

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第二名

051805

聲之形—探討膜管與聲音間的關係

學校名稱：國立彰化女子高級中學

作者： 高二 許翌倫 高二 薛聿恩 高一 陳諭儀	指導老師： 張國志
---	------------------

關鍵詞：耦合作用、工程聲學、頻譜分析

摘要

本實驗以彈力膜、塑膠杯、鋼球為主體，將彈力膜繃緊於塑膠杯口作為發聲裝置，並以鋼球撞擊膜，使膜帶動腔體空氣一同振動，利用音訊分析軟體進行錄音、分析，藉以探討此裝置發聲的成因與相關參數對聲音的影響。

本研究中利用並聯彈簧機械模型解釋單膜與腔體間的交互關係，並透過實驗證明裝置的發聲取決於振動體間交互作用的強弱，且膜張力與聲音頻率呈正相關、杯子容積與聲音頻率呈負相關。

此外我們延伸探討兩端開管皆套膜的實驗，研究結果顯示此實驗上膜與純膜頻率相近，符合兩質量三彈簧振動模型，且一邊膜頻率 $>$ 純膜(上膜)頻率，綜合各個實驗變因可知彈簧振動模型之有效性。

壹、 研究動機

過去在樂團演奏時，打擊聲部的調音令人感到相當好奇，一直都想深入了解樂器發聲原理的我們便對這種以膜與杯體組成類似鼓的發聲裝置進行研究。

此裝置涉及管發聲原理，而細長管的發聲原理較為人所熟知，似乎鮮少看到粗短管的研究，而管和膜的交互作用較無明確的理論，因此我們決定將粗短管和膜的組合作為主要研究對象，找出此裝置發聲的特性和原理。





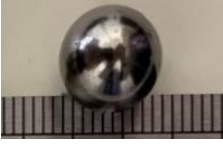




貳、 研究目的

- 一、探討聲音形成之過程
- 二、探討聲音和振動時間之關係
- 三、探討鋼球釋放高度對聲音的影響
- 四、探討膜張力對聲音的影響
- 五、探討杯子長度、口徑與容積對聲音的影響
- 六、探討雙膜聲音特性與原理

參、 研究設備及器材

一、 實驗器材

表 1：實驗器材			
			
彈力帶	塑膠杯	力平衡桌	指向性麥克風
			
鋼球	砝碼	音訊分析軟體 Audacity	

二、 實驗裝置

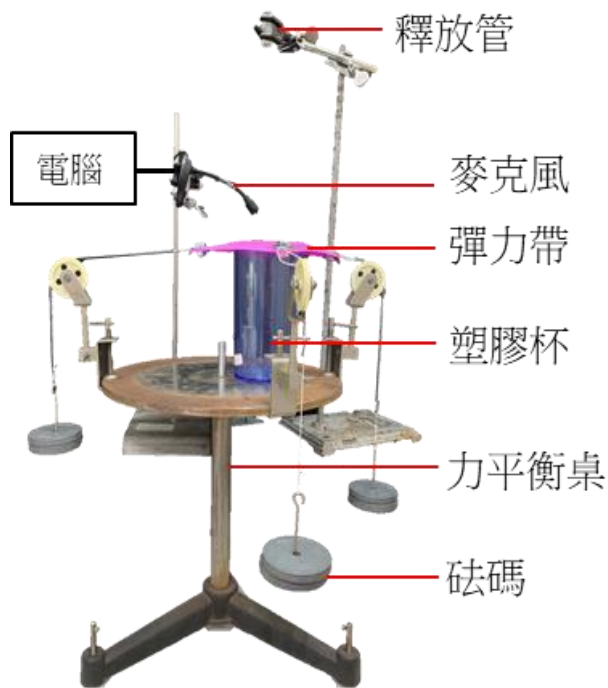


圖 1：單膜+腔體(側視)

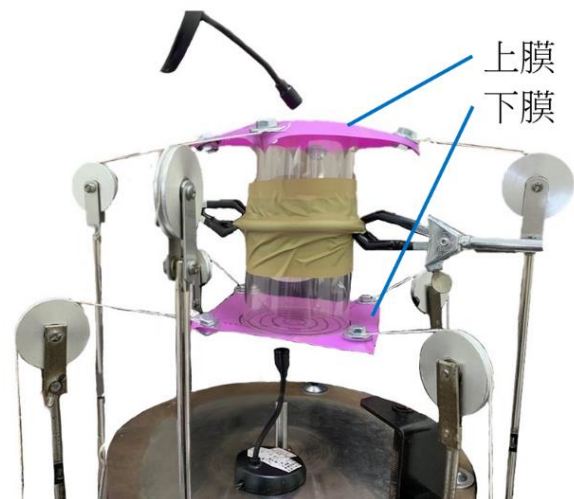


圖 2：雙膜+腔體(側視)



圖 3：純膜(無腔體)

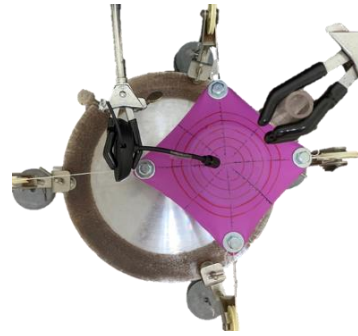


圖 4：張緊的膜(俯視)

(一) 單膜(有腔體)-圖 1

1. 將彈力膜由中心向八個方位延伸八條線，以 0.5cm 間距畫記，再以中心為圓心，1cm 間距畫同心圓(圖 4)，以測量伸長量確認膜被平均拉張。
2. 在彈力膜四角旋上螺絲固定，透過定滑輪懸掛砝碼繃緊彈力膜。
3. 將杯子從膜下方往上頂住，使杯口形成一圈圓形節點。(為確保膜緊貼杯口，杯口與定滑輪頂端有 3cm 高度差)
4. 將麥克風對準膜中心(距離膜約五公分)接收音訊，並匯入電腦分析。

(二) 雙膜(有腔體)-圖 2

1. 將杯子以夾子架起。
2. 同(一)-1.2.設置。
3. 先由下方懸掛砝碼張緊下膜，再由上方裝設上膜。(為確保膜緊貼杯口，杯口與定滑輪頂端有 3cm 高度差)
4. 將麥克風對準上膜及下膜中心(距離膜約五公分)，同時接收音訊，並匯入電腦分析。

(三) 純膜(沒腔體)-圖 3

1. 同(一)-1.2.設置。
2. 將酒精燈架從膜下方往上頂住，使杯口形成一圈圓形節點。(為確保膜緊貼酒精燈架口，架口與定滑輪頂端有 3cm 高度差)

肆、研究方法

一、實驗步驟

- (一) 裝置架設完成後，將上方釋放管對準膜的圓心，使其鉛直落在目標位置上。
- (二) 快速抽離擋板(尺)，釋放鋼球。
- (三) 將指向性麥克風連接電腦軟體 Audacity 蒐集音訊。

(四) 利用 Audacity 對音訊進行分析。

二、頻譜分析

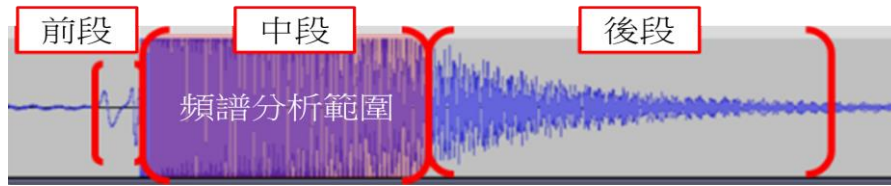


圖 5：音訊分析軟體 Audacity 介面-波形圖

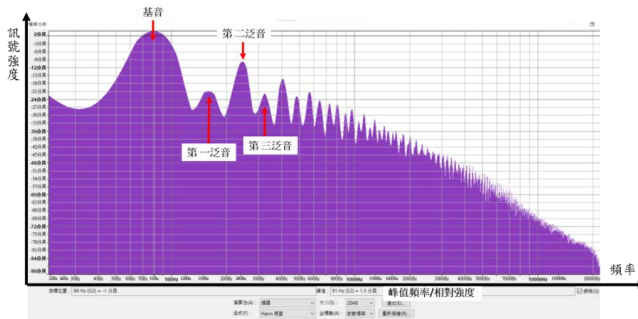


圖 6：音訊分析軟體 Audacity 介面-頻譜分析

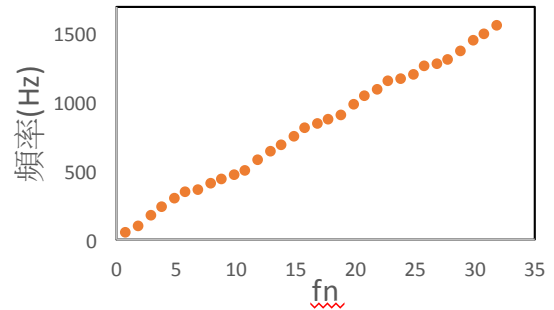


圖 7：第 n 泛音-頻率關係圖

我們選取頻率最豐富且最能呈現此裝置發聲特性的中段進行頻譜分析(圖 5)。

在頻譜分析圖(圖 6)中可以看見許多凸起，那些凸起是裝置所發出的聲音中相對強度較大的頻率，我們讀取每一個峰值作為裝置各個泛音的頻率，並依序作圖，在後續報告中主要以圖 7 方式呈現。

三、波形分析

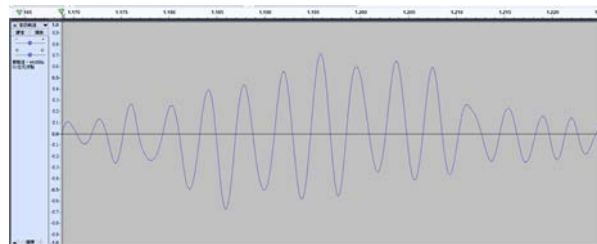


圖 8：波形圖

我們以人工方式觀察波形的週期性，手動記錄週期，以週期倒數作為波形之頻率，在後續會與頻譜分析中的頻率進行對比。

四、變因

(一) 一邊膜(單膜+腔體)實驗

1. 釋放高度：分別由裝置上方 10、25、40、55cm 高處釋放鋼球。(杯子長度 17.5cm，半徑 4.55cm，容積 1138cm^3 ，四邊掛重 1.05kg)
2. 膜張力：四邊分別懸掛 0.3、0.55、0.8、1.05kg 砝碼以調整膜張力。(杯子長度 17.5cm，半徑 4.55cm，容積 1138cm^3 ，釋放高度 25cm)

3. 杯子長度：固定杯半徑 4.55 公分，切割杯高(21、17.5、14、7cm)以調整容積，共有 1366、1138、911、455cm³ 四種容積。(四邊掛重 1.05kg，釋放高度 25cm)
4. 杯子口徑: 固定杯長度 17.5 公分，杯半徑 4.85、4.55、3.8 和 2.2 公分（掛重 1050 克重，釋放高度 25cm）

(二) 雙膜(有腔體)實驗

1. 上下膜張力：上下膜四邊皆同時懸掛 0.3、0.55、0.8、1.05kg 砝碼以調整膜張力。(杯子長度 17.5cm，半徑 4.55cm，容積 1138cm³，釋放高度 25cm)

(三) 純膜(沒腔體)實驗

1. 膜張力：四邊皆懸掛 0.3、0.55、0.8、1.05kg 砝碼以調整膜張力。

五、理論探討

(一) 粗短空氣柱自然頻率

半徑為 r ，長度為 ℓ 的圓柱體空腔內空氣柱自然頻率(兩端為固定端)

$$f_{pmn} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left[\frac{B(m, n)}{r}\right]^2 + \left[\frac{p\pi}{\ell}\right]^2}$$

其中 p 為空腔長度（軸向）模數， m 為角向模數， n 是半徑方向模數， p 最小為 1，而 (m, n) 可以是 0， $B(m, n)$ 最小是 1.2556。

m	0	1	2	3
n=0		0	0	0
n=1	1.2556	2.4048	3.5180	4.6123
n=2	4.0793	5.5201	6.8661	8.1576

(二) 駐波

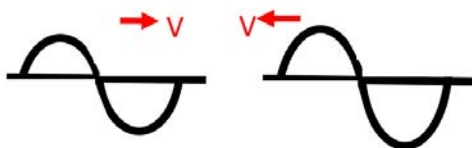


圖 9：駐波示意圖

向右前進 $y_1 = R\sin(kx - \omega t)$

向左前進 $y_2 = R\sin(kx + \omega t)$

$$y = y_1 + y_2 = R\sin(kx - \omega t) + R\sin(kx + \omega t) = 2R\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t)$$

註: y_1, y_2, y 為行進波上質點之位移， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 為波數， $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 為角頻率，波速 $v = \frac{\omega}{k}$

兩波相向而行，可視為入射與反射波，其振幅、波長、頻率皆相同，在 $kx = n\pi$ (n 為整數)即 $x = \frac{n\lambda}{2}$ 之處，任何時刻 t 之位移皆為0，相遇重疊後形成駐波，而這些位移為0的地方即為節點。振動體所發出之聲波頻率，為其上所能夠形成駐波之頻率。

1. 開閉管駐波

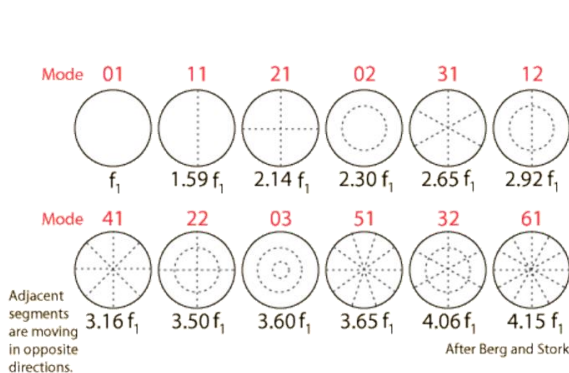
(1) 兩端為固定端之駐波頻率 $f = \frac{nv}{2\ell}$ 。 n :波腹數量 v :波速 ℓ :管長

(2) 一端為固定端、一端為自由端之駐波頻率 $f = \frac{nv}{4\ell}$ 。 n :奇數

由駐波頻率公式我們可以推得頻率與波腹數量、波速成正比，與管長成反比，且兩端為固定端之 n 僅可為數列1、2、3.....，一端固定端一端自由端之 n 為數列1、3、5.....。若將塑膠杯杯底當作固定端，套膜端當作半自由端(介於固定端與自由端之間)，可利用公式推得杯子內空氣振動之波腹波節數、基音頻率。

然而在細管(管長與口徑比值適中)的情況下，以上公式可簡單算出頻率，當管子太粗時，除了軸向形成駐波外，亦有沿管徑方向的駐波，管徑越大也將造成頻率越低；管子太細時，管中振動的空氣與管壁摩擦產生熱能而消耗動能，仍影響了振動情形，以上兩種情況時不可直接使用此式計算，需要進行修正。管內空氣振動頻率會比公式所算為低，其原因在於管內空氣柱運動的慣性，使反射波不在開口端形成反射，而在開口之外的地方反射，這延長出開口之處產生的點，才是管內聲能向周圍空間傳播的聲源，在此點上軸向波振動由管內的平面波源轉變為管外的輻射球面波形式，也就是要考慮管口修正量。

(三) 圓形薄膜振動公式



(虛線為節點之連線)

圖 10：薄膜振動模式與頻率關係圖

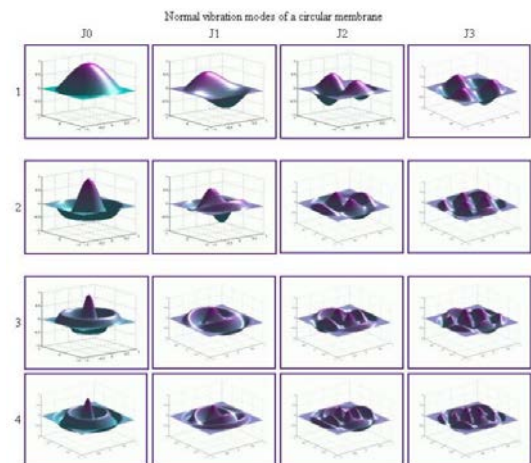


圖 11：薄膜振動模式立體圖

$$f_{m,n} = \frac{X_{m,n}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \text{ (Hz)}$$

由式可知 $T^{1/2}$ (薄膜張力開根號) 與振動頻率成正比, a (薄膜半徑)、 $\sigma^{1/2}$ (面密度開根號) 與振動頻率成反比, 其中基頻 = $\frac{2.405}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ (Hz), 因此也可得知基頻與其泛音之頻率倍數關係。

以上兩圖為薄膜振動模式圖, 與一維的振動模式多了一個維度的影響, 觀察得知在理想狀態下的薄膜之震動模式是左右對稱的, 且泛音數越大波節數越多, 振動模式越複雜, 其基音與各泛音間有固定的倍率關係。

本實驗中將膜套在較厚塑膠杯上, 所以鋼球撞擊膜振動後引起的杯子振動可以忽略, 所以只需要考慮膜和杯內空氣的交互作用。

(四) 薄膜振動模式最低音推導

薄膜上單位長度張力為 T' 、膜半徑 r , 膜上各質點作同相簡諧運動(假設振幅小, 角度 θ 很小, 所以 $\sin\theta$ 近似 $\tan\theta = x/r$), 不計阻力,

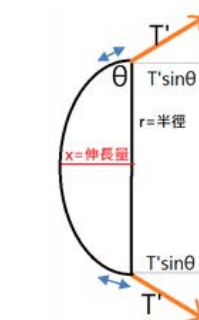


圖 12

$$\text{由 } F = ma \Rightarrow F = 2T'L\sin\theta = \frac{2T'Lx}{r} = -kx, \text{ 令 } k = \frac{2T'L}{r}$$

(由簡諧運動週期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 將 k 代入), 得 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2T'L}{r}}}$, 將 $L = 2\pi r$ 代入,

得到 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\pi T'}}$ 也就是 $f = \sqrt{\frac{T'}{2\pi m}}$, 又 $m = \sigma\pi r^2$ (σ 為單位面積之質量, 即面密度),

帶入得到 $f = \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{T'}{2\sigma}}$, 很接近理想薄膜 (0,1) 模式頻率公式。

(五) 聲學順性與聲學勁度

在力學的領域中, 順從性的定義為位移對載重或受力的比值。以數學式表示順從性:

$C_m = \frac{v}{\rho}$, 通常亦以勁度 S (或 k_b) 替代順從性, $C_m = \frac{1}{s}$ (勁度近似於彈簧軟硬度, 也

就是彈力常數 k)。聲學勁度 $k_b = \frac{\rho c^2}{V}$, 其中 ρ 是空氣平均密度, c 是聲速, V 是

腔體體積, 而腔體內空氣的壓縮性可用機械彈力常數 $k_B = \frac{\rho c^2}{V} s^2$ 來代表, s 是腔體截面積。

在聲學的領域中，若波長遠大於聲波裝置的尺度時，則聲場的變化可視為時間的函數而與聲波裝置尺度無關，這樣的裝置可視為單自由度的簡諧共振器，荷姆霍茲共振器(Helmholtz resonator)就是一個簡單的例子。

(六) 耦合振動

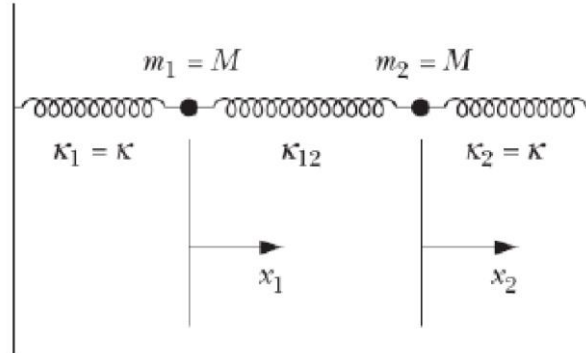


圖 13：耦合振動

由牛頓第二定律得

$$M\ddot{x}_1 + (K + K_{12})x_1 - K_{12}x_2 = 0$$

$$M\ddot{x}_2 + (K + K_{12})x_2 - K_{12}x_1 = 0$$

解微分方程式得到兩個簡正運動模式角頻率

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

兩物體振動的通解 $\Rightarrow \mathbf{x} = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$

可見兩不同振子(振動的物體)交互作用可以產生不同於原本獨立振動之頻率。

(七) 共振

當結構受外力作用時，此外力之施力頻率若與結構的自然頻率相等或相近時，會使結構有振動大的現象，稱為共振。如同膜的振動對杯內空氣柱來說為振動源，是外力強迫杯內空氣柱振動，當膜的振動比杯內空氣柱振動強烈時，即為振動頻率之主宰者，此時整體的振動頻率會以膜振動為主，若兩者勢力相當，則會互相作用，達到耦合狀態。當物體受到具週期性外力強迫振動時，可列出此式：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_D t$$

當外力作用時間長到自然振動模式可忽略時，外加的振動主宰了物體振動情形，方程式的穩定解為下式，且當 $\omega = \omega_D$ 即為共振。

$$x = B \sin(\omega_D t + \phi)$$

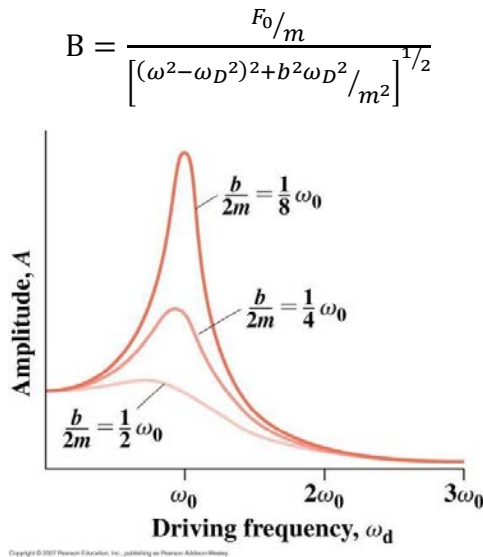


圖 14：振幅和施力頻率之關係

(八) 聲能

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \text{聲能} + \text{能量損失}$$

$$I = 2\pi^2 R^2 f^2 \rho v$$

註：能量損失包含碰撞及膜振動阻尼

R :振幅, f :頻率, ρ :空氣平均密度, v :聲速

球由靜止釋放掉落至膜上，激發薄膜振動，球的位能將轉換為膜的力學能、聲能與能量損失，又 $I \propto R^2 f^2 \rho v$ 。在理想膜理論中所的計算出的頻率數值會比實際狀況來的高，是因理想膜是在真空環境振動，現實則需考慮空氣負載效應，會有部分能量轉換聲能及膜本身阻尼產生的熱量，因此會使振動頻率變低。

(九) 拍音

兩個同振幅、頻率極相近的聲波同時發聲，所得到的聲波為兩頻率互相干涉形成之合成波，形成拍音，且頻率與原本兩相近頻率不相等，其拍音公式為

$$a \sin(2\pi f_1 t) + a \sin(2\pi f_2 t) = 2a \cos(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t) \sin(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t)$$

可知拍音有波包形成，振幅忽大忽小，拍頻：

$$f_{beat} = |f_1 - f_2|。$$

(十) 傅立葉轉換

振動系統在外力作用下發生受迫振動可以看成對外力的回應。如果在外力 $F_1(t)$ 作用下系統有響應 $x_1(t)$ ，在外力 $F_2(t)$ 作用下系統有響應 $x_2(t)$ ，則在外力 $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 共同作用下，就有響應 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ，即振動系統的響應滿足疊加原理，這是因為若 $\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = F_1(t)$ 及 $\ddot{x}_2 + 2b\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = F_2(t)$ ，則

兩式相加得：

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + 2b \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t)$$

利用疊加原理，可求得線性振動系統對任意非簡諧策動力的響應，對週期性外力 $F(t)$ ，可利用傅立葉級數將其分解為一系列頻率為基頻整數倍的簡諧力：

$$F(t) = \sum_n F_n \cos(n\omega t + \alpha_n)$$

式中 ω 為與力的變化週期 T 相應的基頻 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，對每個頻率為 $n\omega$ 的簡諧強迫力，可求出系統的響應 $x_n = B_n \cos(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$ ，(由於現在每個簡諧力成分的作用時間應設想為從 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，因而不必加上瞬態項)，根據疊加原理，系統對力的 $F(t)$ 的響應就是系統對每個簡諧強迫力響應的代數和：

$$x(t) = \sum x_n = \sum_n B_n \cos(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$$

對於非週期性外力，上述方法仍適用，只要將求和改為相應的積分。

伍、 研究結果

一、聲音的產生

釋放鋼球撞擊膜，鋼球動能轉換為膜的力學能，使膜開始振動，鋼球撞擊膜的力為非週期性，可以看成很多頻率的力共同作用，同時帶動腔體內空氣柱振動，而實驗中的腔體為粗短管，形成的是三維的振動模式，當膜與腔體經交互作用協調後，整個裝置會形成穩定的振動模式，同時擁有很多振動膜態，且一種振動膜態對應一種頻率，因此裝置會同時發出很多頻率，即頻譜分析中相對強度較強的基音與各泛音(圖15)。

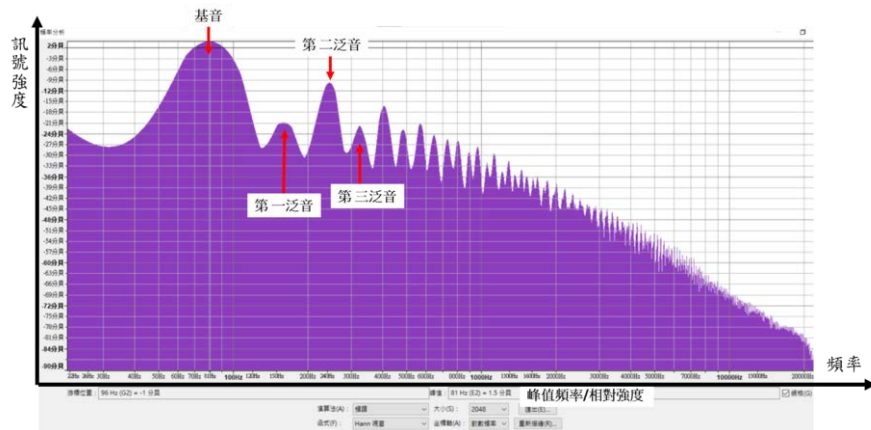


圖15：頻譜分析

二、聲音和振動時間之關係

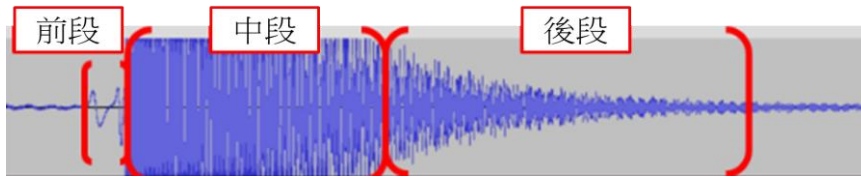


圖16：一次發聲所接收到的整段音訊範圍

在所有的實驗中皆可觀察到波形明顯不同的前、中、後段：前段波形稀疏，中段頻率豐富，後段振幅遞減，以下進行分段討論。

(一) 前段

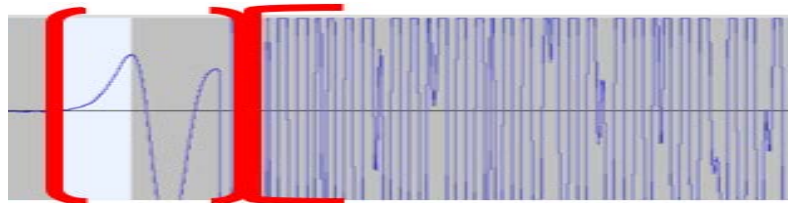


圖17：前段與中段部分放大

將波形放大後發現前段的波形較中、後段稀疏。會形成前段波形稀疏的特色是鋼球接觸膜，因為根據 $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ ，原本薄膜振動的有效質量只有自身質量，但鋼球撞擊時與膜接觸，有效質量 M 瞬間增加很多，造成角頻率 ω 變小，也就是頻率會變小，反映在波形上即週期變小、波形變稀疏。

(二) 中段

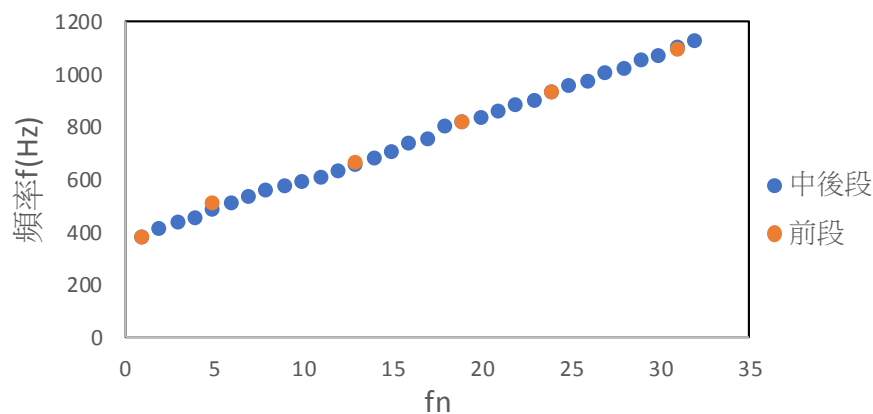


圖18：前段與中後段頻率對比圖

由(圖18)可觀察到前段的頻率在中段一樣存在，但中段的頻率較前段多出很多，我們推測是因前段受鋼球撞擊影響，抑制了膜振動，使其無法形成某些振動膜態，即少了某些頻率，但到了中段，因鋼球離開膜，裝置完全交互作用後，在前段被抑制的頻率於此顯現出來，造成中段頻率豐富。

(三) 後段

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgu + E_{sound} + E_{loss}$$

隨著振動時間經過，必會有能量損失(如摩擦產生的熱能)，裝置發聲所能分配到的聲能亦會隨著減少，因而造成後段振幅越來越小的情形。

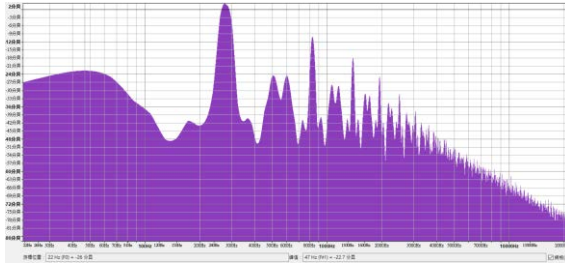


圖19：中段之頻譜分析

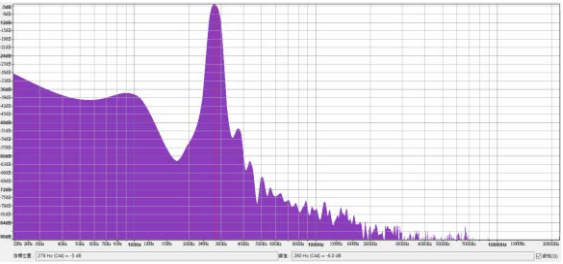


圖20：後段之頻譜分析

至於到了後段為何會只剩下一個較高的峰值，則是從中段的聲音頻譜分析找到端倪，可以發現越強的(相對分貝越大的)頻率越能夠持續到後面。

三、波形與頻譜分析

(一) 合成波

1. 無相近頻率

波形之頻率(Hz)	頻譜分析中之頻率(Hz)/相對分貝(dB)	
276.3	279/-6	373/-50.1

從頻譜分析的結果來看279Hz的相對分貝與373Hz的相對分貝相差很多，279Hz的分貝較373Hz強度高很多，因此合成波的頻率受到373Hz的影響很小，大部分會表現出279Hz，證明了當有一種較明顯峰值的時候，聽到的頻率會與頻譜分析的頻率相符。

2. 有兩相近頻率

波形之頻率(Hz)	頻譜分析之頻率(Hz)/相對分貝(dB)	
185	176/-7	253/-21

合成波的頻率之所以會與頻譜分析的頻率不同，是因為從頻譜分析中可以看到除了最大聲的頻率176Hz，合成波的頻率還會受253Hz的影響，雖然相對分貝不如176Hz的大，但已足夠影響最後的結果，因此最後合成波會形成在176Hz而稍微偏向253Hz的185Hz。

(二) 拍音

且我們發現聲音的後段有時會出現類似波包的波形，如下：

一個波包週期(s)	一個波包頻率(Hz)	頻譜分析的頻率(Hz)/相對分貝(dB)	
0.048	20.8	242/-11.5	263/-8.2

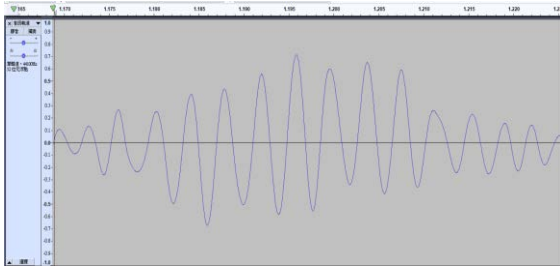


圖21：波包波形

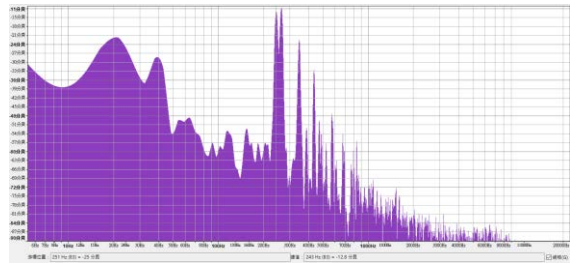


圖22：波包頻譜分析

當兩個相近的頻率同時出現時，波形呈現有規律的振幅由小變大再變小的週期變化，形成類似波包的形狀，根據拍音頻率公式： $f = f_2 - f_1$ ，波包的頻率為兩相近頻率的差，以上述表格為例，週期倒數為該波包的頻率，再將此段波包頻譜分析後，可以發現有兩個相對強度特別大的頻率，相差頻率為21，與一個波胞的頻率20.8相近，因此本實驗符合拍音之理論與特性。

四、鋼球釋放高度對其聲音的影響

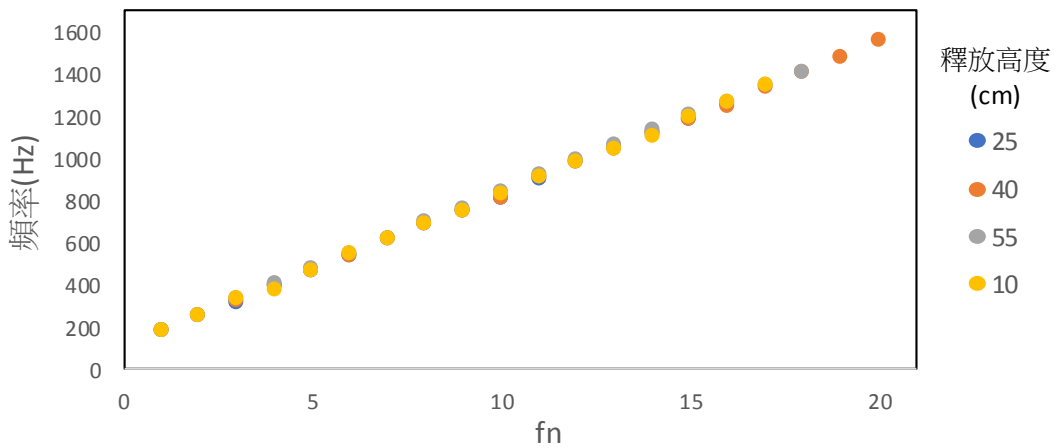
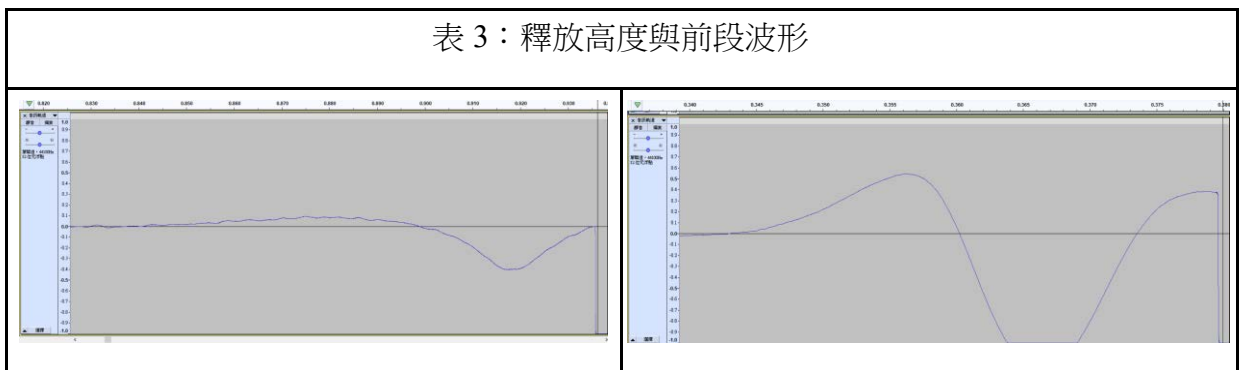
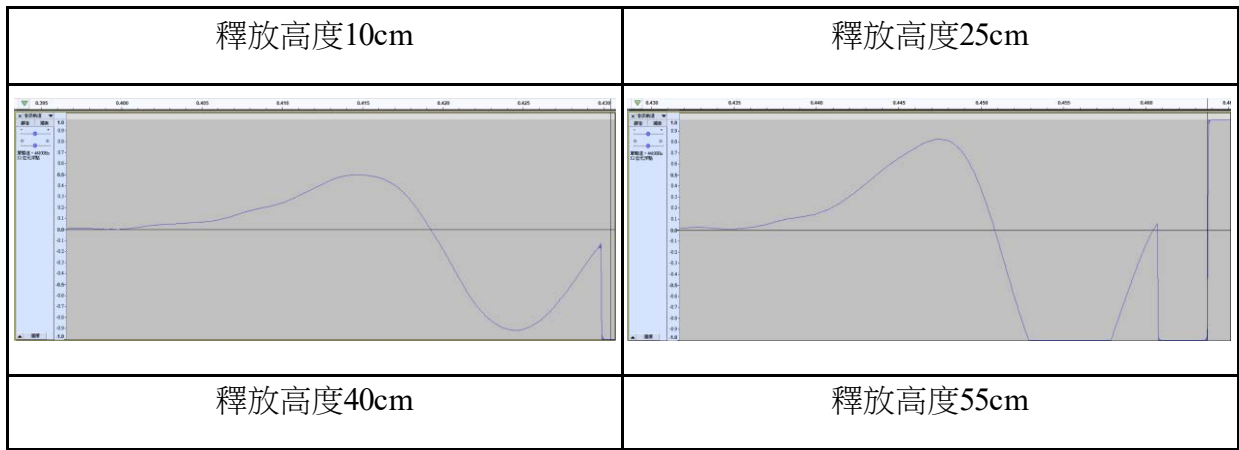


圖 23：釋放高度與頻率關係圖

從上圖中可知釋放高度對於裝置的發聲頻率幾乎不會有影響，因為膜張力、杯子條件(振動邊界)均固定，因此所產生的各種模式之頻率都差不多。同時也證明了薄膜振動模式頻率 $f_{m,n} = \frac{X_{m,n}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ (Hz)中與釋放高度無關之性質，但後來我們發現，釋放高度對於波形的振幅與聲音持續時間有很大的關聯，如下表：

表 3：釋放高度與前段波形





當釋放高度越大，前段部分的振幅會越大

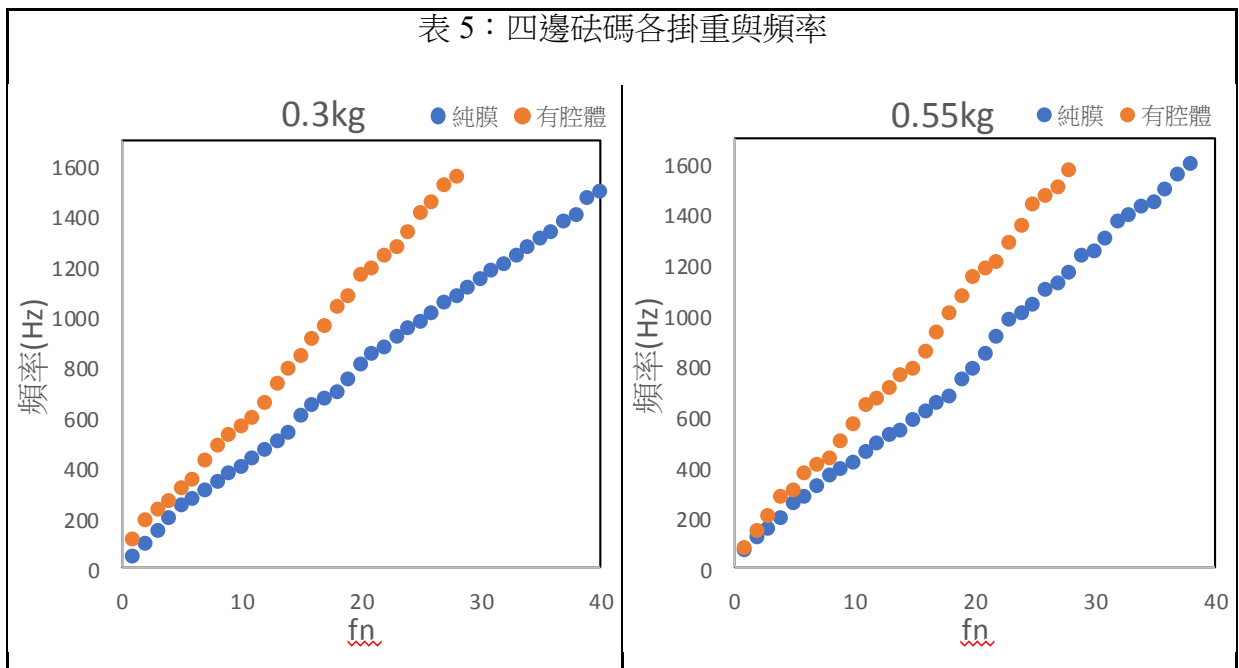
表 4：釋放高度與持續時間

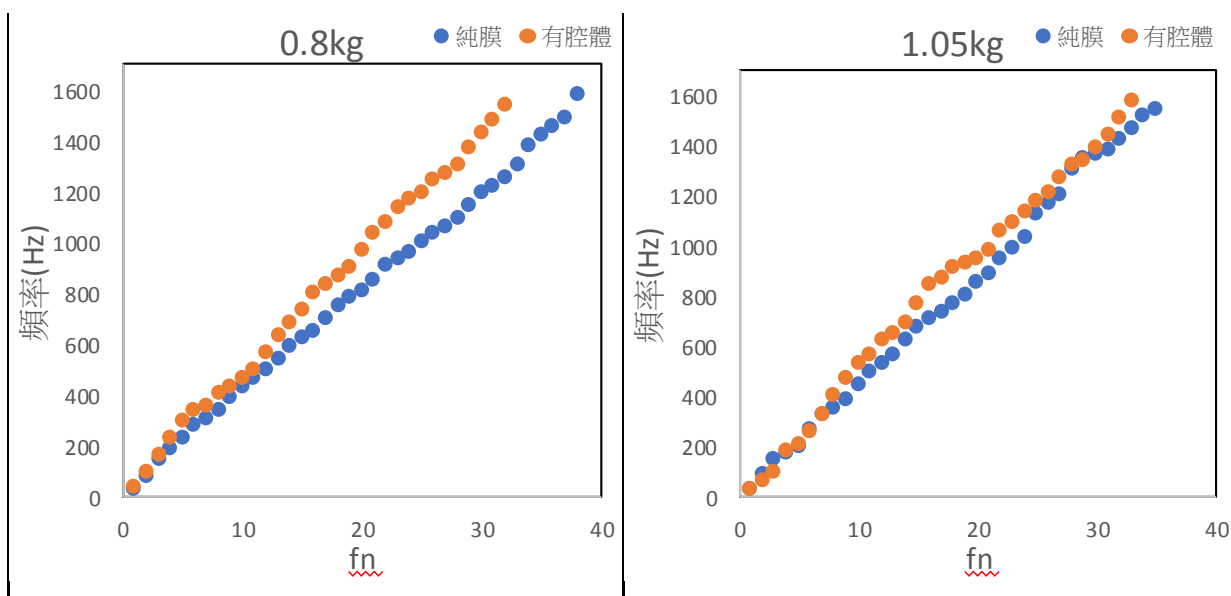
釋放高度(cm)	10	25	40	55
經過的時間(s)	1.164	1.537	1.727	1.957

表格中經過的時間指的是波形圖上音訊開始至振幅小於0.1公分的時長，即一次發聲所接收到的整段音訊範圍，釋放高度越高，聲音持續的時間越長。由 $I \propto R^2 f^2 \rho v$ 可知當釋放高度越大，鋼球有更多的力學能轉換成裝置發聲的聲能，聲音振幅 R 也會越大，聲音也會持續越久。後續實驗中我們則選擇最適合操作的釋放高度25cm。

五、不同膜張力對其聲音的影響

此實驗是在純膜(沒有腔體)和腔體為1138cm³，四種掛重造成的不同張力之頻率





當掛重0.3kg 時，腔體影響大；掛重1.05kg 時，兩者頻率幾乎重疊。根據實驗結果，我們找到了符合其實驗結果的振動理論模型

$$k_t = k_m + k_B \cong \begin{cases} k_m & (\text{if } k_B \ll k_m) \\ k_B & (\text{if } k_B \gg k_m) \end{cases}$$

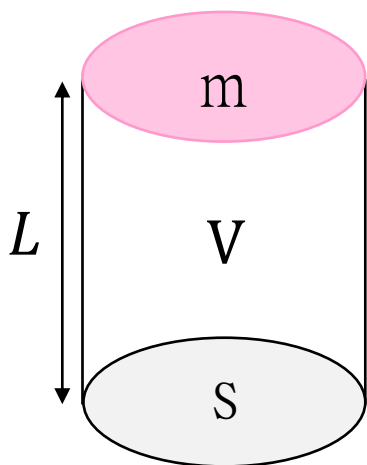


圖 24：裝置示意圖

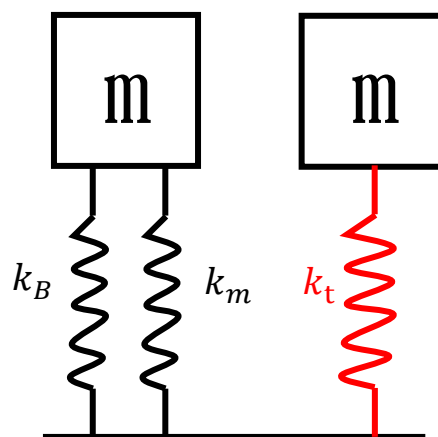


圖 25：並聯彈簧機械模型

裝置最後的發聲是取決於膜與腔體的交互作用關係，此理論模型便將膜與腔體視為兩個彈簧， m 為膜的質量， k_m 與 k_B 分別是膜與腔體的彈力常數，將這兩個彈簧並聯，總效應可表示為 $k_t = k_m + k_B$ ，最後的聲音將取決於 k_t 。若 k_m 或 k_B 遠大於另一方，則較大的那一方會主宰最後的 k_t 。我們藉由純膜實驗與有腔體實驗，來窺探膜與腔體之間的交互關係。

圖26可以看到當張力越大時，基頻會越大，純膜和有腔體的基頻差越小，原因是

$$\omega = \sqrt{\frac{k_m}{m}} = \sqrt{\frac{2\pi\Gamma}{m}}$$

當張力越大時， k_m 越大，因此張力漸大到最後 k_t 被 k_m 主宰，也就是

$k_t \cong k_m$ ，而 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_m + k_B}{m}}$ 所以造成一邊膜（有腔體的頻率） \cong 純膜頻率。

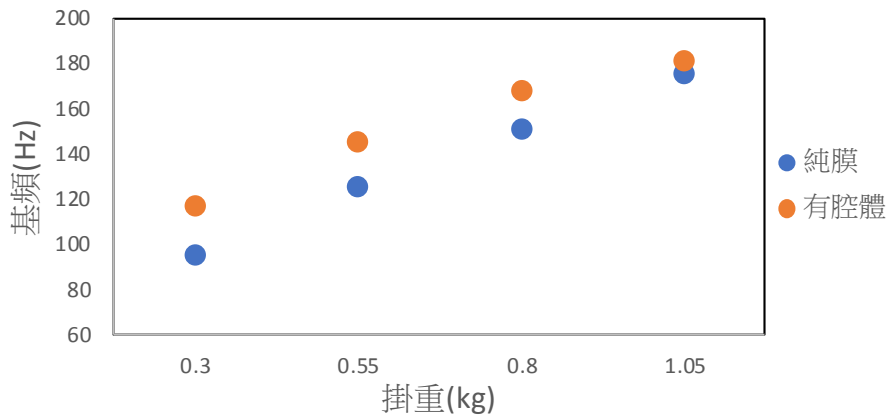


圖26：四邊砝碼各掛重與基頻關係圖

六、一邊膜基頻與口徑關係:

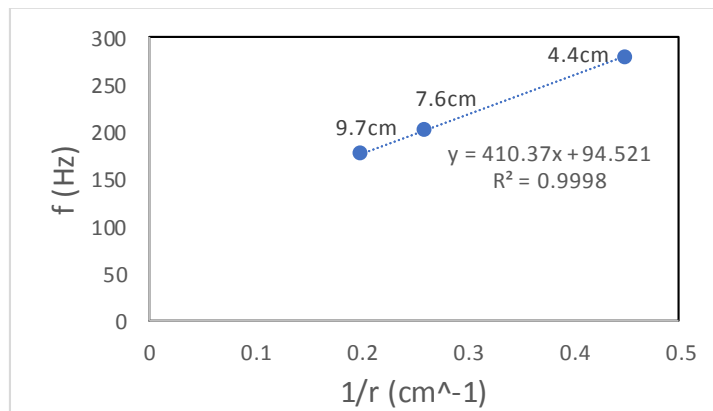


圖 27：基音與半徑倒數關係圖（口徑9.7、7.6、4.4cm，掛重1.05kg，杯高17.5cm）

當 $\frac{1}{r}$ (r 為杯半徑) 越大，基頻頻率也會越大。從薄膜理論得知純膜振動頻率為

$f_{m,n} = \frac{x_{m,n}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ ，純膜基頻會與半徑成反比，口徑越小則杯容積越小，交互作用結果基頻

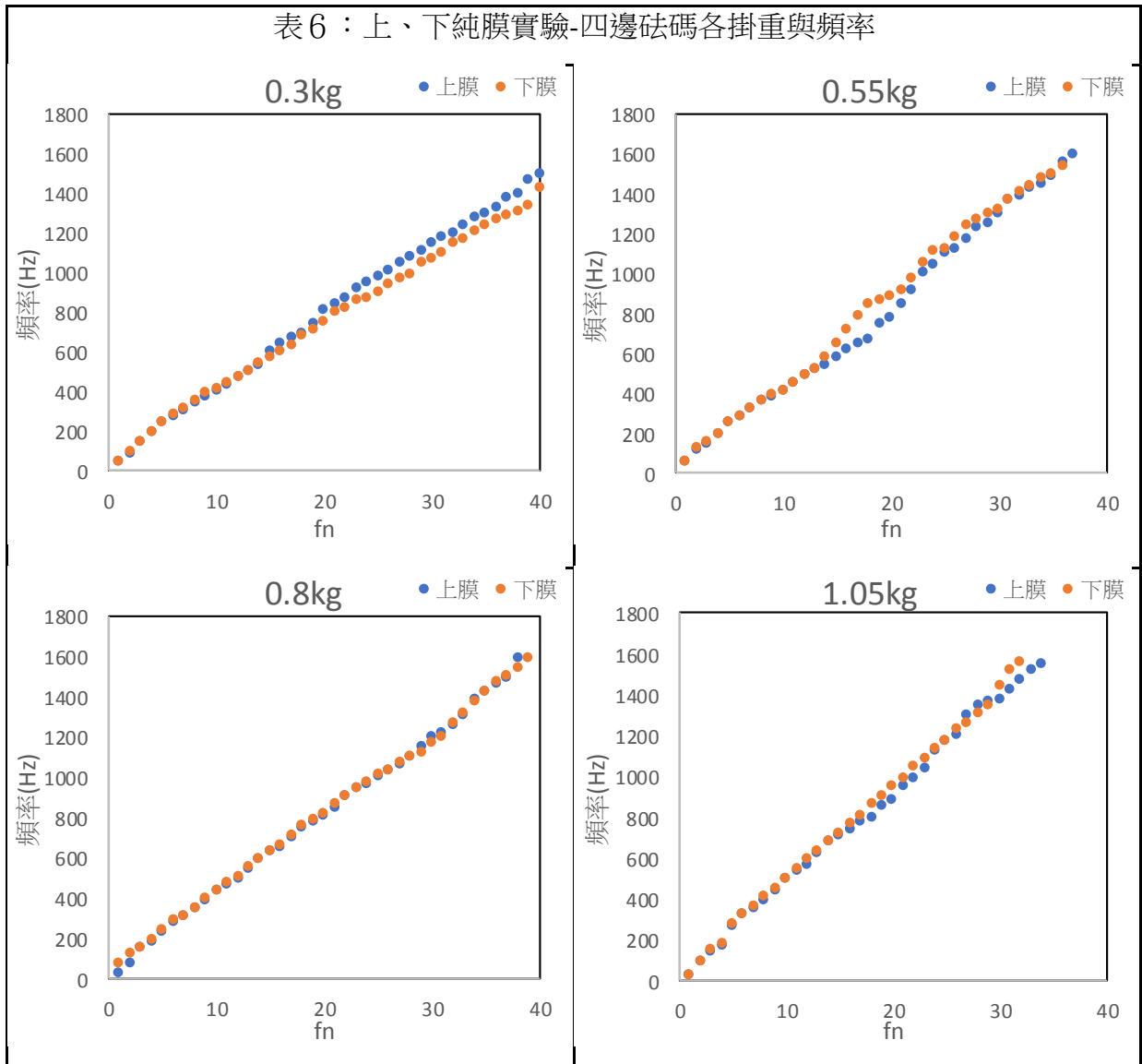
應該越高。腔體 $k_B = \frac{\rho c^2}{V} s^2 = \frac{\rho c^2}{L} S$ ，杯子半徑越小截面積 S 越小，腔體 k_B 越小 k_t 越小，

且振動之薄膜質量 $m = \sigma \pi r^2$ (σ 為面密度) 越小，綜合上述各個影響因素，由彈簧模型

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_m + k_B}{m}} = \sqrt{\frac{k_m}{\sigma \pi r^2} + \frac{\rho c^2}{\sigma}}$ ，得知半徑 r 越小一邊膜基頻越大。

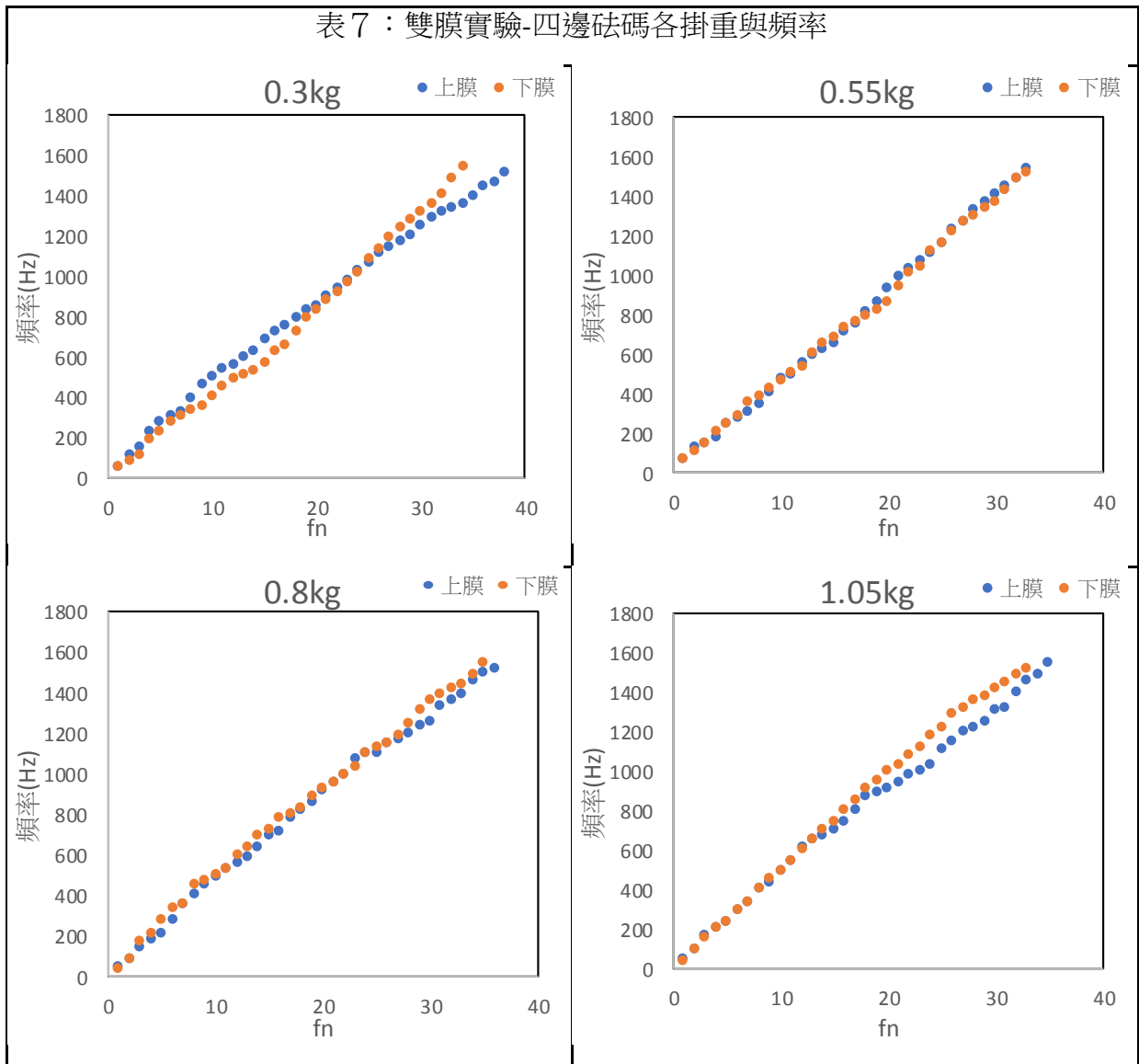
七、雙膜實驗

為了製作腔體兩端都是膜的實驗，必須先確定兩張膜(命名為上膜與下膜)的條件是一樣的，因此我們將兩張膜都做了四種張力的純膜實驗，若頻率重疊或斜率接近時，代表兩張膜條件大致相同；若頻率的斜率不同或是相差很大時，則代表兩張膜的條件有差異。



可看到兩張膜的頻率可說是相同的，因此我們進行下一步實驗。進行雙膜實驗時，敲擊上膜並在上下膜距離相同處都放置麥克風收音

表 7：雙膜實驗-四邊砝碼各掛重與頻率



鋼球撞擊上膜透過杯內空氣帶動下膜振動發聲，上下膜的基頻與泛音頻率相近但是有所差異，將進行理論分析與討論。

陸、討論

一、探討聲音和振動時間之關係(前段-中段)

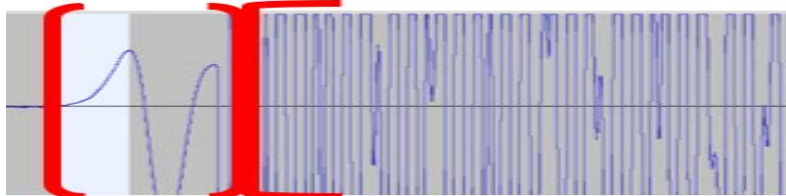


圖278：前段與中段部分放大

用高速攝影機實際追蹤鋼球運動後，可得圖28中反白部分0.013秒與鋼球碰到膜~離開的時間一致。而造成鋼球離開後(前段反白部分後)波形依舊稀疏的原因，可透過高速攝影機觀察到，當球撞擊膜時，膜的形變量很大，即使鋼球已離開膜，其振動還是受到

鋼球的影響，鋼球、膜和腔內空氣的能量交換不足以使膜與腔體達到穩定的振動模式，因此裝置需經過一段時間交互作用後，才會形成有穩定振動模式的中段。

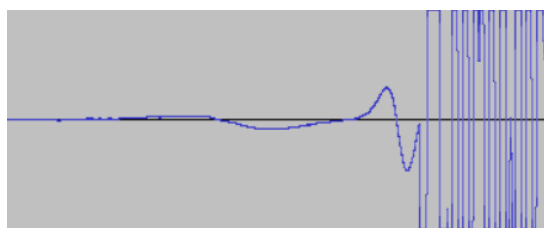


圖28：雙膜-上膜前段波形

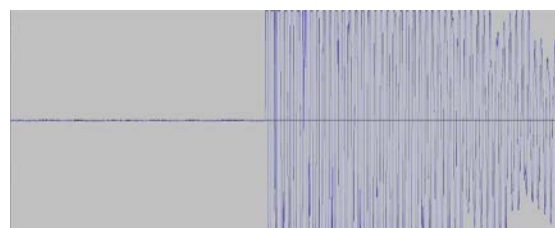


圖29：雙膜-下膜前段波形

由雙膜實驗中，截取下膜的波形圖，如圖28，可以觀察到，下膜波形的前段並無如之前般有稀疏的特色，而直接進入中段頻率豐富的特色，這是因為下膜並無受到鋼球的撞擊，因此振動有效質量不會增加，因此頻率不同於上膜，反映在波形上也不同，一開始即呈現密集的波形。由這組數據，再次驗證了前段波形稀疏是因為受到鋼球撞擊的影響。

二、一邊膜理論模型

我們將整個膜腔系統視為兩個並聯的彈簧，是因為我們發現有腔體的頻率會大於純膜的頻率，而且膜振動時膜之張力和腔內空氣同時對膜施力影響膜之振動。若模型是採兩個彈簧串聯，則 $k_t = \frac{1}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_b}}$ ， k_t 會小於 k_m ，不符合實驗結果，因此最後的模型採用並聯。

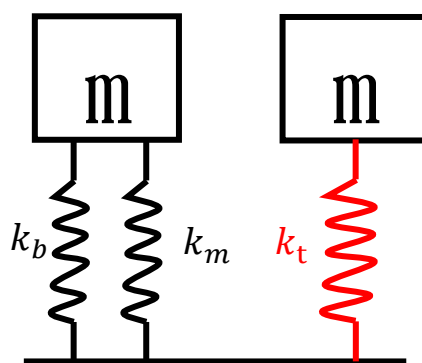


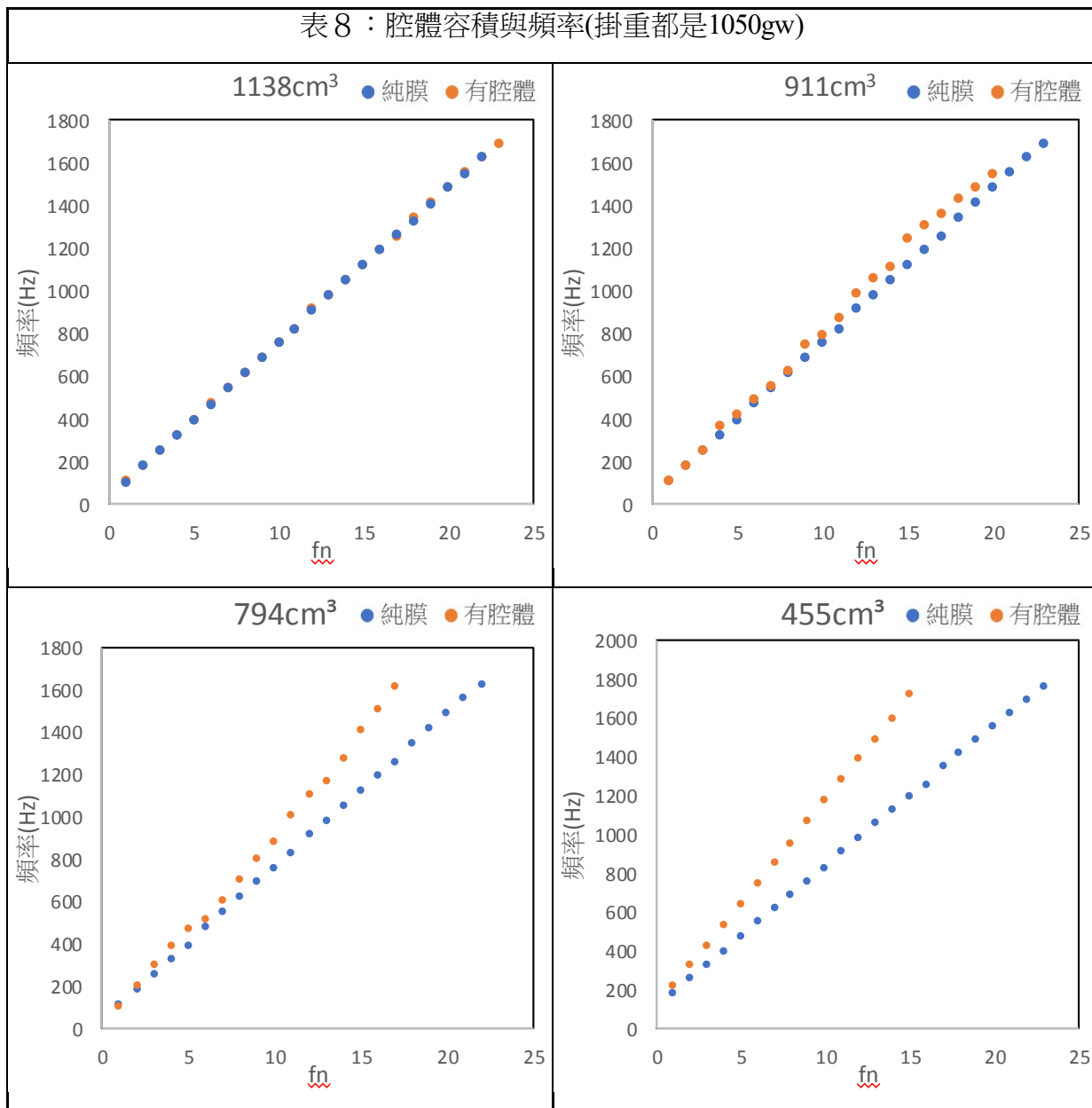
圖 30：並聯彈簧機械模型

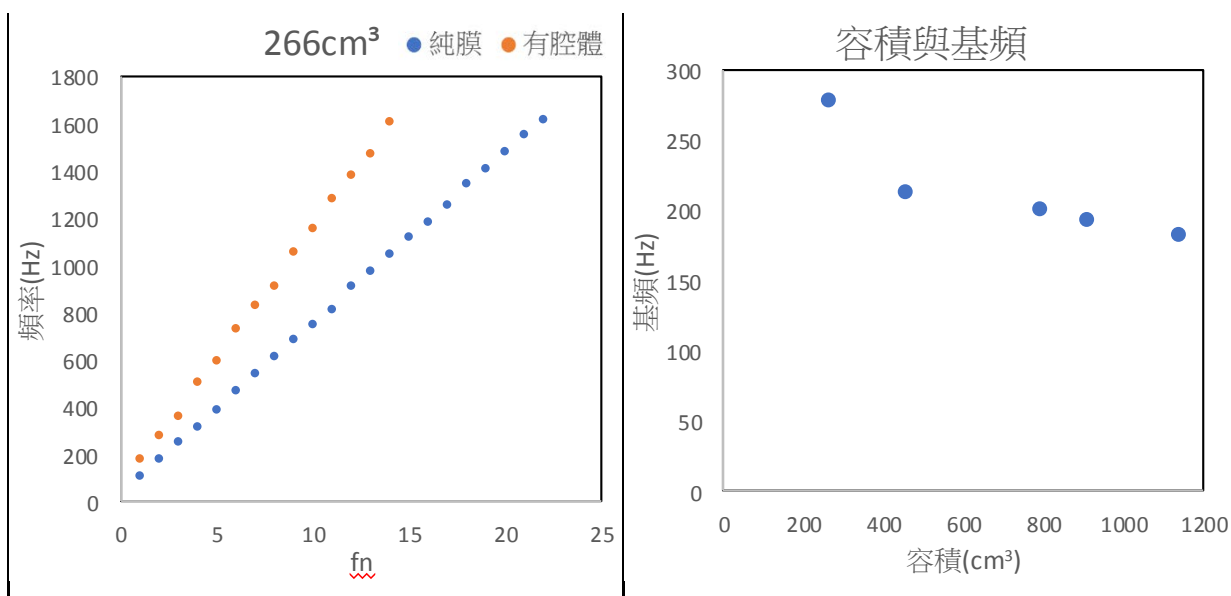
一開始我們並沒有利用模型來解釋數據，原先以為這個實驗裝置的膜是發聲源，而腔體是篩選的機制，也就是想用共振模型來解釋。關於篩選，在這裡舉個例子，若是膜產生100、200、300Hz的頻率，經過腔體篩選後只有與腔體自然頻率相近的頻率會被保留下來，例如保留100與300Hz，根據這個推測，實驗數據中有加腔體的裝置頻率在純膜的頻率應都找的到，但經過實驗後發現結果不是我們的猜想。

後來我們發現，篩選模型適用於外加固定頻率振動源，此實驗裝置的振動源(膜)與腔體有緊密的關聯，屬於多參數系統，因此篩選系統不適用。因為實驗裝置是多參數系

統，所以細節部分，如膜與腔體實際上如何進行交互作用理論上難以得知，但是由波形和時間關係可知頻率和波形是經由交互作用而演化。

三、不同腔體容積對聲音的影響





容積1138、911及455cc 的半徑為4.55公分，長度分別是17.5、14及7公分，根據

$$k_B = \frac{\rho c^2}{V} s^2, \text{ 腔體長度越長容積越大, 腔體 } k_B \text{ 越小, } k_t \text{ 越接近 } k_m, \text{ 由 } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_m + k_B}{m}}$$

可知一邊膜基頻越接近純膜，泛音頻率也符合此趨勢。容積1138、794及266cc 的半徑分別為4.55、3.8及2.2公分，長度都是17.5公分，口徑越小一邊膜頻率越高，泛音頻率也符合此趨勢，這已經在實驗結果的口徑變因解釋。綜合上述，容積越大一邊膜基頻頻率越小，在容積為1318cm³時，純膜的頻率與有腔體的基頻頻率趨於一致，而泛音也是如此，而容積越大純膜頻率與加腔體的頻率會岔開越大，顯示整體的頻率受腔體的影響越大。

四、雙膜理論振動模型

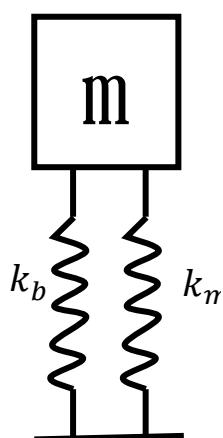


圖 311：一邊膜的振動模型

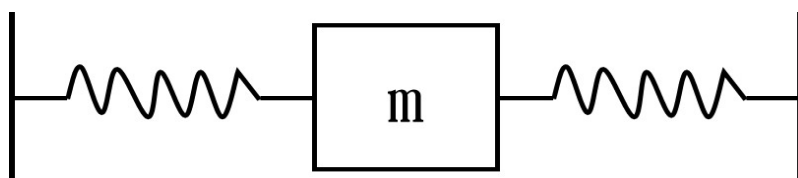


圖 322：一質量+兩彈簧振動模型

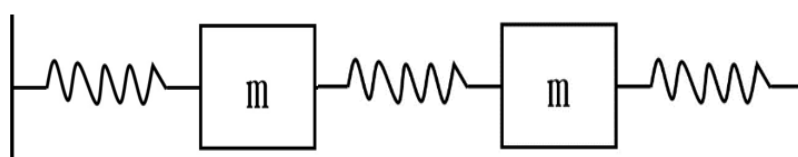


圖 33：兩質量+三彈簧振動模型

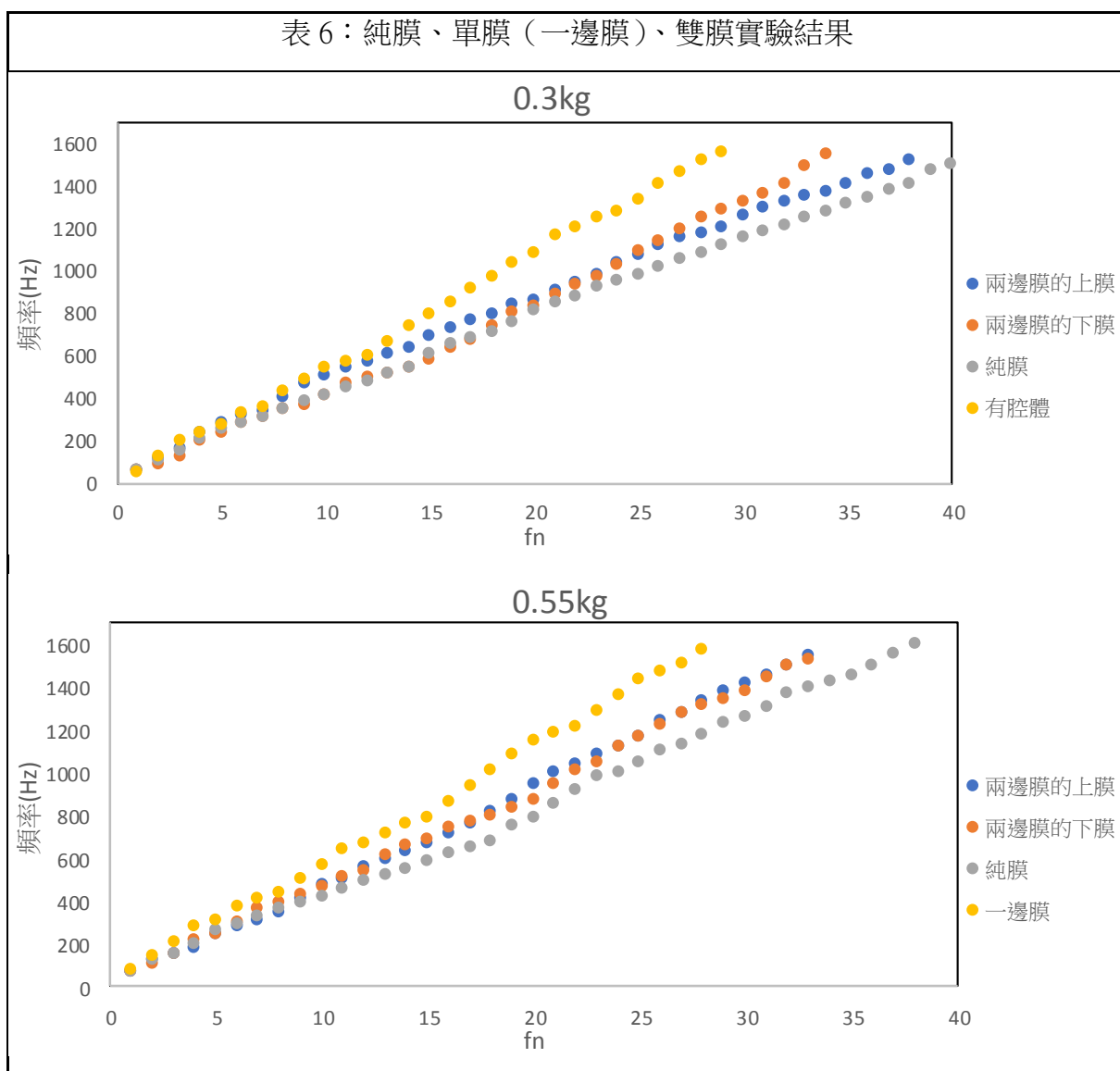
會選擇此模型的原因除了根據實驗結果以外，還參考了一邊膜的振動模型(圖31)以及雙膜的實驗裝置，一邊膜的實驗模型為可將此模型的形狀變成這樣所代表(圖32)的結果

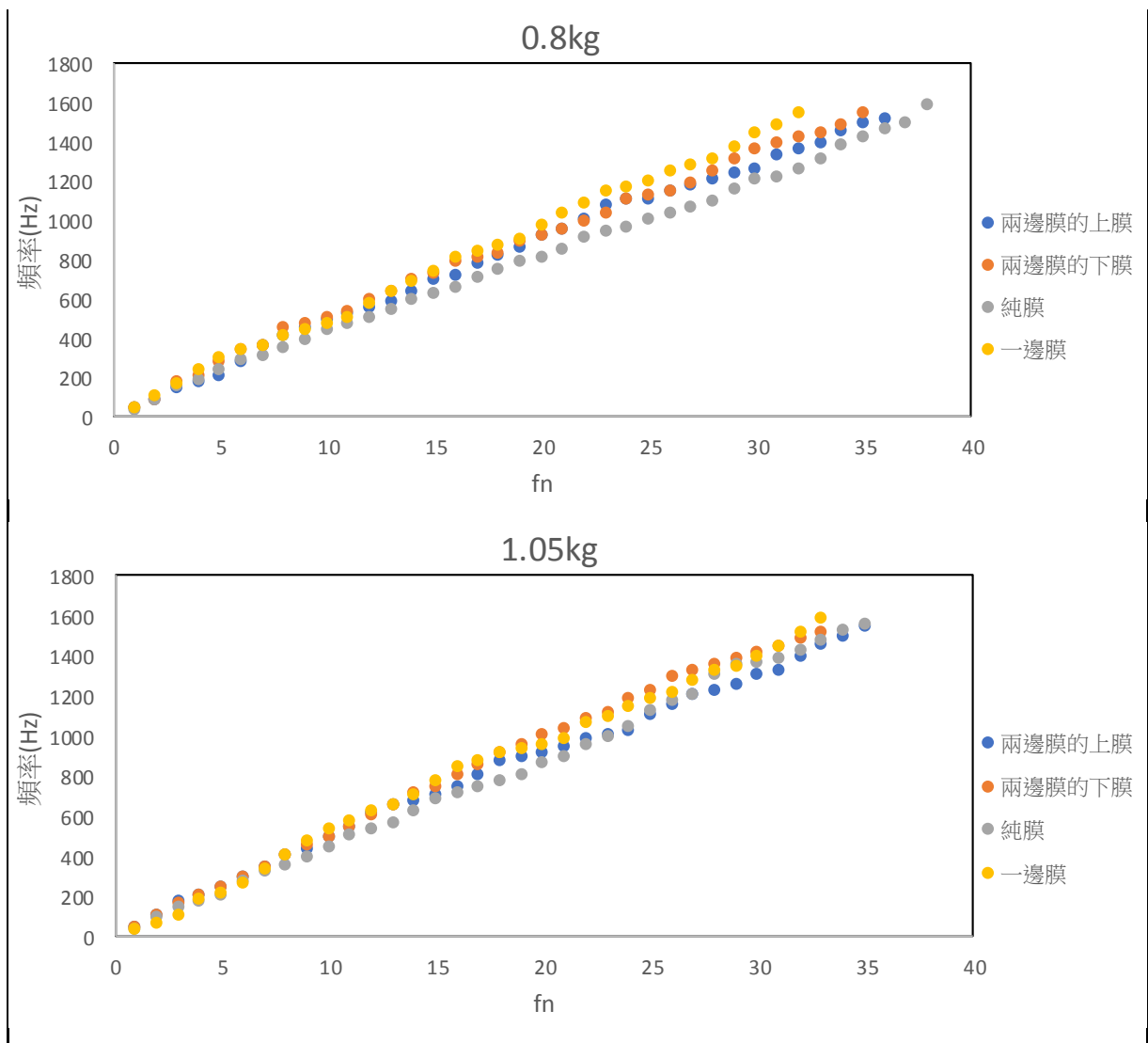
是相同的，因此根據這樣變形過的振動模型增加一個膜，也就是增加一個質量與一個彈簧就會形成雙膜的振動模型(圖33)

五、雙膜實驗解釋

為了確保雙膜實驗中上下膜具有相同的條件，我們實驗了上下膜純膜各自的頻率(表6)，再將兩者交互比較，結果顯示兩者頻率大致相同，之後以這兩膜進行實驗。

我們將純膜與單膜(有腔體)的頻率疊圖比較，可以發現





可以發現掛重 0.3、0.55 和 0.8kgw，由斜率來看，一邊膜的頻率>兩邊膜的頻率>純膜的頻率，且兩邊膜上下膜的頻率有差異。

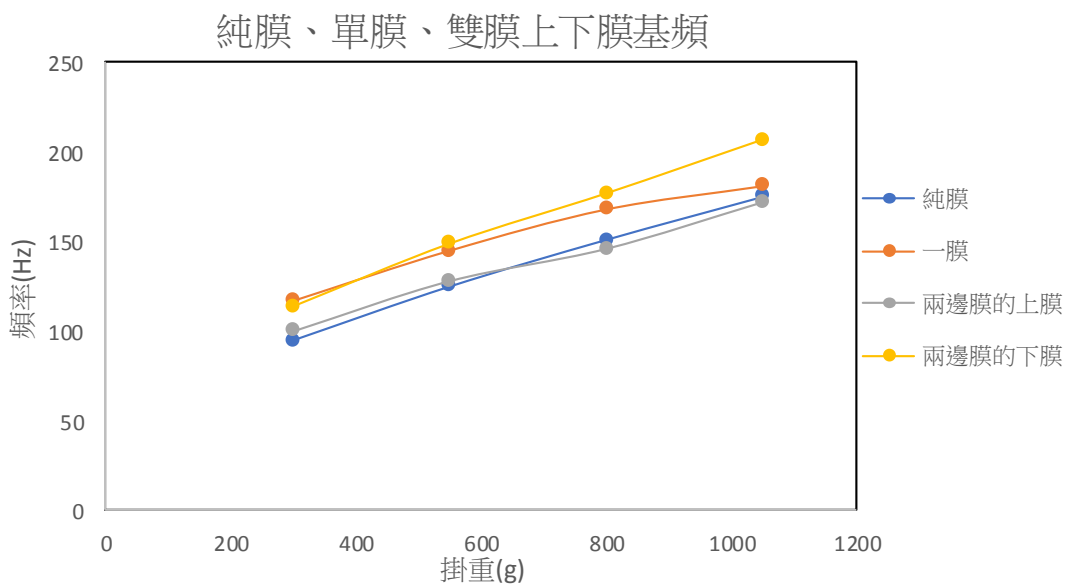


圖 334：純膜、單膜、雙膜上下膜基頻

依照雙膜理論振動模型，兩膜透過腔體空氣彈簧的交互作用，耦合後的簡正角頻率 ω_1 與 ω_2 相同（ $\omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}}$ ， $\omega_2 = \sqrt{\frac{K_m}{M}}$ ），也就是擁有相同的自然頻率，因為 Audacity 頻譜分析的方式是經過傅立葉轉換，因此分析出來上下膜最低頻率應該相同（ ω_1 混在純膜泛音中經過交互作用無法和泛音區別出來），且 ω_2 就是純膜基頻的角頻率，小於一邊膜基頻的角頻率（ $\sqrt{\frac{K+K_b}{M}} = \sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}}$ ），圖34顯示下膜、純膜與一邊膜實驗數據符合此理論。比較令人不解的是各掛重下膜基頻是最高的，事實上上膜受到鋼球撞擊波形分成三段和純膜相同，下膜無球撞擊波形分成兩段，波形一開始上下膜就不同（鋼球撞擊使波形變稀疏頻率下降），也就是兩膜一開始的振動條件不同影響了波形與頻譜，在膜一邊振動一邊輻射聲能的情況下，鋼球離開後兩膜繼續交互作用到發聲停止仍無法達成理論上耦合的自然頻率。

柒、 結論

一、探討聲音的產生

釋放鋼球撞擊膜，鋼球力學能轉換為膜的力學能和聲能。在頻譜分析中每一個峰值頻率會對應膜球裝置所產生的模態。

二、探討聲音和振動時間之關係

前段波形因為鋼球撞擊，抑制了膜的頻率，而中段因鋼球離開膜，被抑制的頻率會重新出現。第三段波形在某些情況下會出現拍音。

三、探討鋼球釋放高度對其聲音的影響

不同釋放高度並不會造成頻率上的影響，但釋放高度越高，能量越大，振幅與聲音持續的時間較長。

四、探討不同膜張力對其聲音的影響

當膜張力越大時，純膜和一邊膜頻率越高，且頻率受腔體影響越小，符合並聯彈簧理論振動模型。

五、探討杯子容積對其聲音的影響

當杯子容積越小時，頻率越高，符合並聯彈簧理論振動模型。

六、雙膜理論振動模型與實驗數據

一邊膜基頻>上膜基頻=純膜基頻，符合兩質量三彈簧理論振動模型。因為振動初始條件不同，導致上下膜最低頻率不同。

捌、 參考文獻資料

- 一、白明憲,工程聲學,修訂一版,全華科技圖書公司,2008.
- 二、力學(第二版).郑永令 贾起民 方小敏.高等教育出版社.2002 年版
- 三、Vibrations of Ideal Circular Membranes (e.g. Drums) and Circular Plates, Professor Steven Errede, Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois 2002 - 2017.
(圖 11 來源)
- 四、中華民國第 50 屆中小學科學展覽會作品說明書，腔體共振之探討
- 五、<https://www.researchgate.net/profile/Georgios-Papaioannou-3/publication/228947736/figure/fig1/AS:393839597637646@1470910085978/Vibrational-Modes-of-a-circular-membrane.png> (圖 10 來源)
- 六、http://140.115.30.57/phy_lab/coupling_osc.htm (圖 13 來源)

【評語】 051805

本作品探討薄膜與 cavity 中聲波的耦合，透過彈力膜封住塑膠杯再以鋼珠落下激發彈力膜，再測量彈力膜上與塑膠杯中彈力波與聲波之頻率。實驗結果發現彈力膜上與塑膠杯中彈力波與聲波基本上是並聯，整個實驗設計及定性分析都相當完整。如果要更進一步，應該更多定量分析並聯的正確性。

作品簡報



聲之形

— 探討膜管與聲音間的關係

高級中等學校組 物理與天文學科

實驗方法

一、實驗裝置

2. 純膜實驗



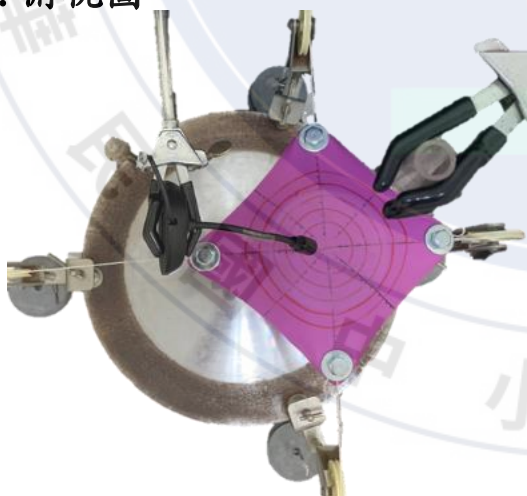
3. 雙膜實驗



1. 一邊膜實驗

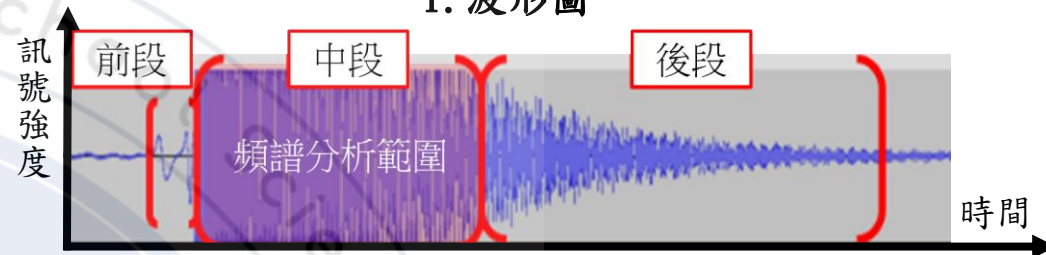


4. 俯視圖

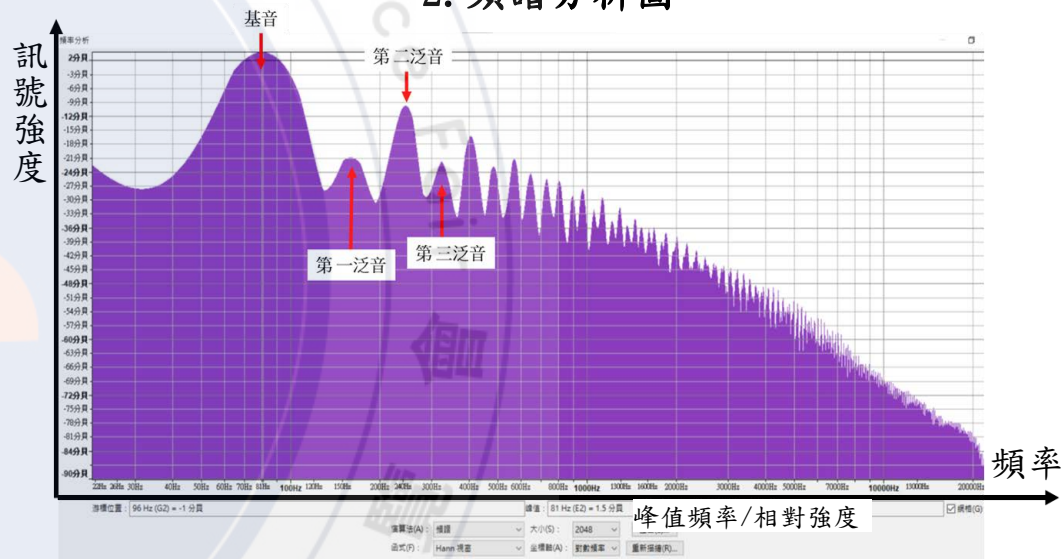


二、頻譜分析

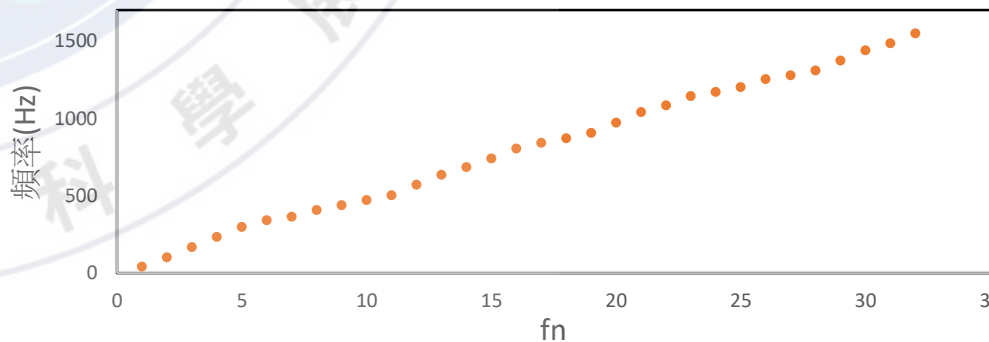
1. 波形圖



2. 頻譜分析圖



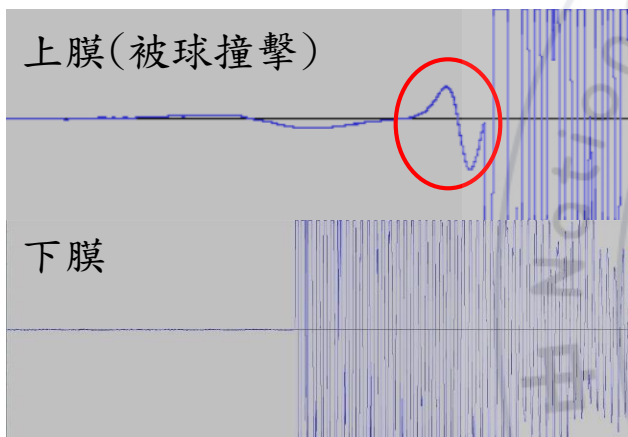
3. 第n泛音-頻率



波形特徵

前段

一、雙膜實驗-前段起伏是受鋼球撞擊影響

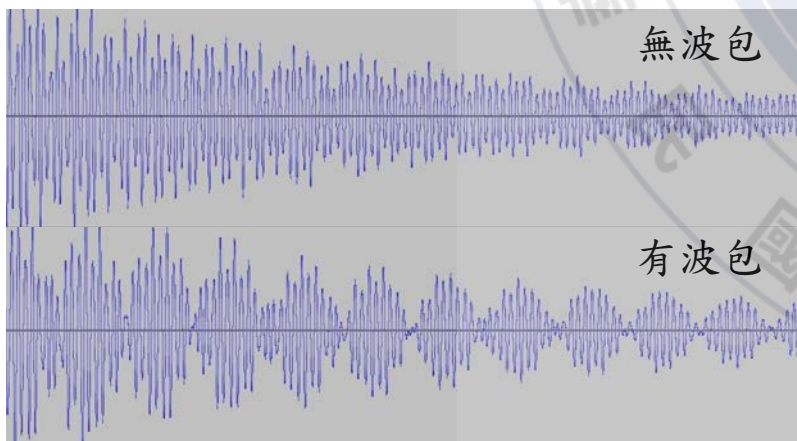


$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

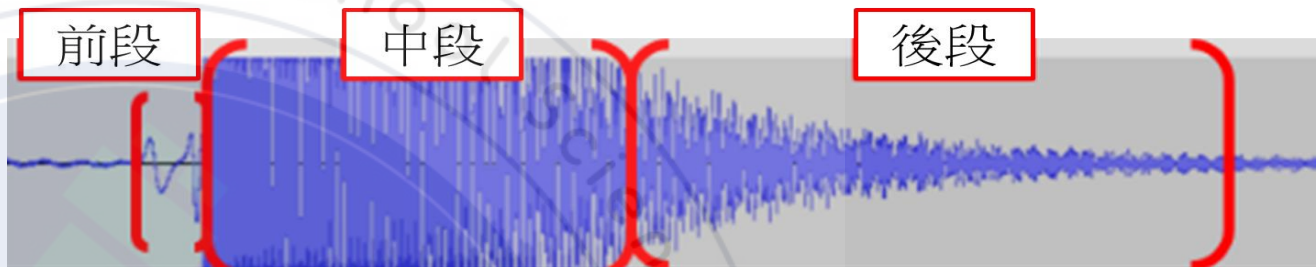
ω : 振動頻率
 K : 彈性係數
 M : 振動有效質量

前段稀疏
 $M \uparrow$ 頻率 \downarrow

二、拍音

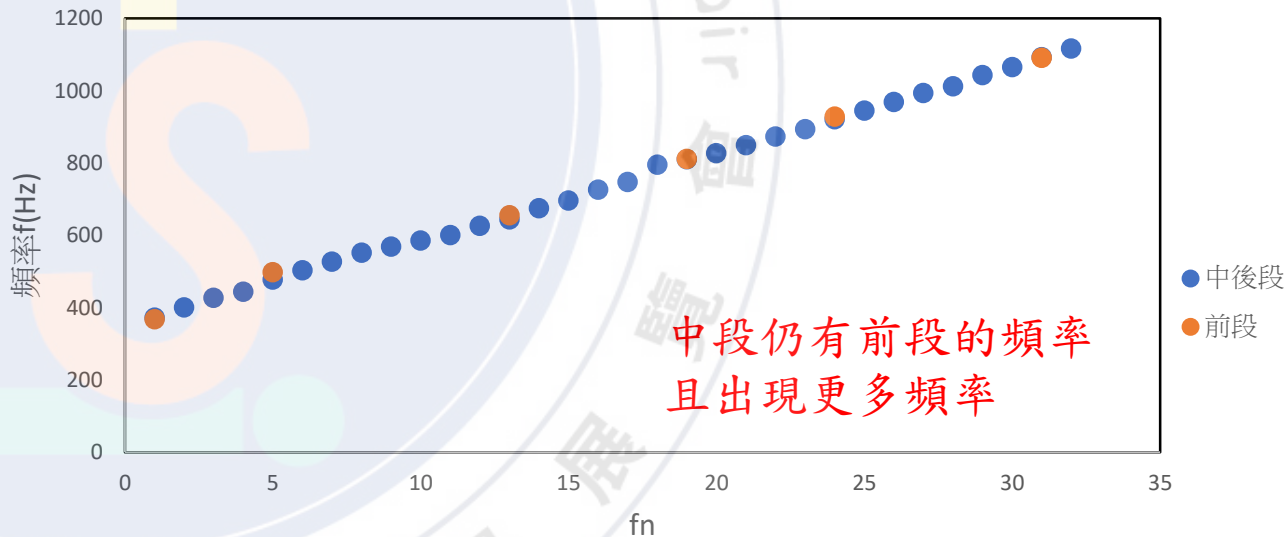


前-中-後段波形圖



中段

前段與中後段頻率之比較



中段仍有前段的頻率
 且出現更多頻率

後段

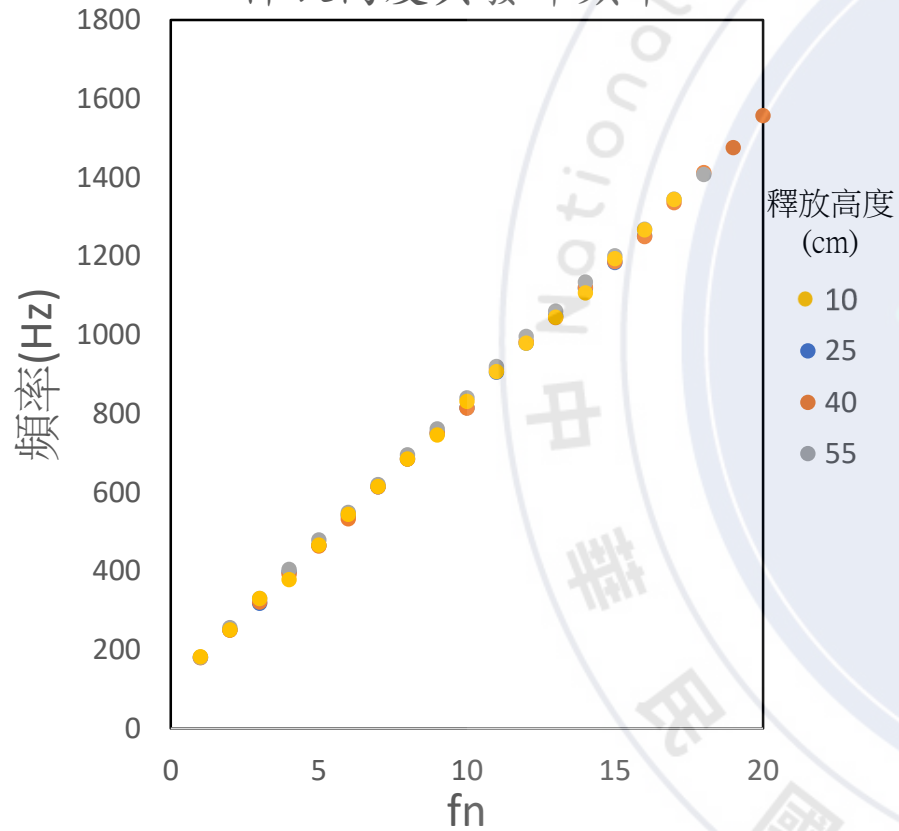
$$U_{\text{球落下}} = U'_{\text{球回彈}} + E_{\text{振動}} + E_{\text{sound}} + E_{\text{loss}}$$

鋼球釋放高度 10/25/40/55cm

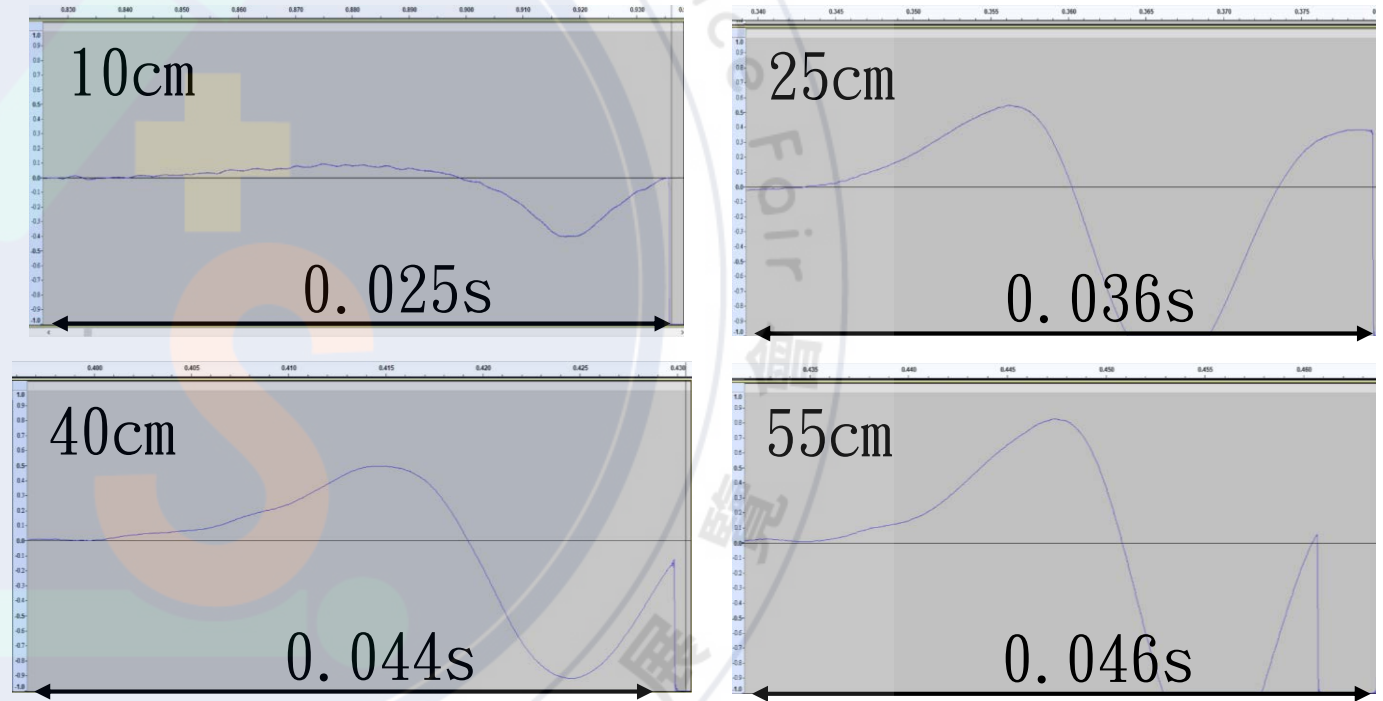
杯子容積 1138cm^3 ，掛重 1.05kg

頻率

釋放高度與發聲頻率



前段波形



釋放高度不影響其所產生的頻率

釋放高度↑ → 振幅↑
→ 聲音持續時間↑

振動機械模型

機械系統與聲學系統之k

$$k_{\text{機械}} = \frac{F}{\Delta x} = \frac{(\Delta p)s}{\Delta x} = \frac{(\Delta p)s}{\frac{|\Delta v|}{s}} = \left| \frac{\Delta p}{\Delta v} \right| s^2 = k_{\text{聲}} s^2 \quad (\Delta v = s\Delta x)$$

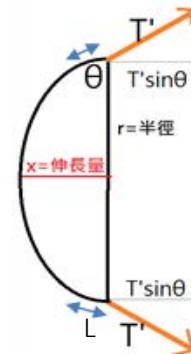
$$k_{\text{聲學}} = \left| \frac{\Delta p}{\Delta v} \right| = \frac{\rho_0 c^2}{v}, \text{ 聲速 } c = 331 + 0.6t$$

發聲特性之機械模型

$$k_t = k_m + k_b \cong \begin{cases} k_m & (\text{if } k_b \ll k_m) \\ k_b & (\text{if } k_b \gg k_m) \end{cases}$$

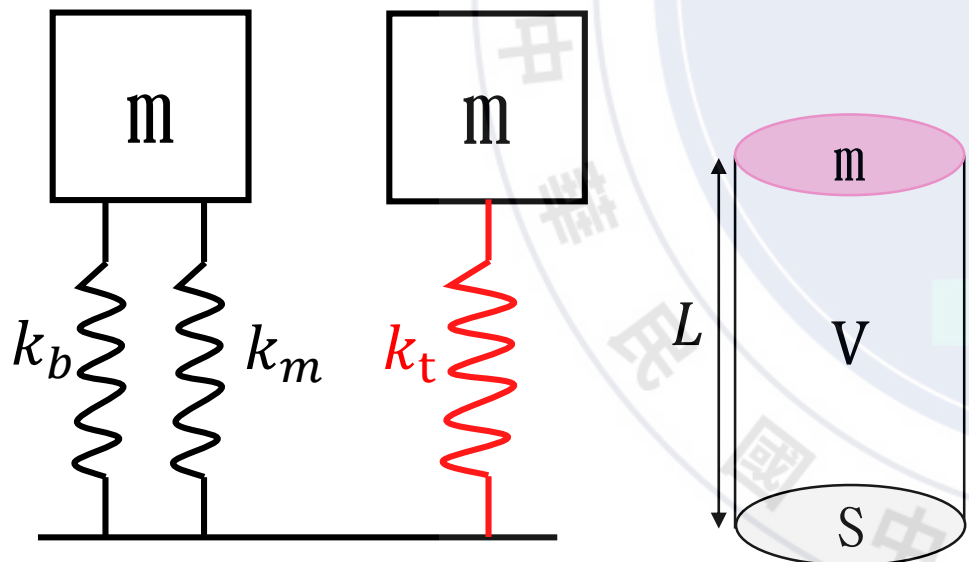
膜之 k_m 計算

$$F = 2T' L \sin\theta = \frac{2T' L x}{r} = -k_m x$$



腔體之 k_b 計算

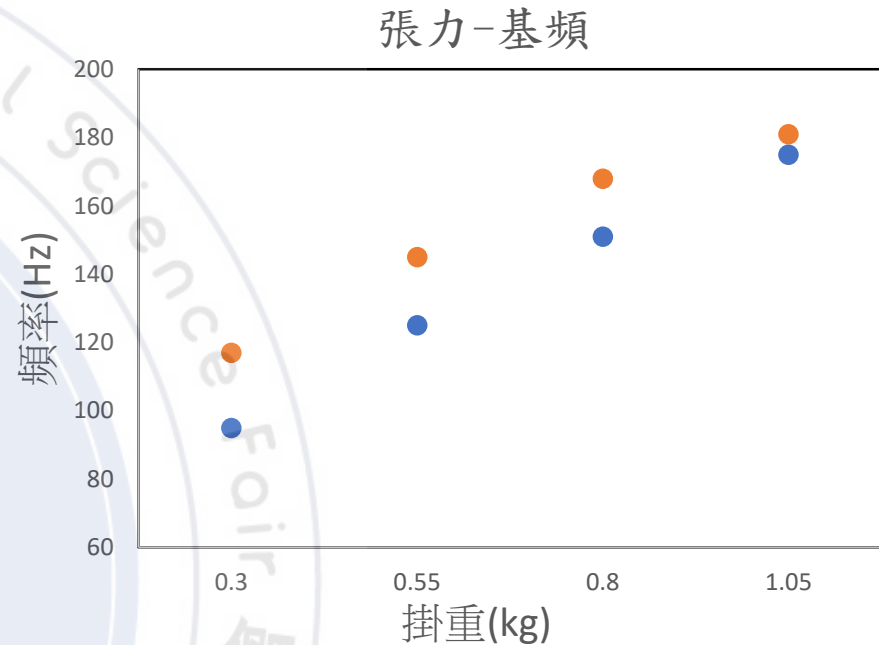
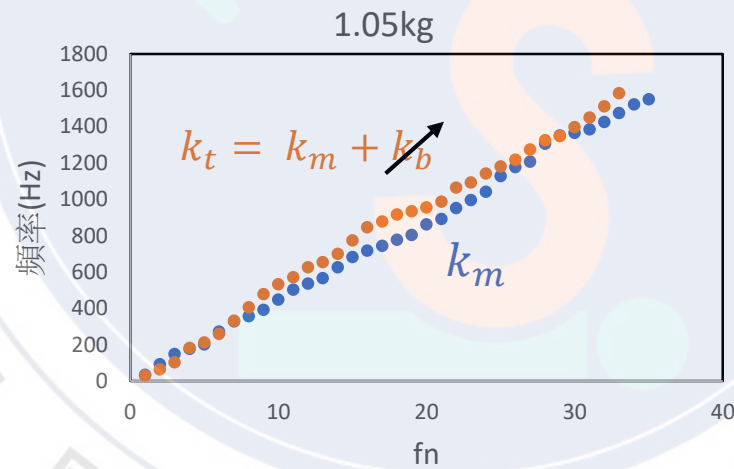
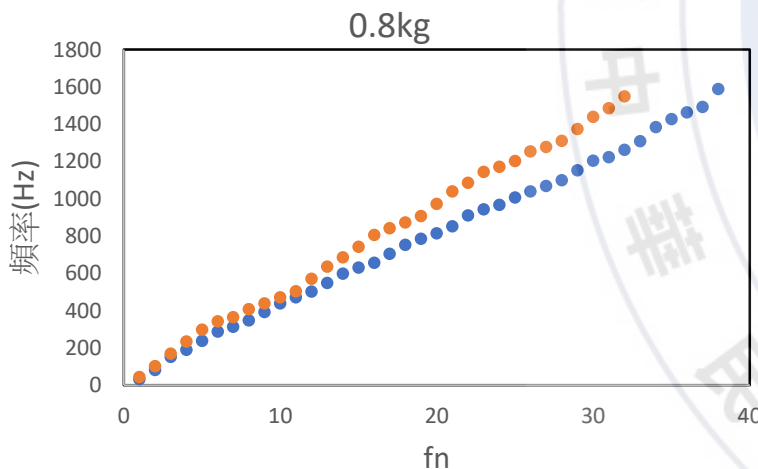
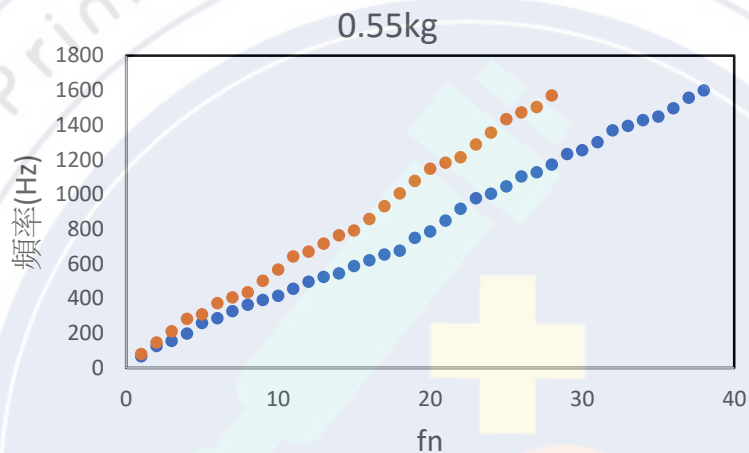
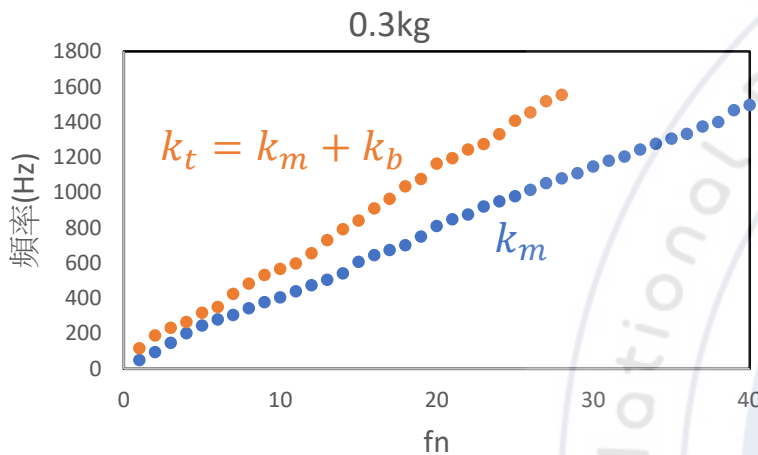
$$\omega = \sqrt{\frac{k_b}{M_A}} = \frac{1}{\sqrt{M_A C_A}} = \frac{1}{C_A} = \frac{\rho_0 c^2}{V}$$



- ω : 頻率
- k : 聲學勁度
- M_A : 有效質量
- C_A : 聲學順性
- V : 有效容積
- ρ_0 : 空氣密度
- c : 聲速
- t : 溫度

張力

掛重 0.3/0.55/0.8/1.05kg
 杯子容積 1138cm³



$$f_{m,n} = \frac{x_{m,n}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

f : 振動頻率
 $x_{m,n}$: 振動模式
 a : 薄膜半徑
 T : 薄膜張力
 σ : 面密度

張力↑

→ 頻率↑

→ 腔體影響↓

→ 純膜和有腔體的頻率相差越小

$$F = 2T'L\sin\theta = -k_mx$$

$$k_t = k_m + k_b$$



有腔體 > 純膜 頻率

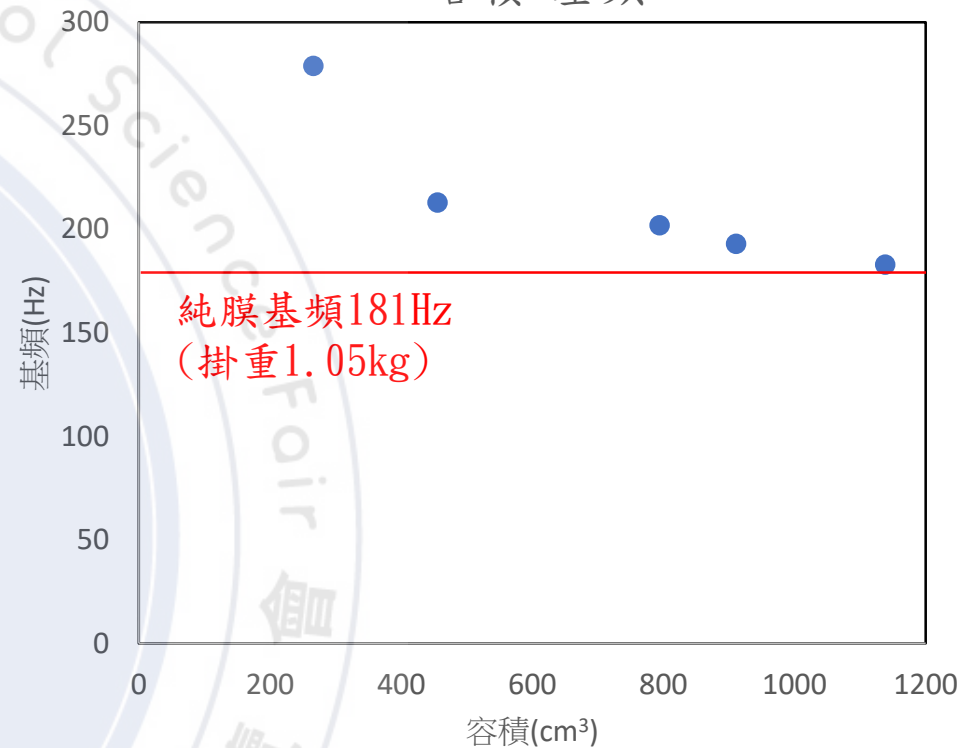
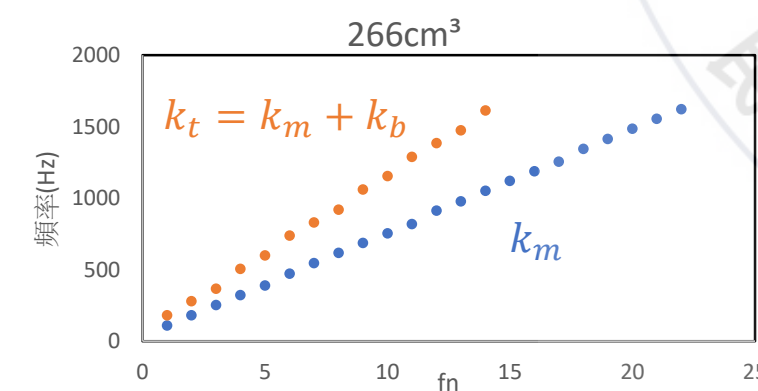
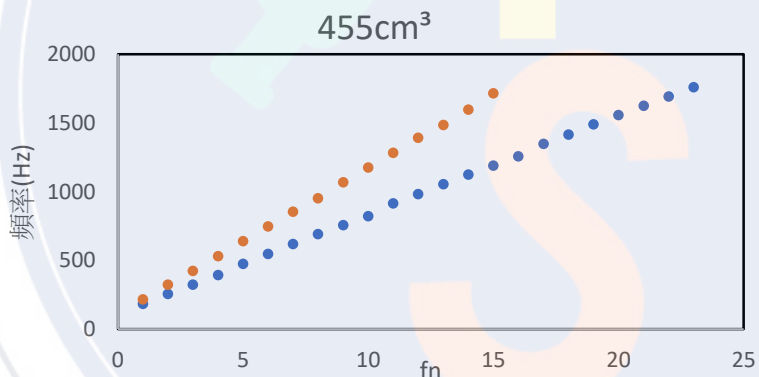
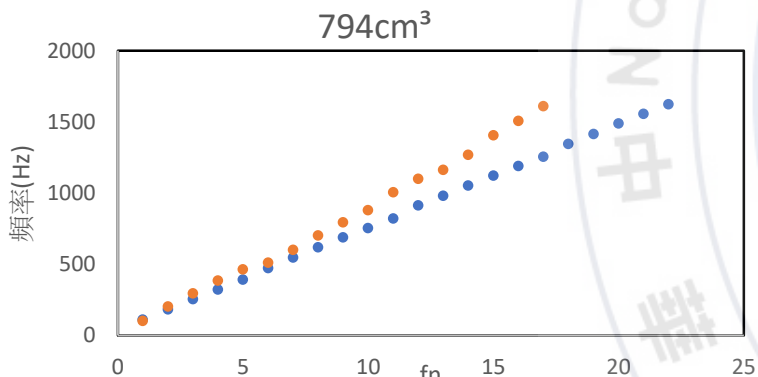
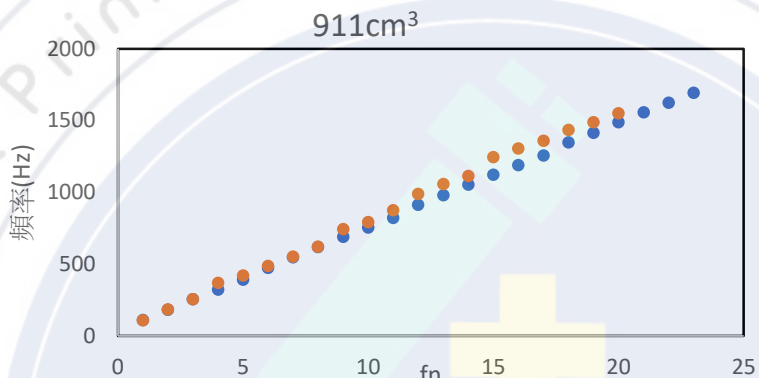
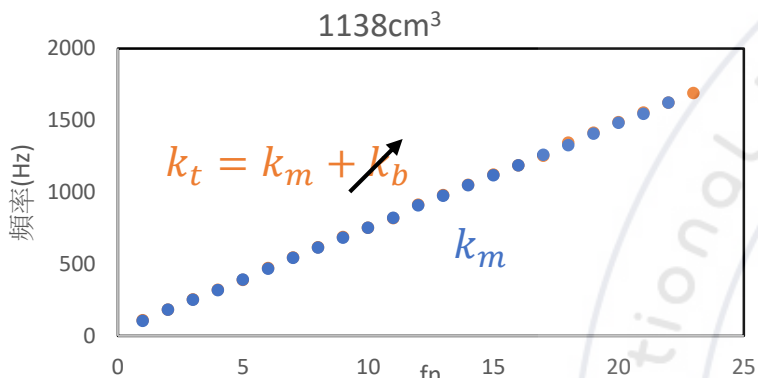
$$k_t = k_m + k_b \quad k_m$$

杯子容積

1138/911/794/455/266cm³
 口徑9.1cm，掛重1.05kg

● 一邊膜 ● 純膜
 $k_t = k_m + k_b$ k_m

容積-基頻



容積↓

→ 頻率↑

→ 腔體影響↑

→ 純膜和有腔體的頻率相差越大

$$\omega = \sqrt{\frac{k_b}{M_A}} = \frac{1}{\sqrt{M_A C_A}}$$

$$k_b = \frac{1}{C_A} = \frac{\rho_0 c^2}{V}$$

$$\omega \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$$

ω : 頻率
 k : 聲學勁度
 M_A : 有效質量
 C_A : 聲學順性
 V : 有效容積
 ρ_0 : 空氣密度
 c : 聲速

膜之 k_m 與腔體之 k_b 計算

膜之 k_m 計算

根據 $\omega = \sqrt{\frac{k_m}{m}} = \sqrt{\frac{2\pi T'}{m}}$ ，我們可以計算 k_m ，首先計算單位長度張力 T' ，當 θ 較小時 $T' = \frac{F}{2R\sin\theta} \approx \frac{F}{\ell}$ ，各掛重之單位長度張力如下

掛重(kg)	0.3	0.55	0.8	1.05
單位長度張力(N/cm)	0.041	0.076	0.111	0.146

從公式可以知道 $k_m = 2\pi T'$ ，因此計算各掛重的 k_m 如下

掛重(kg)	0.3	0.55	0.8	1.05
k_m	0.263	0.483	0.703	0.923

腔體之 k_b 計算

根據聲學順性的公式 $k_b = \frac{1}{C_A} = \frac{\rho_0 c^2}{V}$ ，做實驗時當下 $\rho = 1188\text{g/m}^3$ ， $C=344$ ，經過計算後各容積的 k_b 如下

容積(cm^3)	1138	911	794	455	266
k_b	0.045	0.056	0.075	0.113	0.224

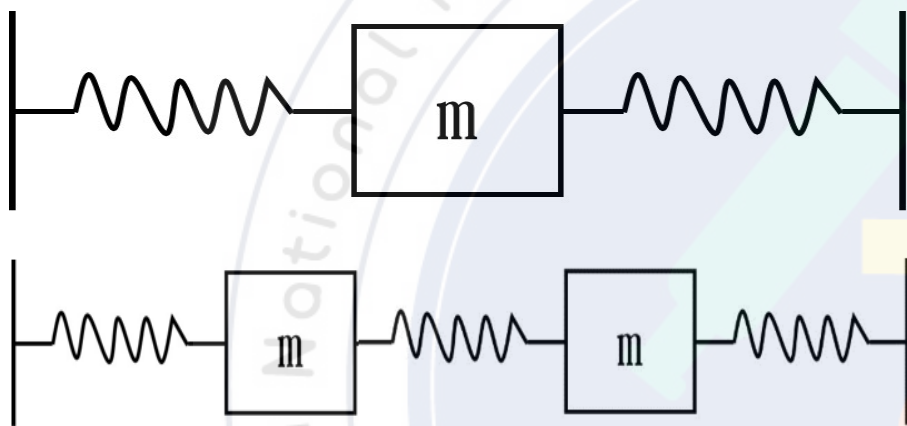
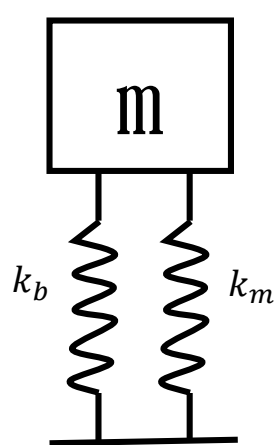
$$k_t = k_m + k_b \cong \begin{cases} k_m & (\text{if } k_b \ll k_m) \\ k_b & (\text{if } k_b \gg k_m) \end{cases}$$

因為當張力為掛重1.05kg($k_m=0.923$)、容積 1138cm^3 ($k_b=0.045$)時，膜與腔體的頻率相近，但當掛重0.8kg、容積為 1138cm^3 時或是掛重1.05kg、容積為 911cm^3 時，頻率就不相近，所以當 $\frac{k_m}{k_b} = \frac{0.9230}{0.0045} \cong 20$ 時，使得最後的 k_t 會被較大的一方影響，也就是 k_m 會主宰最後 k_t ，所以我們認為 k_m 和 k_b 的比約大於20會符合模型中「遠大於」的條件。

雙膜實驗

掛重0.3/0.55/0.8/1.05kg
 杯子容積1138cm³

純膜、一邊膜、雙膜上下膜基頻



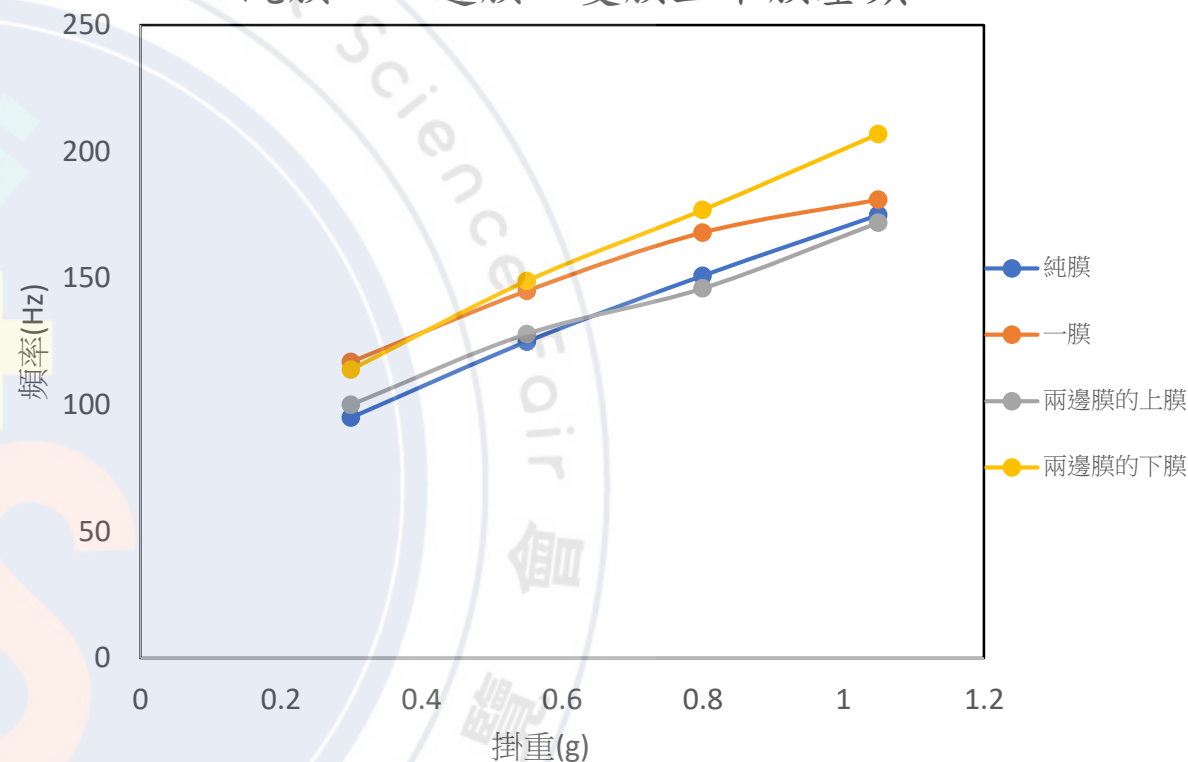
$$M\ddot{x}_1 + (K + K_{12})x_1 - K_{12}x_2 = 0$$

$$M\ddot{x}_2 + (K + K_{12})x_2 - K_{12}x_1 = 0$$

⇓

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$



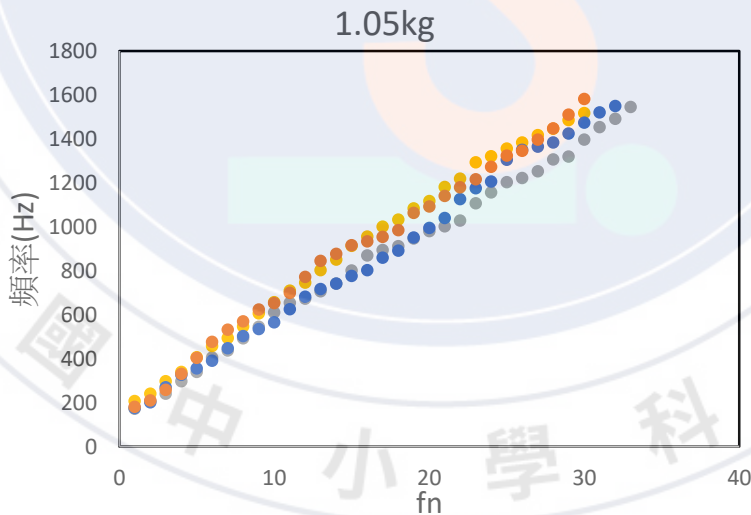
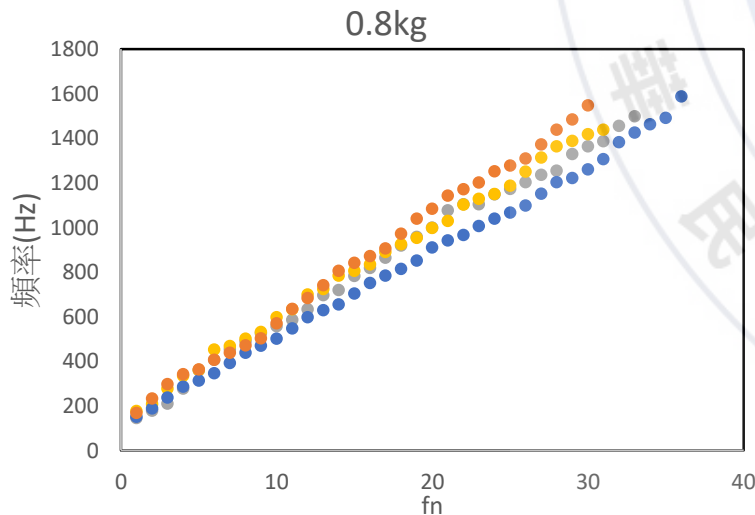
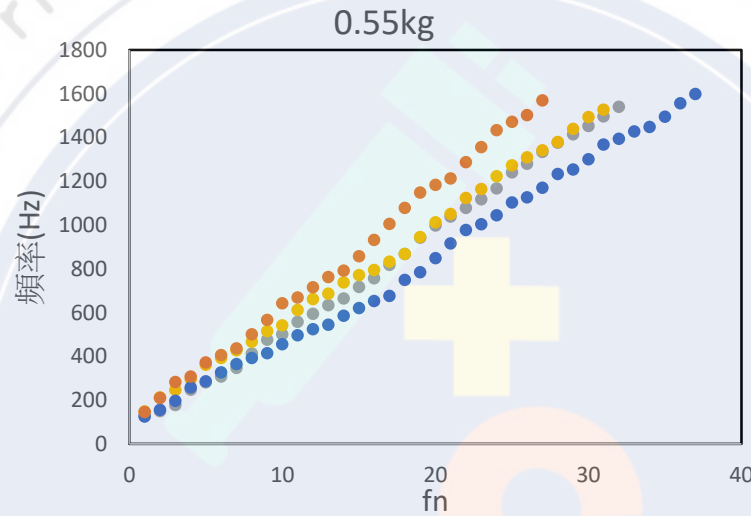
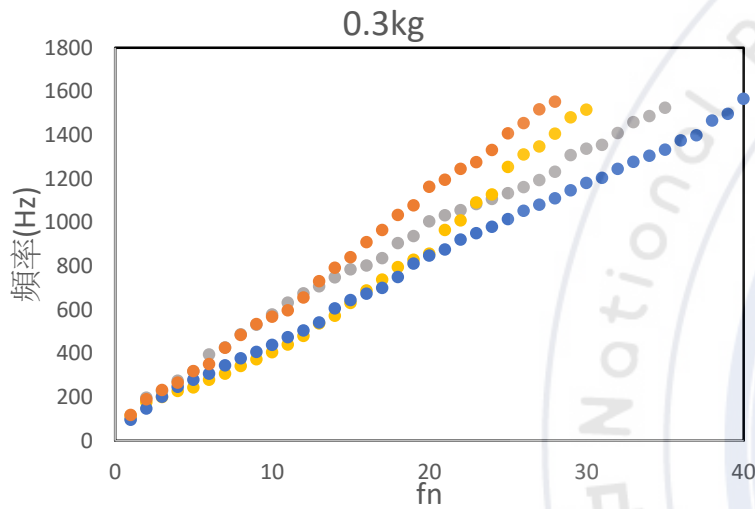
雙膜之上膜 ≡ 純膜

雙膜之下膜 ≡ 一膜

雙膜實驗

掛重 0.3/0.55/0.8/1.05kg
 杯子容積 1138cm³

- 兩邊膜的上膜
- 兩邊膜的下膜
- 純膜
- 一邊膜



$$x_1 = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k_m}{m}}t\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k_m + 2k_b}{m}}t\right)$$

$$x_2 = A_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k_m}{m}}t\right) + A_4 \cos\left(\sqrt{\frac{k_m + 2k_b}{m}}t\right)$$

$$x_1, x_2 \text{ 之 } \omega_{2m} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_m}{m} + \sqrt{\frac{k_m + 2k_b}{m}} \right)$$

由算幾不等式可得

$$\omega_{2m}^2 = \frac{k_m + k_b}{2m} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k_m}{m} \times \frac{k_m + 2k_b}{m}} \right)$$

$$< \frac{1}{2} \times \frac{\frac{k_m}{m} + \frac{k_m + 2k_b}{m}}{2} + \frac{k_m + k_b}{2m}$$

$$\Rightarrow \omega_{2m}^2 < \frac{k_m + k_b}{m} = \omega_{mB}^2$$

$$\therefore \omega_{2m} < \omega_{mB}$$

$$\text{又 } \omega_{mB} = \sqrt{\frac{k_m + k_b}{m}} > \omega_m = \sqrt{\frac{k_m}{m}}$$

$$\Rightarrow \text{得證 } \omega_{mB} > \omega_{2m} > \omega_m$$

一邊膜 > 雙膜 > 純膜

結論

1. 探討聲音的產生：釋放鋼球撞擊膜，鋼球動能轉換為膜的彈力位能，使膜開始振動。在頻譜分析中每一個峰值頻率會代表裝置所產生的模態。
2. 探討聲音和振動時間之關係：前段波形因為鋼球撞擊，抑制了膜的頻率，而中段因鋼球離開膜，被抑制的頻率會重新出現。
3. 探討波形與頻譜分析間的關係：當有一種較明顯峰值的時候，聽到的頻率會與頻譜分析的頻率相符，反之則會是兩相近頻率的合成波。
4. 探討鋼球釋放高度對其聲音的影響：不同釋放高度並不會造成頻率上的影響，但釋放高度越高，能量越大，振幅與聲音持續的時間較長。
5. 探討不同膜張力對其聲音的影響：當膜張力越大時，頻率越高，且受腔體影響越小，交互作用結果符合並聯彈簧理論振動模型。
6. 探討杯子容積對其聲音的影響：當杯子容積越小時，頻率越高，影響最後裝置的發聲程度越大，膜腔交互作用結果符合彈簧並聯振動模型。
7. 雙膜理論振動模型與實驗數據：一邊膜頻率 $>$ 雙膜頻率 $>$ 純膜頻率，且上膜的基頻與純膜基頻相近；下膜基頻與一邊膜基頻相近，符合兩質量三彈簧理論振動模型。

參考資料

- 白明憲, 工程聲學, 修訂一版, 全華科技圖書公司, 2008.
- 力學(第二版). 郑永令 贾起民 方小敏. 高等教育出版社. 2002年版
- Vibrations of Ideal Circular Membranes (e.g. Drums) and Circular Plates, Professor Steven Errede, Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois 2002 - 2017.
- 中華民國第50屆中小學科學展覽會作品說明書, 腔體共振之探討

感謝聆聽