中華民國第62屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　物理與天文學科

051815

有質量彈簧圈的複合振動與擺動

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高三 林義昊 高三 張祉偉	李育賢

關鍵詞：耦合擺、簡諧振動、複雜運動

摘要

高中所學的單擺及鉛直簡諧振動，都是在假設擺繩及彈簧沒質量的情況下掛重物的運動模式，本研究使用有質量的彈簧圈，在不掛重物的情況下進行擺動及振動實驗。實驗中發現有質量彈簧的振動週期與擺動週期非常接近，而且同時運作的情況下會有穩定的共振運動模式。經過我們仔細的實驗觀察，發現這樣的複合運動共振態，在單邊擺動一定的次數後，經由似橢圓形變換過程，產生換邊擺動的有趣情況，對照多種不同擺動模擬的結果(複擺、錐動擺)，我們推測振動為此模態周期的主要影響機制。

壹、研究動機

在讀高中物理的簡諧運動單元時，我手上正好有不同的彈簧能夠拿來做實驗簡單的實驗，我發現手邊的彈簧圈在沒有加上重物的情況下也能振動，而且不同長度、不同彈簧間有不同的振動週期。在仔細的觀測有質量彈簧的鉛直運動後，無意間發現配合小角度的擺動有很特殊的共振模式，我請教老師也查了資料，確定並沒有相關的發現與研究。這一年我開始仔細的去了解不同的振動模式，與老師一起努力實驗歸納，理解微積分還有數值模擬軟體等數學工具，初步理解出振動模態中對應的物理機制。

貳、研究目的

一、藉由觀察我們所發現的彈簧特殊的擺動方式所對應到的頻率(或週期)，與物理基本量是否有相關性。

二、參考課本或網路許多網站理想彈簧的數值解，並試著解出我們實驗觀察到的現象中的物理機制。

參、研究方法

一、先量取不同彈簧的基本物理特性，如彈力係數、長度、寬度、每圈質量等等。

二、架設實驗裝置，以觀察我們所發現的彈簧特殊的擺動方式。

三、整理實驗結果，就目前已知的物理理論來找到相對應的物理機制。

肆、研究結果與發現

一、彈簧的基本特性

	
編號 1	編號 2
	
編號 3	編號 4
	
編號 5	所有彈簧

圖一、各式不同種類的彈簧

表一、完整彈簧的基本參數

彈簧 cm	編號 1	編號 2	編號 3	編號 4	編號 5
彈簧圈數	40	73	42	40	98
直徑(cm)	6.7	6.8	11.7	7.6	5.6
重量(gw)	41.90	133.30	381.49	117.61	202.73
每圈的重量(gw)	1.05	1.83	9.08	2.94	2.07
原長(cm)	6.5	15	14.2	9	6.7
自然長度(cm)	127	272	257	99	153.7
彈力常數 (kgw/m)	0.17	0.26	0.79	0.65	0.69

本實驗使用的 5 個彈簧除了基本可量測的物理量以外，我們再藉由高中物理上的知識來求得彈力係數 k 值，使用極限的數學方法我們先把彈簧切成 n 段，且虎克定律 F=k • x，當彈力常數為定值，總重量 mg 的彈簧段數趨近無窮時伸長量$\Delta l = \lim_{n\to\infty}\frac{mg(n+1)}{2nk} = \frac{mg}{2k}$，由此可知彈力係數為重量除以兩倍的伸長量。(歐陽瑩芸，民 106)

不過表一的彈力常數為整顆彈簧受自身重量所完全伸長所計算出的 K 值，但不同圈數下的彈簧伸長的長度不同。因此，我們做了在不同圈數時的彈力常數值如表二，由表二可以觀察到，彈簧 K 值會隨著圈數的增加而減少。

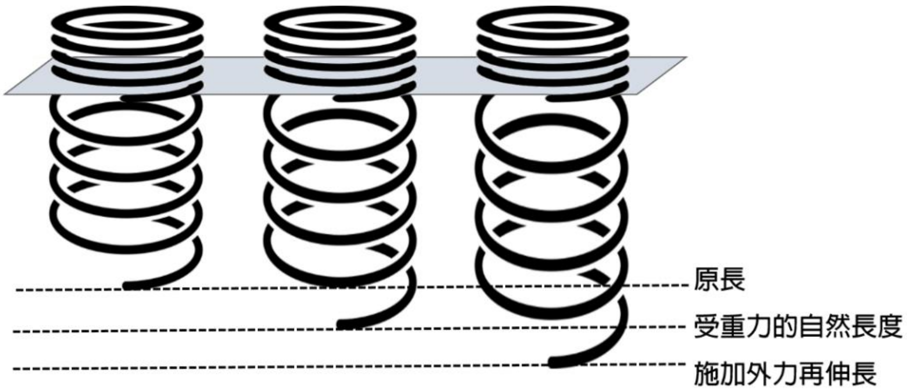
圖二、測得各彈簧長度變化量

表二、各圈數在在下的對應彈力常數

(kgw/m)	編號 1	編號 2	編號 3	編號 4	編號 5
10 圈在下	0.49	1.52	2.35	1.81	5.80
15 圈在下	0.41	1.31	1.92	1.36	3.79
20 圈在下	0.26	0.96	1.33	1.04	2.79
25 圈在下	0.25	0.77	1.19	0.85	2.32
30 圈在下	0.20	0.66	0.95	0.74	2.03
35 圈在下	0.19	0.55	0.86	0.65	1.76

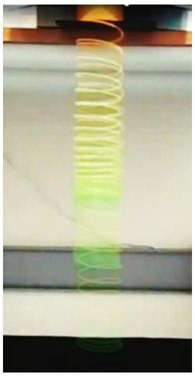
二、有質量彈簧的鉛直運動

最初我只是想簡單驗證鉛直彈簧的簡諧運動，隨手拿起手邊塑膠彈簧圈後發現還沒掛上重物就已經開始振動，而這樣的振動模式在全國科展中也有被深入研究過(陳惠玲等，民75)。不過，為了實驗方便還有後續的延伸實驗，用擋板來控制實際振動彈簧的圈數，來控制我們的實驗變因，以做為本文後續探討的實驗數據庫。



圖三、彈簧圈鉛直振動的實驗方式

實驗裝置如圖三，我們由擋板來控制擋板下的彈簧圈數，靜置至自然長度後，施加外力再伸長後，觀察其鉛直的振動，基本上振動週期與施加外力再伸長的長度無關，不過可以觀察到振動的圈數愈多(質量大)，週期呈現增加的趨勢。過程如圖四。

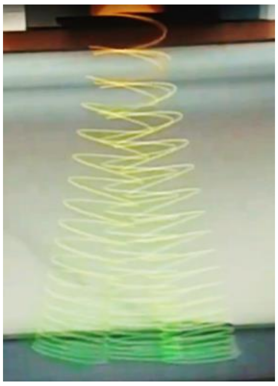


圖四、實驗振動最高與最低點的疊加

表三、拉長 10cm 與 15cm 後鉛直彈簧的振動週期

拉長 10cm，時間單位(秒)						拉長 15cm，時間單位(秒)					
單位(s)	編號 1	編號 2	編號 3	編號 4	編號 5	單位(s)	編號 1	編號 2	編號 3	編號 4	編號 5
10 圈在下	0.5	0.42	0.8	0.45	0.27	10 圈在下	0.5	0.42	0.8	0.45	0.27
15 圈在下	0.74	0.67	0.895	0.59	0.33	15 圈在下	0.74	0.67	0.895	0.59	0.33
20 圈在下	0.92	0.75	1.14	0.84	0.42	20 圈在下	0.92	0.75	1.14	0.84	0.42
25 圈在下	1.13	1.02	1.47	0.98	0.53	25 圈在下	1.13	1.02	1.47	0.98	0.53
30 圈在下	1.32	1.16	1.86	1.18	0.62	30 圈在下	1.32	1.15	1.86	1.18	0.62
35 圈在下	1.58	1.29		1.31	0.77	35 圈在下	1.58	1.29		1.31	0.77

三、有質量彈簧在自然長度下的**複擺**(compound pendulum)運動



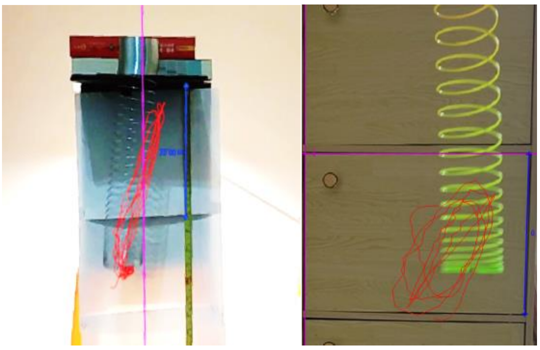
圖五、複擺振動左右最高點與最低點的疊加

表四、控制彈簧不振動的複擺週期

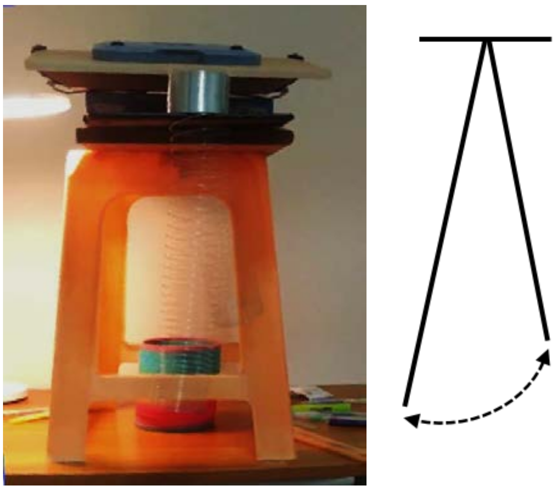
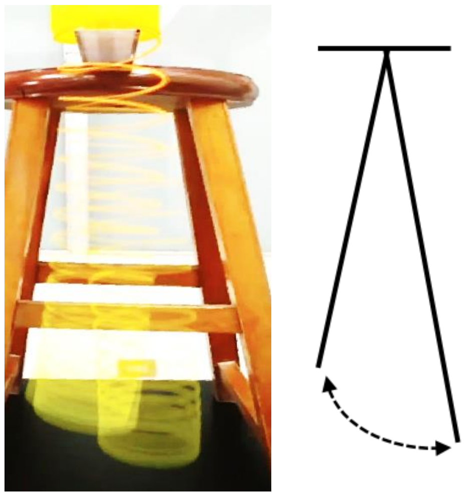
單位(s)	編號 1	編號 2	編號 3	編號 4	編號 5
10 圈在下	0.47	0.43	0.73	0.44	0.295
15 圈在下	0.68	0.58	0.885	0.6	0.29
20 圈在下	0.97	0.71	1.37	0.76	0.42
25 圈在下	1.12	0.94	1.57	1.06	0.52
30 圈在下	1.37	1.17	2.07	1.22	0.62
35 圈在下	1.65	1.3		1.4	0.71

實驗過程與裝置如圖五，我們由擋板來控制擋板下的彈簧圈數，靜置至自然長度後，施加一點外力，並小心不要造成振動的效應，觀察有質量彈簧的來回擺動，週期與長度(圈數)基本上呈現正相關的增加趨勢，也與表一鉛直振動的週期非常接近。

四、有質量彈簧複擺與振動的穩定態複合運動(斜角擺動)



圖六、彈簧的斜角共振模態 Tracker 軌跡(用黑膠帶標示於彈簧尾端做軌跡紀錄)

	
金屬彈簧共振模態	塑膠彈簧共振模態

圖七、金屬與塑膠彈簧的共振模態(斜角擺動)最高與最低點合成照

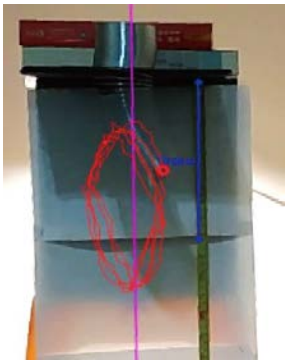
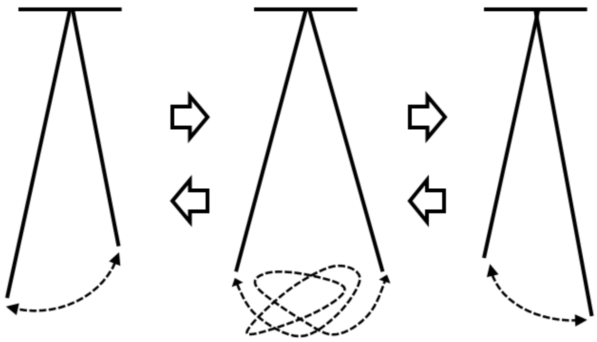
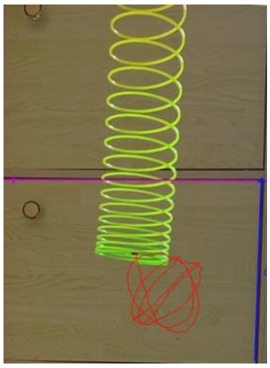
表五、振動與擺動的共振週期

單位(s)	編號 1	編號 2	編號 3	編號 4	編號 5
10 圈在下	0.58	0.42	0.86	0.45	0.26
15 圈在下	0.75	0.61	0.92	0.63	0.32
20 圈在下	0.91	0.81	1.24	0.85	0.43
25 圈在下	1.12	0.91	1.53	1.02	0.5
30 圈在下	1.31	1.11	1.56	1.15	0.6
35 圈在下	1.55	1.26		1.29	0.69

實驗過程與裝置如圖六，我們由擋板來控制擋板下的彈簧圈數，靜置至自然長度後，施加一點外力，讓彈簧有些微的伸長及偏移，觀察有質量彈簧的運動週期，週期與長度(圈數)基本上呈現正相關的增加趨勢，也與表三、表四的週期非常接近。

五、有質量彈簧單擺與振動的換邊共振

在我們觀察到單擺與振動同時進行時，會有一邊高、一邊低的共振現象後(斜角擺動)，我們再長時間觀察下去後發現，這樣的共振現象會有換邊繼續擺動的情況，而換場中的運動模態基本上就是繞橢圓軌跡，但每圈都不一樣，直到換邊成功後繼續共振。其中，我們發現金屬彈簧的來回擺動共振模式可以持續數十分鐘之久。

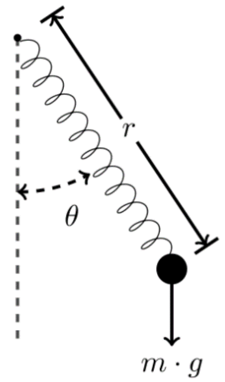
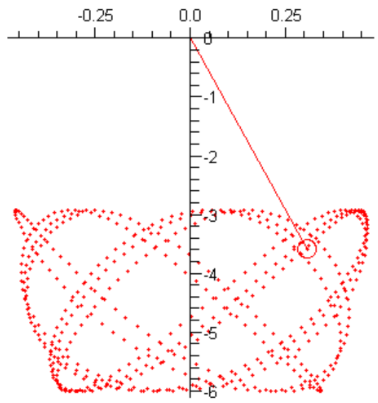
	 左 ↔ 轉換 ↔ 右	
金屬換場過程軌跡	換邊穩定態的來回交換過程示意圖	塑膠換場過程軌跡

圖八、換邊繼續反方向穩定態的交換過程示意圖(本次實驗觀察到的結果)

表六、左邊共振↔轉換圈數↔右邊共振之次數計算

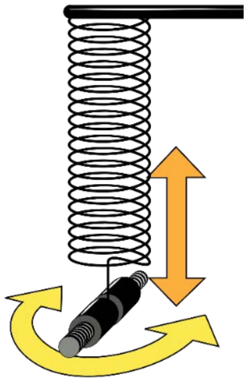
彈簧編號	編號 1			編號 2			編號 3			編號 4			編號 5		
維持次數	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右
10 圈在下	3	1	3	2	1	2	3	1	3	3	1	3	1	0	1
15 圈在下	4	6	4	2	2	2	3	3	3	3	1	3	1	1	1
20 圈在下	5	5	5	6	6	6	6	8	6	3	3	3	3	4	3
25 圈在下	6	7	6	6	6	6	6	8	6	3	3	3	3	4	3
30 圈在下	6	3	6	10	14	10	7	10	7	4	4	4	4	4	4
35 圈在下	4	2	4	14	18	14				10	10	10	4	4	4

由參考資料 5(The Spring Pendulum)得知，彈簧擺來回的振動軌跡路徑會類似蝴蝶狀的圖案，不過這模擬的圖案是無質量彈簧配上有質量物體的模擬結果，雖然由(李文堂，民 74、陳惠玲等，民 75)的資料與我們之後討論部份中的計算結果可以得知，有質量彈簧的鉛直振動週期只需要做常數項的修正即可，但若以二維的複合式運動軌跡來看，是無法只加入修正項就可以對應我們實驗結果的軌跡。不過由模擬圖可以觀察到，確實有兩邊的斜角擺動進行互換，只是振動的次數約為 2-3 次。

	
彈簧擺示意圖	彈簧擺網站模擬之經過軌跡

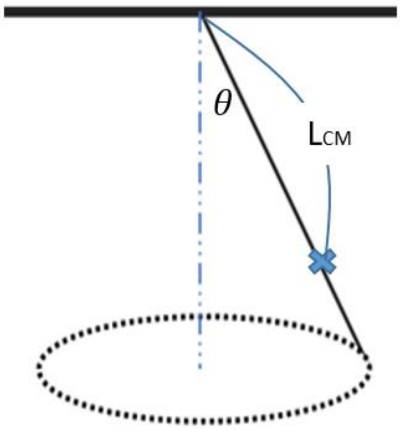
圖九、單一彈簧擺來回的振動軌跡(參考資料 3)

而由參考資料 6(Simple Harmonic Motion)的單擺模擬結果，無質量彈簧掛重物的振盪是可以上下振動與來回擺動進行互換(也是一種共振轉換的模擬結果)。當然，也有相關的振動轉換關係如威爾伯福斯擺(Wilberforce pendulum)，就是一個轉動與振動互振的關係可以參考，不過威爾伯福斯擺是有掛重物刻意去調整的，但至少自然界中，我們確實是有找到類似週期很接近的共振轉換現象。因此，本實驗的發現在物理上是絕對合理的，只是我們還要努力找到所對應的模擬參數。



威爾伯福斯擺，取自 WIKIPEDIA(參考資料 7)

六、錐動擺與振動



錐動擺的週期為：$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{cm}cos\theta}{g}}$

為考慮二維以外的振動模態，我們也做了錐動擺的實驗觀察，來看我們實驗上的運動是否會受到第三維度，也就是縱向的影響。方法就是讓錐動過程中帶入振動效果。實驗的觀察中，可以觀察錐動擺的週期與理論接近，我們得知錐動擺中的錐擺和振動互為獨立事件。因此也可以確定，我們的實驗若是 3 維的運動則不會產生週期一致的現象，因此本文的斜角運動的週期現象一定要在平面觀測，也一定會是平面的運動模式。

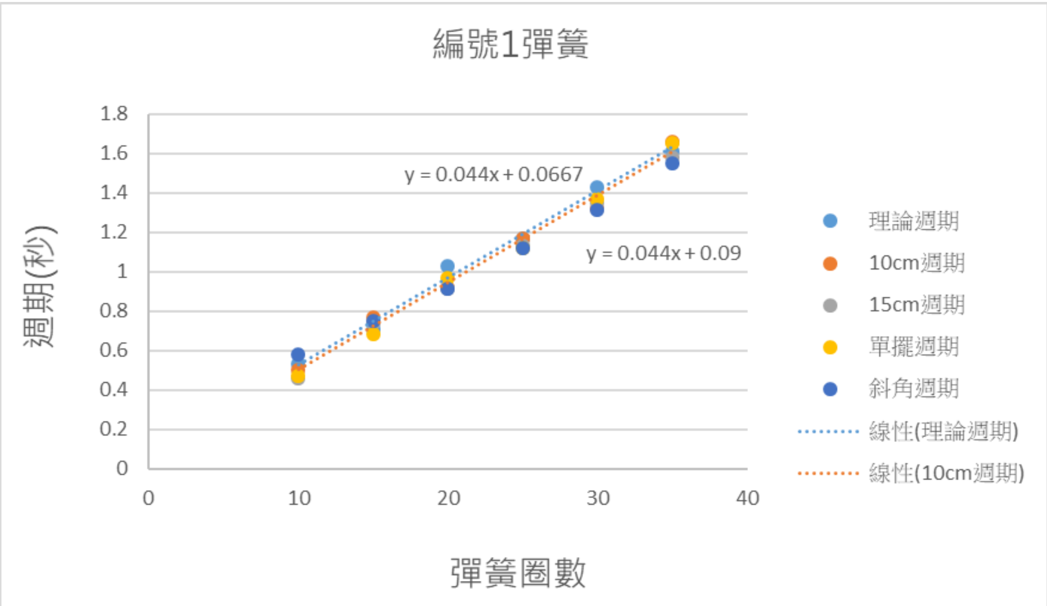
伍、實驗結果與討論

一、初步結果分析

1、週期比較

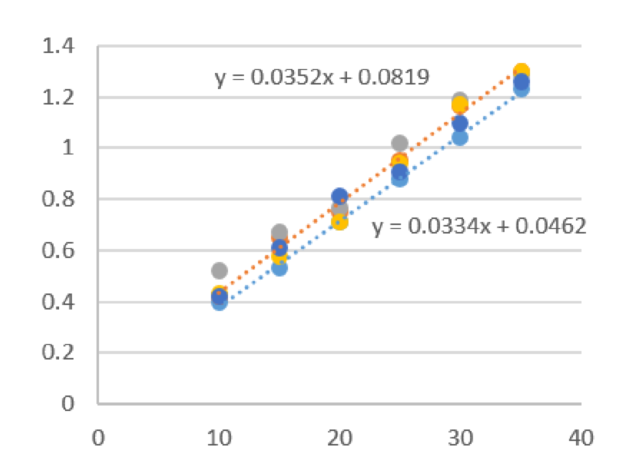
我們參考(陳惠玲等，民 75，李文堂，民 74)的理論公式，得知有質量彈簧的振動週期為 $2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{m}{k}}$，不過若我們只參考表一的彈力常數值，並依不同圈數情況下代入質量做理論值的計算，就會與實際的有所差異。

因此，我們的彈力常數理論值需參考表二各自伸長量對應的平均彈力常數，並比較表三、表四、表五的實驗結果可以發現，每個彈簧的實驗週期就會非常接近，並以我們的理論值週期的趨勢線斜率對照表二 10cm 伸長後的振動週期斜率比較。

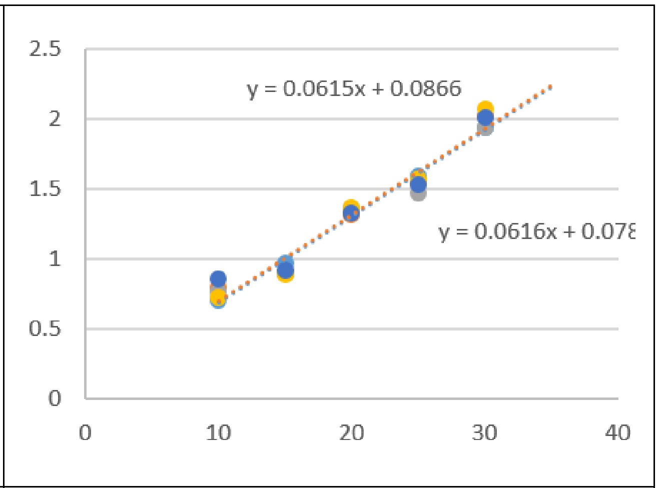


圖十、編號 1 彈簧理論週期與各式振動週期比較

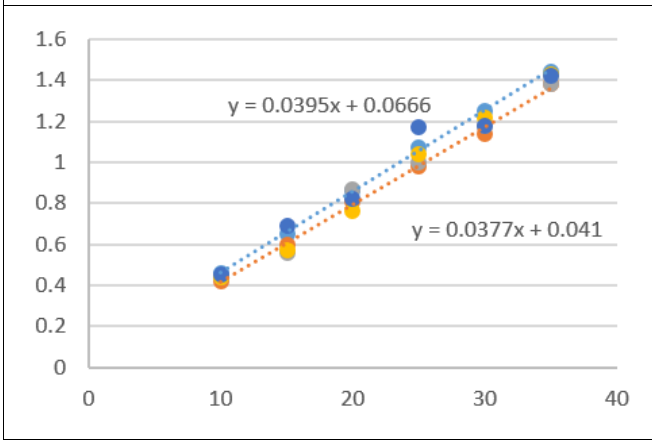
由圖九可知，編號 1 的彈簧在自然垂放 10、15、20、25、30、35 的圈數下，進行(1)往下拉長 10cm 及 15cm 的垂置振盪、(2)純單擺擺動、(3)複擺(compound pendulum 混合振盪的複合運動(斜角擺動)，可發現週期非常一致，與理論值也非常接近，而圖十中編號 2、編號 3、編號 4、編號 5 的理論與實驗結果，也都非常接近。



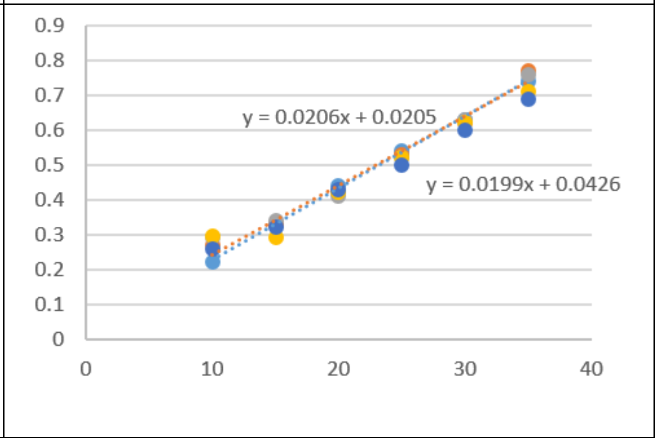
編號 2 彈簧



編號 3 彈簧



編號 4 彈簧



編號 5 彈簧

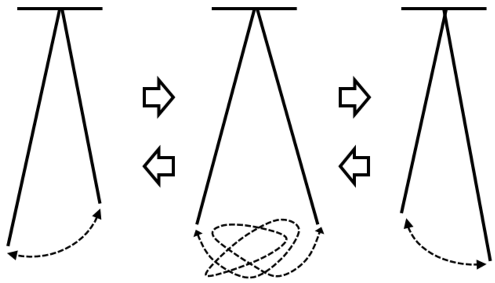
圖十一、編號 2、3、4、5 彈簧理論週期與各式振動週期比較(X-Y 軸單位同圖十)

由理論振動公式$2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{m}{k}}$，隨圈數增加的斜率，k 值也會有不同的變化，對照實驗結果，不同伸長量代入不同的 k 值是相當重要的，因為與實驗結果非常的吻合。

2、換場次數

由表五的實驗結果，有些地方似乎不太容易解釋，這部份我們可以再花時間進行多次的實驗來確認是否有些微小細節會影響換場的週期變化。不過整體而言，由表五可以看出左邊與右邊的共振次數是一致的，換場過程轉的圈數也差異不大，且可以觀察到塑膠彈簧的共振持續的次數有隨著長度而增加，金屬彈簧的共振持續的次數則比較穩定，較不隨長度有明顯的變化。

斜角共振左邊與右邊的振動次數基本上是一次的，且初步觀察到長度愈長的彈簧，斜角共振的次數就愈高，但編號 1 彈簧在高圈數的情況下斜角共振的次數卻沒有增加，目前初步觀察編號 1 的彈簧特別輕、短，彈力常數最小，這樣的情況似乎值得深入觀察這樣特質的彈簧為何共振次數與長度沒有正相關的特性。

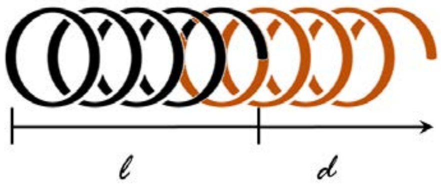


表六、左邊共振↔轉換圈數↔右邊共振之次數計算

彈簧編號	編號 1			編號 2			編號 3			編號 4			編號 5		
維持次數	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右
10 圈在下	3	1	3	2	1	2	3	1	3	3	1	3	1	0	1
15 圈在下	4	6	4	2	2	2	3	3	3	3	1	3	1	1	1
20 圈在下	5	5	5	6	6	6	6	8	6	3	3	3	3	4	3
25 圈在下	6	7	6	6	6	6	6	8	6	3	3	3	3	4	3
30 圈在下	6	3	6	10	14	10	7	10	7	4	4	4	4	4	4
35 圈在下	4	2	4	14	18	14				10	10	10	4	4	4

二、有質量彈簧的振動週期計算

1、有質量彈簧的振動週期計算



彈簧原長及伸長量的關係

圖十二、有質量彈簧的對應參數(l為坐標，d為振幅)

每單位質量的動能為：$E_k = \frac{1}{2}dm \cdot v(l)^2$

其中$dm = \rho = \frac{m}{L}$，(m為彈簧總質量)

設最長值為 L，可得位置 $x(l) = \frac{l}{L}d \cdot \cos(\omega t)$

微分得速度 $v(l) = \dfrac{ld}{L}\omega \cdot [-\sin(\omega t)]$

最大動能E_{kmax} 在 $sin^2(\omega t) = 1$ 時最大

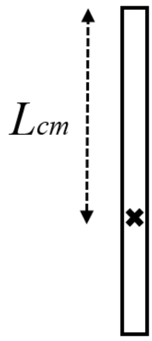
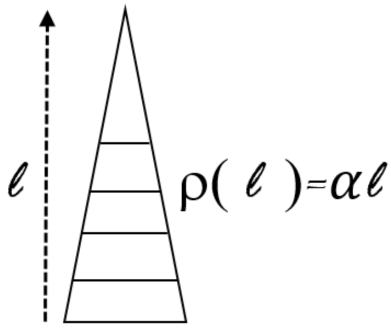
$$\int_0^L \frac{1}{2}\frac{m}{L}(\frac{l^2}{L^2}d^2\omega^2 sin^2(\omega t))\,dl = \frac{1}{2}\frac{m}{L^3}d^2\frac{L^3}{3}\omega^2 = \frac{1}{2}kd^2 \text{ 得 } \omega^2 = \frac{3k}{m}$$

由角度速$\omega = \frac{2\pi}{T}$，得知週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{m}{k}}$

以上的計算結果與參考資料 2(陳惠玲等，民 75)的實驗結果完全穩合，也補足參考資料中經驗公式的理論依據。

而在參考資料 1(李文堂，民 74)中的實驗結果，對照這理論公式則是有進行常數修正的。我們的實驗結果原先也是以總長度的平均彈力常數為基礎，但與實驗值就會有常數項的修正量。因此，或許由我們的研究可以推測，參考資料中用的彈簧在不同長度時，彈力常數有不同數值，這樣就可以合理的解釋這樣的現象。

2、有質量彈簧的單擺週期計算

	
質心位置L_{cm} ，L為原長	彈簧自然伸長後的質量分配ρ與坐標l關係

圖十三、有質量彈簧自然伸長後的質心位置， $L_{cm}=\frac{2}{3}L$

密度與長度呈正比：$\rho(l)=\alpha\cdot l$

$$m=\int_0^L \alpha\cdot l\,dl=\frac{1}{2}\alpha L^2\ ,\qquad 得\ \alpha=\frac{2m}{L^2}$$

由先前推導可知伸請長與彈力彈數質量關係

$$\Delta L=\frac{mg}{nk}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)=\frac{mg}{2k}$$

$$I=\int\rho(l)\,l^2\,dl=\frac{2m}{L^2}\int_0^2 l^3 dl=\frac{2mL^4}{4L^2}=\frac{mL^2}{2}$$

由物理擺(compound pendulum)，或稱複擺週期公式

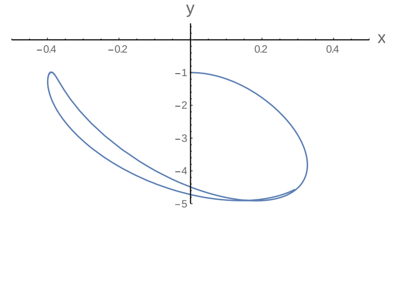
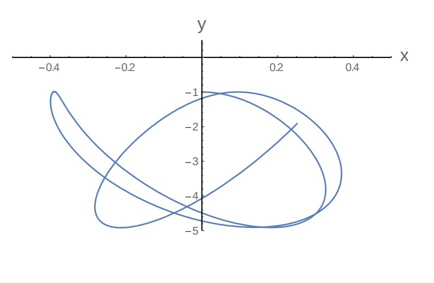
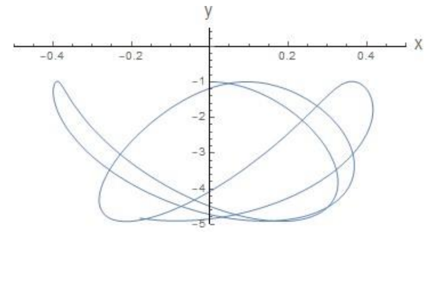
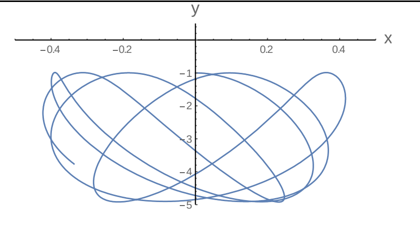
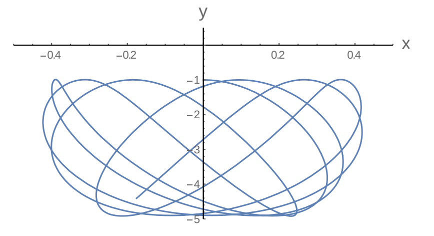
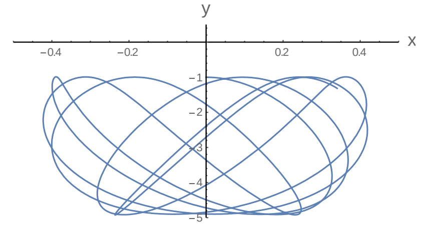
設伸長量遠小於原長，可換出以質量與彈力常數表達的週期關係

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{gmL_{cm}}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{mL^2}{2}}{mg\frac{2}{3}L}}=2\pi\sqrt{\frac{3L}{4g}}\xrightarrow{if\,L_0>\Delta L}2\pi\sqrt{\frac{3}{8}}\times\sqrt{\frac{m}{k}}$$

計算結果與複擺不同，有質量彈簧自然伸長的擺動週期，初步發現與質量還有彈力常數是有關係的。再來，繼續比較有質量彈簧的鉛直振動週期為$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{m}{k}}$，可以得知兩者的週期非常的接近$2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{m}{k}}\cong 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}}$，這應該就是複擺(compound pendulum)與鉛直簡諧產生共振運動(本篇的斜角共振運動)的主要原因。

3、理想彈簧擺的數值解

我們參考 WIKIPEDIA(參考資料 5)的無質量彈簧掛重物的彈簧擺，以 mathematica 12 寫出參數模擬出數值解，簡單整理出隨時間變化的幾個軌跡，可以發現這樣的振動模擬是一直在繞圈圈循環的(每次週期的路徑都不太一樣)，不過大致與網站(參考資料 6)上的結果相符。

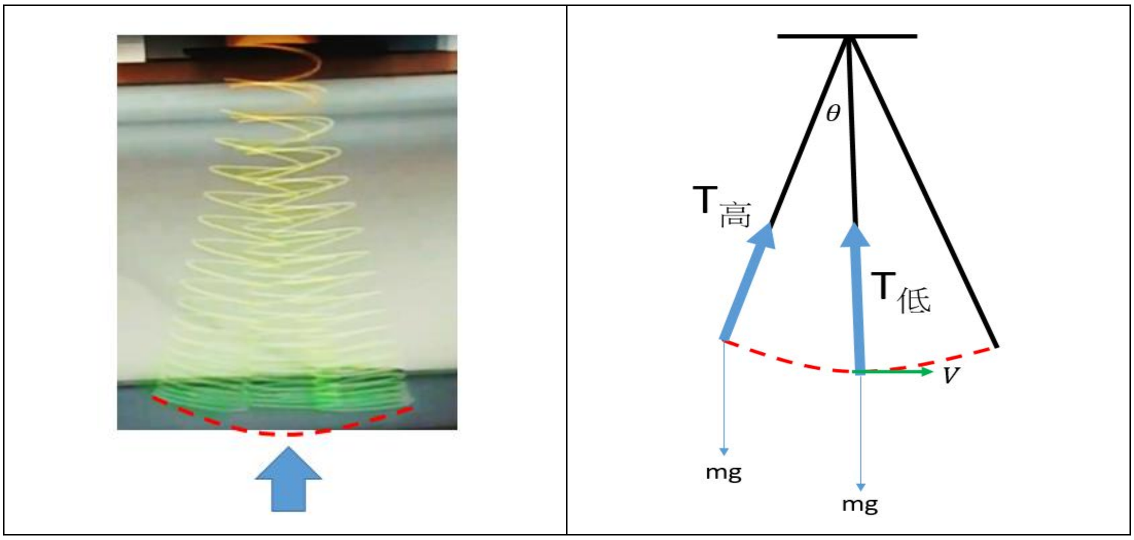
		
Tm=4.5	Tm=8	Tm=10
		
Tm=15	Tm=18	Tm=20

圖十四、自行寫參數模擬彈簧擺隨時間的軌跡記錄

我們實驗的結果類似於威爾伯福斯擺，都有共振轉換的現象，因此我們可以推測，這樣的頻率共振或許與彈簧本身並非為直線鋼體(如圖十四)，且由我們的實驗結果(如圖六)，擺動中可觀察到運動過程中有彎曲的情況發生，或許就是在讓單擺頻率$2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}}$與有質量彈簧鉛直振動頻率$2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{m}{k}}$，能調整至一致而共振的結果。

圖十五、真實的斜角共振情形

另外，在有質量彈簧複擺中，我們也觀察到過程因張力的變化，運動過程的軌跡不是圓弧形的，主要是因為在最低點時的運動速率最快，而力圖去分析彈簧的受力情況，彈簧擺動到最低點時張力 T 低= $mg+\frac{mv^2}{L}$，彈簧擺動到最高點時張力 T 高= mgcosθ，而這樣的微小差異或許有可能也能做為週期互相協調的機制之一，也因太過微小以至於用照片無法拍出這微弱效果。



圖十六、複擺(compound pendulum)的運動分析

陸、結論

本研究發現，不同伸長量換算出來的平均彈力常數代入振動理論的週期，理論與實驗結果非常穩合，因此各伸長量的彈力常數變化需納入實驗的考量，就能找到有質量彈簧圈的振動模式數值。

在有質量彈簧的複合運動中，在轉換期有如蝴蝶型(或橢圓圈)，但左右的穩定共振次數是對稱且穩定的，這樣的共振結果我們推測多少有彎曲的情況產生，也就是說從二維的運動軌跡來看，複擺(compound pendulum)與振動的週期接近能產生換場的共振效果。

參考資料

1、李文堂、潘憲國(民國 74 年)。自製軟彈簧研究週期和質量之關係。第 25 屆全國中小學科展作品(教師組)。

2、陳惠玲、郭乃萍、白佩玉(民國 75 年)。簡諧運動彈簧等效質量之測定。第 26 屆全國中小學科展作品，第一名。

3、歐陽瑩芸、楊汭錠、劉子寧(民國 106 年)。忽快忽慢的彩虹彈簧圈。第 57 屆全國中小學科展作品，佳作。

4、擺(維基百科)。檢自：https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E6%93%BA。

5、The Spring Pendulum。Maplesoft。取自：https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?sid=4897&view=html

6、Double pendulum。WIKIPEDIA。取自：https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum

7、Double Pendulum(有可調參數的模擬程式)。Math24。取自：https://www.math24.net/double-pendulum/

8、Simple Harmonic Motion。UCLA Physics Instructional Resource Lab。取自：https://demoweb.physics.ucla.edu/content/100-simple-harmonic-motion#

9、Wilberforce pendulum。WIKIPEDIA。取自：https://en.wikipedia.org/wiki/Wilberforce_pendulum

附錄一、程式相關

一、mathematica 程式碼

彈簧擺

```
In[25]:= g = 9.8; k = 0.1; m = 0.02; L0 = 1; tm = 10;
xinitial = {0, 0.5}; (*coordinate,velocity*)
yinitial = {-L0, 0}; (*coordinate,velocity*)
equs = {m x''[t] == -k x[t] (1 - L0/Sqrt[x[t]^2 + y[t]^2]),
   m y''[t] == k y[t] (-1 + L0/Sqrt[x[t]^2 + y[t]^2]) - m g,
   x[0] == xinitial[[1]], x'[0] == xinitial[[2]],
   y[0] == yinitial[[1]], y'[0] == yinitial[[2]]};
s = NDSolve[equs, {x, y}, {t, 0, tm}];
{x, y} = {x, y} /. s[[1]];
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, tm},
 PlotRange -> {{-0.5, 0.5}, {-5, 0.5}},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> 0.5,
 PlotStyle -> Thickness[0.004],
 AxesStyle -> Thickness[0.003]]
Clear[g, k, m, L0, tm, equs, s, x, y]
```

耦合擺

```
In[173]:= g = 9.8; k = 3; m1 = 0.1; m2 = 0.1;
L1 = 1; L2 = 0.2; tm = 5;
initial1 = {0, 1.4 / L1};
initial2 = {0, 0.0, -(L1 + L2), 0};
temp = 2 L1 (y2[t] Cos[θ[t]] - x2[t] Sin[θ[t]]);
L = Sqrt[x2[t]^2 + y2[t]^2 + L1^2 + temp];
equs =
  {θ''[t] ==
    (y2[t] Sin[θ[t]] + x2[t] Cos[θ[t]]) (1 - L2/L) k/(m1 L1)
     - g/L1 Sin[θ[t]],
   x2''[t] == -(x2[t] - L1*Sin[θ[t]]) (1 - L2/L) k/m2,
   y2''[t] == -(y2[t] + L1 Cos[θ[t]]) (1 - L2/L) k/m2 - g,
   θ[0] == initial1[[1]], θ'[0] == initial1[[2]],
   x2[0] == initial2[[1]], x2'[0] == initial2[[2]],
   y2[0] == initial2[[3]], y2'[0] == initial2[[4]]};
s = NDSolve[equs, {θ, x2, y2}, {t, 0, tm}];
{θ, x2, y2} = {θ, x2, y2} /. s[[1]];
ParametricPlot[{{L1*Sin[θ[t]], -L1*Cos[θ[t]]},
  {x2[t], y2[t]}}, {t, 0, tm},
 PlotRange -> {{-0.6, 0.6}, {-2, 0}},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> 0.6,
 PlotStyle -> Thickness[0.004],
 AxesStyle -> Thickness[0.003]]
Clear[g, equs, s, θ, x2, y2, initial1, initial2]
```

彈簧擺	耦合擺

2、Double pendulum | Chaos | Butterfly effect | Computer simulation 影片連結：

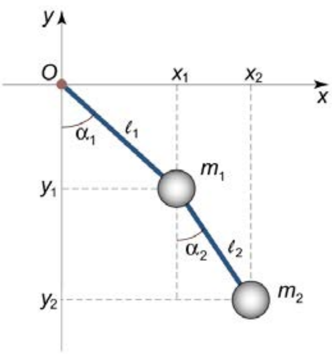
https://www.youtube.com/watch?v=d0Z8wLLPNE0

3、Wilberforce pendulum 影片連結：https://www.youtube.com/watch?v=UDXcYJldOYc

附錄二、未來展望與軌跡分析

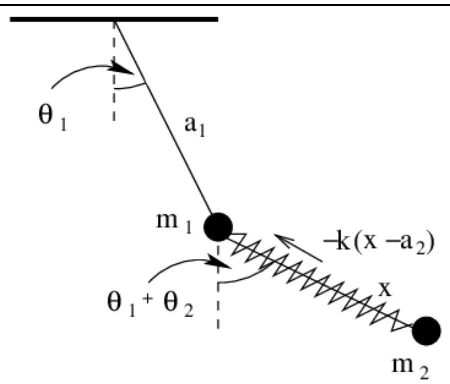
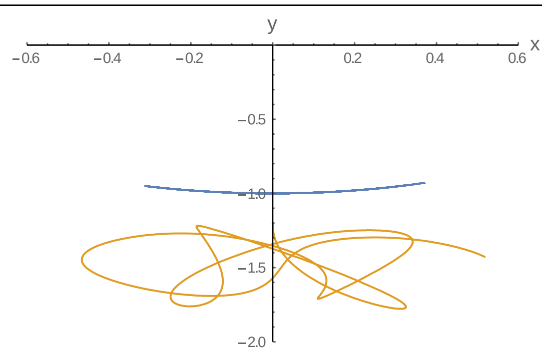
我們希望以本文章為基礎，調整出參數會有質量彈簧，且沒有掛重物的運動形態，來看是否會有運動路徑上的差異。但就目前初步的觀察，應該還要考慮的部份還不少，因此我們持續把各種可能都考慮進來後，希望這段時間通盤的考慮到各種情況，來調整所有可能在運動中造成我們實驗結果的數值解。

數值解的好處是可以解決我們無法計算的問題，但本次實驗彈簧的數值解可能還要考慮的是我們的單擺並不是絕對的鋼體，多少都會有類似雙擺(Double Pendulum)的效果，因此，這部份若能考慮進去，或許就能完備我們的程式有，機會解出我們實驗出來的結果，並進行實驗與理論的相對應模擬。



雙擺。取自 WIKIPEDIA(參考資料 5)

雙擺的運動結果我們參考網站(參考資料 5)，把 m1/m2 的值設定成 1/3，讓他大致符合我們實驗的質量分配，發現小角度的擺動還是接近單擺，但應該還是對整個週期有一點影響，因此我們找到一個參數來試試耦合擺的模擬結果。

	
我們設定的耦合擺示意圖	耦合擺模擬之經過軌跡(約 3 個週期時間)

附圖、自行寫參數模擬耦合擺隨時間的軌跡記錄

由我們模擬出一條剛體及一條彈簧的耦合擺結果可知，整個運動的軌跡就複雜多了，但也可以確定我們在多重參數下的模擬實驗是可行的。因此，我們的目標就是整合 Tracker、Mathematica、網路資料的整合，必要時可能要考慮到側向的形變常數，不斷的修正並配合實驗來找到模擬對應，用彈簧的基本物理性質(如彈力常數、每圈重量等等…)，可以直接計算出這樣複雜擺動的週期公式，這樣我們可以帶入彈簧的基本量後，得到相對應的週期公式。

不過我們初步模擬彈簧擺與一條鋼體和一條彈簧的耦合擺運動軌跡，希望可以在配合大量也穩定正確的實驗結果下，利用電腦做模擬實驗來找出對應的週期公式。

對照不同模式的擺動模擬結果(單擺、複擺、雙擺、彈簧擺、等…)，我們.....

【評語】051815

本作品探討有質量彈簧的運動模式，特別是使用有質量的彈簧圈在不掛重物情況下進行擺動及振動實驗。發現有質量彈簧的振動週期與擺非常接近，而且同時運作的情況下會有穩定的共振運動模式，有一些複雜的運動，作品的定量分析做得還完整，但整個系統應可視為3個簡諧震盪的耦合，理論分析還可以改進。

作品簡報

有質量彈簧圈的複合振動與擺動

研究動機

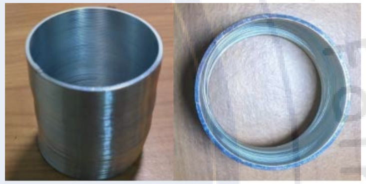
在讀高中物理的簡諧運動單元時，發現手邊的彈簧圈在沒有加上重物的情況下也能振動，而且不同長度、不同彈簧間有不同的振動週期。在仔細的觀測有質量彈簧的鉛直運動後，無意間發現配合小角度的擺動有很特殊的共振模式，我請教老師也查了資料，確定並沒有相關的發現與研究。


編號 1


編號 2


編號 3


編號 4

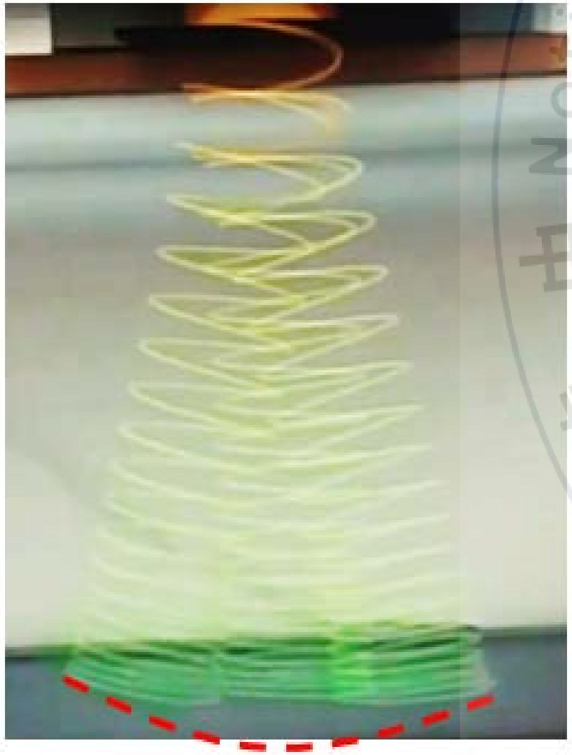

編號 5

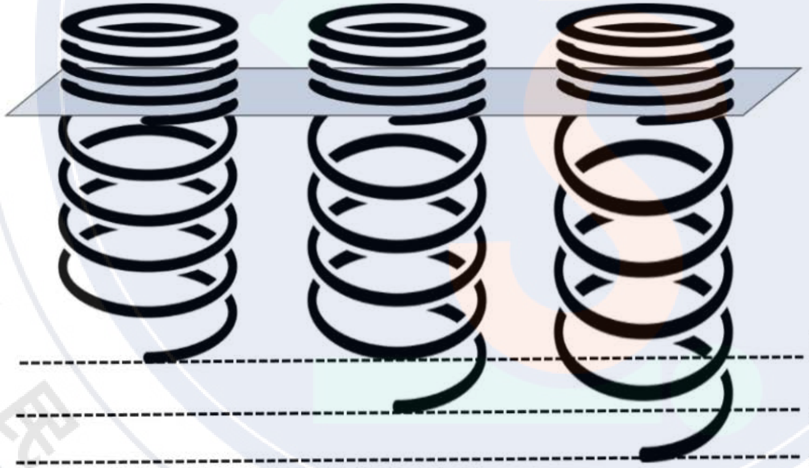

所有彈簧

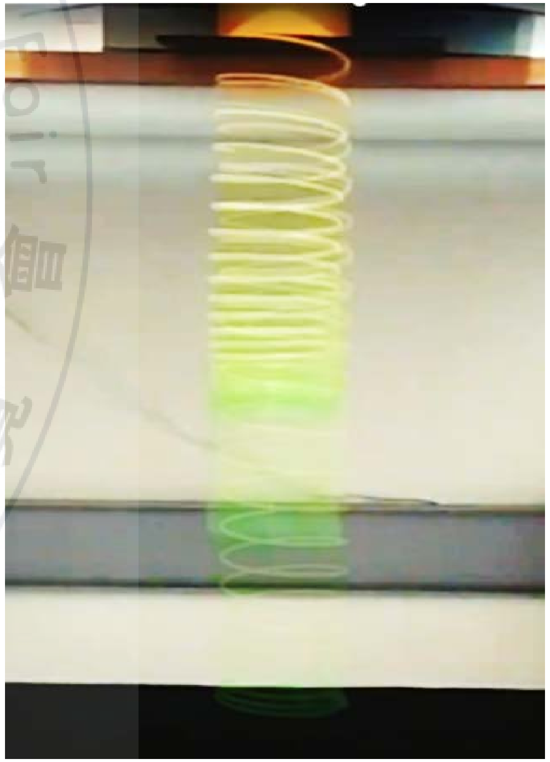
彈簧cm	編號1	編號2	編號3	編號4	編號5
彈簧圈數	40	73	42	40	98
直徑(cm)	6.7	6.8	11.7	7.6	5.6
重量(gw)	41.9	133.3	381.49	117.61	202.73
每圈的重量(gw)	1.05	1.83	9.08	2.94	2.07
原長(cm)	6.5	15	14.2	9	6.7
自然長度(cm)	127	272	257	99	153.7
彈力常數 (kgw/m)	0.17	0.26	0.79	0.65	0.69

研究結果

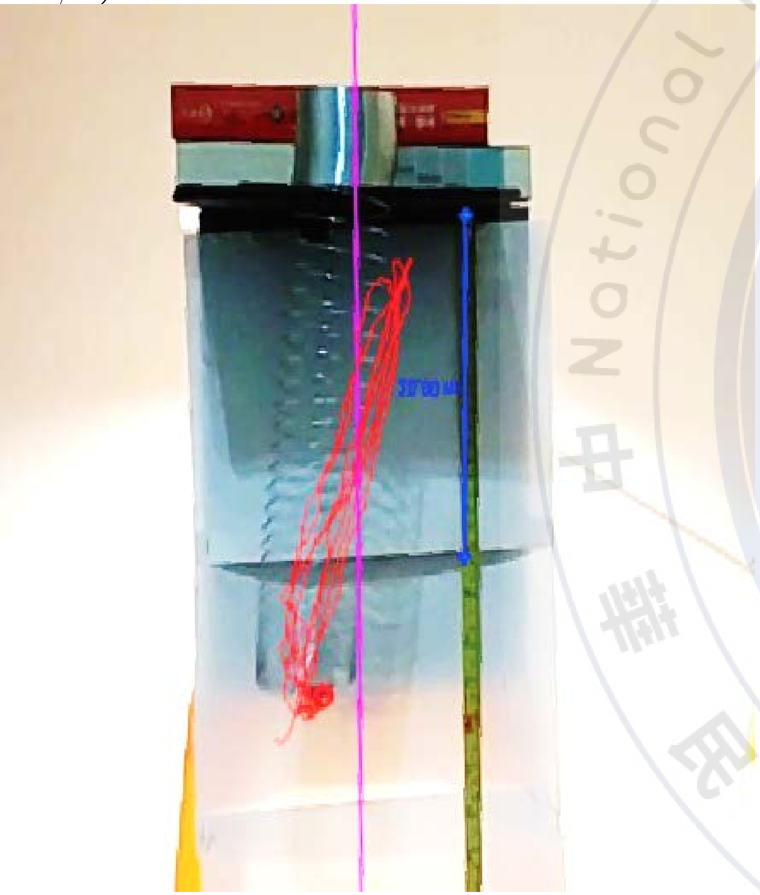
(kgw/m)	編號1	編號2	編號3	編號4	編號5
10圈在下	0.49	1.52	2.35	1.81	5.8
15 圈在下	0.41	1.31	1.92	1.36	3.79
20圈在下	0.26	0.96	1.33	1.04	2.79
25 圈在下	0.25	0.77	1.19	0.85	2.32
30 圈在下	0.2	0.66	0.95	0.74	2.03
35 圈在下	0.19	0.55	0.86	0.65	1.76

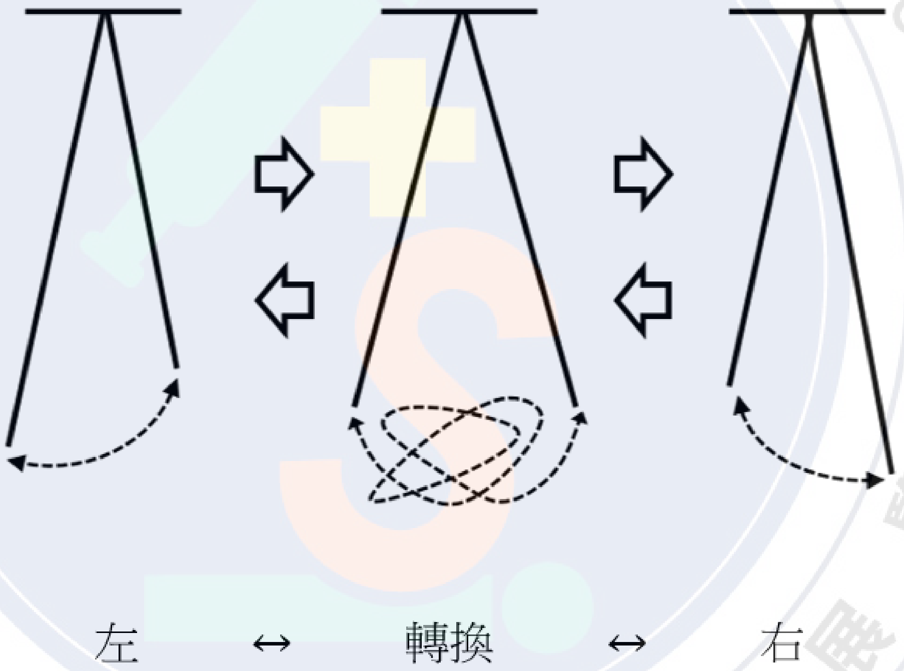


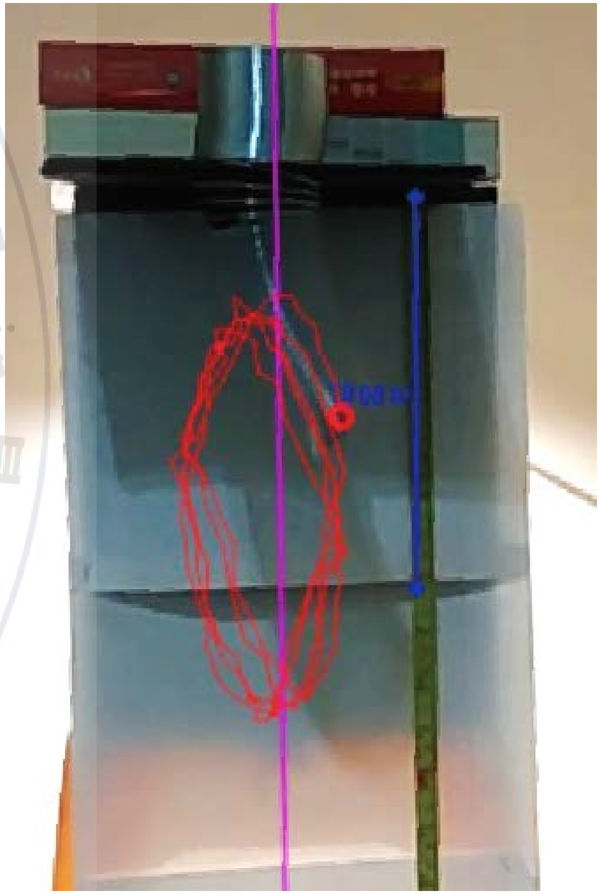




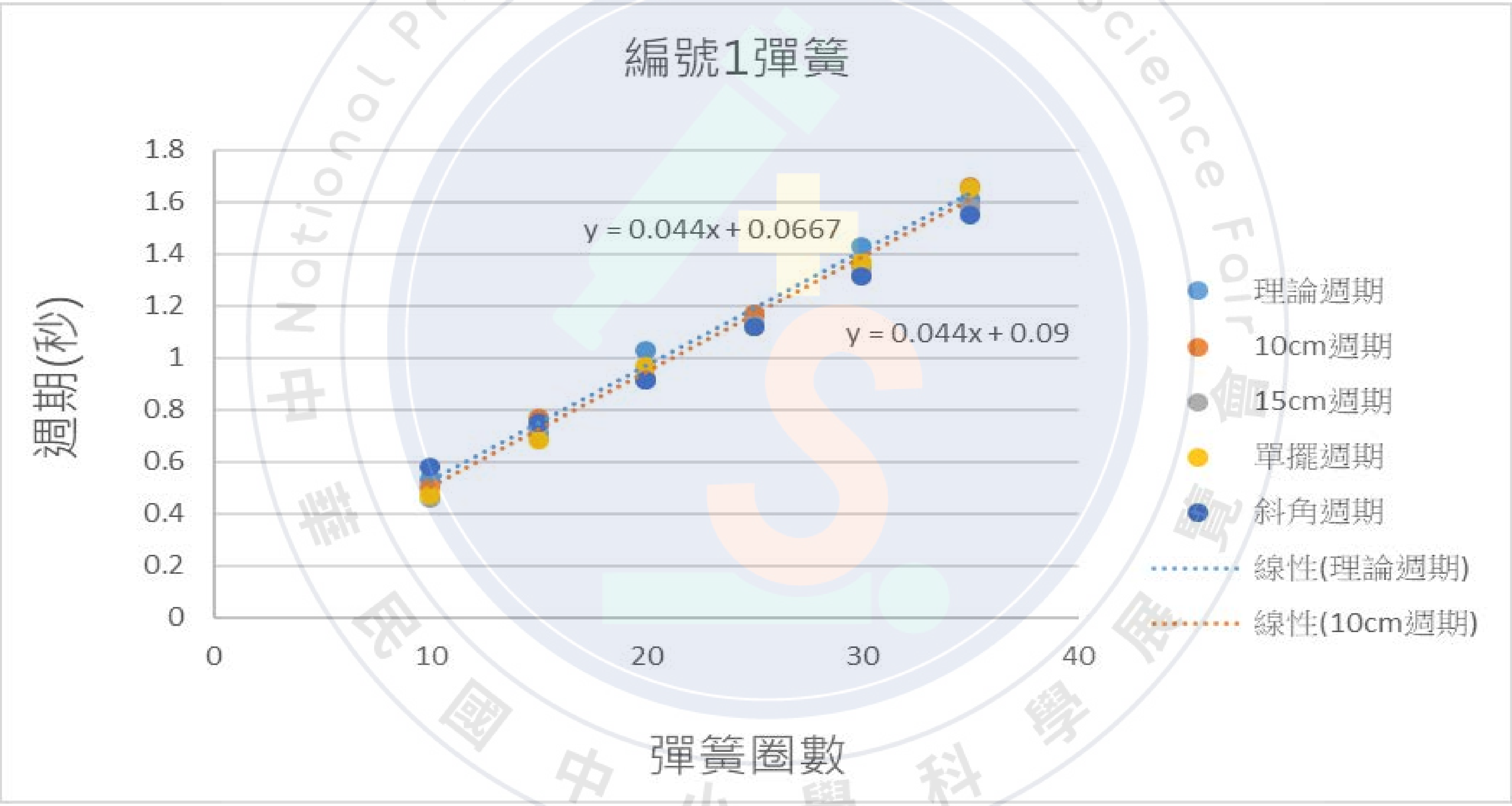
有質量彈簧單擺與振動的穩定態複合運動
(斜角擺動)



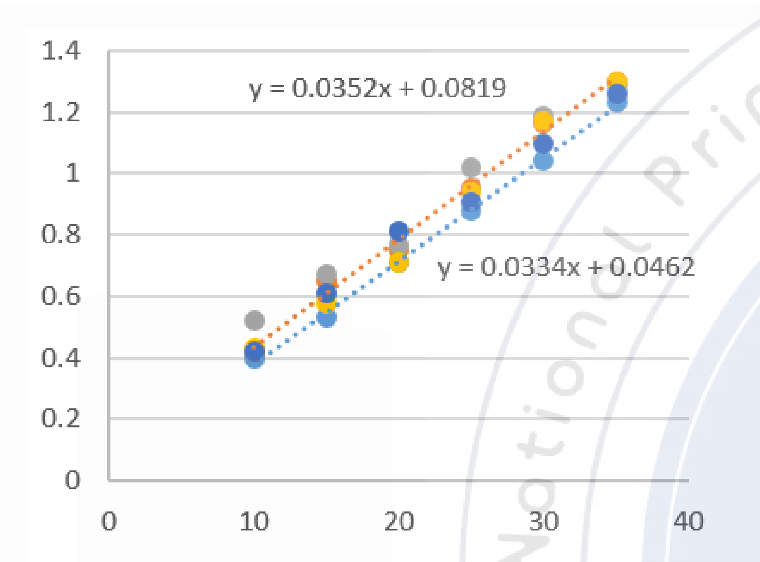




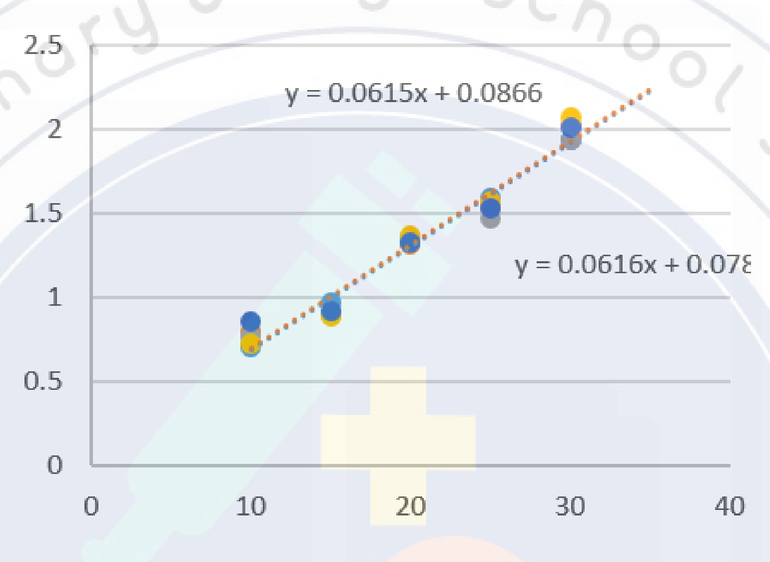
實驗結果與討論



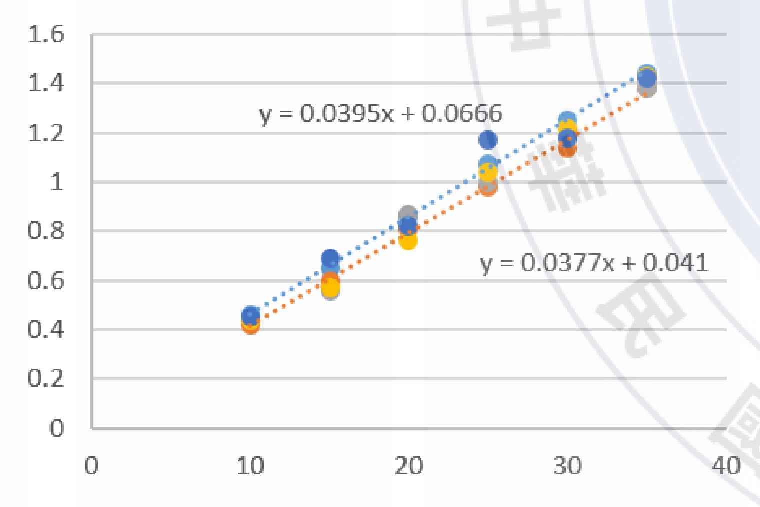
編號1彈簧
y = 0.044x + 0.0667
y = 0.044x + 0.09
週期(秒)
彈簧圈數
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
理論週期
10cm週期
15cm週期
單擺週期
斜角週期
線性(理論週期)
線性(10cm週期)



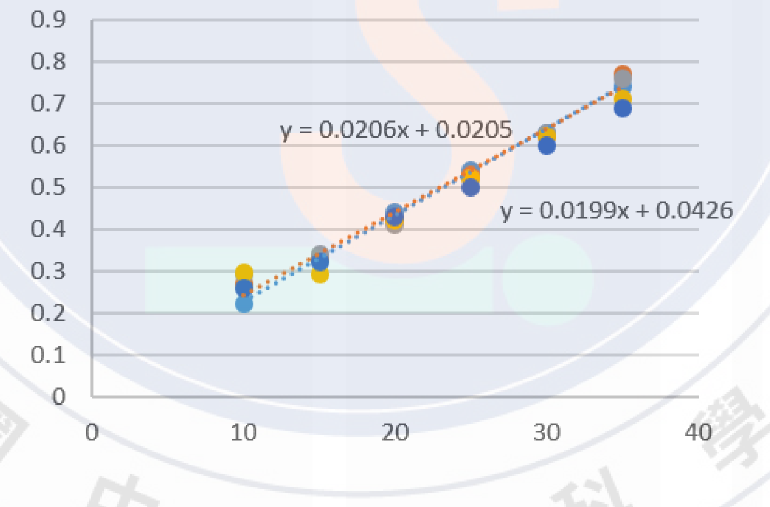
編號 2 彈簧



編號 3 彈簧



編號 4 彈簧



編號 5 彈簧

振動理論公式

每單位質量的動能為：$E_k = \frac{1}{2} dm \cdot v(l)^2$

其中$dm = \rho = \frac{m}{L}$，(m為彈簧總質量)

設最長值為L，可得位置 $x(l) = \frac{l}{L} d \cdot \cos(\omega t)$

微分得速度 $v(l) = \frac{ld}{L} \omega \cdot [-\sin(\omega t)]$

最大動能E_{kmax} 在 $sin^2(\omega t) = 1$ 時最大

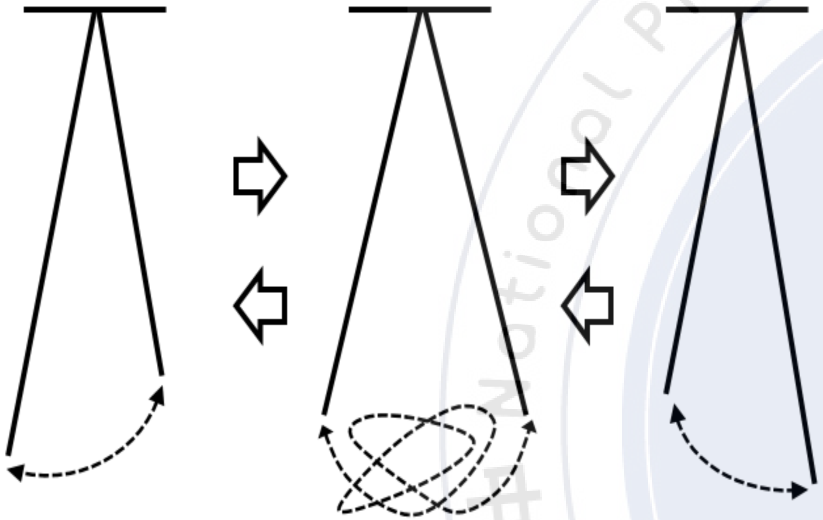
$\int_0^L \frac{1}{2} \frac{m}{L} (\frac{l^2}{L^2} d^2 \omega^2 sin^2(\omega t))\, dl = \frac{1}{2} \frac{m}{L^3} d^2 \frac{L^3}{3} \omega^2 = \frac{1}{2} kd^2$ 得 $\omega^2 = \frac{3k}{m}$。由角度速$\omega = \frac{2\pi}{T}$，得知週期

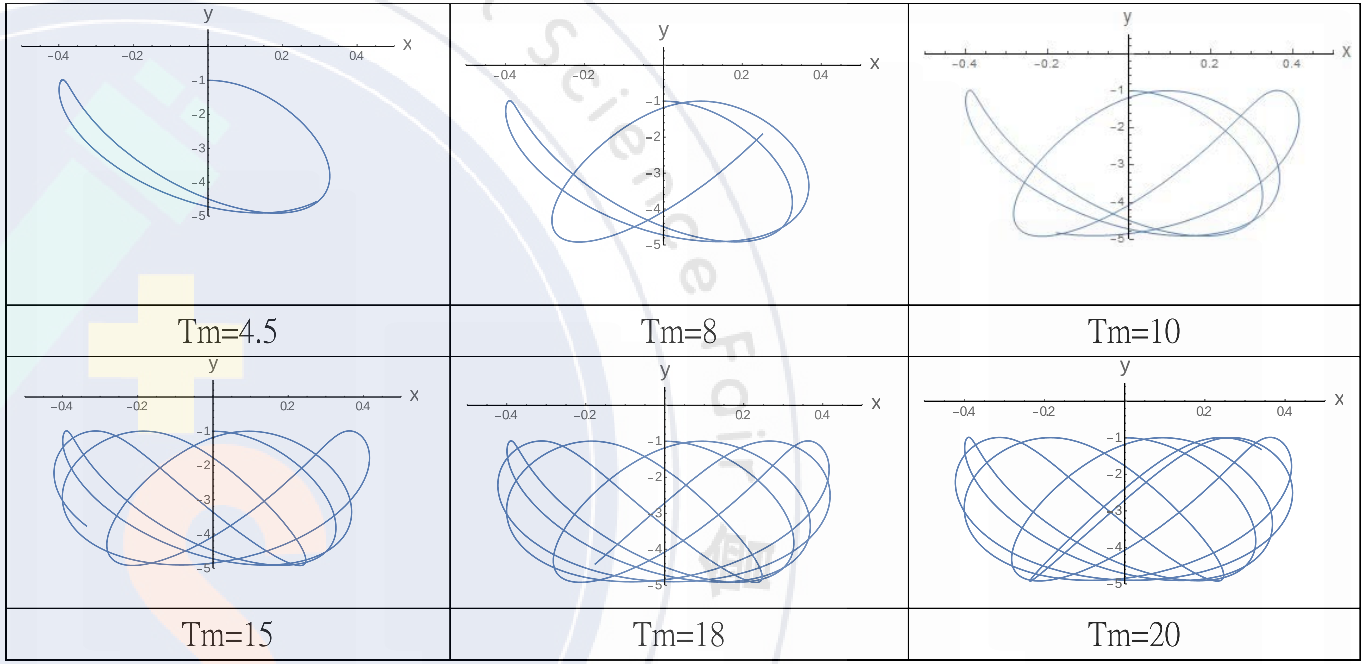
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3} \frac{m}{k}}$$

複擺理論公式

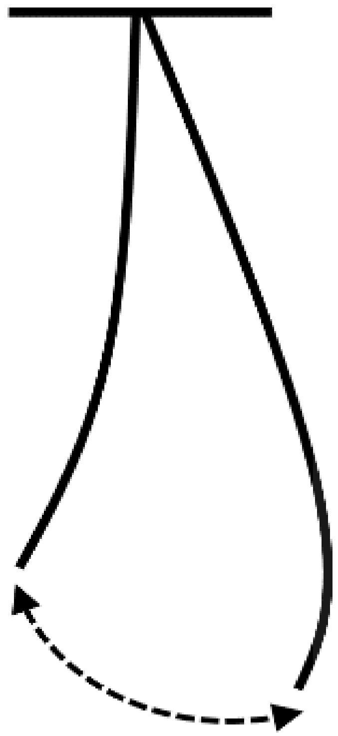
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{8} \frac{m}{k}}$$

換場次數

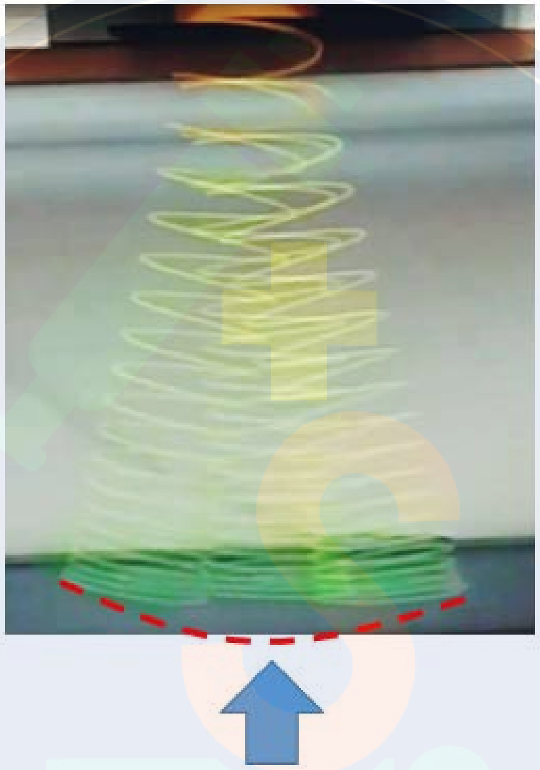




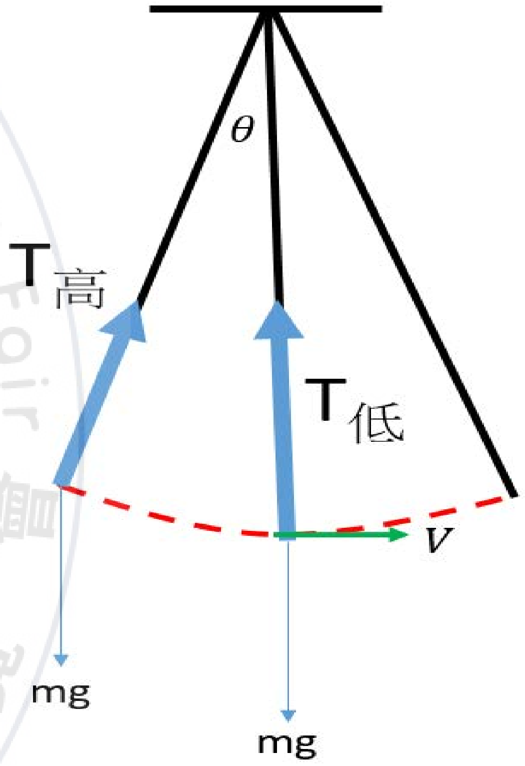
彈簧編號	編號 1			編號 2			編號 3			編號 4			編號 5		
維持次數	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右	左	轉換	右
10 圈在下	3	1	3	2	1	2	3	1	3	3	1	3	1	0	1
15 圈在下	4	6	4	2	2	2	3	3	3	3	1	3	1	1	1
20 圈在下	5	5	5	6	6	6	6	8	6	3	3	3	3	4	3
25 圈在下	6	7	6	6	6	6	6	8	6	3	3	3	3	4	3
30 圈在下	6	3	6	10	14	10	7	10	7	4	4	4	4	4	4
35 圈在下	4	2	4	14	18	14				10	10	10	4	4	4



真實的斜角共振情形



實際的小角度擺動



擺動的力學圖

結論

本研究發現，不同伸長量換算出來的平均彈力常數代入振動理論的週期，理論與實驗結果非常穩合，因此各伸長量的彈力常數變化需納入實驗的考量，就能找到有質量彈簧圈的振動模式數值。

在有質量彈簧的複合運動中，在轉換期有如蝴蝶型(或橢圓圈)，但左右的穩定共振次數是對稱且穩定的，這樣的共振結果我們推測多少有彎曲的情況產生，也就是說從二維的運動軌跡來看，複擺(類單擺)與振動的週期接近能產生換場的共振效果。