

# 中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

051810

膜音傳腦—金屬球彈跳聲

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者： 高一 鄭穎祺	指導老師： 盧政良 蔡萍實
---------------	---------------------

關鍵詞：波動方程式、基頻、振動模式

## 摘要

我們使用橡膠氣球膜套在塑膠杯口製作鼓，大小不同的金屬球充當鼓槌來進行實驗，記錄聲音以 Audacity、Python-FFT 及 Python-STFT 等軟體及分析演算法處理，探究聲音的組成頻率、振動模式及影響聲音頻率、強度的變因。成功找到金屬球撞擊橡膠膜聲音的基頻及振動模式組成。我們發現：金屬球落點愈接近中央，基頻強度愈強；遠離中央，則能引發較高頻率的震動模式。金屬球直徑和基頻強度雖無明顯相關，在基頻和(1,1) mode 之間卻可看到一明顯波形，且此波形強度隨著金屬球直徑增加而增加；中等尺寸的金屬球撞擊膜中央特別能引發以落點為腹點的震動模式。此外，落下高度愈大，則基頻強度愈大；而落下高度增加並不會引發較高頻率的震動模式。

## 壹、研究動機

小時候學習打擊樂時，在琳瑯滿目的打擊樂器中，我對各式各樣的鼓特別感興趣，無論大鼓、小鼓、低音鼓、曼波鼓....只需要一個圓木桶罩上一張膜、一雙鼓槌，就可以發出各式各樣美妙的聲音，真是神奇！在一次偶然的機會下，我發現金屬球落在鼓面也可以發出不同於鼓槌敲擊的聲音，而且不同大小的球、從不同的高度落下、落在不同的位置發出的聲音都不一樣。這讓我興起了研究金屬球撞擊鼓膜產生聲音的原理、聲音的來源及影響聲音的各種變因的興趣。為了操作方便，我使用橡膠氣球膜套在塑膠杯口取代鼓，並以大小不同的金屬球充當鼓槌來進行研究。



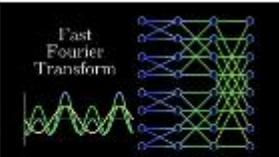
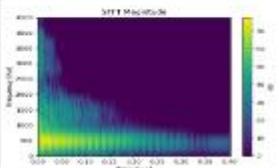
## 貳、研究目的

- 一、尋找金屬球撞擊塑膠杯口橡膠膜產生聲音的基頻
- 二、分析金屬球在塑膠杯口的橡膠膜第一次撞擊產生聲音的頻率組成及振動模式
- 三、探討金屬球落點對聲音頻率組成及強度的影響
- 四、探討金屬球直徑對聲音頻率組成及強度的影響
- 五、探討金屬球落下高度對聲音頻率組成及強度的影響

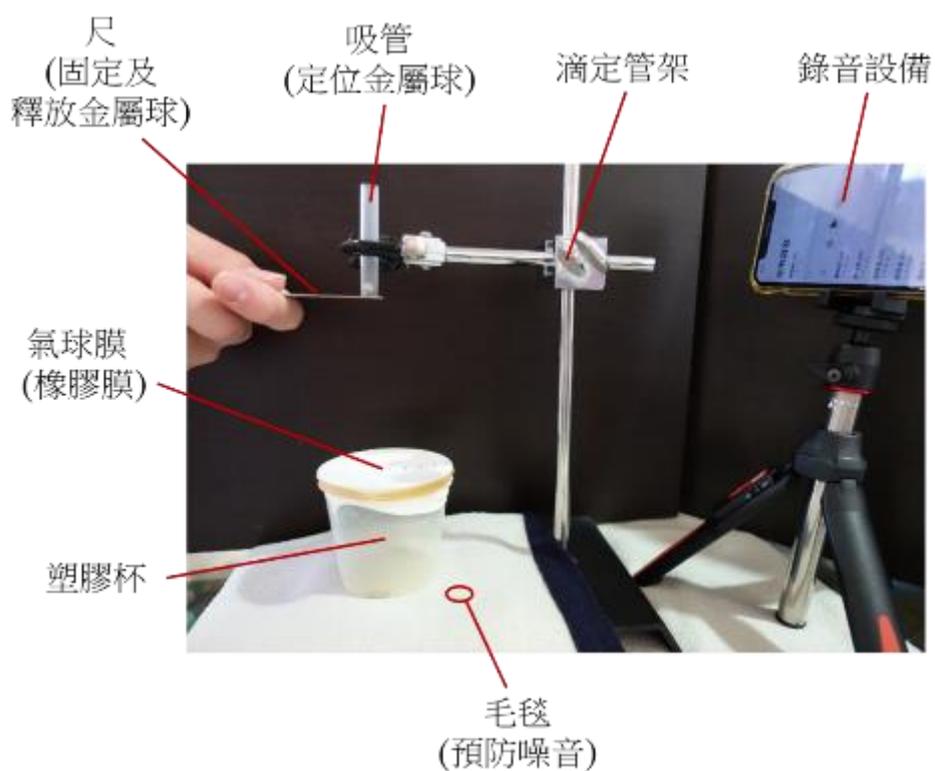
## 參、研究設備與器材

### 一、研究設備與器材

<p>塑膠杯</p> 	<p>橡膠氣球</p> 	<p>金屬球</p> 
<p>寬橡皮筋</p> 	<p>吸管</p> 	<p>鼓錘</p> 
<p>毛毯</p> 	<p>錄音設備</p> 	<p>滴定管架</p> 
<p>尺</p> 		

聲音處理軟體	Python	音檔分析演算法
 <p>Audacity</p>		 <p>Fast Fourier Transform</p> <p>FFT</p>  <p>STFT Magnitude</p> <p>STFT</p>

## 二、器材架設



# 肆、實驗理論與研究方法

## 一、實驗理論

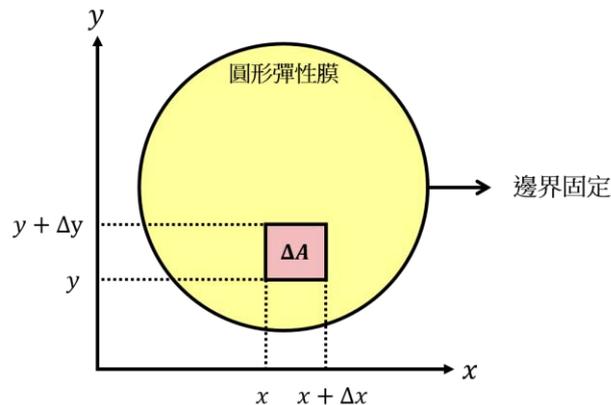
### 2D 波動方程式

假設:

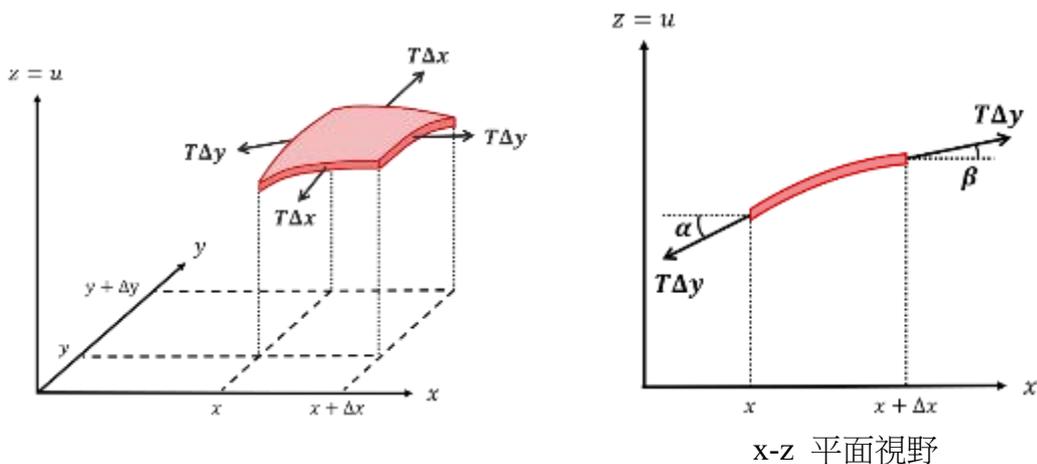
1. 區域密度 (area density) 固定,  $\rho = \frac{m}{A} = \text{常數}$
2. 膜具完全彈性 (completely flexible), 垂直方向無內力
3. 張力 (tension) 為固定常數,  $T = \frac{F}{L} = \text{常數}$
4. 面外偏轉 (out of plane deflections) 極小, 膜之斜率亦極小

推導:

取圓形膜上一塊無限小的方形,  $x$  軸方向從  $x$  至  $x+\Delta x$ ,  $y$  軸方向從  $y$  至  $y+\Delta y$  來討論



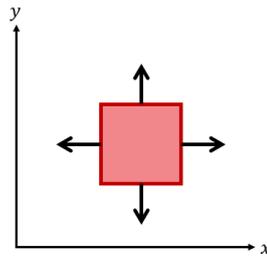
因張力  $T$  在  $x$  方向作用於長度  $\Delta y$  上, 故  $x$  方向的總力為  $T\Delta y$ 。同理,  $y$  方向之力為  $T\Delta x$ 。



$$\text{小角度近似值 } (\alpha, \beta) \begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 \\ \tan\theta \approx \theta \end{cases}$$

根據前面假設中之小角度假設可得:

橫向力  $\Sigma F_{hor} = T\Delta y \cos\beta - T\Delta y \cos\alpha = 0$  , 即橫向力抵消



至於直向的力,  $\Sigma F_{ver \cdot LR} = T\Delta y \sin\beta - T\Delta y \sin\alpha$

因已知  $\sin\theta = \tan\theta = 1$  , 故以  $\tan$  取代  $\sin$  得  $\Sigma F_{ver \cdot LR} = T\Delta y \tan\beta - T\Delta y \tan\alpha$

$$\tan\beta = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=y_1 \in [y, y+\Delta y]}^{x=x+\Delta x}$$

u 對 x 偏微分可得  $\Sigma F_{ver \cdot LR} = T\Delta y [u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)]$

同理,  $\Sigma F_{ver \cdot FB} = T\Delta x [u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$

根據牛頓第二運動定律 (Newton's Second Law) 可得:

$$m a_{ver} = \Sigma F_{ver}$$

$$\rho \cdot \Delta x \Delta y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Sigma F_{ver \cdot LR} + \Sigma F_{ver \cdot FB}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[ \frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y} \right]$$

可化簡並以波速 c 取代可得:

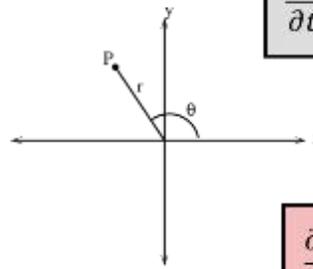
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{wave speed } c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

此推導過程使用的為卡式座標系統 (Cartesian coordinates)，但由於我們要討論的是圓形膜，故較適合用極座標 (polar coordinates)

轉換為極座標後(過程省略)：



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = c^2 \cdot \nabla^2 u$$

↓

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

**簡正模 (Normal mode)：**一個震盪系統中所有部分都以相同的頻率和相位以正弦函數形式運動的模式，同一簡正模具固定的頻率。

波動方程式之求解過程多為數學運算非屬物理學研究，故省略直接介紹其解：

$$u(r, \theta, t) = J_m(\lambda_{mn} r) \cdot \cos m\theta \cdot \cos c\lambda_{mn} t$$

$$\left( \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \right) \quad \begin{array}{l} * \alpha_{mn}: n^{\text{th}} \text{ zero of } J_m \\ * c: \text{ wave speed} \\ * a: \text{ radius of membrane} \end{array}$$

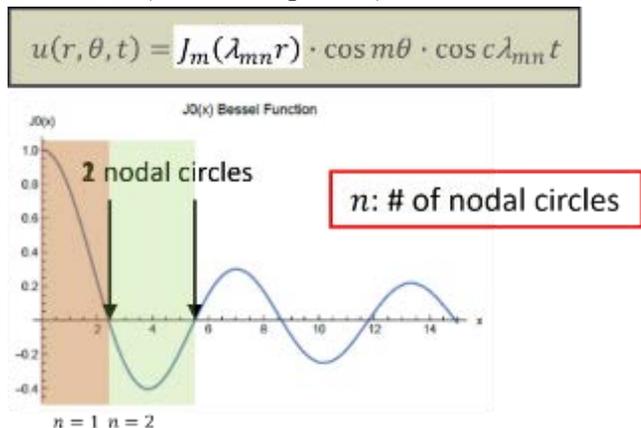
波動方程式支解為一與半徑 r、角度θ、時間 t 有關之函數，可分為該三部分討論。

簡正膜 (normal mode) 可以兩個指標 m,n 表示：

m → 貝索方程式之位階 (order)

n → 貝索方程式的第 n 個 0

首先討論與半徑 r 相關之部分 (radial component)：



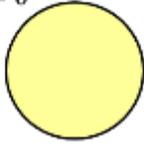
藍線可想像為震動的膜的剖面，因  $n$  代表第  $n$  個 0，固可得  $n$  為節圓 (nodal circle) 之數量。

接著討論與角度有關的部分 (azimuthal component)：

$$u(r, \theta, t) = J_m(\lambda_{mn}r) \cdot \cos m\theta \cdot \cos c\lambda_{mn}t$$

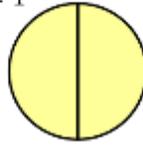
➔ Node at  $\theta: \cos m\theta = 0$

$m = 0$



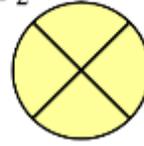
(no sol)

$m = 1$



$\theta = 90^\circ$  or  $270^\circ$

$m = 2$



$\theta = 45^\circ$  or  $135^\circ$   
or  $225^\circ$  or  $315^\circ$

$m$ : # of nodal diameters

由上方可知  $m$  為節直徑的數量

最後討論與時間有關的部分 (time component)：

$$u(r, \theta, t) = J_m(\lambda_{mn}r) \cdot \cos m\theta \cdot \cos c\lambda_{mn}t$$

$$f_{mn} = \frac{c\lambda_{mn}}{2\pi} = \frac{\alpha_{mn}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

wave speed  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

由此部分可知道振動頻率  $f_{mn}$

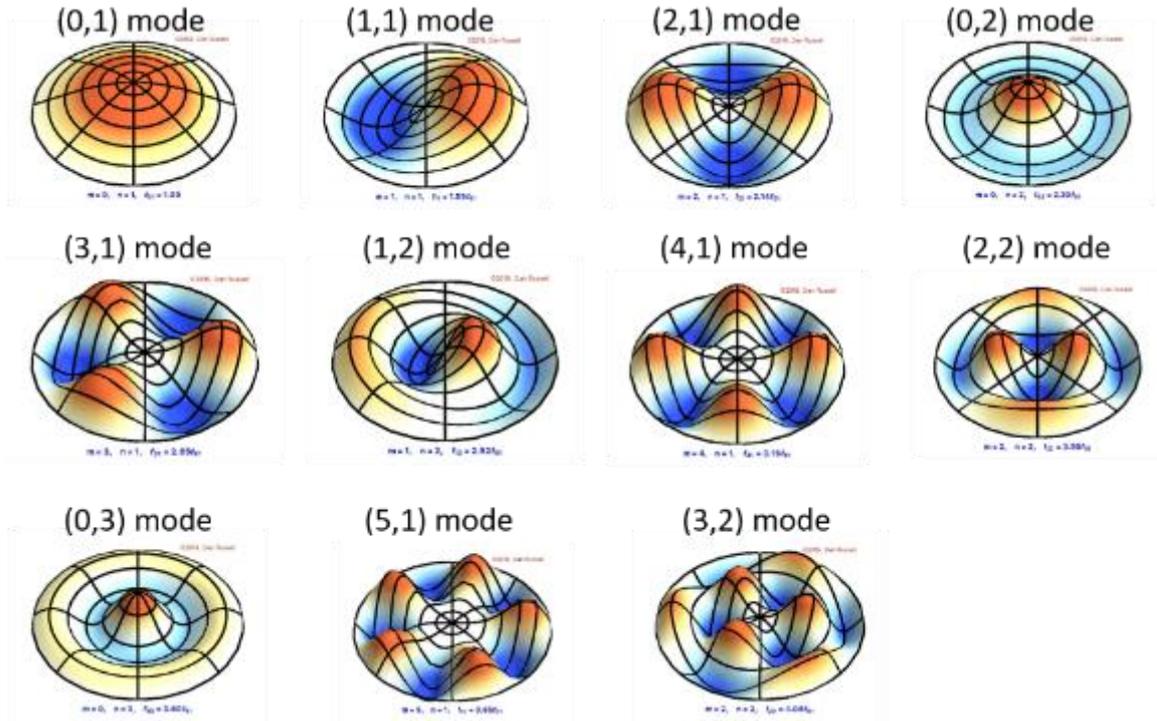
$\alpha_{mn}$ :  $m$  位階貝索方程式之第  $n$  個 0

$a$ : 膜之半徑 ( $m$ )

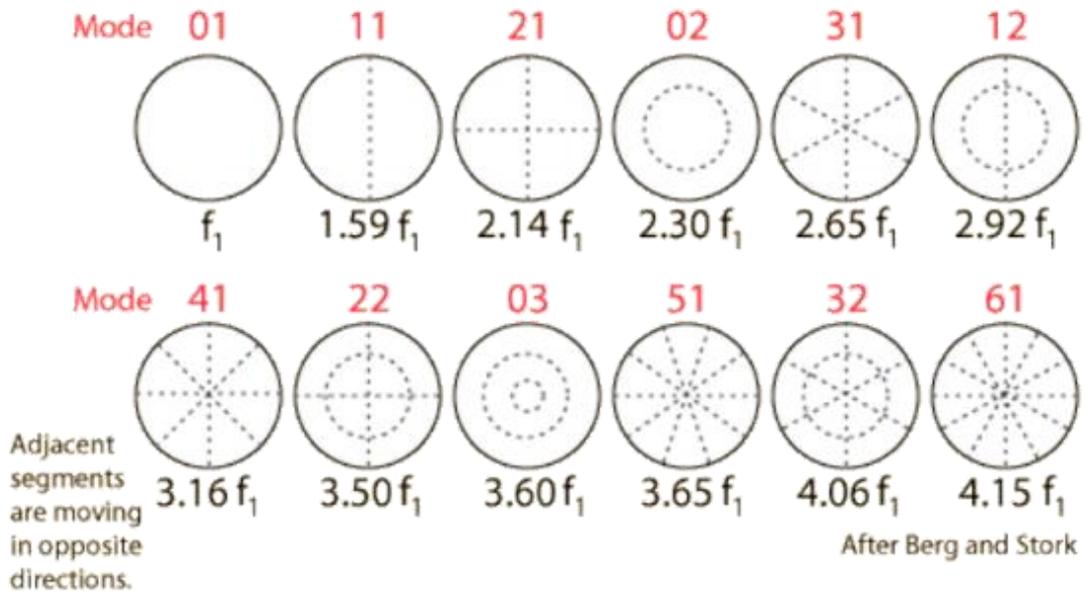
$T$ : 張力 (單位長度之受力) ( $\frac{N}{m}$ )

$\rho$ : 區域密度 ( $\frac{kg}{m^2}$ )

常見的低頻率振動模式：

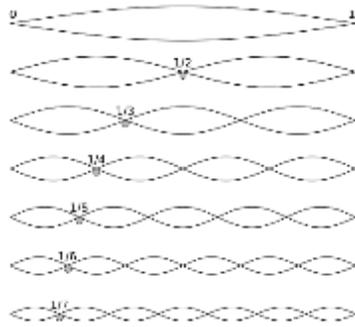


不同模式的振動頻率成比例，其中頻率較低者的頻率與 (0,1) 比較如下



## 基頻

**基本頻率**（或簡稱**基頻**、**fundamental frequency**）：當發聲體由於振動而發出聲音時，聲音一般可以分解為許多單純的正弦波，其中頻率最低的正弦波即為基音，其頻率即為基頻；而其他頻率較高的正弦波則為泛音。音樂演奏或歌唱中，基音是區別音高的主要元素，決定旋律。而泛音則決定樂器或人聲的音色。



弦上的振動和駐波，圖中展示了基頻波和前六種諧波

## 膜鳴樂器

凡由緊繃的膜振動發音的樂器都稱為膜鳴樂器，這類樂器均以張緊的膜為聲源體，通過敲擊、摩擦或以聲波等方式激發使其振動發聲。膜振動可以看成是弦振動由“線”到“面”的擴展。但膜比弦的振動方式要複雜得多。膜振動也有一定的波腹與波節，只是弦上的“節點”在膜上則是“節線”。當外力作用於弦上的某個固有頻率的波節點時，這個固有頻率即受抑止，從而對音色產生影響。膜振動也有類似情況：當鼓槌敲擊在鼓膜的不同部位，或用硬軟不同、與鼓膜接觸面大小不同的槌頭敲擊，均會使固有頻率發生變化而影響音色。膜振動的固有頻率數量比弦多，並且分布較散，其泛音和基頻之間不是整數倍關係，因此是不和諧的。膜振動的固有頻率沿高頻方向逐漸變密，即音越高泛音越密。所以鼓音的高低，一般不如弦樂器明顯。

所有膜鳴樂器的發聲，主要來自膜振動，筒體只起共鳴作用。但筒體的容積和形狀對鼓的音質有一定影響。底部封閉的鼓筒，其鼓膜的張力受筒腔內空氣反作用力的影響，即鼓膜在運動時由於交替壓縮鼓腔內的空氣而受腔內空氣的反作用力，因而固有頻率產生變化。

## 二、研究方法

### 實驗流程

1. 將氣球剪成適當大小，套到塑膠杯口，並以寬橡皮筋綁緊
2. 如裝置示意圖架設實驗裝置，測量吸管底部與杯口的距離並調整塑膠杯位置以定位金屬球落點
3. 將金屬球置入吸管底部，並以尺固定
4. 移開尺，讓金屬球自由落下，撞擊膜後立刻將球接起，並以錄音設備紀錄撞擊的聲音
5. 將記錄的音檔以Audacity、FFT、STFT處理並分析

### 分析聲音組成

1. 以鼓槌敲擊膜中央，並以錄音設備紀錄撞擊的聲音，將記錄的音檔以Audacity、FFT、STFT處理並分析
2. 比較鼓槌敲擊膜中央及金屬球撞擊膜的聲音分析結果，找出基頻
3. 根據波動方程式，計算出可能的波動頻率
4. 與分析結果比對，確認金屬球撞擊膜產生聲音的頻率組成

## 分析各項變因

1. 改變金屬球直徑、落點及落下高度，依實驗流程進行實驗
2. 將記錄的音檔以Audacity、FFT、STFT處理分析，比較各項變因結果的異同，並探究其原因

## 應用程式與演算法

### 1. Audacity

**Audacity** 是一款音訊編輯軟體，用於錄音和編輯音訊。我們在實驗中使用 **Audacity**，以金屬球撞擊橡膠膜前的一段音訊作為樣本，來去除音訊的背景雜音，並將音訊剪成適當的長度，以進行後續 Python-FFT 及 Python-STFT 的分析。

### 2. Python-FFT

我們使用 Python-FFT 將音訊轉成聲音強度 (Amplitude) 對頻率 (Frequency) 的圖形，以觀察聲音的頻率組成與強度的變化。

### 3. Python-STFT

我們使用 Python-STFT 將音訊轉成聲音頻率 (Frequency) 對時間 (Time) 的圖形，並以顏色標示強度，以專注於聲音在不同時間點的頻率組成及強度變化。

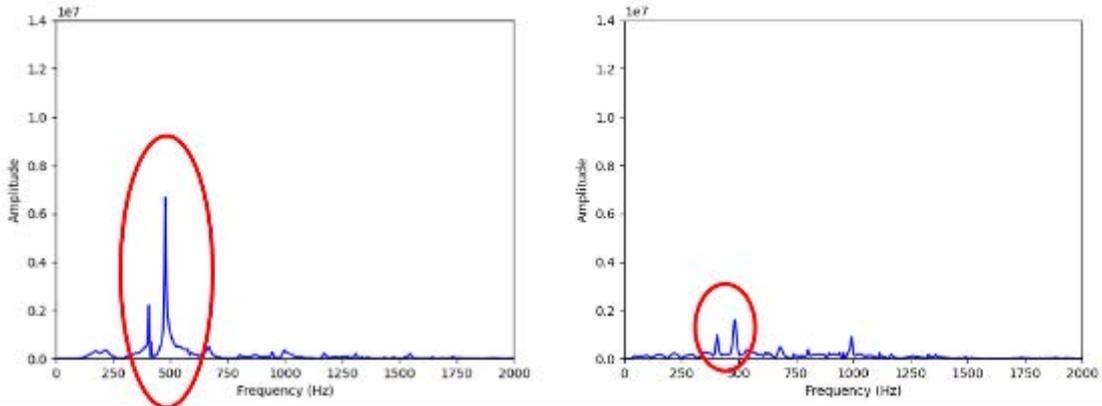
## 波動方程式應用

我們應用波動方程式推算出來的簡正模 (Normal mode) 對應的頻率，與我們在實驗中實際觀察到的聲音頻率做比對，確認音訊的基頻 (Fundamental frequency) 及頻率組成，並找出產生這些頻率的振動模式。

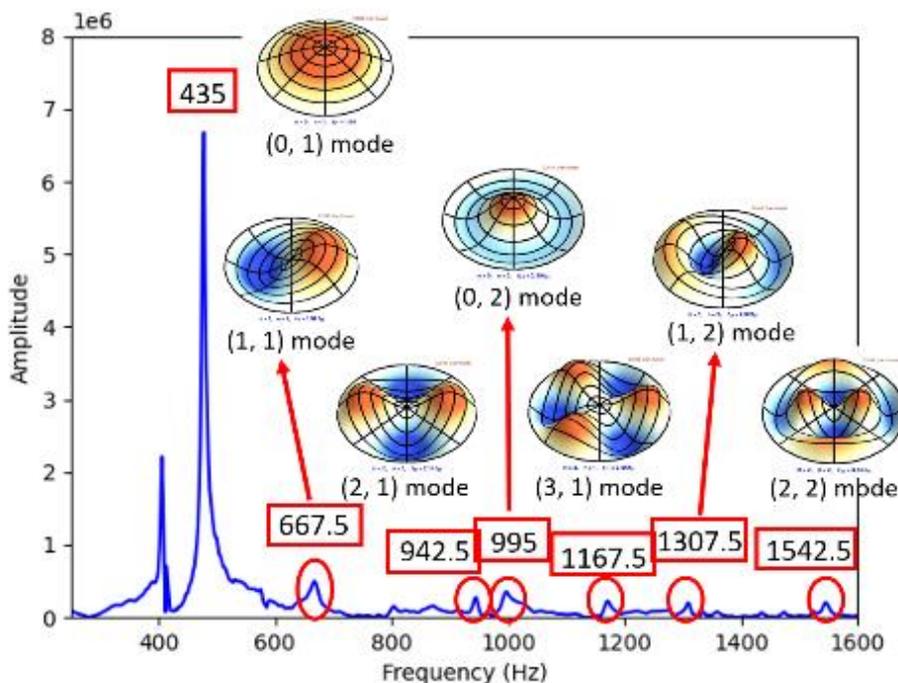
## 伍、研究結果

### 基頻及頻率組成

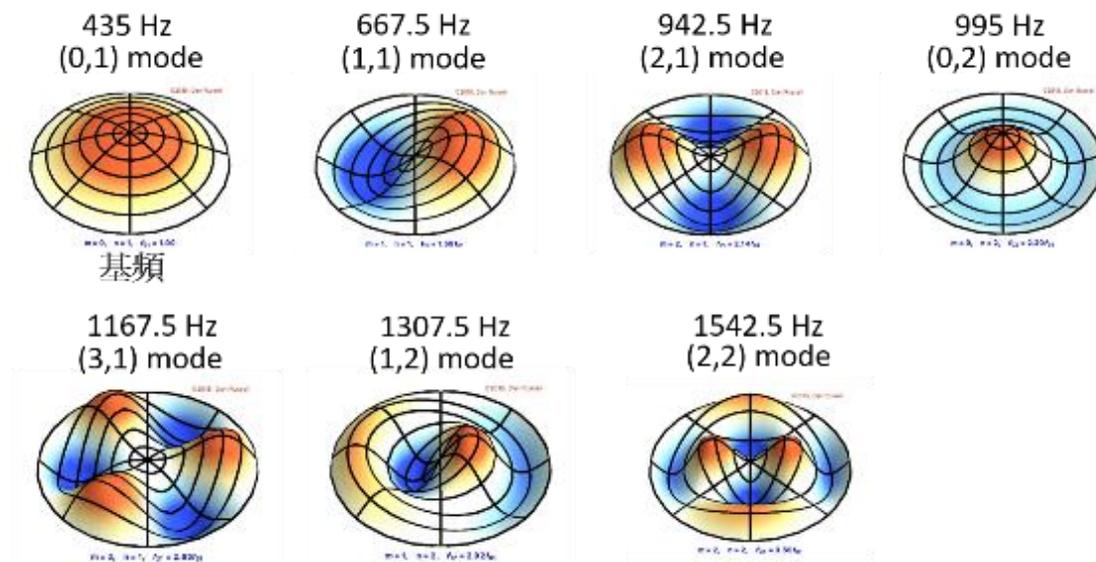
為了找出基頻，我們使用鼓槌敲擊套在塑膠杯口的膜中央，比較金屬球撞擊膜和鼓槌敲擊膜中心的聲音頻率，觀察到兩者在 435Hz 附近均出現兩個明顯的波形（下圖），這很可能就是基頻（(0,1)mode）。



根據波動方程式推算出的頻率關係，我們以基頻 435Hz 計算出金屬球撞擊膜產生的聲音頻率可能有以下幾種：693.4Hz((1,1)mode)、929.2Hz((2,1)mode)、998.8Hz((0,2)mode)、1154.1Hz((3,1)mode)、1269.3Hz((1,2)mode)、1372.9Hz((4,1)mode)、1522.9Hz((2,2)mode)...，而在金屬球撞擊膜產生的聲音頻率中，我們可以實際觀察到 667.5Hz((1,1)mode)、942.5Hz((2,1)mode)、995Hz((0,2)mode)、1167.5Hz((3,1)mode)、1307.5Hz((1,2)mode) 及 1542.5Hz((2,2)mode)等頻率(如下圖)，因此更確認了膜的基頻大約是 435Hz。



實驗結果顯示金屬球撞擊塑膠杯口的橡膠膜產生聲音的頻率組成及振動模式如下圖，亦即我們聽到金屬球撞擊橡膠膜的聲音是由這些震動模式組合而成。因此，接下來的實驗我們將針對這些頻率組成及振動模式進行研究。



### 各項變因的探究

接下來的實驗，我們將以金屬球的落點、金屬球的直徑及金屬球落下高度為操作變因，分別探究這些變因對聲音振動模式、頻率組成及強度的影響。

變因：

#### 1. 金屬球的落點：

如右圖，由膜的中心至邊緣分別選取 5 個落點（分別為落點 1、落點 2、落點 3、落點 4 及落點 5）。



#### 2. 金屬球的直徑：

實驗中總共使用共 8 顆金屬球，由小到大編號及直徑(mm)分別為：球 1 (5.50)、球 2 (6.00)、球 3 (7.00)、球 4 (8.00)、球 5 (9.00)、球 6 (10.00)、球 7 (11.10)及球 8 (12.70)



#### 3. 金屬球落下高度：

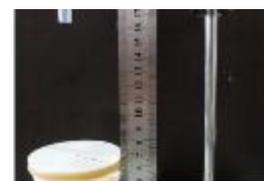
實驗共進行三種高度：5.0cm、7.5cm 及 10.0cm



5.0cm



7.5cm

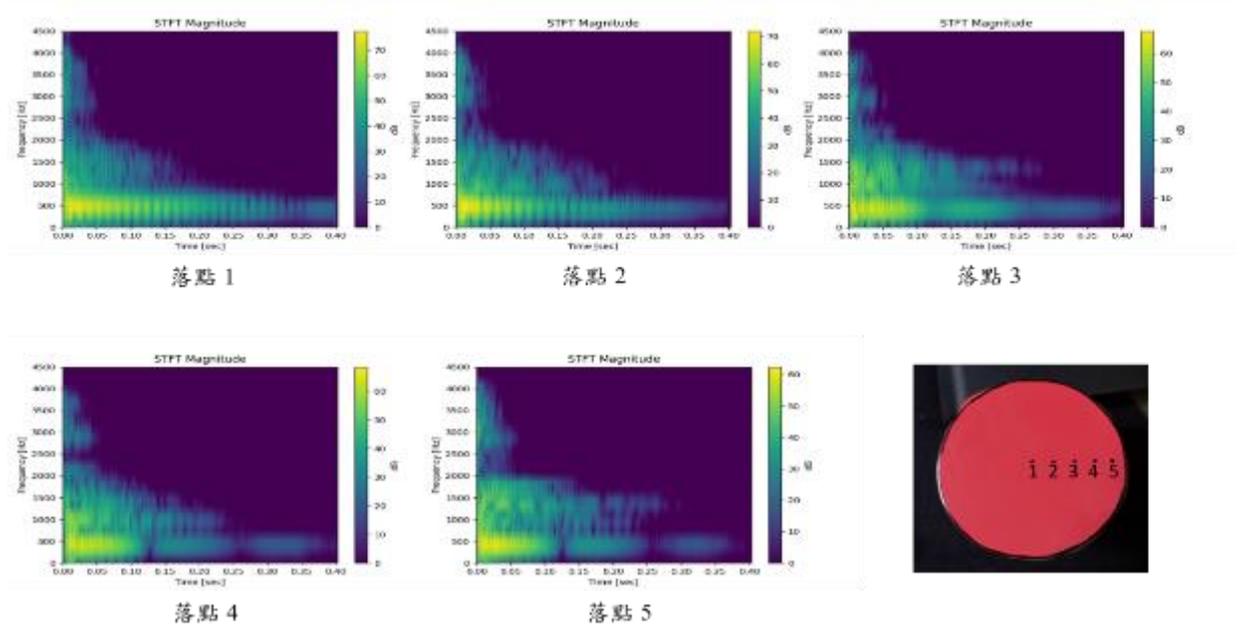


10.0cm

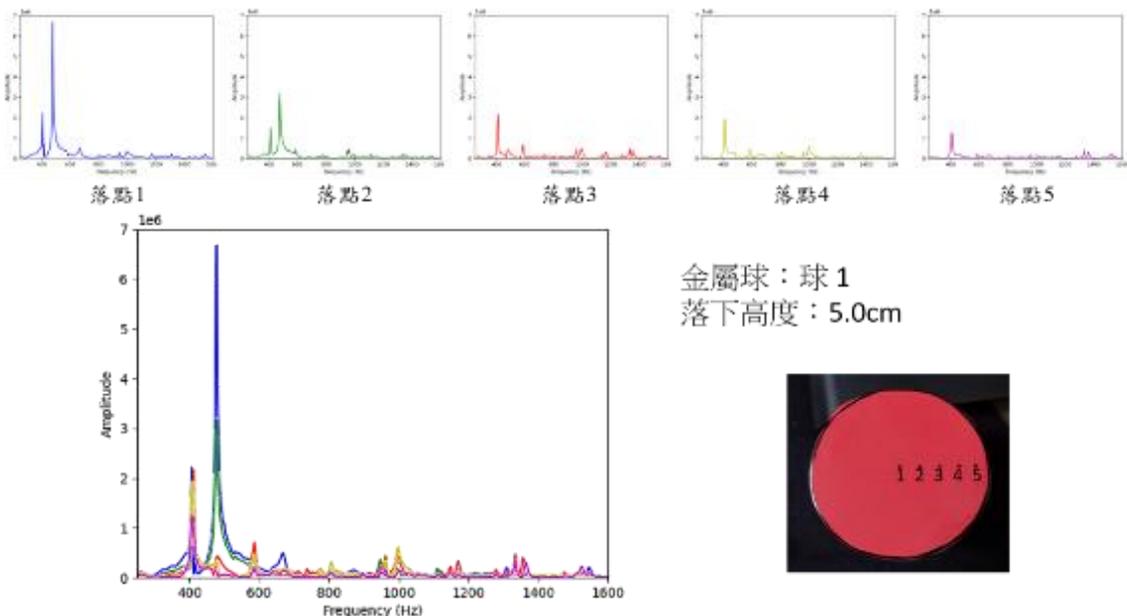
## 一、金屬球的落點：

首先我們固定金屬球的直徑及落下高度，只改變金屬球的落點來進行實驗，並將錄製的聲音進行 Python-STFT 轉換。由下圖可以觀察到，金屬球剛撞擊橡膠膜時，無論落點為何，基頻（435Hz）的強度都差不多，但金屬球撞擊橡膠膜中央（落點 1）產生的基頻持續時間較久；隨著落點由中央向邊緣移動，基頻持續的時間逐漸縮短（如下圖）。此外，我們也可以觀察到，當落點由膜中央移向邊緣（落點 1 到落點 5）時，較高頻率部分（約 750 ~ 2000Hz）的強度逐漸增加，持續的時間也逐漸加長。

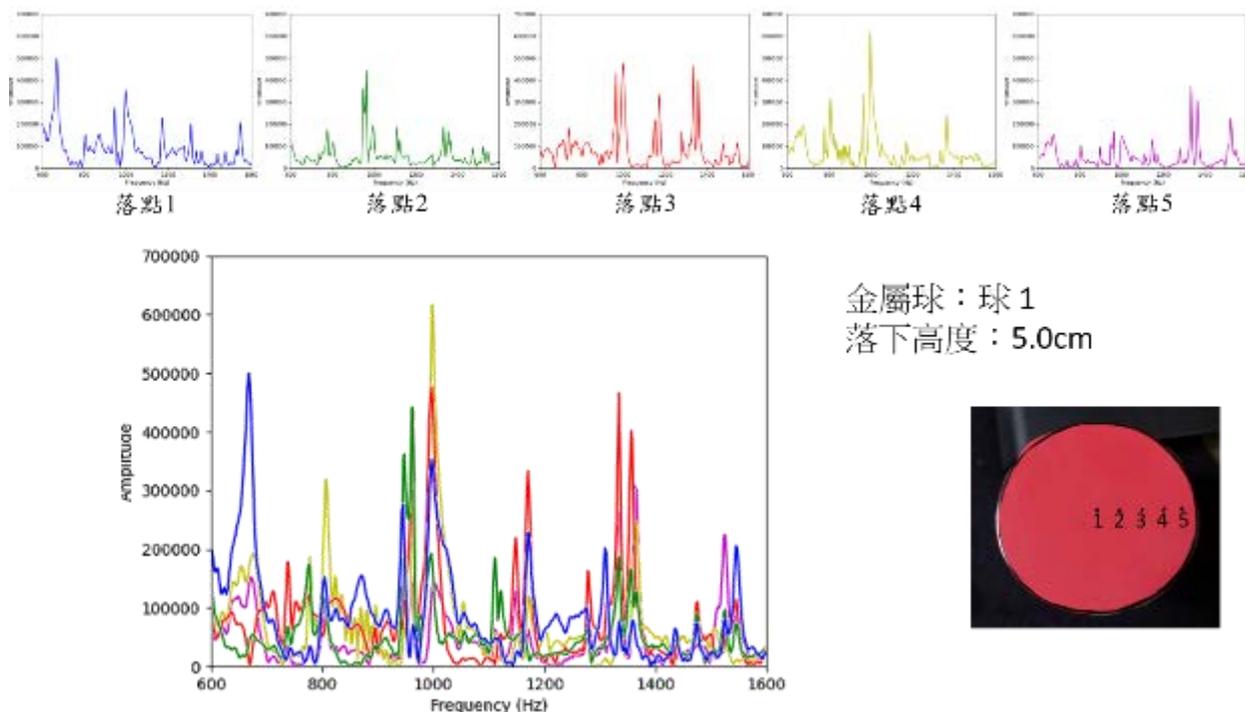
球 1, 落下高度：5.0cm



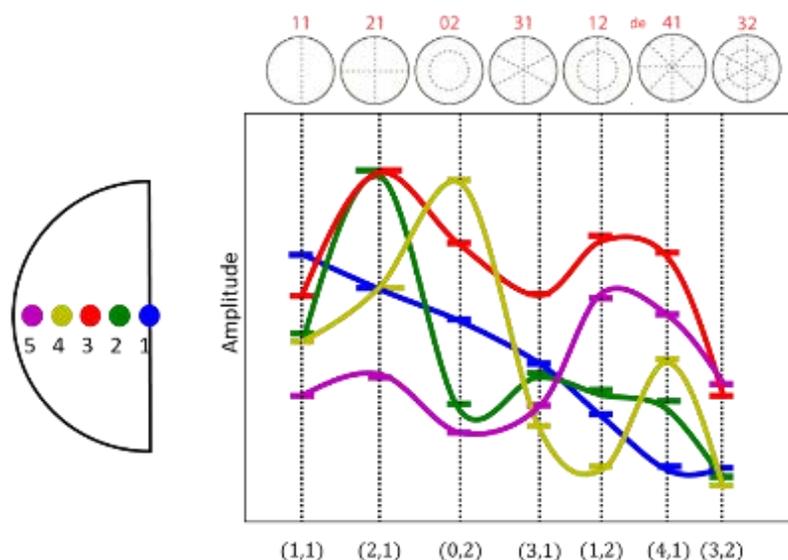
接著我們將錄製的聲音進行 Python-FFT 轉換。結果發現，無論金屬球的直徑及落下高度為何，基頻的位置均不變（435Hz），且落點由 1 移動至 5，基頻的強度明顯的下降（如下圖）。這和 Python-STFT 觀察到的結果相符。



因為高頻率部分的波幅較小，無法清楚的觀察到變化，所以我們將高頻率部分的波形放大再進行觀察比較（如下圖）。圖中可以觀察到頻率的變化與金屬球的落點間似乎存在某種規律。



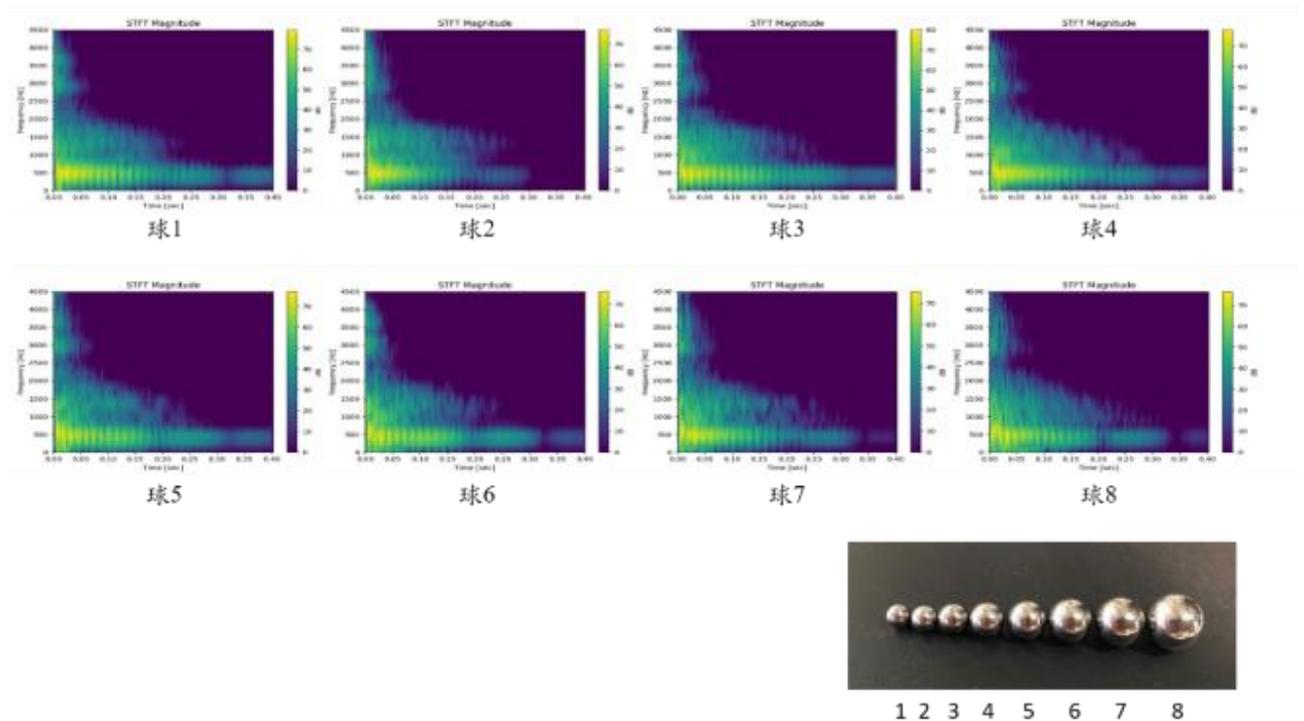
為了更清楚釐清這種規律，我們將幾個主要的高頻率波形轉畫成強度（amplitude）對頻率（frequency）的圖形（如下圖），並與各頻率的振動模式（vibration mode）結合來觀察。我們發現，當球撞擊膜中心點時，較低頻率的震動模式（如(1,1)mode）強度較高，高頻率的振動模式強度則逐漸降低。隨著撞擊點由中心移向邊緣，可以發現低頻率的震動模式（(1,1)mode）強度逐漸降低，這與之前觀察到更低頻率的基頻（(0,1)mode, 435Hz）的變化一致；同時，我們也可以觀察到，落點靠近邊緣時較高頻率的震動模式（如（1,2)mode、(4,1)mode）強度明顯增加；亦即實驗結果顯示：金屬球撞擊膜中心點時可產生較強的低頻率震動模式，而撞擊點向邊緣移動時易引發較高頻率的震動模式。這和 Python-STFT 觀察到的結果也都相符。



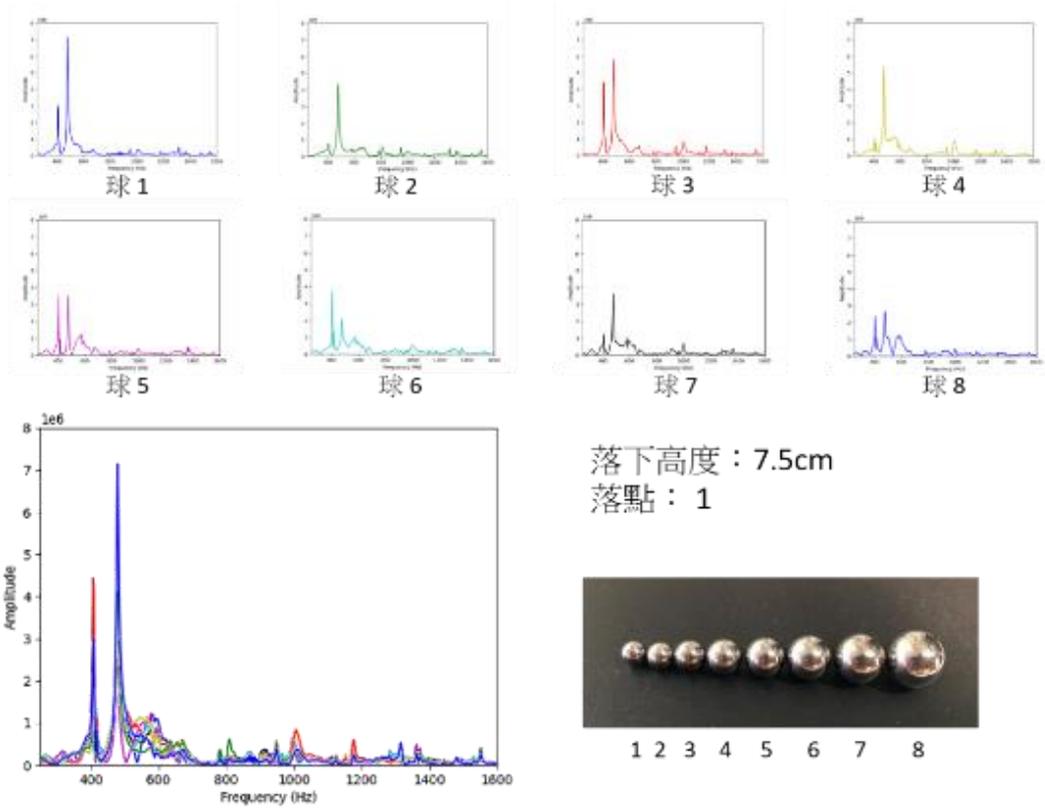
## 二、金屬球的直徑：

其次我們固定金屬球的落點及落下高度，只改變金屬球的直徑來進行實驗。在 Python-STFT 轉換的結果中，我們發現基頻（435Hz）的強度與金屬球直徑之間無明顯相關，持續時間亦不受金屬球直徑影響（如下圖）。而高頻率部分的強度及持續時間與金屬球的直徑亦無明顯相關。

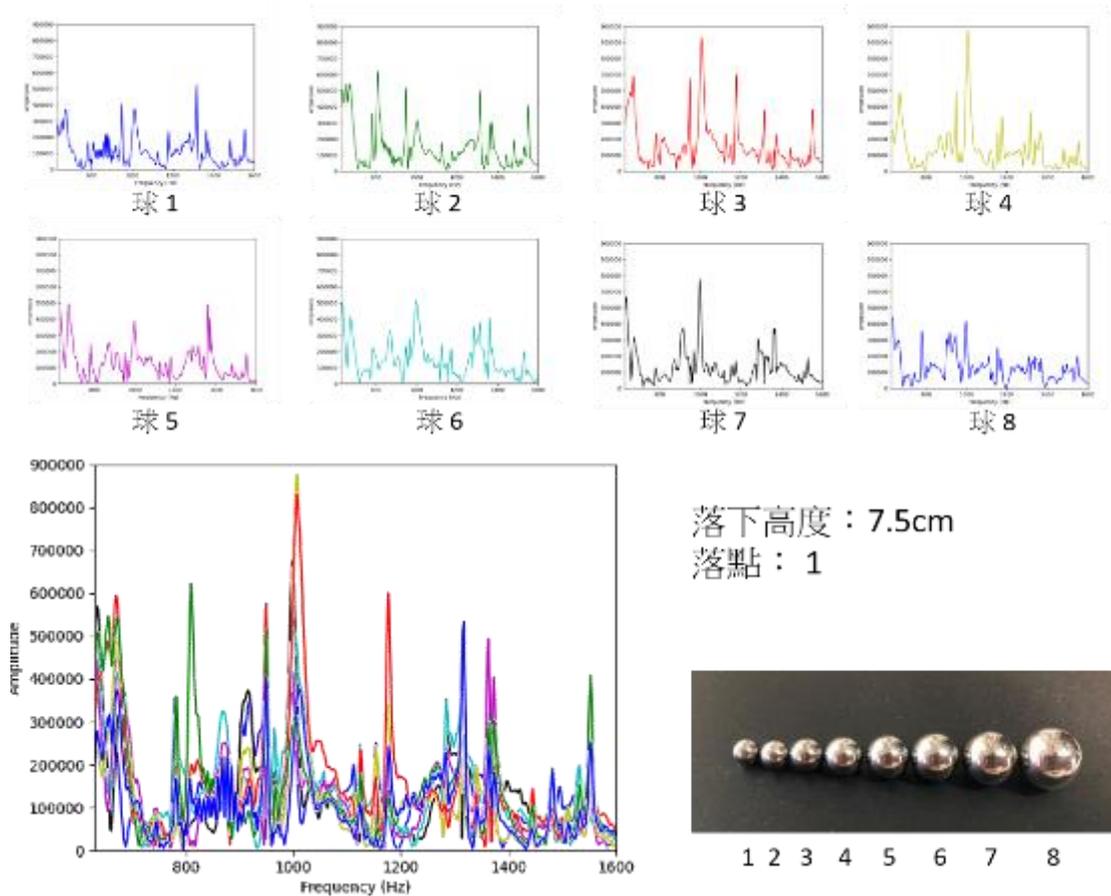
落點 1, 落下高度：7.5cm



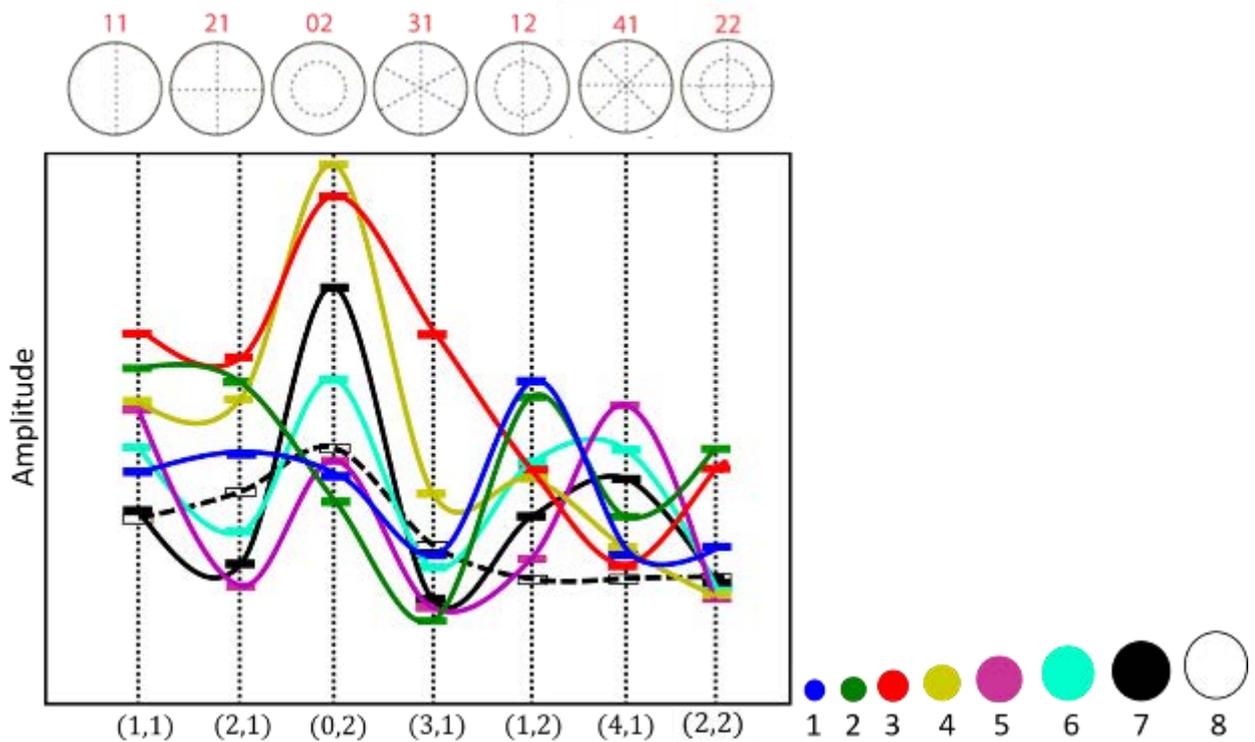
而 Python-FFT 轉換的結果顯示，無論金屬球落點及落下高度為何，基頻的位置均不變(435Hz)，且基頻的強度與金屬球的直徑之間無明顯相關(如下頁圖)，這和 Python-STFT 轉換結果相符。同時，我們發現在基頻 ((0,1) mode, 435Hz) 和(1,1) mode (667.5Hz) 之間有另一個波形存在，且其強度隨著球的直徑增加而增加。(如下頁圖)



我們同樣將高頻率部分的波形放大，以便更清楚的比較不同金屬球直徑的實驗結果（如下圖）。圖中我們可以看到，直徑中等的金屬球似乎可以引發某些特定的震動模式。



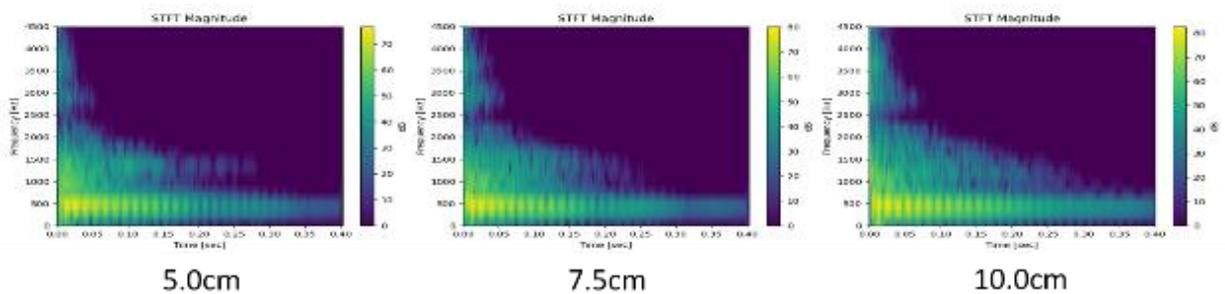
我們再次將幾個主要的高頻率波形轉畫成強度（amplitude）對頻率（frequency）的圖形（如下圖），並與各頻率的振動模式（vibration mode）結合來觀察。我們發現，中等尺寸的金屬球（如球 3、球 4）撞擊膜中央時能特別引發(0,2)mode。



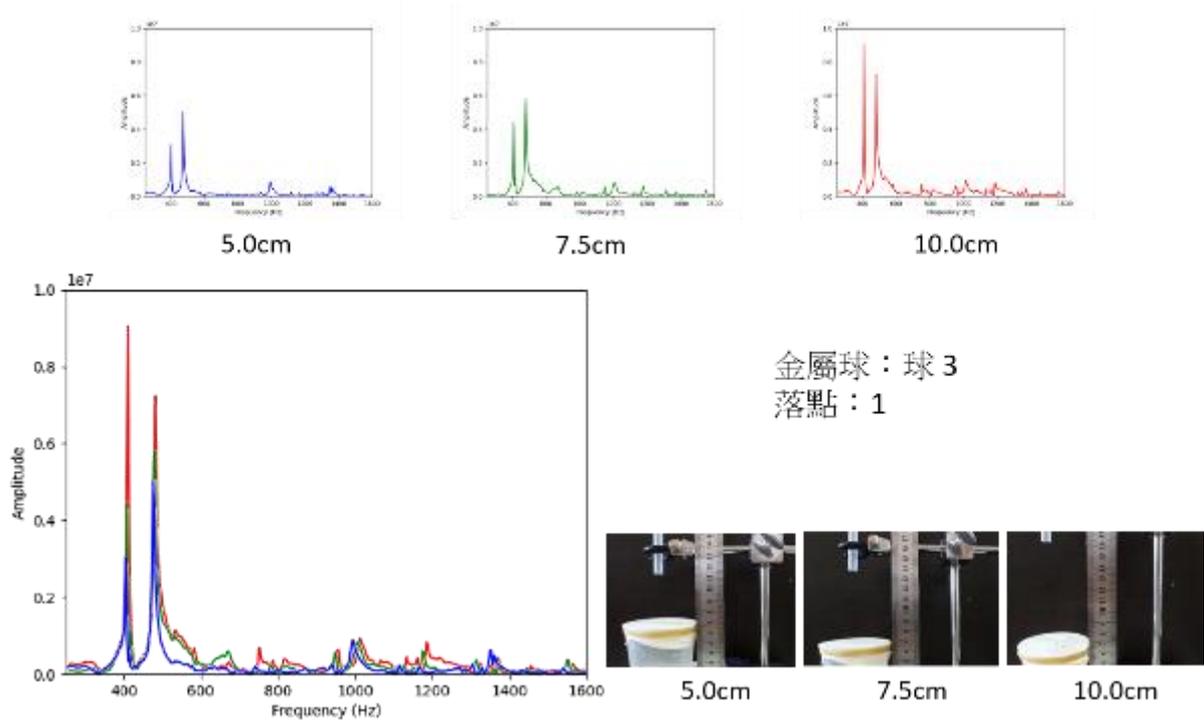
### 三、金屬球落下高度：

最後，我們固定金屬球的落點及直徑，只改變金屬球的落下高度來進行實驗。在 Python-STFT 轉換的結果中，我們發現在金屬球剛撞擊橡膠膜時，隨著落下高度增加，基頻（435Hz）的強度也稍微增強；而且隨著落下高度增加，基頻持續的時間也隨著加長（如下圖）。在高頻率部分，我們也觀察到，當落下高度增加時，強度及持續時間亦隨增加

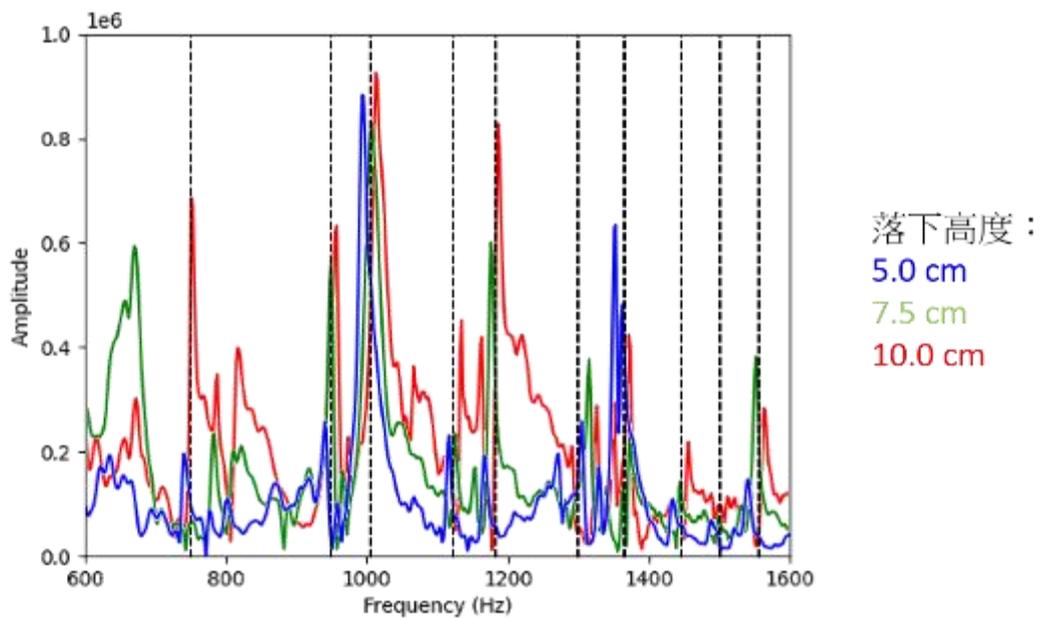
球 3, 落點 1



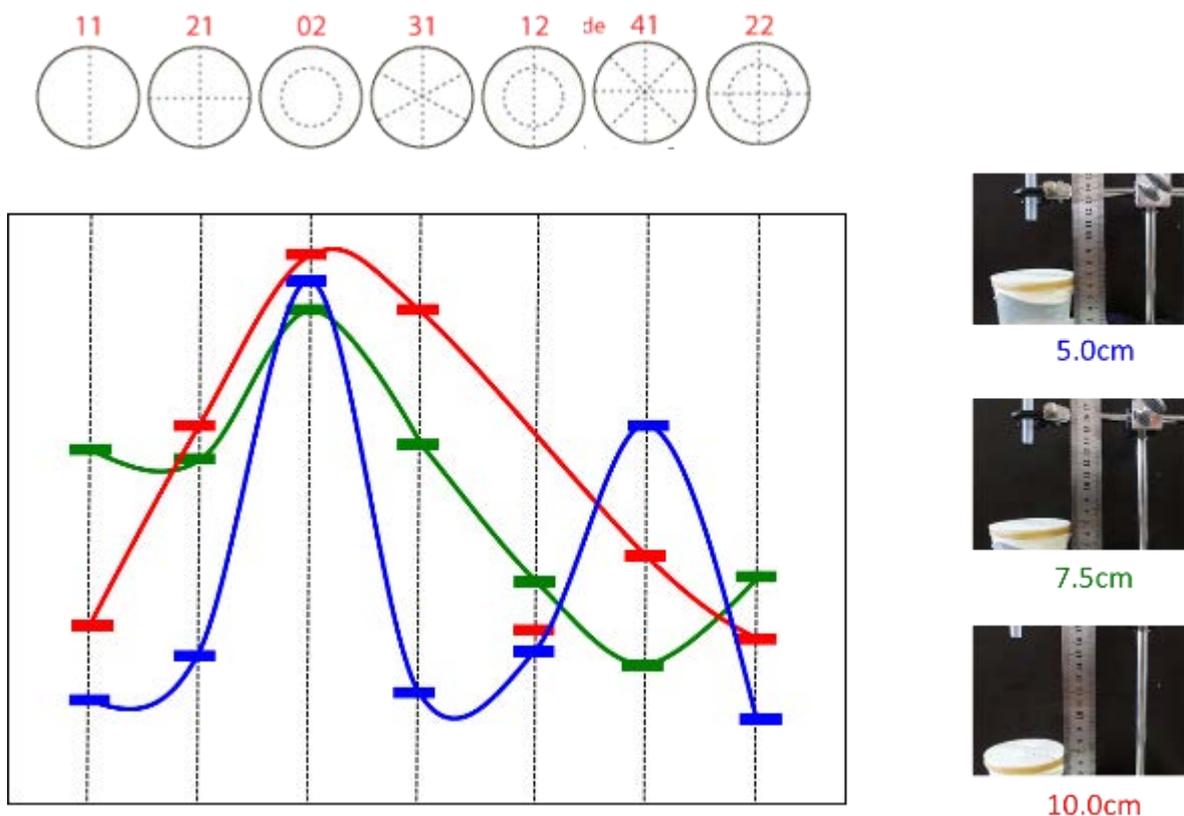
在 Python-FFT 轉換的結果中，我們發現，基頻的位置（435Hz）亦無改變；而隨著落下高度增加，基頻的強度明顯增加（如下圖），這與 Python-STFT 觀察到的結果亦相符。



同樣為了更清楚的觀察高頻率的震動模式，我們將高頻率部分的波形放大(如下圖)。圖中我們可以觀察到，落下高度增加似乎可引發較高頻率的震動模式。

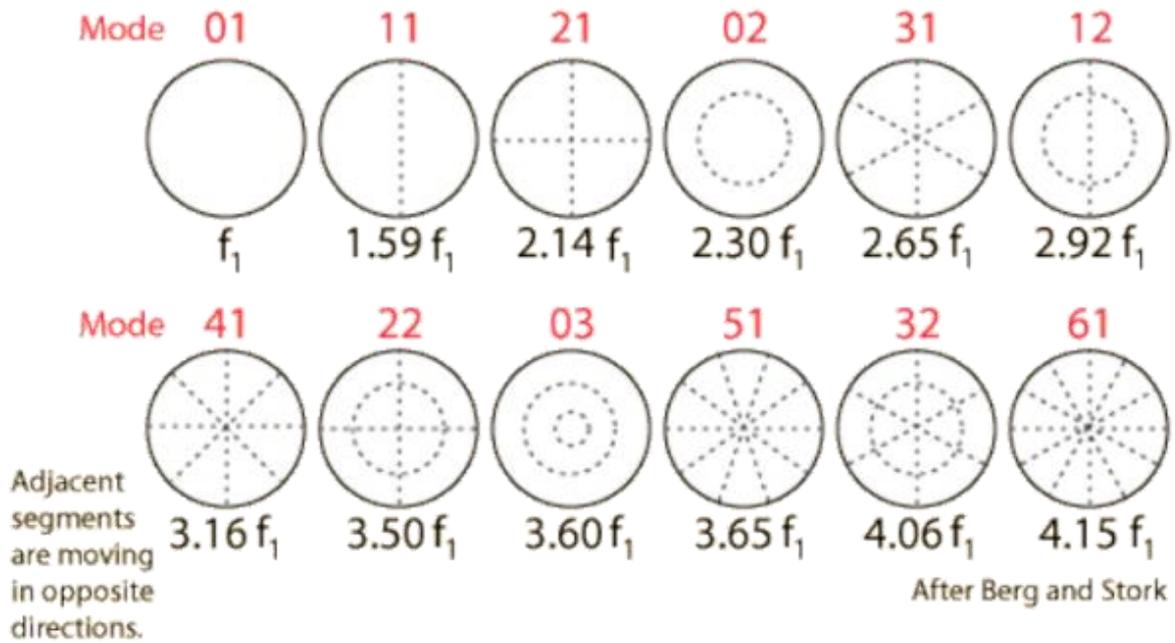


我們再次將幾個主要的高頻率波形轉畫成強度（amplitude）對頻率（frequency）的圖形（如下圖），並與各頻率的振動模式（vibration mode）結合來觀察。我們發現無論落下高度為何，都特別能引發(0,2)mode。此外，整體來看，落下高度越高，引發的高頻率波形強度也越大。

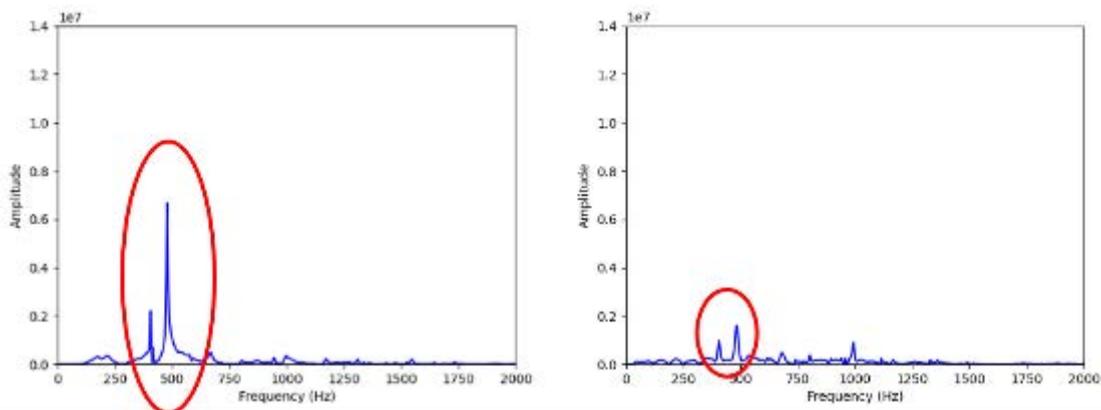


## 陸、討論

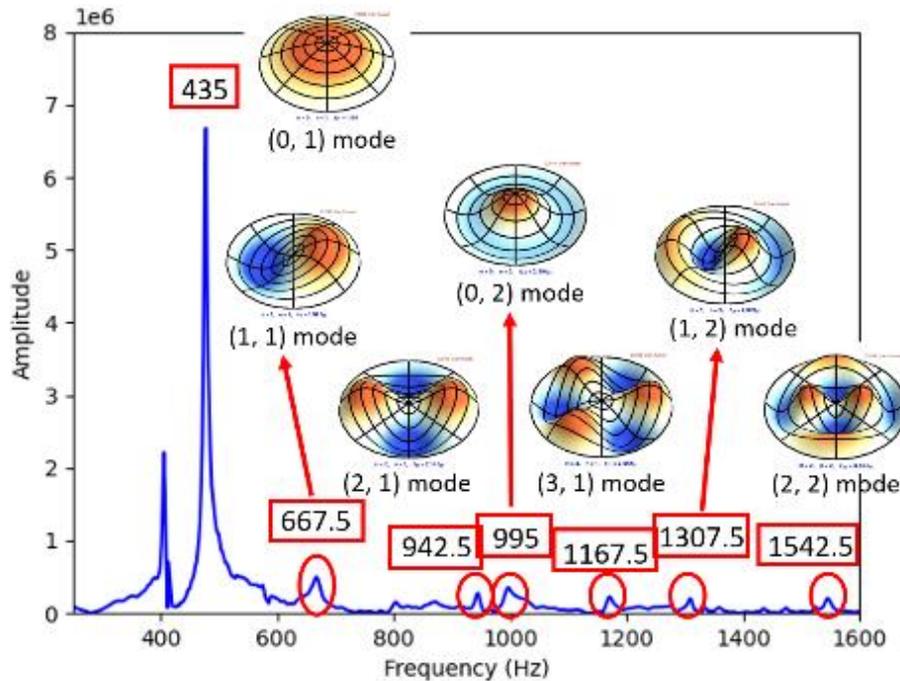
- 雖然波動方程式可以幫助我們計算出各種波動的震動模式，但是震動模式並不能直接被觀察到，只能由波的頻率推斷出來。



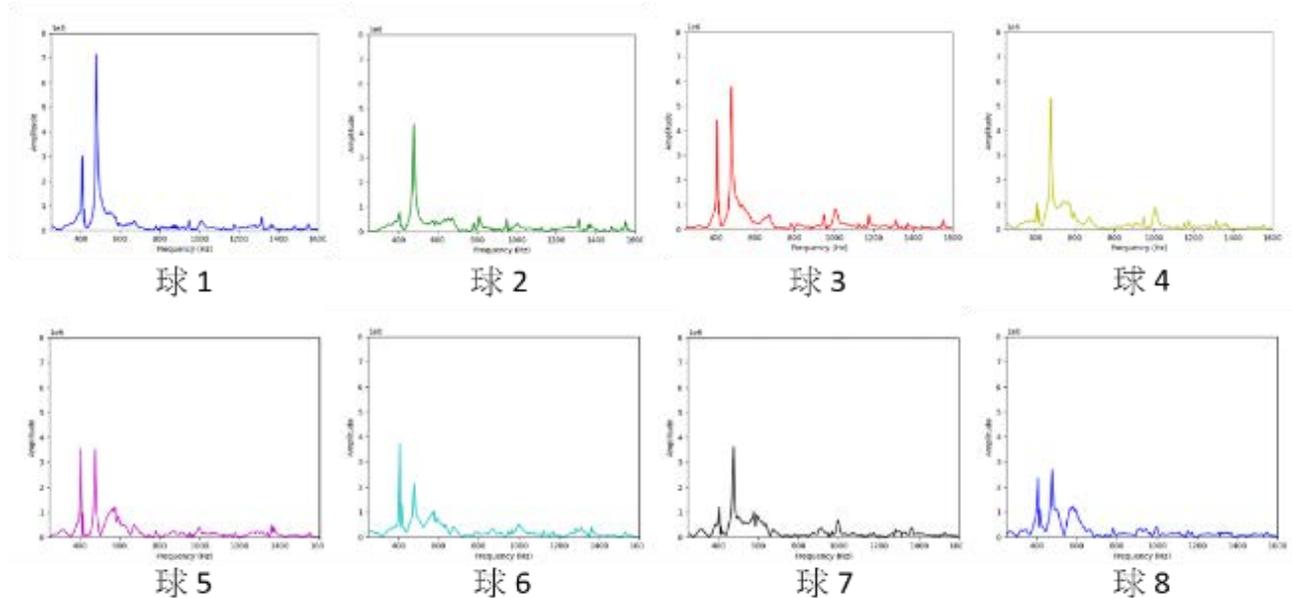
而我們比較以鼓槌敲擊膜中央和金屬球撞擊膜產生的聲音頻率，發現基頻是由兩個分別為 400Hz 和 470Hz 的頻率組成，平均頻率為 435Hz，而不是單一的頻率。



由依據波動方程式計算出的簡正模（normal mode）頻率和我們實際觀察到的聲音組成頻率高度相符，可以更進一步確認 435Hz 的確就是基頻。

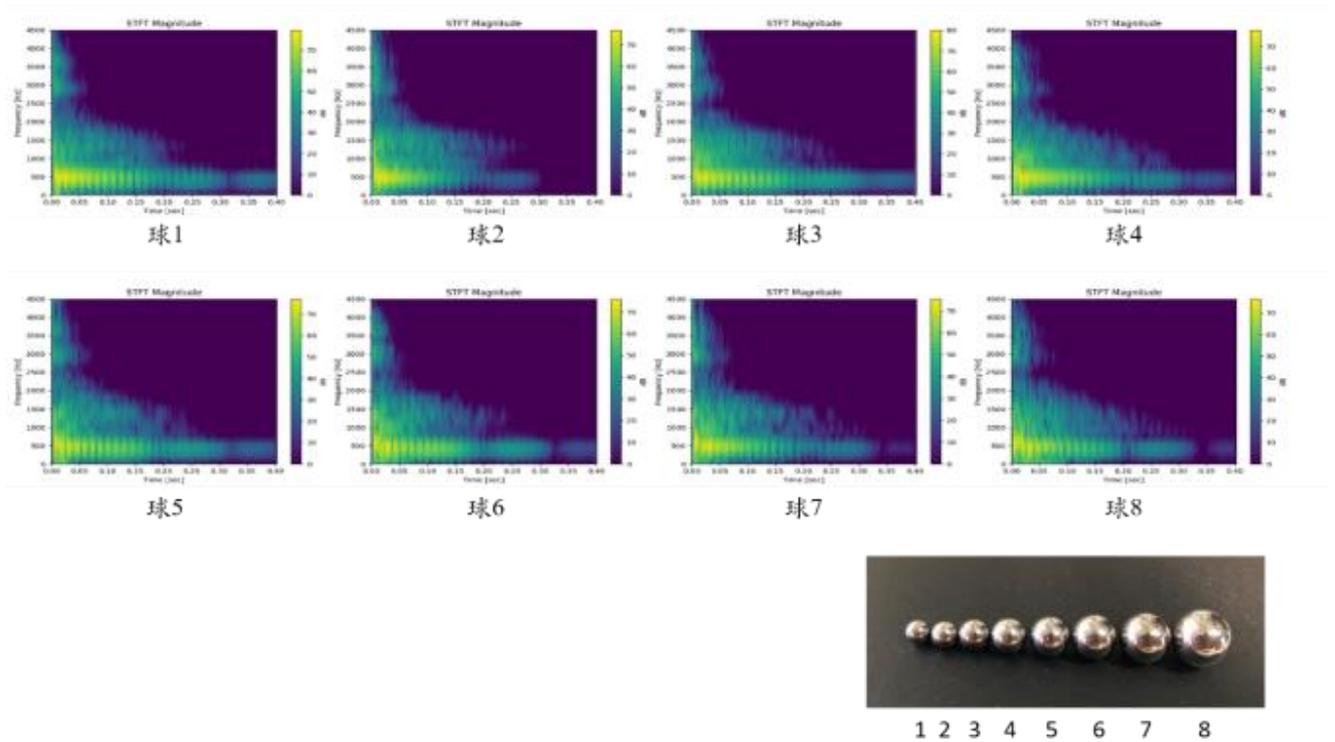


- 當固定金屬球的落點和落下高度時，在基頻和(1,1) mode 之間可以看到一個明顯的波形，且此波形的強度隨著金屬球的直徑增加而增加。根據波動方程式的推算，這個頻率不應該出現有意義的波形，而且此頻率的強度與金屬球的直徑，亦即重量成正相關，應該不是背景雜音。我們認為這可能是由金屬球與橡膠膜撞擊時摩擦產生的聲音。

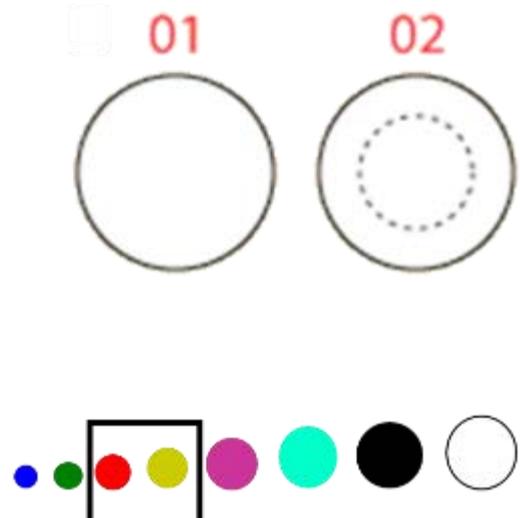
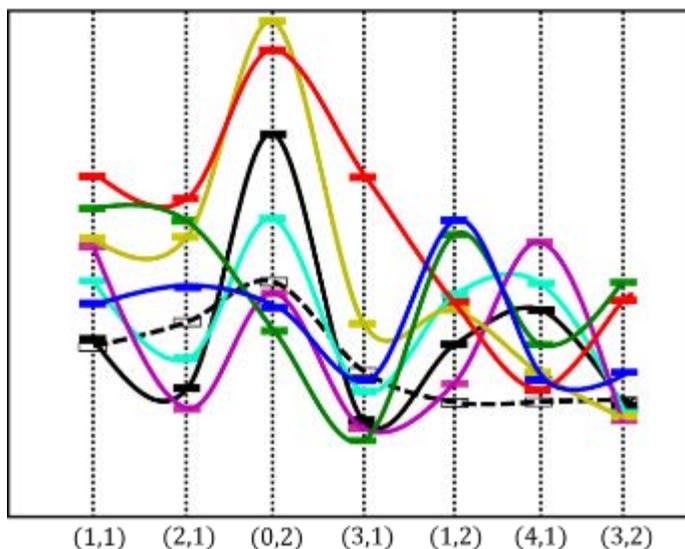


從 Python-STFT 轉換的結果中，我們觀察到，金屬球剛撞擊橡膠膜時，各種直徑的金屬球都產生了較基頻頻率稍微高一點的波形，且強度隨金屬球直徑增加而增加，此波形只持續極短暫的時間。我們認為這個波形即為金屬球撞擊橡膠膜時摩擦產生的聲音。

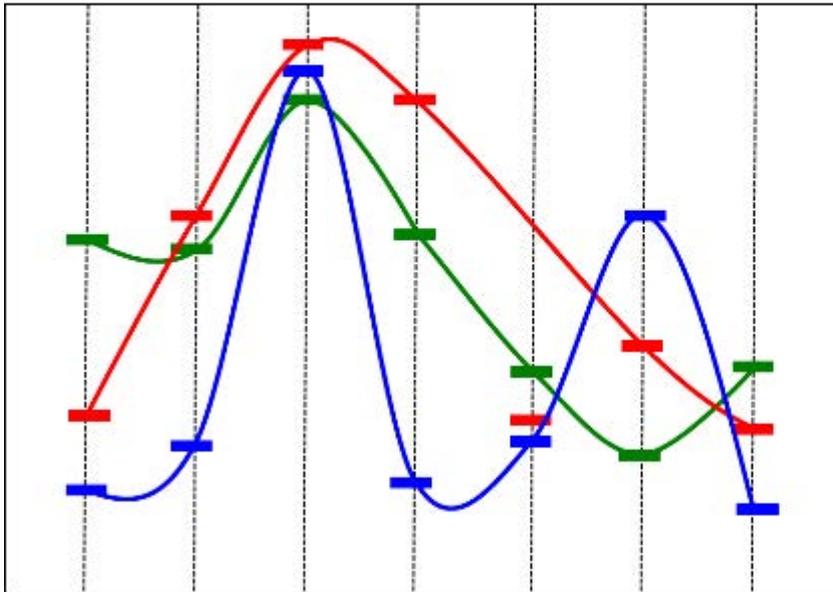
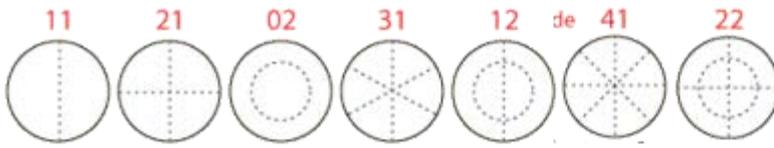
落點 1, 落下高度：7.5cm



- 當固定金屬球的落點和落下高度時，我們發現中等直徑的金屬球（如球 3、球 4）撞擊膜中央時能引發以落點為腹點的震動模式（modes with an antinode at the drop location），包括基頻(0,1) mode 及(0,2) mode。我們認為可能是因為直徑較小的球重量太輕，引發的震動不明顯；而直徑較大的球與膜的接觸面積較大，撞擊力不容易集中在膜的中央位置，因此只有中等直徑的金屬球特別明顯。



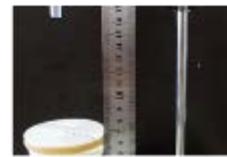
- 當固定金屬球的落點和直徑時，我們發現 3 種落下高度皆能引發以落點為腹點的震動模式 (modes with an antinode at the drop location)，包括基頻(0,1) mode 及(0,2) mode。



5.0cm



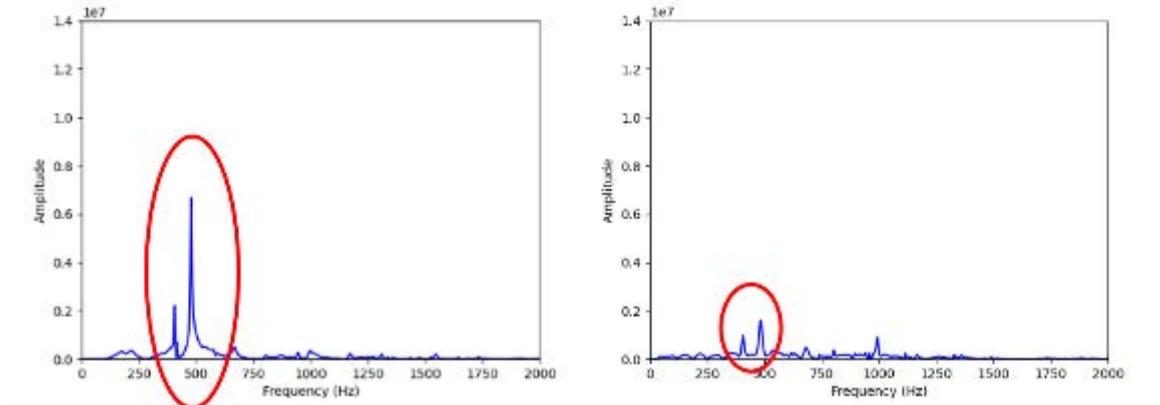
7.5cm



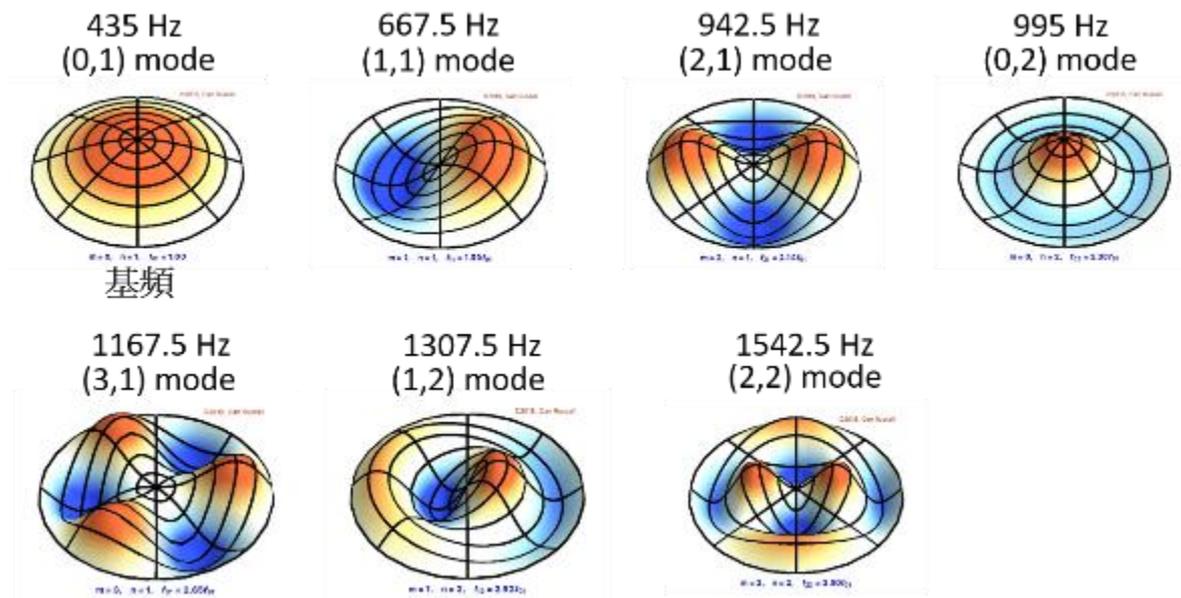
10.0cm

## 柒、結論

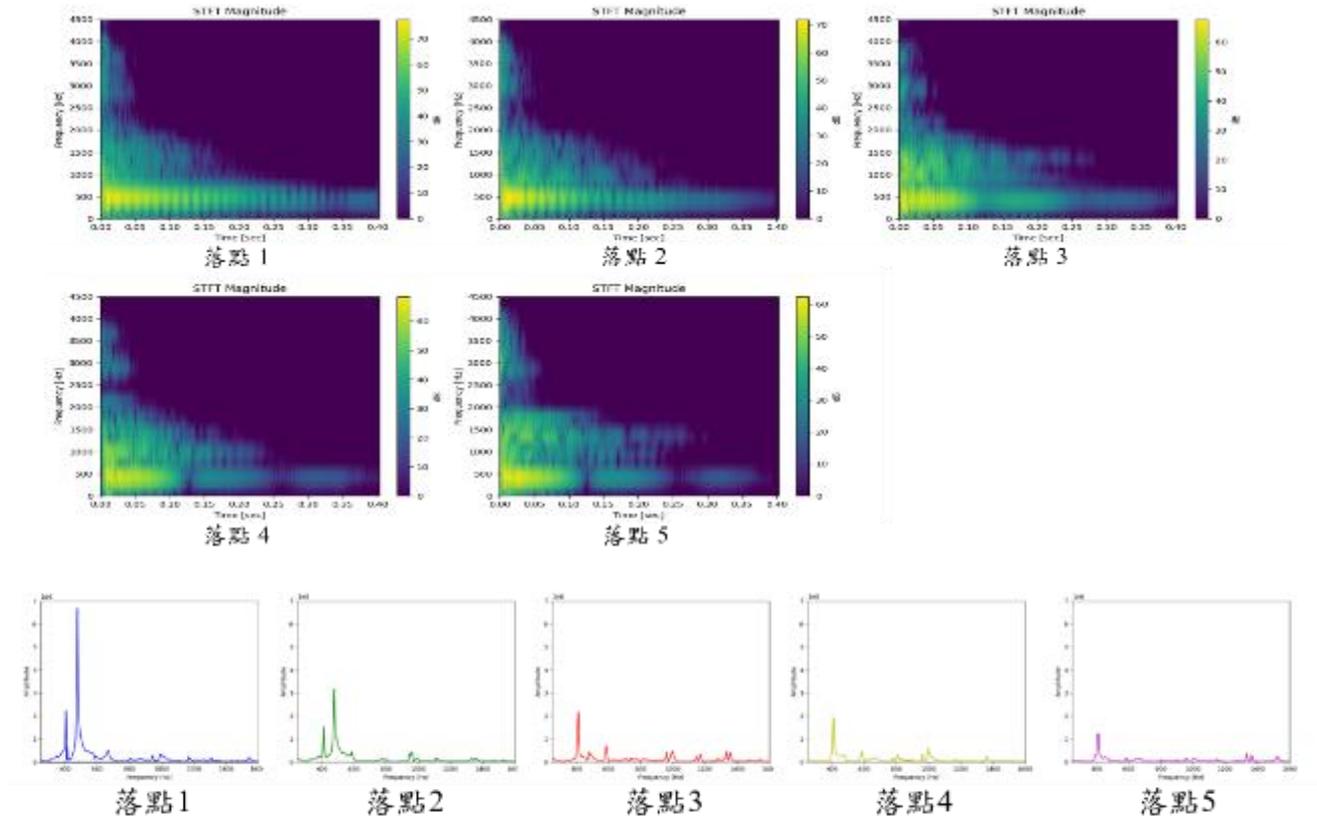
- 比較以鼓槌敲擊膜中央和金屬球撞擊膜產生的聲音頻率，我們發現基頻為 435Hz。



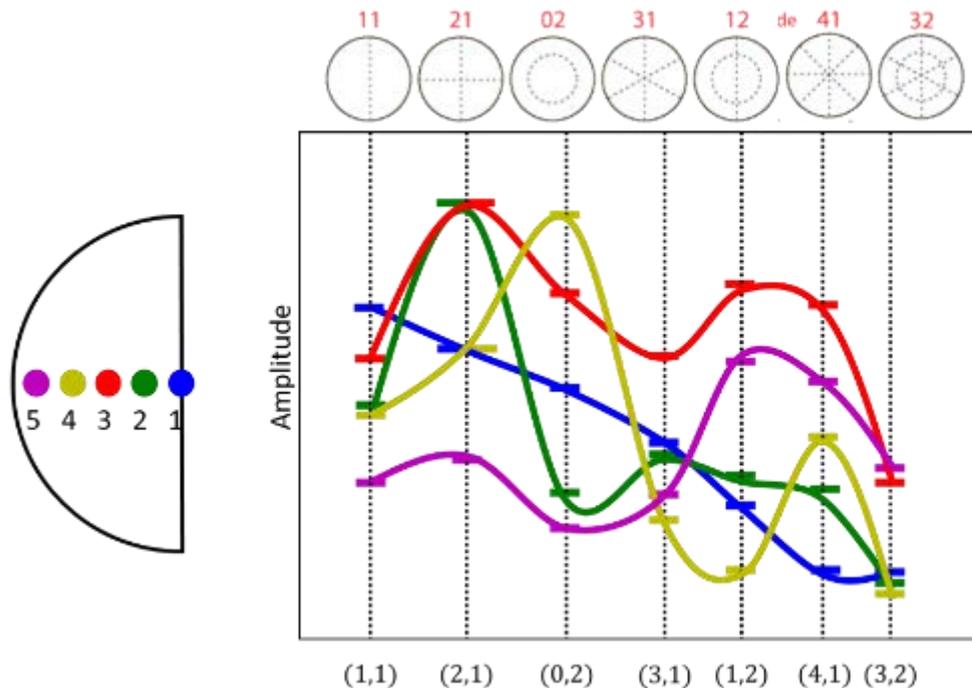
- 根據波動理論，我們確認了金屬球撞擊套在杯口的橡膠膜可引發下列振動模式，亦即我們聽到金屬球撞擊橡膠膜的聲音是由這些震動模式組合而成。



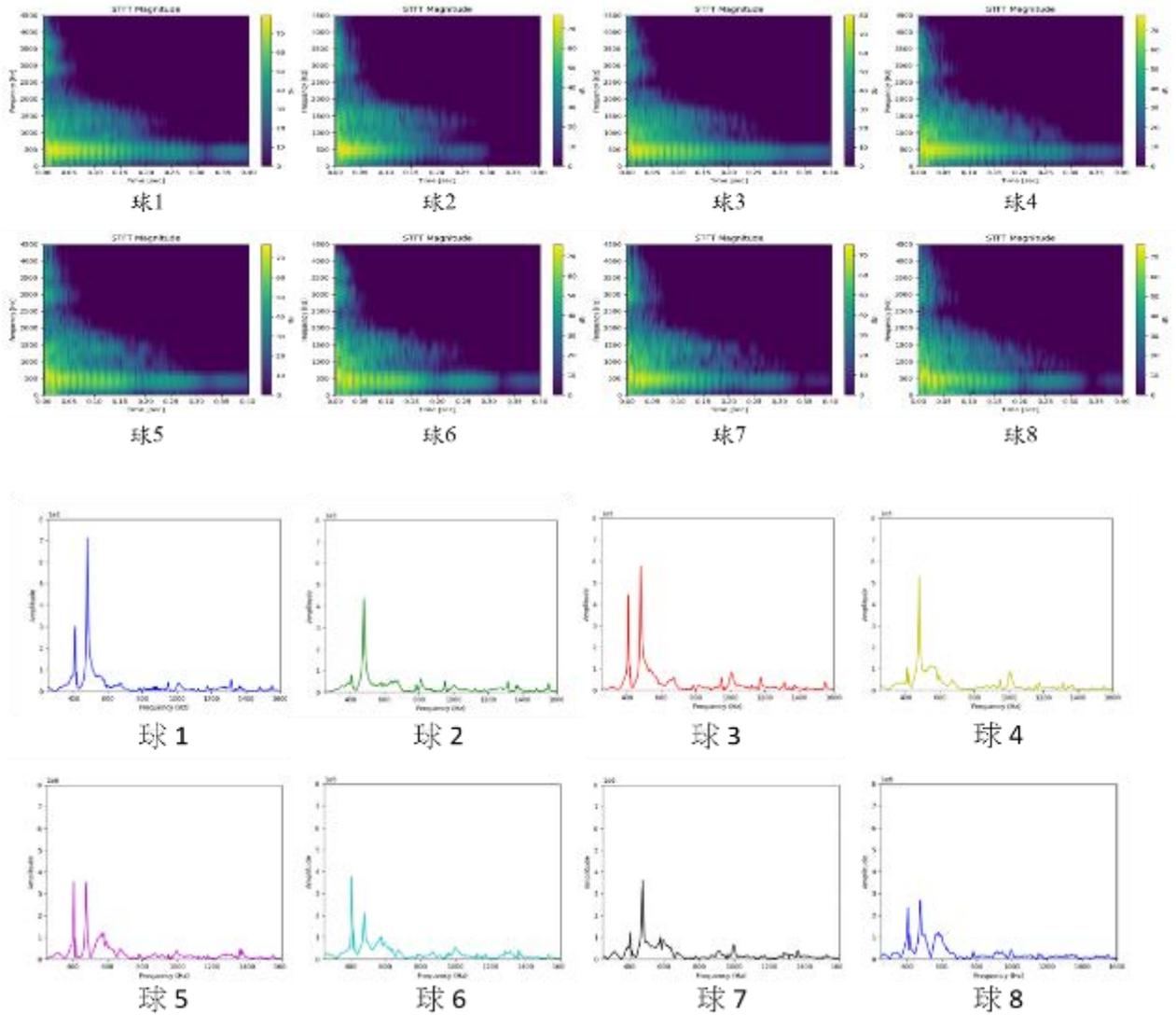
- 當固定金屬球的直徑和落下高度時，金屬球的落點愈接近膜的中央，基頻的強度就愈強，持續的時間也愈長。



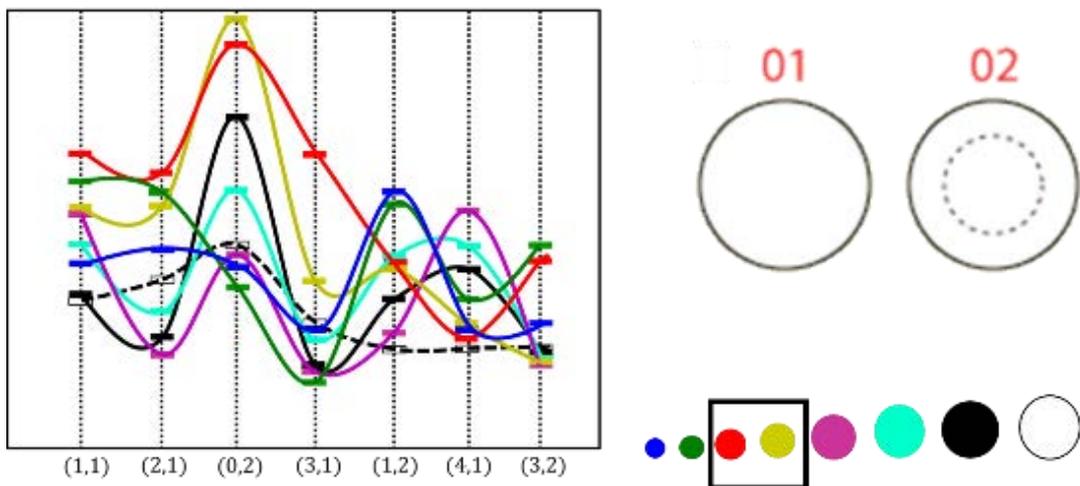
- 當固定金屬球的直徑和落下高度時，金屬球的落點愈遠離膜的中央，就愈能引發較高頻率的震動模式。



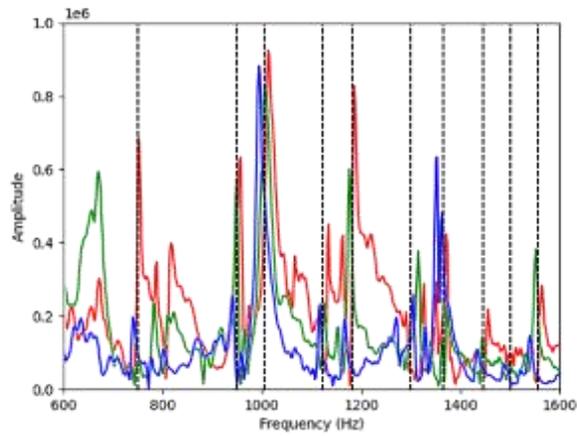
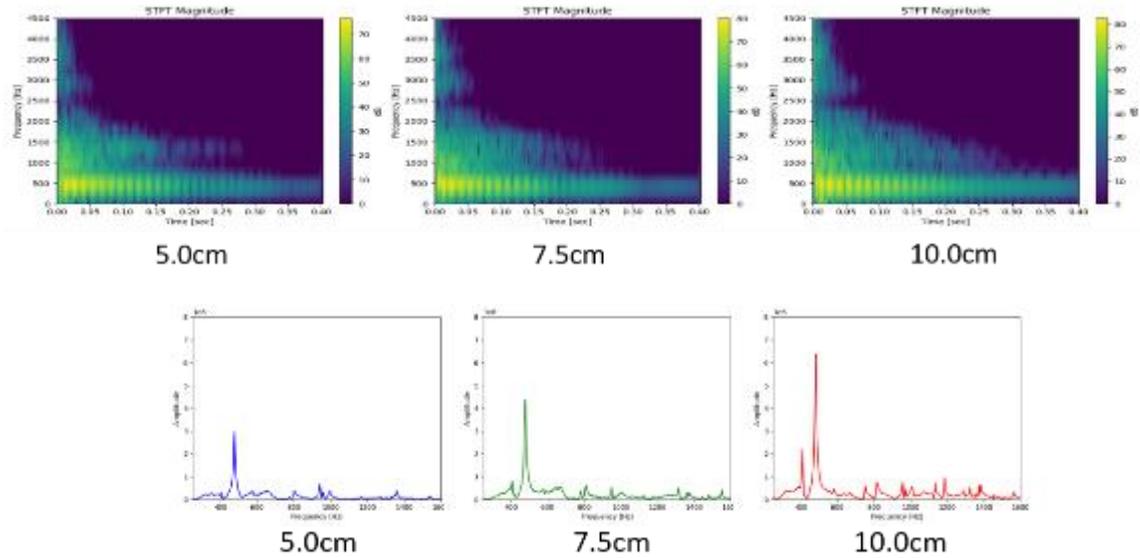
- 當固定金屬球的落點和落下高度時，基頻的強度和金屬球的直徑無明顯相關；然而，在基頻和(1,1) mode 之間可以看到一個明顯的波形，且此波形的強度隨著金屬球的直徑增加而增加。我們認為這可能是由金屬球與橡膠膜撞擊時摩擦產生的聲音。



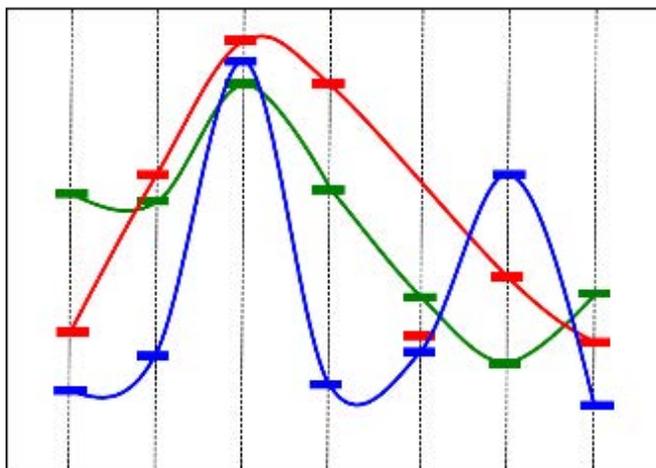
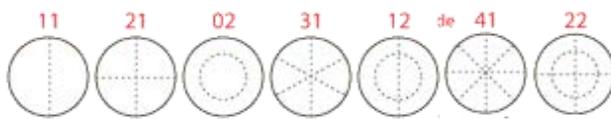
- 當固定金屬球的落點和落下高度時，我們發現中等直徑的金屬球撞擊膜中央時特別能引發以落點為腹點的震動模式（modes with an antinode at the drop location）(0,2) mode。



當固定金屬球的直徑和落點時，落下高度愈大，則基頻的強度愈強，持續的時間愈久；高頻率部分的強度和持續時間也隨著落下高度增加而增加。



- 當固定金屬球的落點和直徑時，我們發現 3 種落下高度皆能引發以落點為腹點的震動模式 (modes with an antinode at the drop location)，包括基頻(0,1) mode 及(0,2) mode。



5.0cm



7.5cm



10.0cm

## 捌、未來展望

鼓的種類非常多，音色也各不相同。鼓皮的材質可能有牛皮、小牛皮、驢皮、山羊皮、袋鼠皮等等，鼓身的形狀也有很多的變化，一般的鼓身多半是圓柱體，但也有碗形（如定音鼓）、截角圓錐（如曼波鼓）或是中間略寬、上下略窄的圓柱體（如中國、日本傳統的鼓）。未來我們計畫以不同張力的橡膠膜與不同體積、材質及形狀的杯子組合來模擬不同種類的鼓，以探討鼓膜的種類、張力與鼓身的體積、材質、形狀對鼓發出聲音的影響。



定音鼓



曼波鼓



中國傳統大鼓

## 玖、參考資料

1. Ordinary and Partial Differential Equations. Lecture 37 Two-Dimensional Wave Equation. pp 292–299
2. [https://www.youtube.com/watch?v=KAS7JBztw8E&list=PLFaPNtY\\_3GuGTyS2\\_tNs6eeN4uU\\_uRL1o&index=2](https://www.youtube.com/watch?v=KAS7JBztw8E&list=PLFaPNtY_3GuGTyS2_tNs6eeN4uU_uRL1o&index=2)
3. <https://www.acs.psu.edu/drussell/demos/membranecircle/circle.html>
4. [https://www.researchgate.net/figure/Vibrational-Modes-of-a-circular-membrane\\_fig1\\_228947736](https://www.researchgate.net/figure/Vibrational-Modes-of-a-circular-membrane_fig1_228947736)
5. [http://ramanujan.math.trinity.edu/rdaileda/teach/s12/m3357/lectures/lecture\\_3\\_29.pdf](http://ramanujan.math.trinity.edu/rdaileda/teach/s12/m3357/lectures/lecture_3_29.pdf)
6. [https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental\\_frequency](https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_frequency)
7. <https://www.newton.com.tw/wiki/%E8%86%9C%E9%B3%B4%E6%A8%82%E5%99%A8/3071826>

## 【評語】 051810

本作品探討金屬球撞擊申張的橡膠膜所發出聲譜，尋找金屬球撞擊塑膠杯口橡膠膜產生聲音的基頻。有詳實的實驗觀察及記錄，但比較聚焦在現象的討論，分析未見新穎思維。內容以算數平均訂定基頻，主張「基頻由 400Hz 和 470Hz 的頻率組成，平均頻率為 435Hz」，允許出現比基頻 435Hz 更低的頻率 400Hz，即已偏離基頻的真義。建議應提升實驗的量測精準度，及量測儀器的準確度再作瞭解，提升作具科學性的討論。

## 作品簡報



# 膜音傳腦

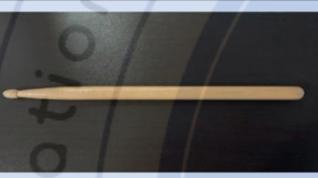
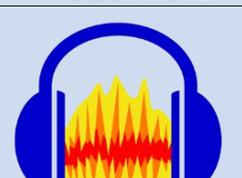
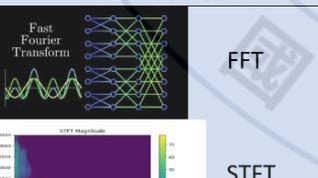
## 金屬球彈跳聲



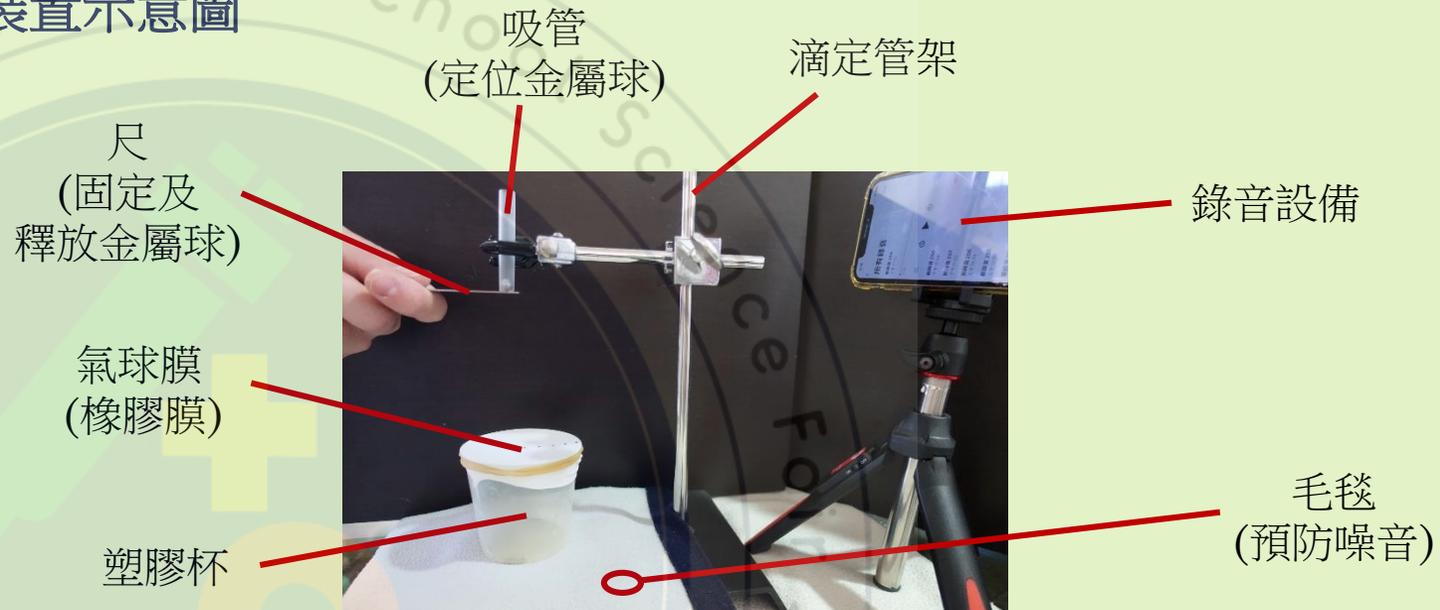
### 研究目的

- 一、尋找金屬球撞擊塑膠杯口橡膠膜產生聲音的基頻
- 二、分析金屬球第一次撞擊產生聲音的頻率組成及振動模式
- 三、探討金屬球落點對聲音頻率組成及強度的影響
- 四、探討金屬球直徑對聲音頻率組成及強度的影響
- 五、探討金屬球落下高度對聲音頻率組成及強度的影響

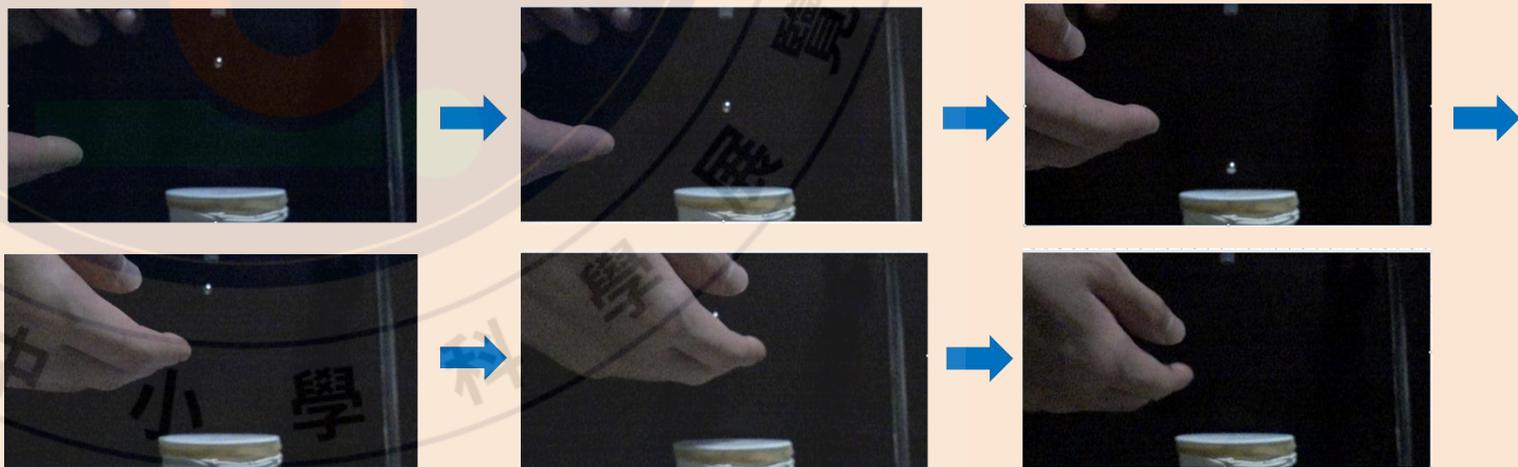
## 實驗設備及器材

塑膠杯	橡膠氣球	金屬球
		
寬橡皮筋	吸管	鼓錘
		
毛毯	錄音設備	滴定管架
		
尺		
		
聲音處理軟體	Python	音檔分析演算法
		
Audacity		FFT STFT

## 裝置示意圖



## 金屬球撞擊過程



# 理論—波動方程式

與半徑相關的部分(radial component):

$$u(r, \theta, t) = J_m(\lambda_{mn} r) \cdot \cos m\theta \cdot \cos c \lambda_{mn} t$$

$$u(r, \theta, t) = J_m(\lambda_{mn} r) \cdot \cos m\theta \cdot \cos c \lambda_{mn} t$$

$$\left( \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \right)$$

\* $\alpha_{mn}$ :  $n^{\text{th}}$  zero of  $J_m$

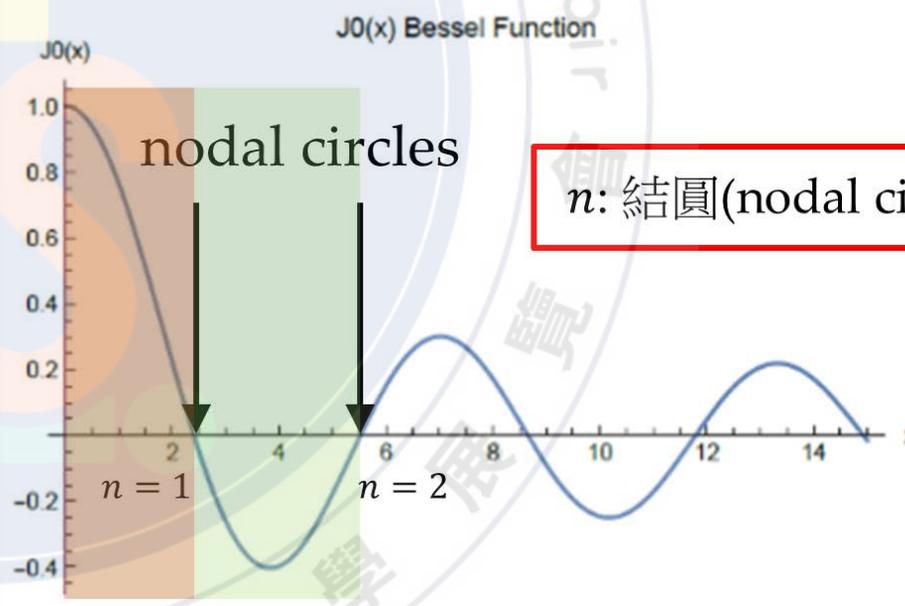
\* $c$ : wave speed

\* $a$ : radius of membrane

以兩個指標  $m, n$  表示

$m \rightarrow$  貝索方程式之位階 (order)

$N \rightarrow$  貝索方程式的第  $n$  個 0



$n$ : 結圓(nodal circles)的數量

# 理論一波動方程式

與角度相關的部分(azimuthal component):

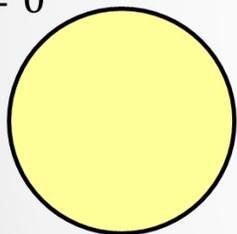
與時間相關的部分(time component):

$$u(r, \theta, t) = J_m(\lambda_{mn}r) \cdot \cos m\theta \cdot \cos c\lambda_{mn}t$$

$$u(r, \theta, t) = J_m(\lambda_{mn}r) \cdot \cos m\theta \cdot \cos c\lambda_{mn}t$$

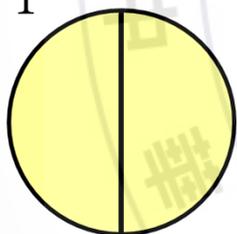
Node at  $\theta$ :  $\cos m\theta = 0$

$m = 0$



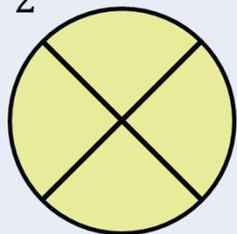
(no sol)

$m = 1$



$\theta = 90^\circ$  or  $270^\circ$

$m = 2$



$\theta = 45^\circ$  or  $135^\circ$   
or  $225^\circ$  or  $315^\circ$

$m$ : 節直徑(nodal diameters)的數量

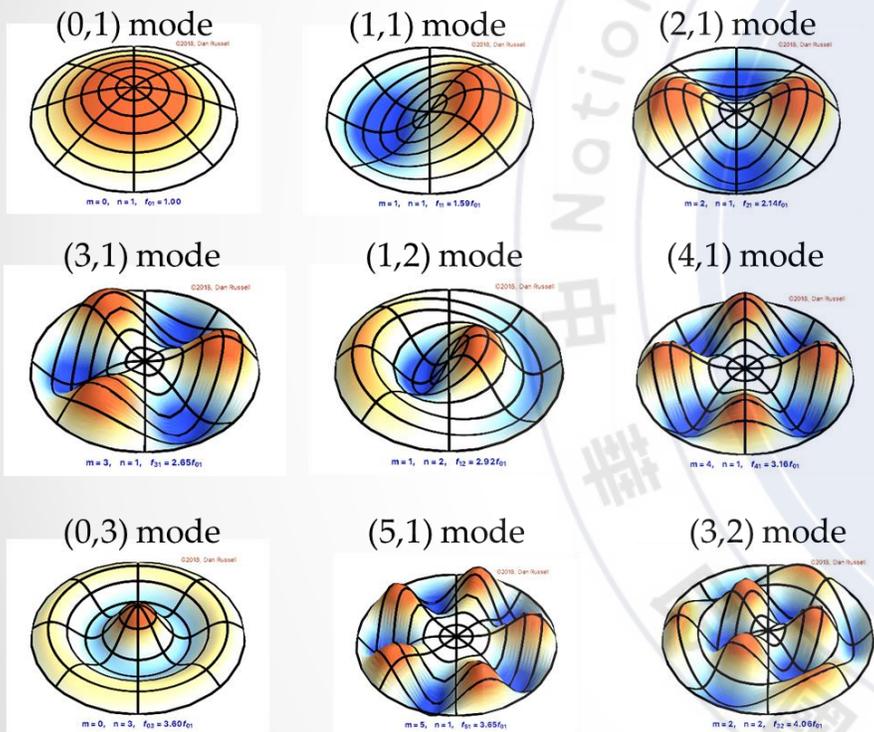
$$f_{mn} = \frac{c\lambda_{mn}}{2\pi} = \frac{\alpha_{mn}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

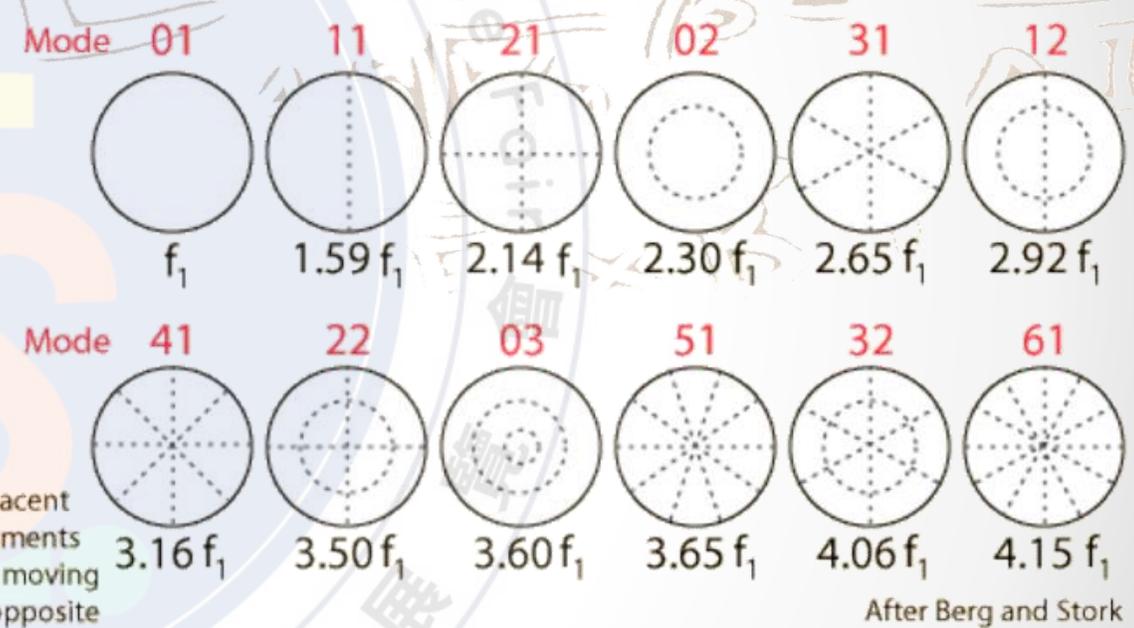
$$\text{wave speed } c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

# 理論一波動方程式

## 振動模式



## 較低模式的頻率

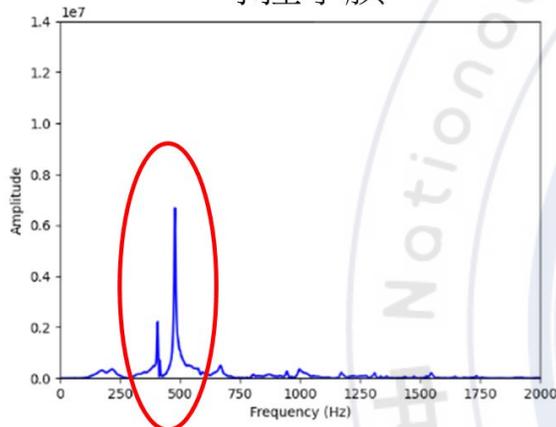


Source: <https://www.acs.psu.edu/drussell/demos/membranecircle/circle.html>

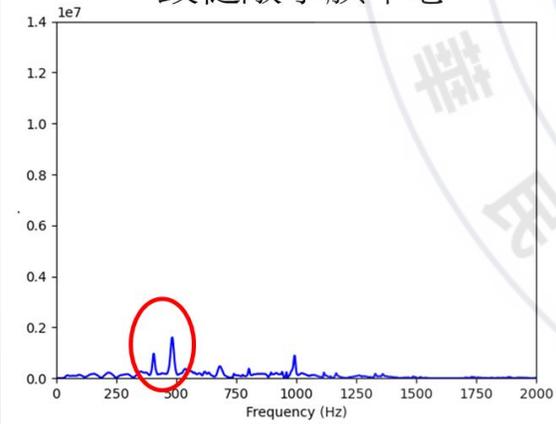
# 實驗結果

## 基頻 (Fundamental frequency)

球撞擊膜

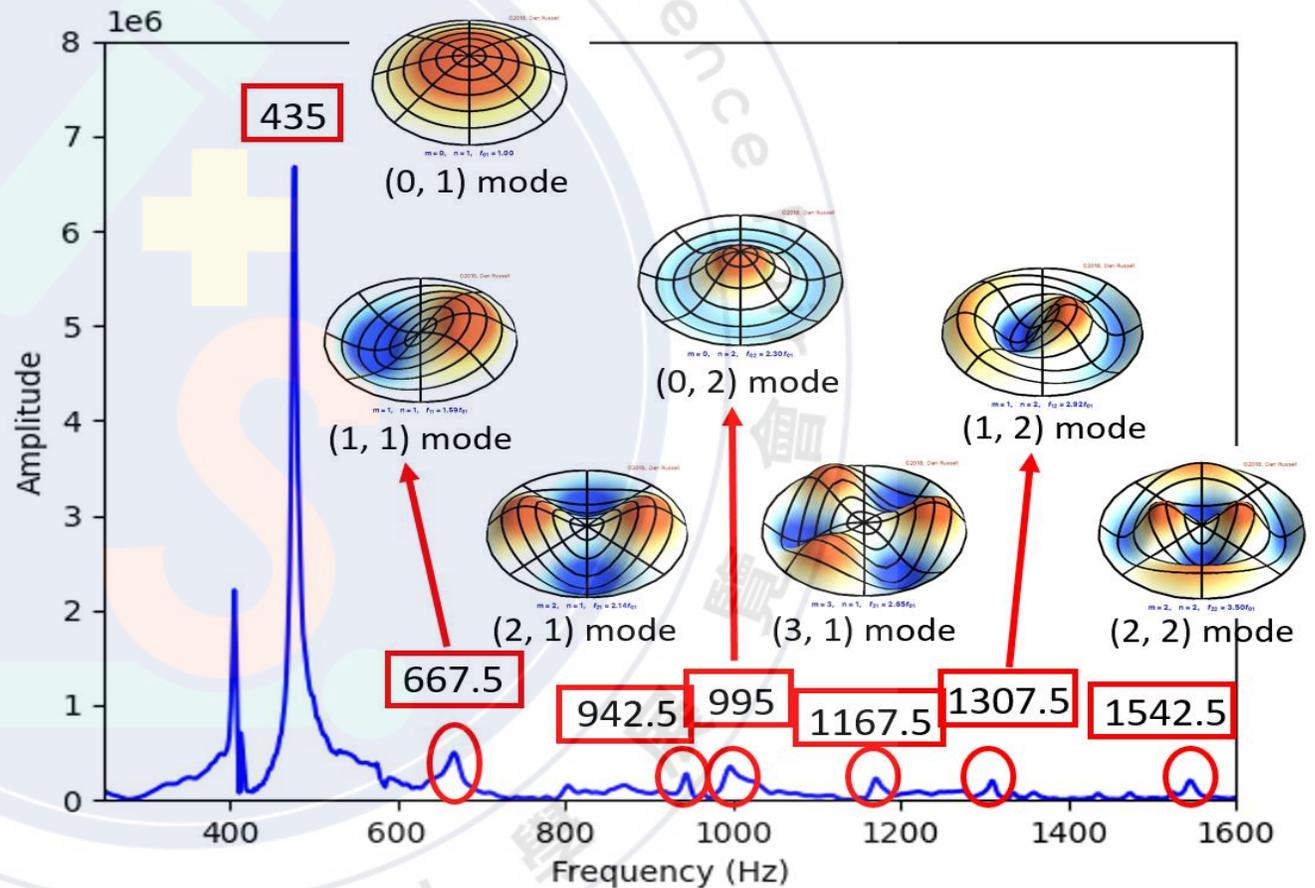


鼓槌敲擊膜中心



基頻：435Hz

## 振動模式 (Vibration mode)



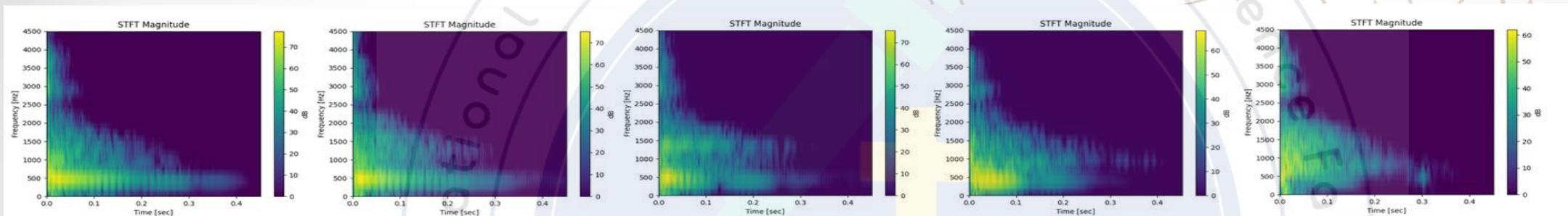
理論頻率：435, 693.4, 929.2, 998.8, 1154.1, 1269.3 Hz

實際頻率：435, 667.5, 942.5, 995, 1167.5, 1307.5 Hz

# 實驗結果—落點

## Python-STFT

球4，落下高度7.5cm



落點1

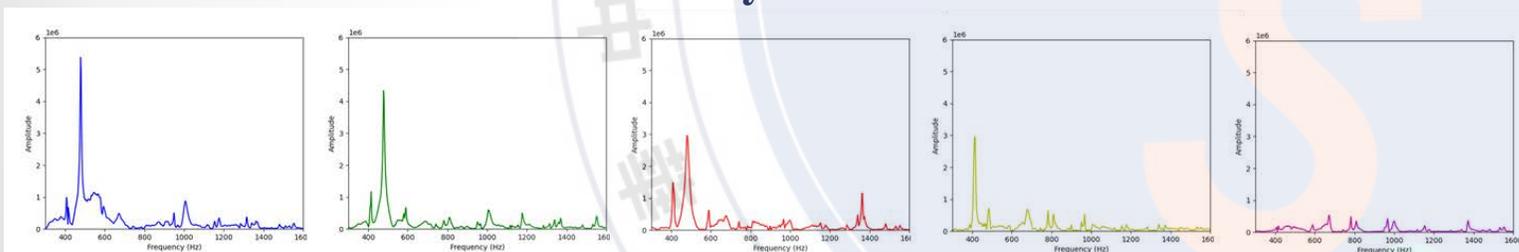
落點2

落點3

落點4

落點5

## Python-FFT



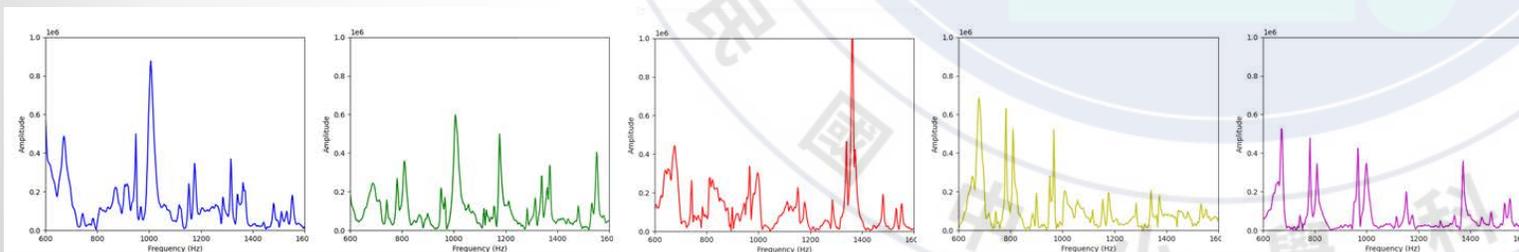
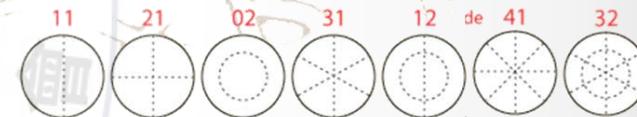
落點1

落點2

落點3

落點4

落點5



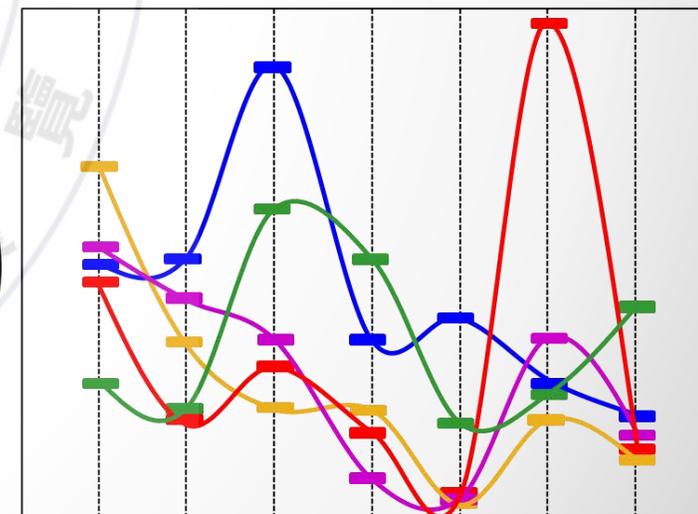
落點1

落點2

落點3

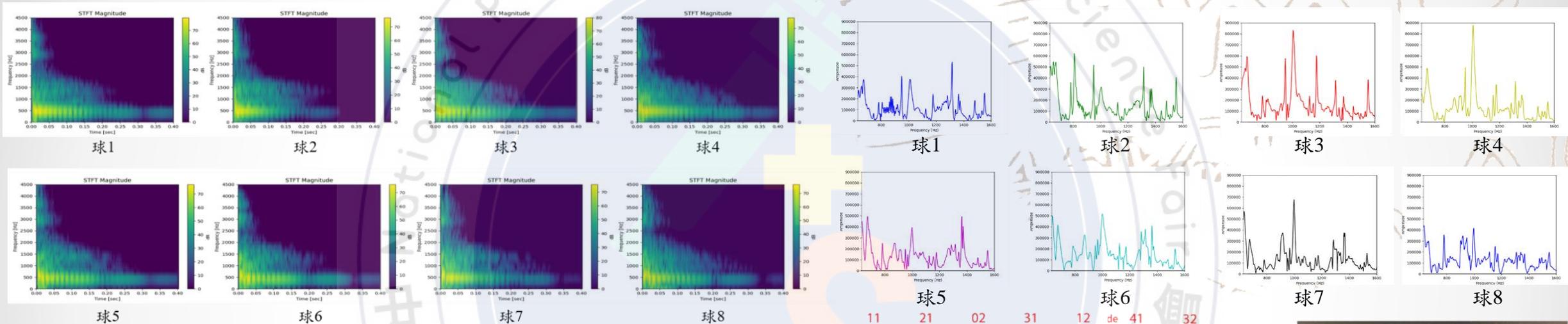
落點4

落點5



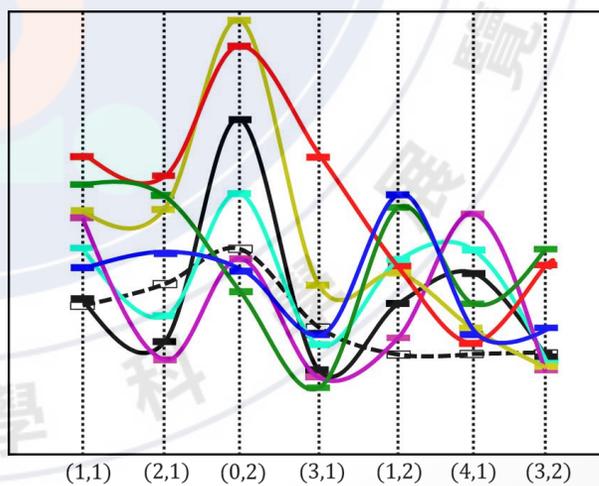
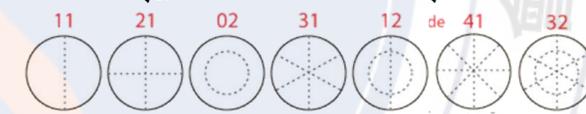
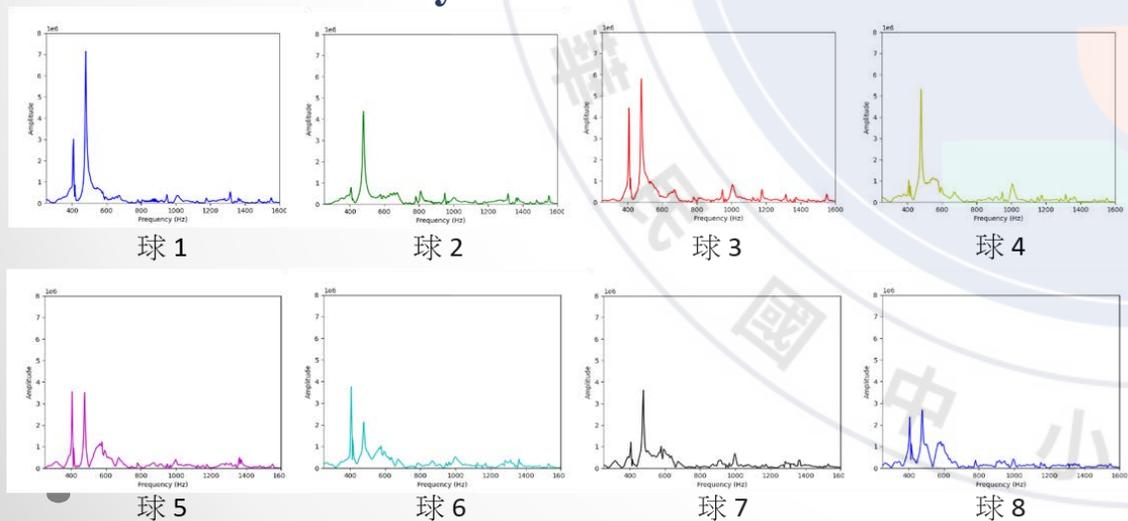
# 實驗結果—金屬球直徑

## Python-STFT



落點1，落下高度7.5cm

## Python-FFT



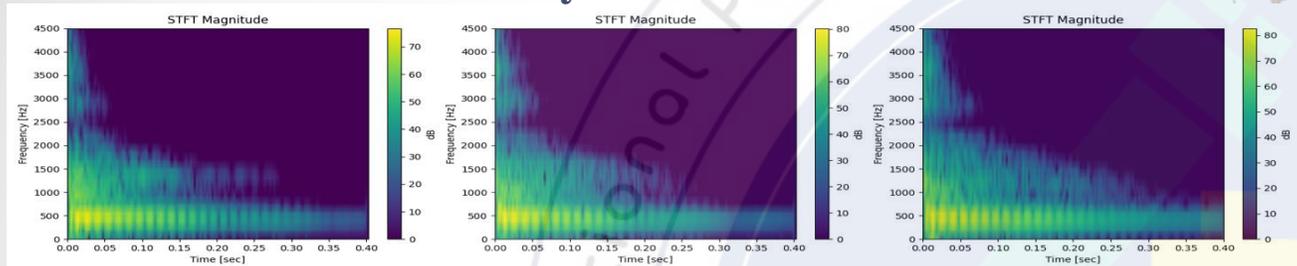
1 2 3 4 5 6 7 8



# 實驗結果—落下高度

球3，落點1

### Python-STFT

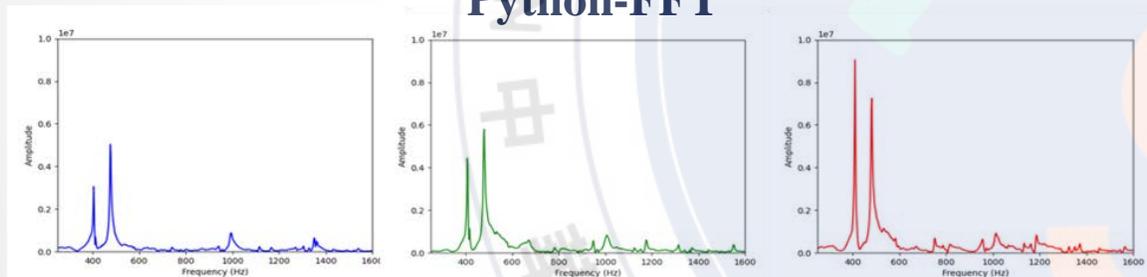


5.0cm

7.5cm

10.0cm

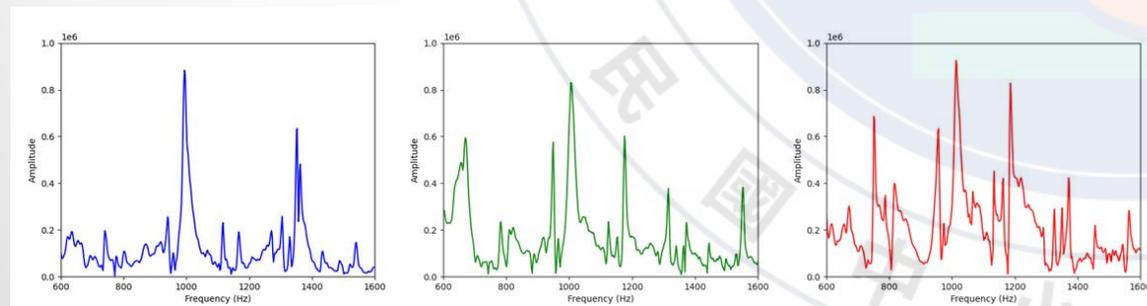
### Python-FFT



5.0cm

7.5cm

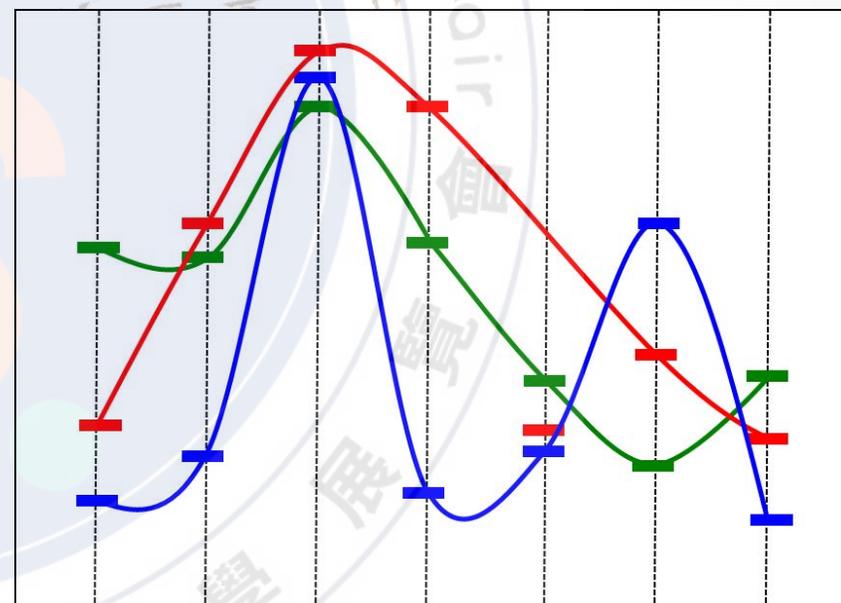
10.0cm



5.0cm

7.5cm

10.0cm



5.0cm



7.5cm

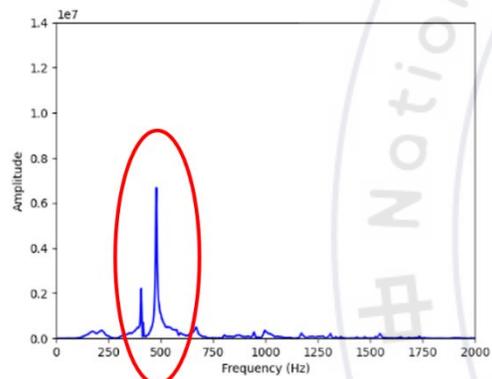


10.0cm

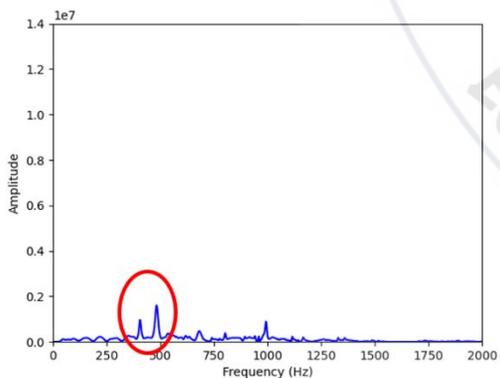
# 討論

基頻由400Hz和470Hz的頻率組成，  
平均頻率為435Hz

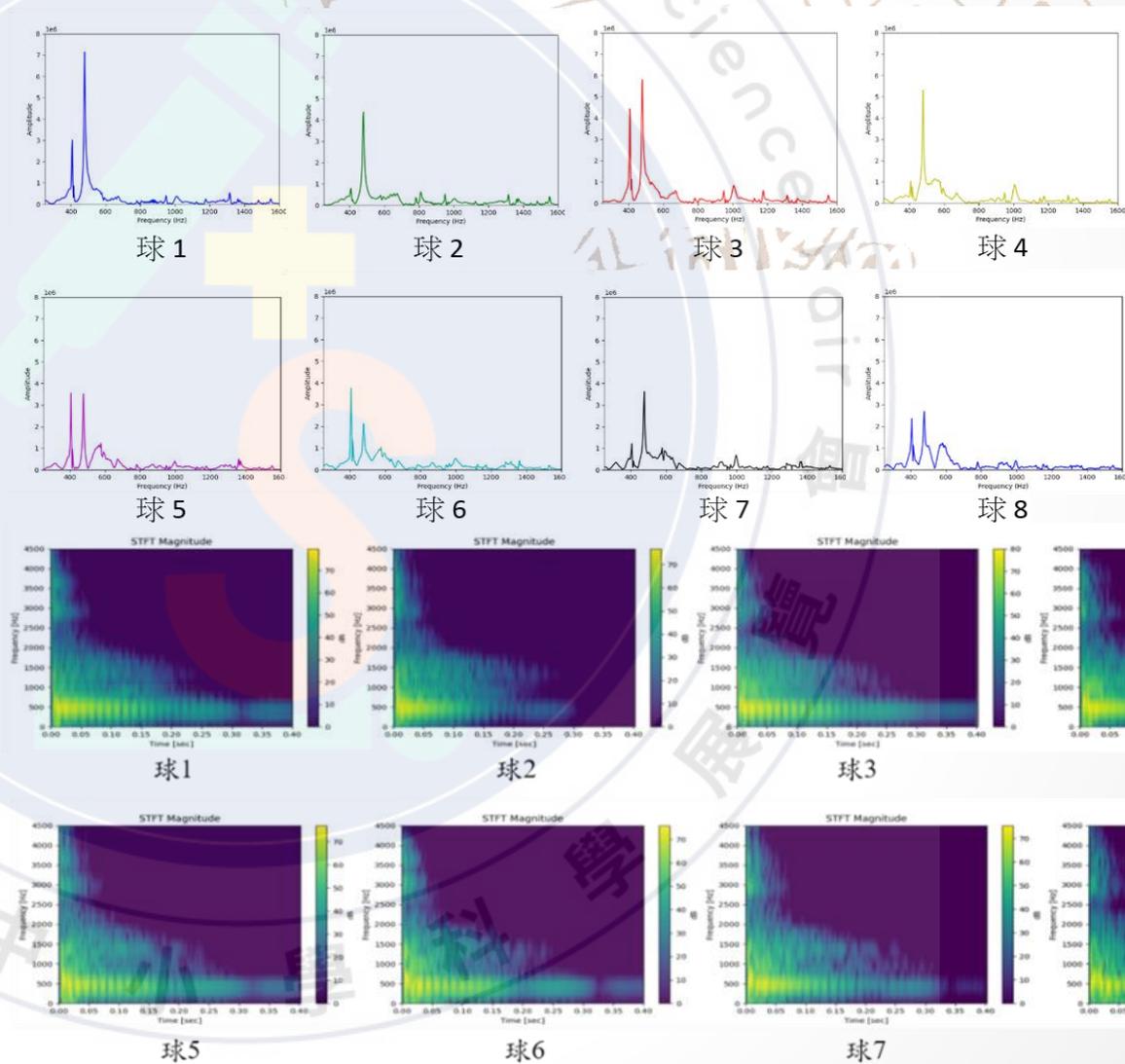
### 金屬球撞擊橡膠膜



### 鼓錘敲擊膜中央

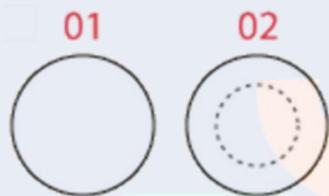
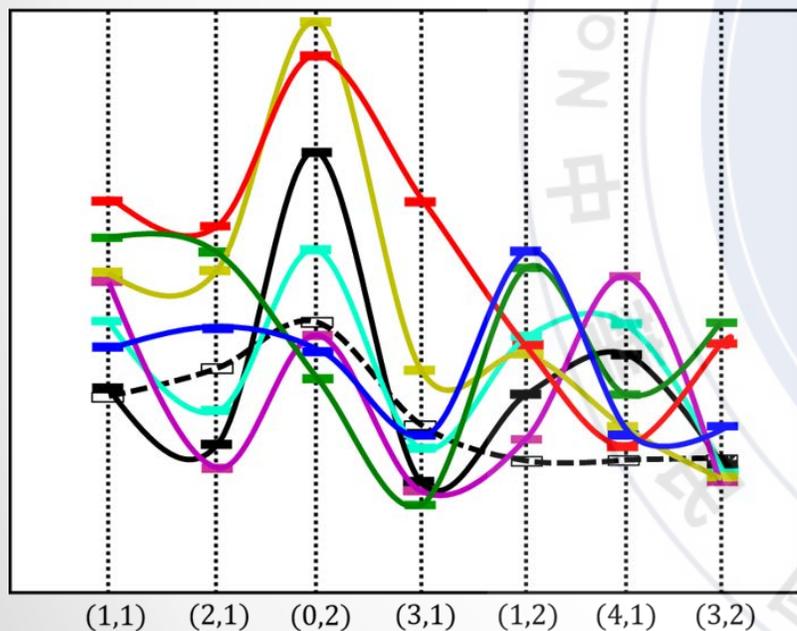


(0,1)-(1,1)間的雜訊

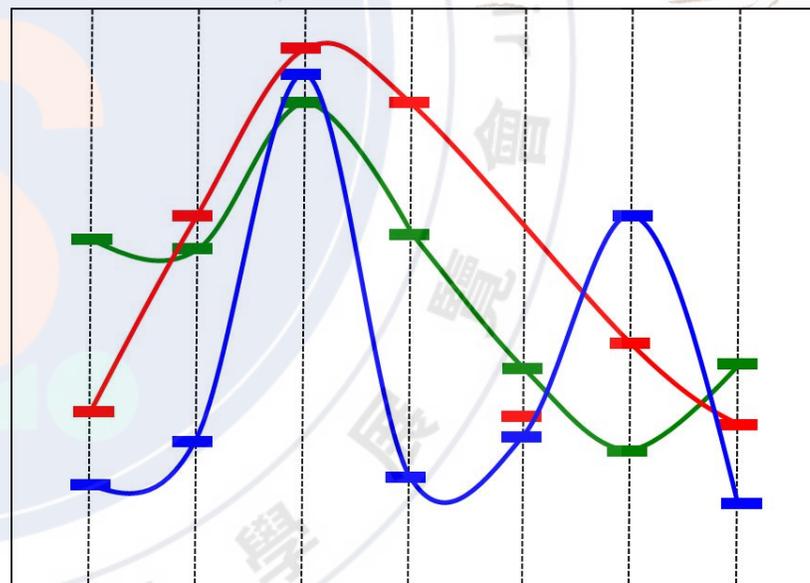


# 討論

中等直徑的金屬球以落點為腹點的震動模式  
(modes with an antinode at the drop location)



3種落下高度皆能引發以落點為腹點的震動模式  
(modes with an antinode at the drop location)



5.0cm



7.5cm



10.0cm

## 結論

1.

- 比較以鼓槌敲擊膜中央和金屬球撞擊膜產生的聲音頻率，我們發現基頻為435Hz。

2.

- 根據波動理論，我們確認了金屬球撞擊橡膠膜引發的振動模式，亦即我們聽到金屬球撞擊橡膠膜的聲音是由這些震動模式組合而成。

3.

- 金屬球的落點愈接近膜中央，基頻的強度就愈強，持續的時間也愈長；落點愈遠離膜中央，就愈能引發較高頻率的震動模式。

4.

- 基頻的強度和金屬球的直徑無明顯相關；然而，在基頻和(1,1) mode之間可以看到一個明顯的波形，且此波形的強度隨著金屬球的直徑增加而增加。

5.

- 中等直徑的金屬球撞擊膜中央時特別能引發以落點為腹點的震動模式 (modes with an antinode at the drop location) (0,2) mode。

6.

- 落下高度愈大，則基頻的強度愈強，持續的時間愈久；高頻率部分的強度和持續時間也隨著落下高度增加而增加。

7.

- 3種落下高度皆能引發以落點為腹點的震動模式 (modes with an antinode at the drop location)，包括基頻(0,1) mode及(0,2) mode。