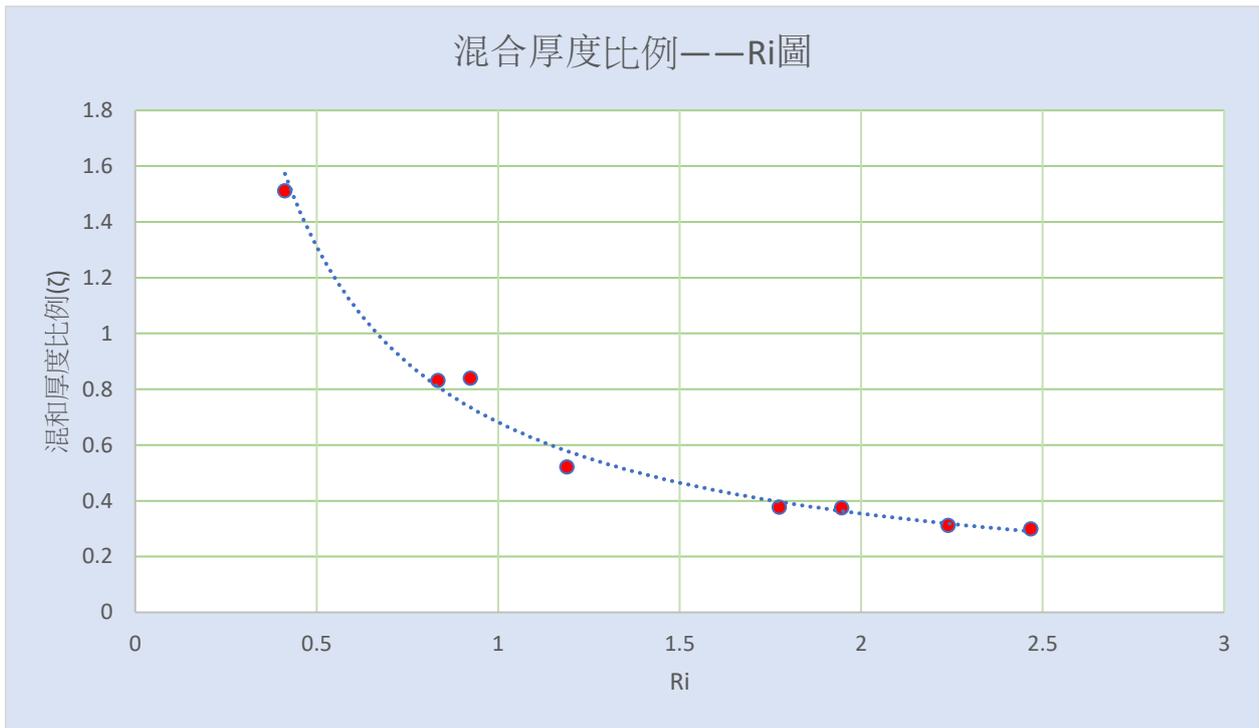
Rad	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	0.9765	0.9632	0.9509	0.9455
ρ_0	0.9980	0.9980	0.9980	0.9980
v	7.85	10.97	11.32	13.87
w	6.67	6.91	6.51	6.40
Re	5235.95	7580.27	7369.32	8876.80
Ri	2.31	2.00	2.41	1.76
Z	1.99	2.59	2.03	2.41
ζ	0.45	0.52	0.40	0.45



(圖二十二)Re=8876.80,Ri=1.76

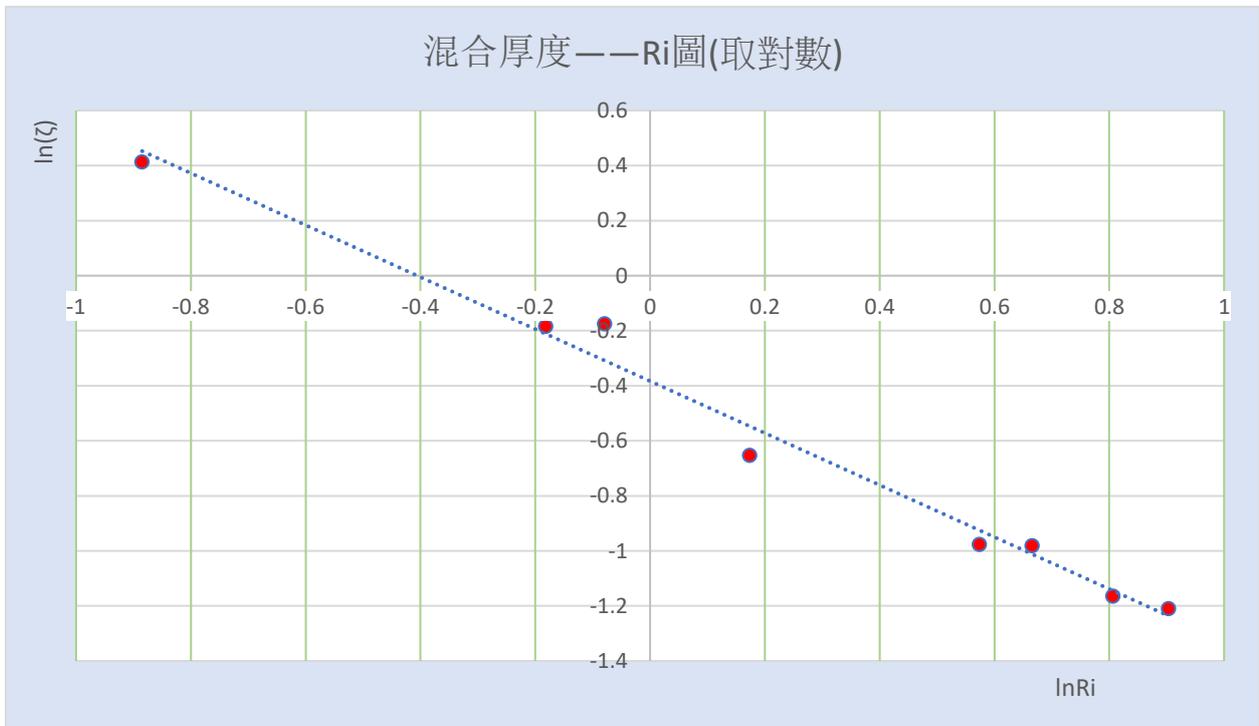


(圖二十三)Re=5235.95,Ri=2.31



(圖二十四)混和厚度比例對 R_i 作圖

就這張圖而言我們不太能分辨它是甚麼樣的關係，只能說就趨勢而言呈現遞減，若要更明確判斷我們則用以下的對數圖。



(圖二十五)混和厚度對 R_i 作圖

(圖二十五)的斜率(k)為-0.92

相關係數(R)為-0.99

顯示出混和厚度比例與 Ri 的-0.92 次方成高度相關。

以下同穿透厚度比例進行上下兩張圖的不準確度分析：

(表七)不確定度分析

	1	2	3	4	5	6	7	8
V	18.1±0.60	16.14±0.33	17.27±0.86	19.06±0.24	7.85±0.29	10.97±0.28	11.32±0.25	13.87±0.31
W	5.93±0.14	6.41±0.09	8.05±0.42	6.29±0.16	6.67±0.18	6.91±0.20	6.51±0.11	6.4±0.19
Z	8.96±0.3	5.33±0.09	4.19±0.16	5.28±0.17	1.99±0.05	2.59±0.12	2.03±0.05	2.41±0.04
Ri	0.39±0.03	0.86±0.04	1.28±0.15	0.92±0.04	2.31±0.19	2.00±0.12	2.41±0.12	1.76±0.10
ζ	1.51±0.07	0.83±0.03	0.52±0.04	0.84±0.03	0.3±0.02	0.37±0.02	0.31±0.01	0.38±0.02

(表八)取自然對數後不確定度分析

	1	2	3	4	5	6	7	8
lnRi	-0.95±0.08	-0.16±0.05	0.25±0.12	-0.09±0.04	0.84±0.08	0.69±0.06	0.88±0.05	0.57±0.06
lnζ	0.41±0.05	-0.18±0.03	-0.65±0.08	-0.18±0.03	-1.21±0.05	-0.98±0.04	-1.17±0.03	-0.98±0.04

(表七)以及(表八)中第一列的編號代表的依序是開啟九十度密度差從小到大(編號一到四)和開啟六十度密度差由小到大(五到八)。

由從以上的數據分析、製表以及不準確度的運算，我們能更進一步闡明混和厚度比例與理察森數的關聯性，以及我們實驗上的精確性。

伍、討論

- 一、就層雲結構而言，由於其是由上升氣流所形成，上升的氣流可穿透到的高度，或其與周圍冷空氣混和，均和其形狀的發展有著密不可分的關係，因此透過本次實驗結果，可更進一步預測其形狀。
- 二、對流層中一般情況可能存在溫度隨高度遞減，因此會導致密度隨高度遞減，可視為密度層變界面，及本實驗的一種推廣，若是在高 Ri 或是低 Re 即會導致不易穿透，或是不易混和的情況，雲層會比較低且扁。
- 三、兩種實驗均取完對數後可變為一條直線，且相關係數夠高，說明本次實驗結果是有效且可靠的，不過第一個實驗明顯次幂較高。
- 四、不僅是在雲層的發展上，這種模型還可以推廣到例如工廠煙囪的污染擴散模式，光廠煙囪污染物排放後，到了高空一樣會遭受密度界面的效應，透過當時的密度、溫度等數值，可推斷污染物是會往高空飄，或是停留在低空，可評估降水後污染地表的損害範圍。
- 五、此情形也可用在海底火山或噴泉，當水柱從深海向上時，也會遇到類似的密度梯度環境，這也是和此實驗相似的情境。
- 六、由於本實驗是為模擬層雲熱對流的形成過程，而空氣上升最典型的熱力學模型是絕熱膨脹，雖說我們的物理條件和絕熱膨脹不同，本次實驗上方體積增加來自於下方流體補注，而絕熱膨脹乃因壓力下降造成，但兩者造成的結果有可類比之處，故在此進行討論針對此一結果，也就是 $PV^\gamma = \text{Const}$ 的方程式做個探討。

計算過程：

體積：

我們發現紊流上升過程中，密度界面上層形狀十分相似於拋物線，因此決定使用拋物線（紅色曲線）擬合水流情況，並計算出體積。

圖中可得方程式 $y = \frac{w}{2} \sqrt{\frac{x}{h}}$ （向下為 x 軸）

$$\text{得體積為 } \int_0^h y^2 \pi dx = \frac{w^2 h}{8}$$

壓力：

設液面高為 H，則壓力 $P(x) = \rho g(H - h + x)$

平均壓力為

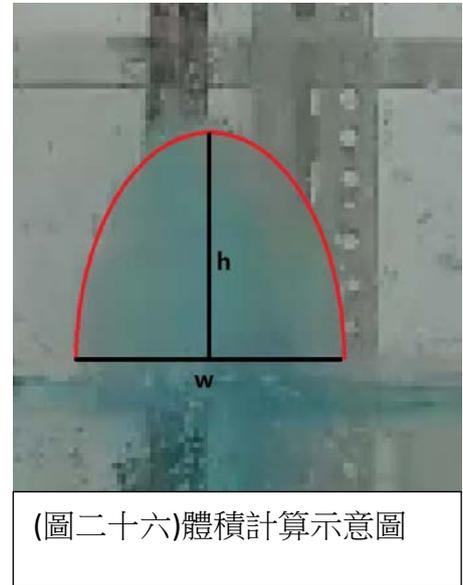
$$\frac{1}{V} \int_0^h y^2 \pi p(x) dx = \rho g \frac{3H - h}{3}$$

絕熱指數：

將 $PV^\gamma = C$ 等號兩側同取自然對數

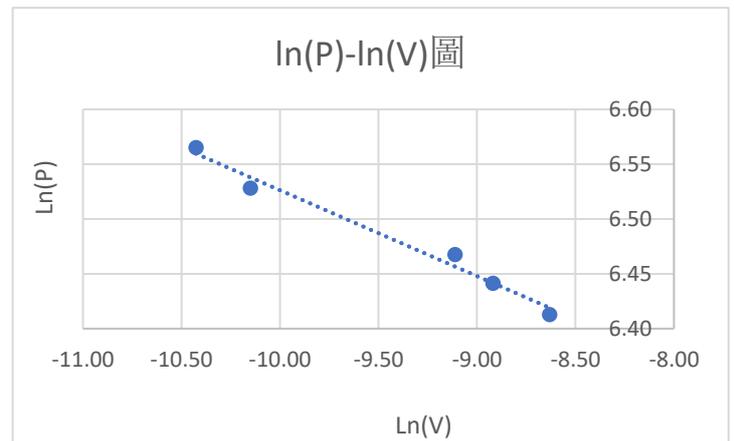
$$\text{得 } \ln(P) + \gamma \ln(V) = C$$

因此做 $\ln(V)$ 對 $\ln(P)$ 之圖形，斜率絕對值為絕熱指數，下表單位為 Si 制。



V	lnV	P	lnP
0.00018	-8.63	609.59	6.41
0.00013	-8.92	627.27	6.44
0.00011	-9.11	643.93	6.47
0.00004	-10.15	684.11	6.53
0.00003	-10.43	709.91	6.57

(表九)穿透上升 P、V 測量值



(圖二十七)ln(P)-ln(V)圖

由圖得出絕熱指數為約為 0.08，與真實絕熱指數(約 1.4)不同，原因其一可為體積增加來源本不同，故有相異處屬正常，其二為水與空氣膨脹體積模數不同，然則此結果定量分析下亦有一定程度的可類比性。

陸、結論

本次實驗透過利用水層模擬大氣密度差界面環境，來觀測在不同速度、密度的水流通過密度界面的行為，藉由 Ri 和 Re 這兩個無量綱數評估受到浮力、慣性力或黏滯力影響程度。而實驗結果顯示，當 Ri 越大或 Re 越小，則越不容易混和或是穿透，反之，當 Ri 越小或是 Re 越大，受慣性力支配的成分變大，則更容易穿透及混和，本次實驗透過一些定量定性手法嘗試分析這個物理模型，並類比成海底噴泉、工廠污染物擴散模式等等，而雲層形成過程本為一個熱力過程，最後我們透過與絕熱膨脹結果上的一個相互參照，顯示出此實驗與雲層形成上確實有一定的可比性，期能對之後的流體研究者有所助益。

柒、參考資料

- 一、S.S.Shy(1995). *Mixing Dynamics of Jet Interaction with a Sharp Density Interface*. Experimental Thermal and Fluid Science.
<https://zh.booksc.me/book/3269383/020e8a>
- 二、Emily Rodriguez(2016). *Richardson number*. Retrieved from
<https://www.britannica.com/science/Richardson-number>(Mar. 2, 2022)
- 三、Grace Young(2013). *atmospheric turbulence*. Retrieved from
<https://www.britannica.com/science/atmospheric-turbulence>(Mar. 2, 2022)
- 四、Tritton, D. J.(1977). *Physical fluid dynamics*. New York: Van Nostrand Reinhold Co.

【評語】 051817

本作品原本旨在探索與雲有關的大氣密度差介面之紊流穿透及混和，但其實驗方法與這個目的稍有落差，其控制的變因亦稍嫌過度簡化、量測方法也較不具科學客觀性，以致所觀察到的結果及結論有以偏蓋全之虞。若能針對主題進行更完整的變因控制及實驗設計，則將會是不錯的作品。

作品簡報

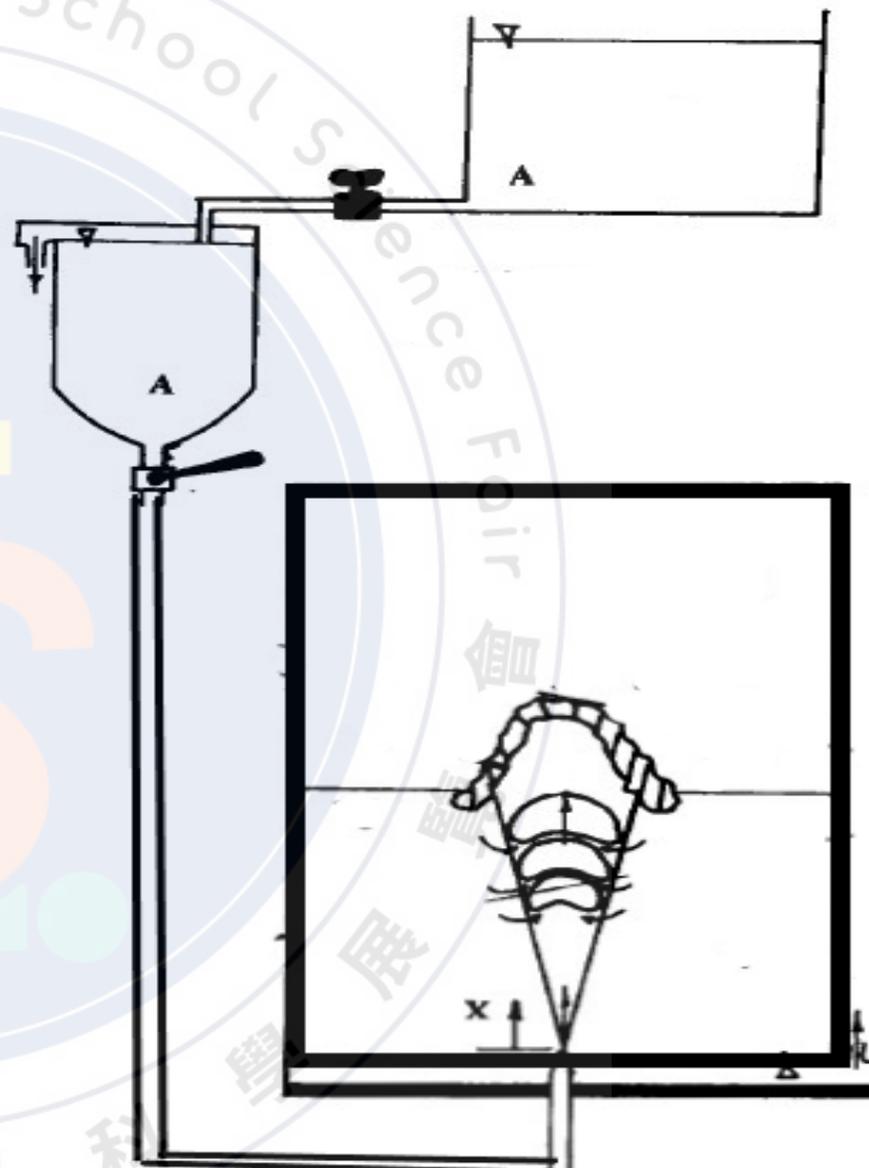
雲深不知處總得鹽水瘋泡

利用水模擬大氣中密度差界面的紊流穿透及混和

高級中等學校組
物理與天文學科

一、研究發想

- 積雲發展模式
- 熱空氣上升
- 溫度介面
- 密度介面
- 流體紊流



二、研究目的

- 一、紊流模擬並探討探討積雲形狀之大氣現象
- 二、不同理查森數下的穿透情形
- 三、不同雷諾數下的穿透情形
- 四、不同理查森數下的混和情形
- 五、不同雷諾數下的混和情形

三、背景理論

- 理查森數(Richardson Number, 簡稱Ri)：無因次量，理查遜數代表浮力與慣性力效應之比。

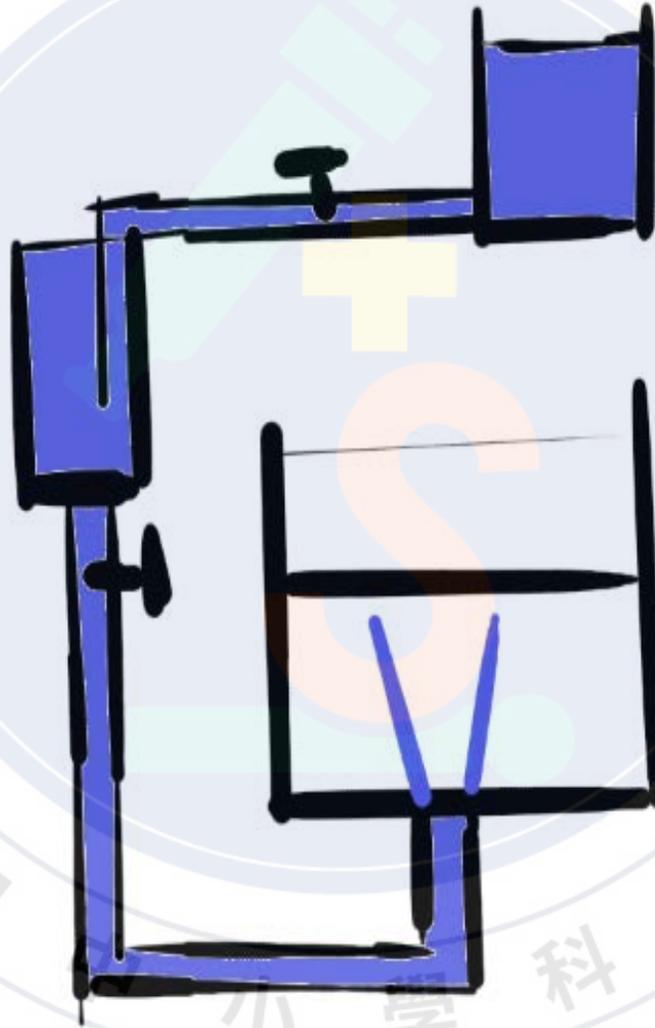
$$R_i = g \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \times \frac{w}{v^2}$$

- 雷諾數 (Reynold Number, 簡稱Re)：描述了流體慣性力與黏滯力的比值

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

- 斜壓：用以衡量流體分層中密度梯度和壓力梯度偏差程度。

四、實驗內容—器材架設



五、實驗推測—紊流速度損失預測

$$\Delta p = f_D \times \frac{\rho}{2} L \times \frac{v^2}{R}$$

$$P_1 V_1 = \frac{1}{2} \rho V_2 \cdot v^2 + P_2 V_2 + \Delta P V_2$$

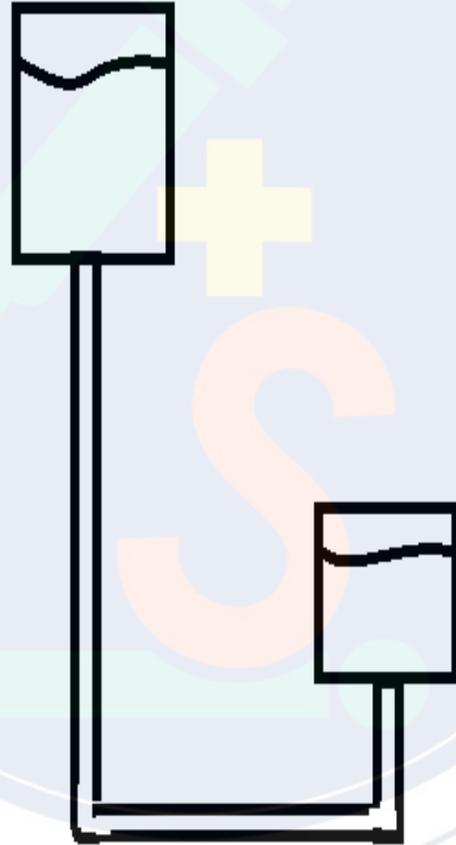
$$P_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + P_2 + \Delta P$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + P_2 + f_D \times \frac{\rho}{2} L \times \frac{v^2}{R}$$

$$2(P_1 - P_2) = \left(\rho + \frac{f_D \rho L}{R} \right) v^2$$

$$\frac{2\rho g S}{\left(\rho + \frac{f_D \rho L}{R} \right)} = v^2$$

$$v = 173.40 \text{ cm/s}$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot v = 0 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

由實驗結果得知：

水平面上升速率 4.28 cm/s

水管內流速：167.55 cm/s

誤差範圍：3.4%

五、實驗推測—穿透厚度定量分析

- $\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \approx vL$

- $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$

- $\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \omega \cdot d\mathbf{A} \approx \omega L^2$

- $T = \frac{\omega}{(d\omega/dt)}$

- 使用 Boussinesq 近似，令 $g' = g(\Delta\rho/\rho)$ ，即為：

- $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\nabla\rho \times \nabla P}{\rho^2} \approx \frac{\Delta\rho g}{L\rho} \equiv \frac{g'}{L}$

- $\Delta Z = g' T^2 = \frac{v^2}{g'}$

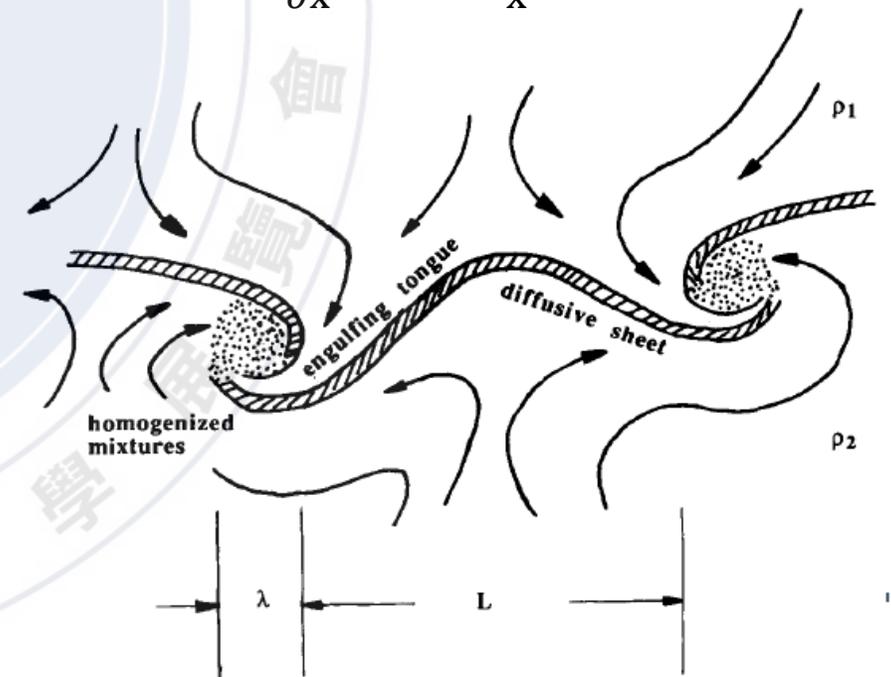
- $\xi \equiv \frac{\Delta z}{L}$

- $\Delta y(x_1, x_2 \dots x_n)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i^2$

- $\Delta R_i = 2g \frac{\Delta\rho}{\rho} \sqrt{\left(\frac{-2w}{v^3} \Delta v\right)^2 + \left(\frac{\Delta w}{v^2}\right)^2}$

- $x' = \ln x$

- $\Delta x' = \frac{\partial \ln x}{\partial x} \Delta x = \frac{\Delta x}{x}$



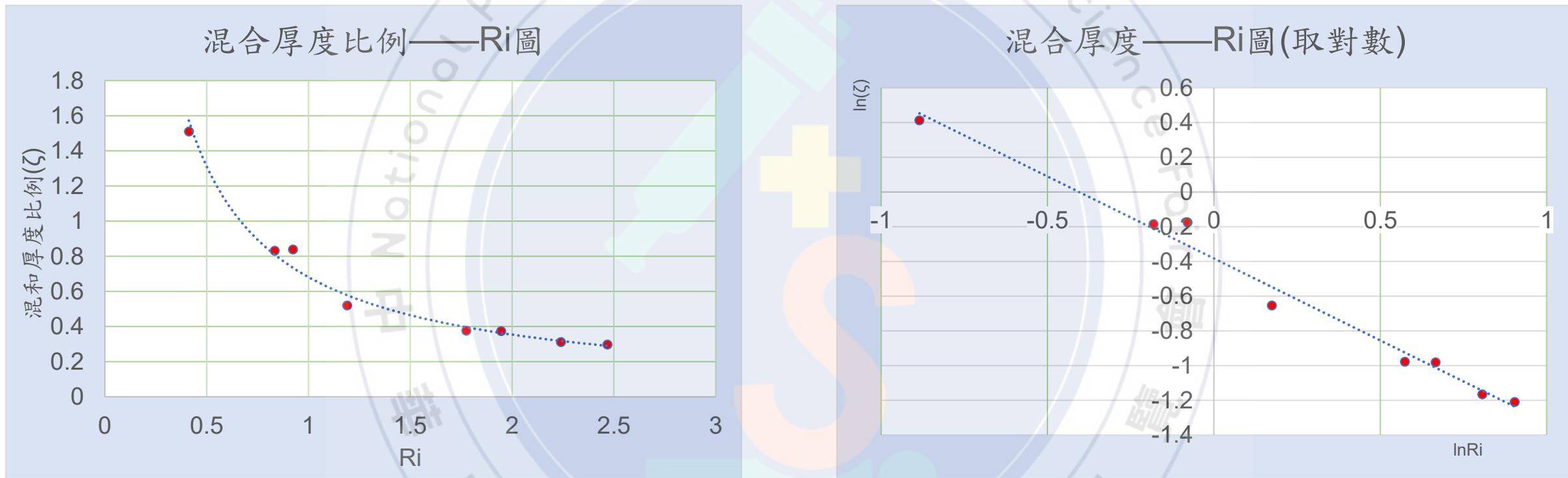
六、實驗結果—穿透厚度對Ri



相關係數(R)=-0.99

$$\ln \xi = -0.39 \ln Ri - 0.09$$

六、實驗結果—混和厚度對Ri



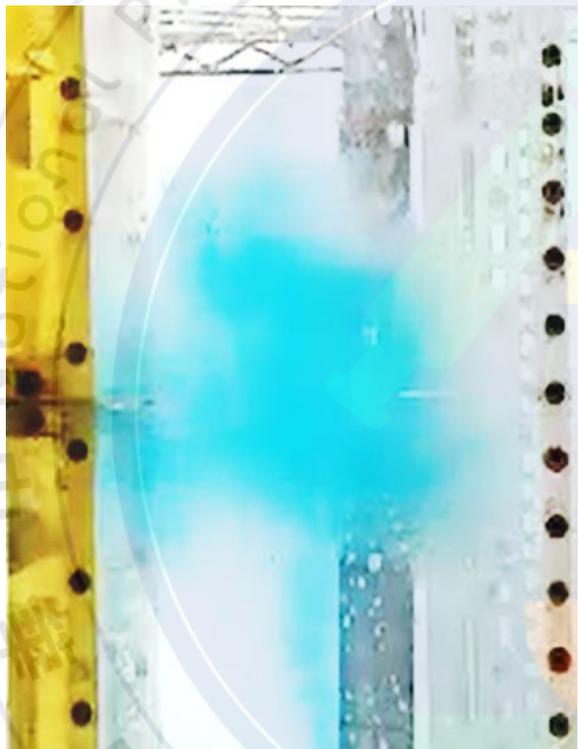
相關係數(R)為-0.99

$$\ln \zeta = -0.92 \ln Ri - 0.38$$

六、實驗結果—實圖



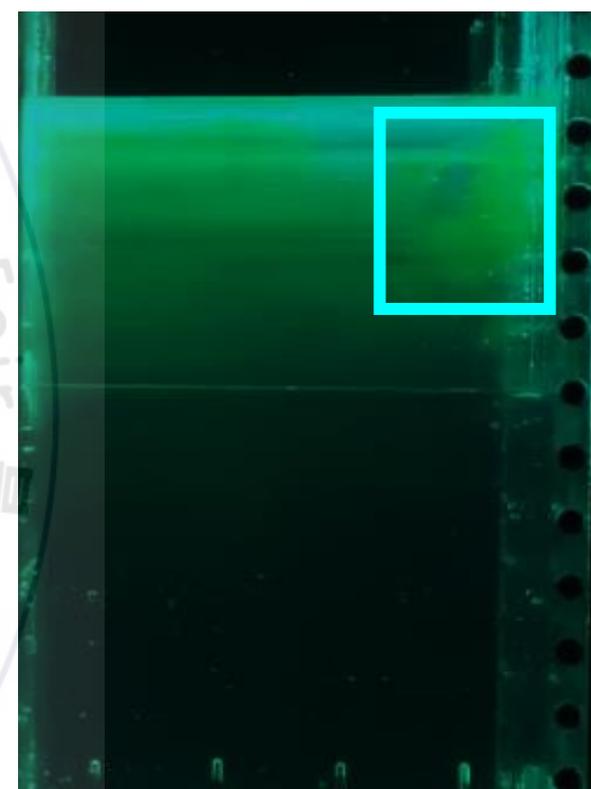
$Re=8551.16$, $Ri=0.93$,
穿透情形



$Re=11626.88$, $Ri=3.74$,
穿透情形



$Re=10733.30$, $Ri=0.39$
混和情形



$Re=11998.84$, $Ri=0.92$
混和情形

七、討論與結論

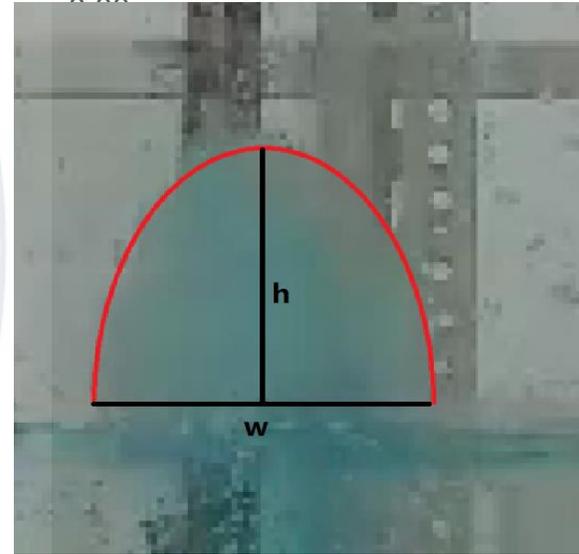
LN(P)-LN(V)圖



1. 探討與常見絕熱膨脹模型的關聯性

$$y = \frac{w}{2} \sqrt{\frac{x}{h}} \quad \int_0^h y^2 \pi dx = \frac{w^2 h}{8} \quad \frac{1}{V} \int_0^h y^2 \pi p(x) dx = \rho g \frac{3H - h}{3}$$

$$PV^r = C \Rightarrow \gamma = 0.078$$



2. 當Ri越小或是Re越大，慣性力支配的成分變大，則更易穿透及混和。

3. 類比成層雲結構、工廠汙染物擴散模式等等。

八、參考資料

- 一、 S.S.Shy(1995). Mixing Dynamics of Jet Interaction with a Sharp Density Interface. Experimental Thermal and Fluid Science.
<https://zh.booksc.me/book/3269383/020e8a>
- 二、 Emily Rodriguez(2016). Richardson number. Retrieved from
<https://www.britannica.com/science/Richardson-number>(Mar. 2, 2022)
- 三、 Grace Young(2013). atmospheric turbulence. Retrieved from
<https://www.britannica.com/science/atmospheric-turbulence>(Mar. 2, 2022)
- 四、 Tritton, D. J.(1977). Physical fluid dynamics. New York: Van Nostrand Reinhold Co.