

# 中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

051802

探蹟索「韋」—探討韋氏擺的耦合振盪情形與應用

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者： 高二 陳昀竺 高二 王承皓	指導老師： 賴悅聖
-------------------------	--------------

關鍵詞：韋氏擺、耦合振盪、能量轉換

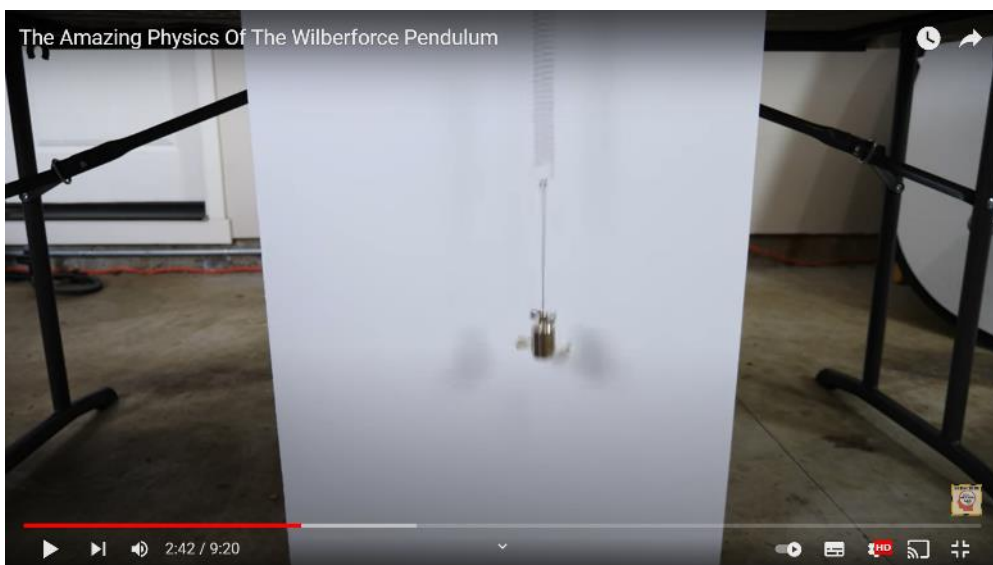
## 摘要

本實驗旨在探討韋氏擺的耦合振盪情形及其應用。振盪情形部分，我們發現韋氏擺出現耦合振盪的條件是垂直振盪與水平轉動週期接近，且兩者差距越小產生的耦合振盪越理想。而韋氏擺能量轉換週期與重物質量呈正相關，卻與下拉長度無關，顯示能量轉換週期和垂直振盪與水平轉動的週期有關，而非系統所含能量。另外雖然平常垂直振盪與水平轉動週期相差較多時並不會形成韋氏擺，但當系統的垂直振動週期為水平旋轉週期的兩倍時形成例外，有明顯的耦合震盪現象，且出現特殊的轉動情形。應用部分，我們利用旋轉角度為零的點算出系統總能量對時間的函數，並將其帶回算出彈簧的扭轉彈力常數，發現得出的值非常接近，說明韋氏擺可應用在彈簧扭轉彈力常數的測定。

## 壹、前言

### 一、研究動機

我們在網路上看到一部影片，影片中的彈簧在振動一段時間後居然開始轉動，且轉動角度越來越大，而垂直振幅逐漸變小，沒過多久轉動角度又逐漸變小，而垂直振幅也逐漸變回原來的大小。我們上網找尋更多關於擁有這種特殊運動模式的彈簧，YouTube 平台看到了一部影片，了解原來這種特別的運動系統叫做「韋氏擺(Wilberforce Pendulum)」，其垂直振動的振幅和水平轉動的旋轉角度會交錯著變大再變小，呈現週期性的循環，稱為耦合振盪。



圖(一) YouTube 影片: The Amazing Physics Of The Wilberforce Pendulum

不過並不是每一組都會出現這樣的現象，當我們隨意取用一組彈簧和重物進行實驗時，結果

就和一般的簡諧振盪沒什麼不同，說明韋氏擺的形成具有一定條件。我們想知道更多有關韋氏擺運動方式的細節，並好奇什麼因素會影響這個現象的發生，於是我們模仿影片中的實驗裝置設計，並著手開始此研究。

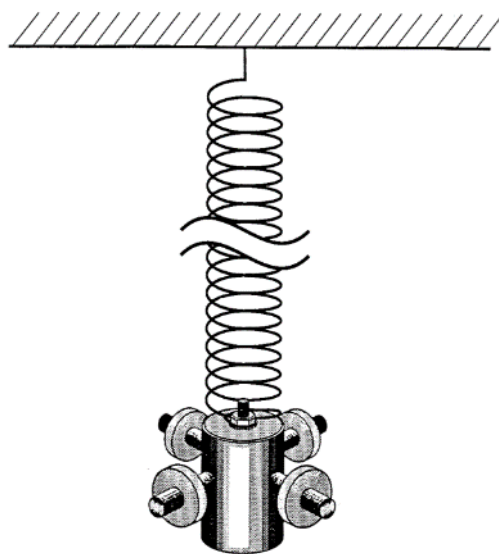
## 二、研究目的

- (一)製作出有耦合振盪情形的韋氏擺裝置
- (二)比較不同重物質量韋氏擺的運動情形
- (三)比較不同振幅韋氏擺的運動情形
- (四)探討影響韋氏擺耦合振盪情形的條件
- (五)利用韋氏擺測定彈簧的扭轉彈力常數

## 三、文獻回顧

Richard E. Berg & Todd S. Marshall (1989, November 6)

在論文中提及，韋氏擺是一種特殊的運動模型，以其發明者 Lionel Robert Wilberforce 的名字命名。它由一個懸掛在柔性彈簧上的質量塊組成(如右圖)，該彈簧可以在標準縱向模式和扭轉模式下自由振盪。當重物被提升至平衡點以上並從靜止狀態釋放時，會沿一條垂直線上下振盪，慢慢地將其能量轉換為旋轉擺動。如果調整重物側面螺紋棒上的螺帽以提供適當的慣性矩，能量便能完全在這兩種振盪模式之間來回轉換。









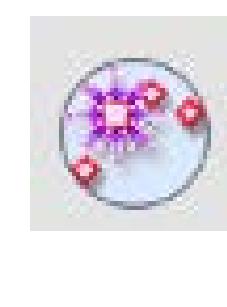



圖(二) 文獻中的韋氏擺裝置

Miro Plavčić, Paško Županović and Željana Bonacić Lošić (2009, August 20) 在論文中提到，彈簧在垂直振盪的過程中引發彈簧半徑微小的變化，這個變化促成了彈簧的扭轉進而產生旋轉擺動，形成耦合振盪。

根據國立中央大學物理學系網站的名詞解釋，耦合振盪是指兩個或多個原來獨立振盪的系統，因彼此間有力的作用，使振盪行為與原本系統之外的振盪產生關連性。

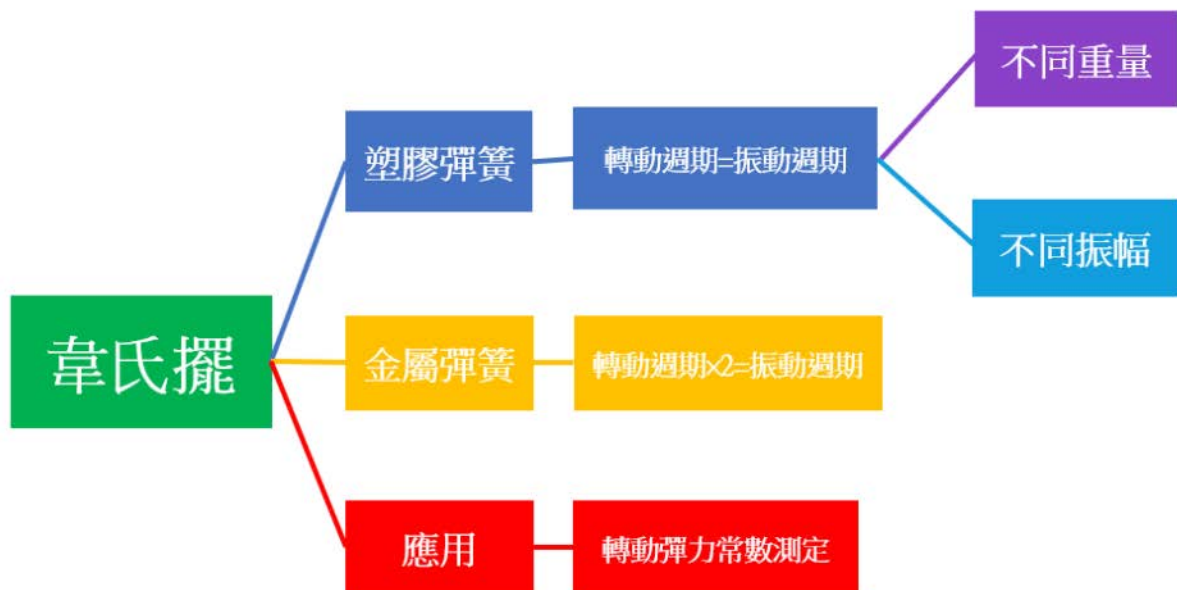
## 貳、研究設備及器材

				
塑膠玩具彈簧	金屬玩具彈簧	紙膠帶	撲克牌(含外殼)	鐵架
				
尺(1公尺)	手機	電腦	Tracker 軟體	Excel 軟體

表(三)

## 參、研究過程或方法

### 一、研究架構



## 二、實驗裝置



圖(四) 實驗裝置圖

(A)使用紙膠帶將彈簧固定在最佳長度

(B)垂直掛放長尺作為標準尺

(C)裝置下方以一支手機仰拍

(D)裝置側面使用一支手機側拍(即為此照片視角)

## 三、研究步驟

### (一)製作韋氏擺裝置

- 1.取撲克牌約 30 g，用紙膠帶固定在塑膠彈簧上。
- 2.將彈簧置於鐵架上，用紙膠帶固定。
- 3.將彈簧下拉 15 公分觀察其運動方式，並逐次調整彈簧的長度(即調整彈力常數)，直到出現韋氏擺的擺動特徵。
- 4.將步驟 3.的彈簧長度做記號並用手機分別從仰拍和側拍記錄下運動過程的影片。
- 5.將撲克牌連同紙膠帶一起取下，測量其重量。
- 6.將影片用 tracker 軟體分析，整理出數據。

### (二)不同重量的韋氏擺

- 1.分別取約 20g、30g、40g、50g 的撲克牌，用紙膠帶固定在塑膠彈簧上。

- 2.將彈簧調整到實驗(一)求得的長度，並用紙膠帶固定在鐵架上。
- 3.將彈簧下拉 15 公分並用手機分別從仰拍和側拍記錄下運動過程的影片。
- 4.將撲克牌連同紙膠帶一起取下，測量其重量。
- 5.將影片用 tracker 軟體分析，整理出數據。

### (三)不同振幅的韋氏擺

- 1.取約 50g 的撲克牌，用紙膠帶固定在塑膠彈簧上。
- 2.將彈簧調整到實驗(一)求得的長度，並用紙膠帶固定在鐵架上。
- 3.將彈簧分別下拉 15、20、25 公分並用手機從仰拍和側拍記錄下運動過程的影片。
- 4.將撲克牌連同紙膠帶一起取下，測量其重量。
- 5.將影片用 tracker 軟體分析，整理出數據。

### (四)金屬彈簧的韋氏擺

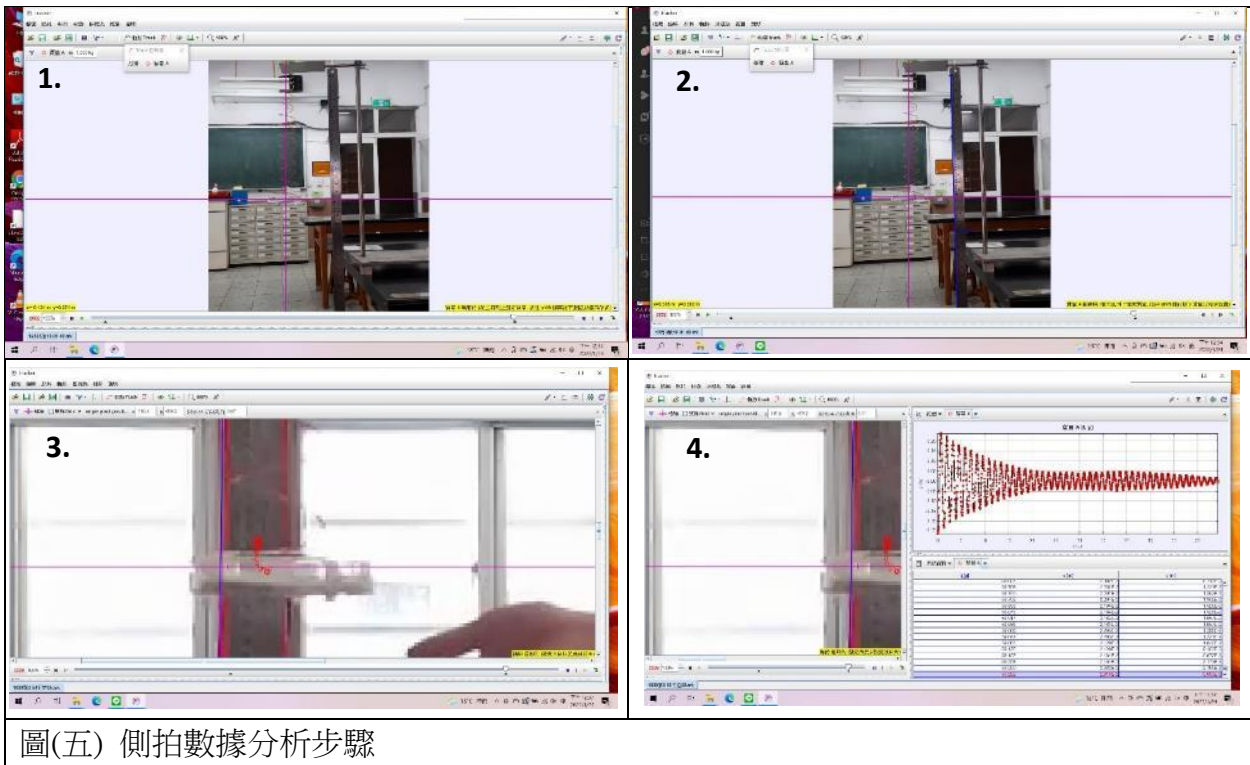
- 1.取約 50g 的撲克牌，用紙膠帶固定在金屬彈簧上。
- 2.將彈簧置於鐵架上，用紙膠帶固定。
- 3.將彈簧下拉 15 公分觀察其運動方式，並調整彈簧的長度(即調整彈力常數)，直到垂直振動週期為水平旋轉周期的兩倍。
- 4.將步驟 3.的彈簧長度做記號並用手機分別從仰拍和側拍記錄下運動過程的影片。
- 5.將撲克牌連同紙膠帶一起取下，測量其重量。
- 6.將影片用 tracker 軟體分析，整理出數據。

## 四、實驗數據分析方法

### (一)側拍

- 1.將參考座標軸的原點移到平衡位置(紫色十字處)。
- 2.沿著尺設定 1m 的校正桿以校正振幅長度(藍色直線)。
- 3.設定一質點，點在撲克牌的中心處。
- 4.取y座標的資料，匯入 excel 進行分析繪圖。

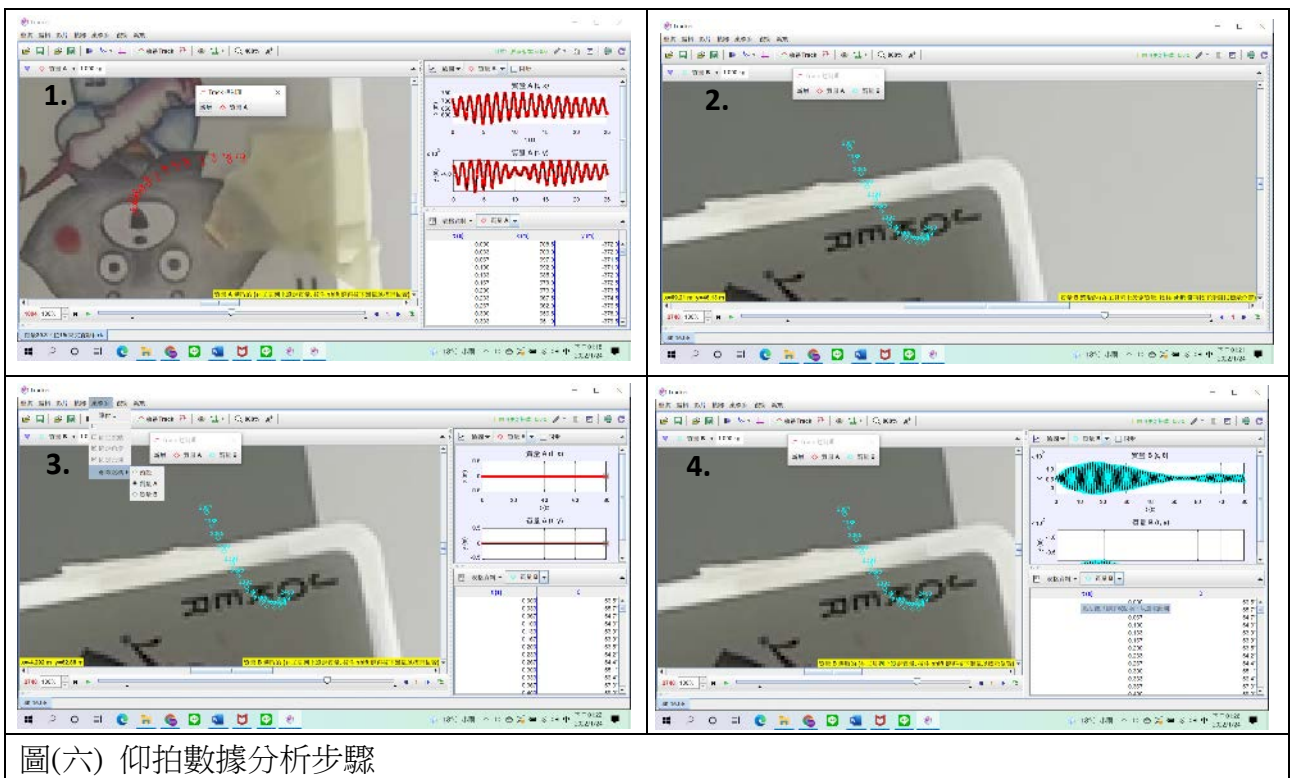




圖(五) 側拍數據分析步驟

(二)仰拍

1. 設定一質點 A，點在撲克牌中心處(人偶的嘴巴中心)。
2. 設定另一質點 B，點在撲克牌角落的 O 字母中心處。
3. 將質點 A 設定為參考座標，質點 B 的  $\theta$  即為轉動角度。
4. 取質點 B 的  $\theta$  資料，匯入 excel 進行分析繪圖。

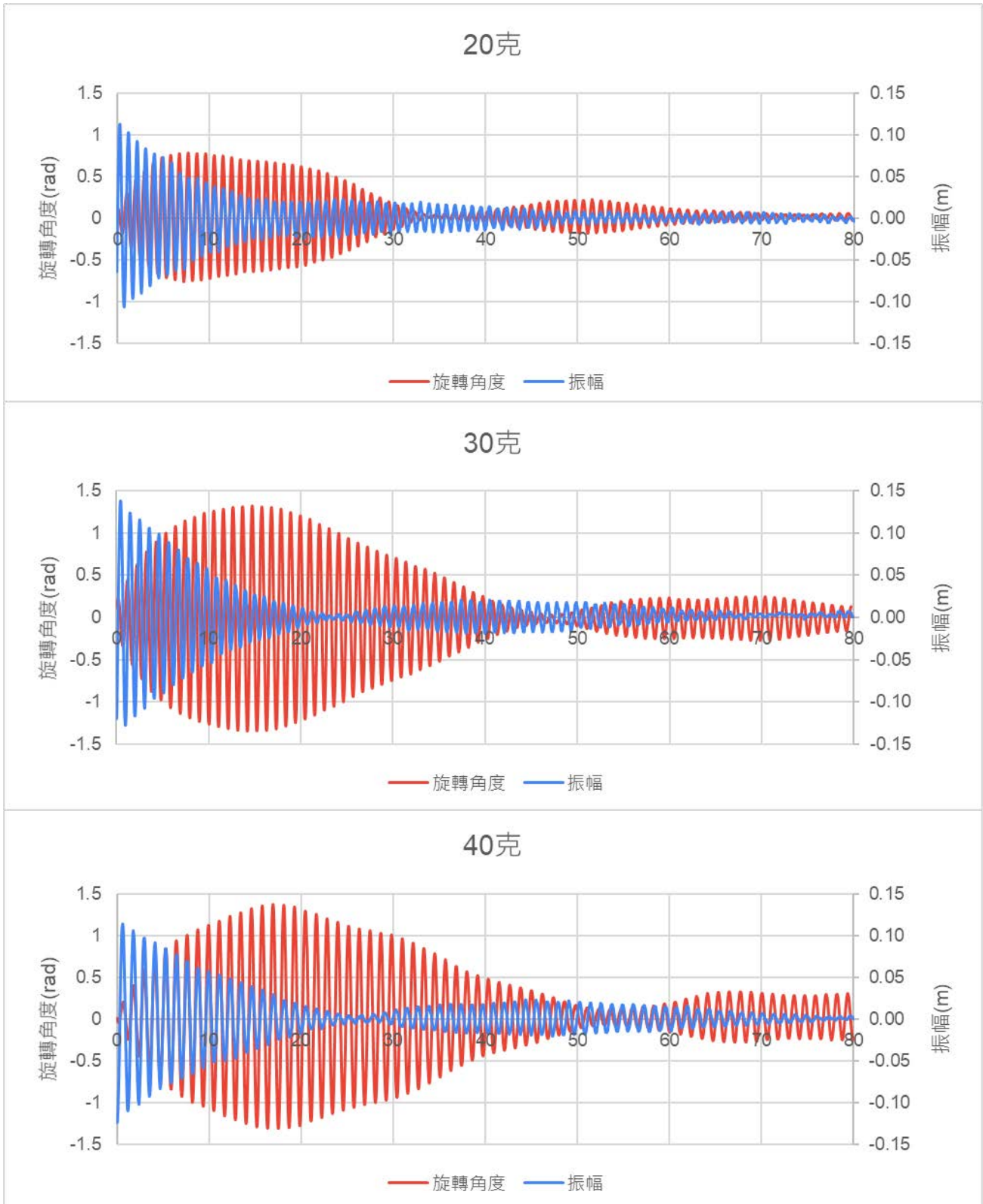


圖(六) 仰拍數據分析步驟

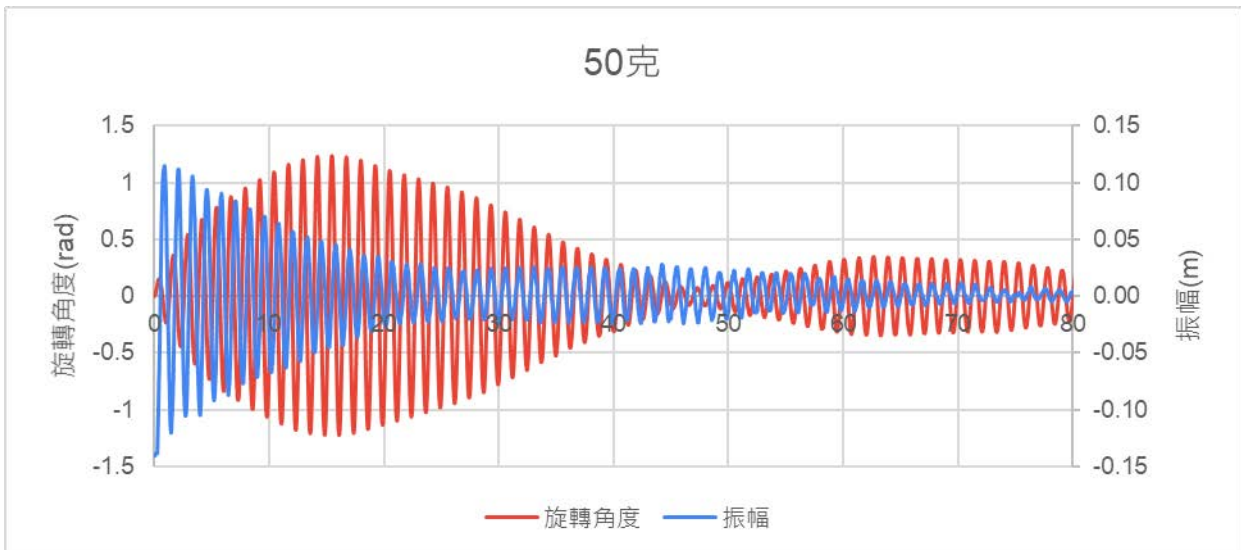
## 肆、研究結果

### 一、不同質量的韋氏擺

首先我們透過調整彈簧長度的方式改變彈簧的彈力常數，直到彈簧出現韋氏擺的運動現象，接著我們取該長度的彈簧分別以四種不同質量的重物進行實驗。







圖(七) 不同質量韋氏擺之運動情形

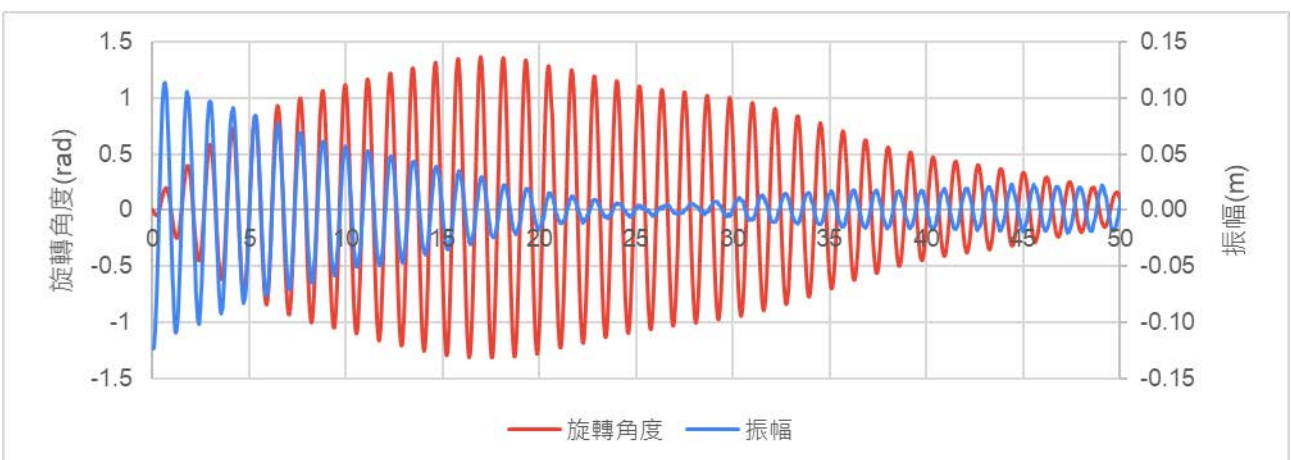
(一)出現耦合振盪

從上圖可以明顯的看出，在沒有扭轉彈簧的前提下，放開彈簧開始做垂直振動後，撲克牌便開始水平旋轉，且旋轉角度明顯不斷增加，直到增加到一定程度後開始下降，同時換成垂直振動的振幅開始增加。這個情形在旋轉角度達到最小後又繼續重複。此結果屬於耦合振盪的表現，似乎顯示在一定條件下，彈簧的垂直振動和水平轉動之間彼此有交互作用。

(二)週期相同可產生耦合振盪

由上圖可以看出，這四組具有一個共通點，其垂直振動的週期和水平轉動的週期幾乎相同，因此我們推測相同的週期可能是形成耦合振盪的條件之一。

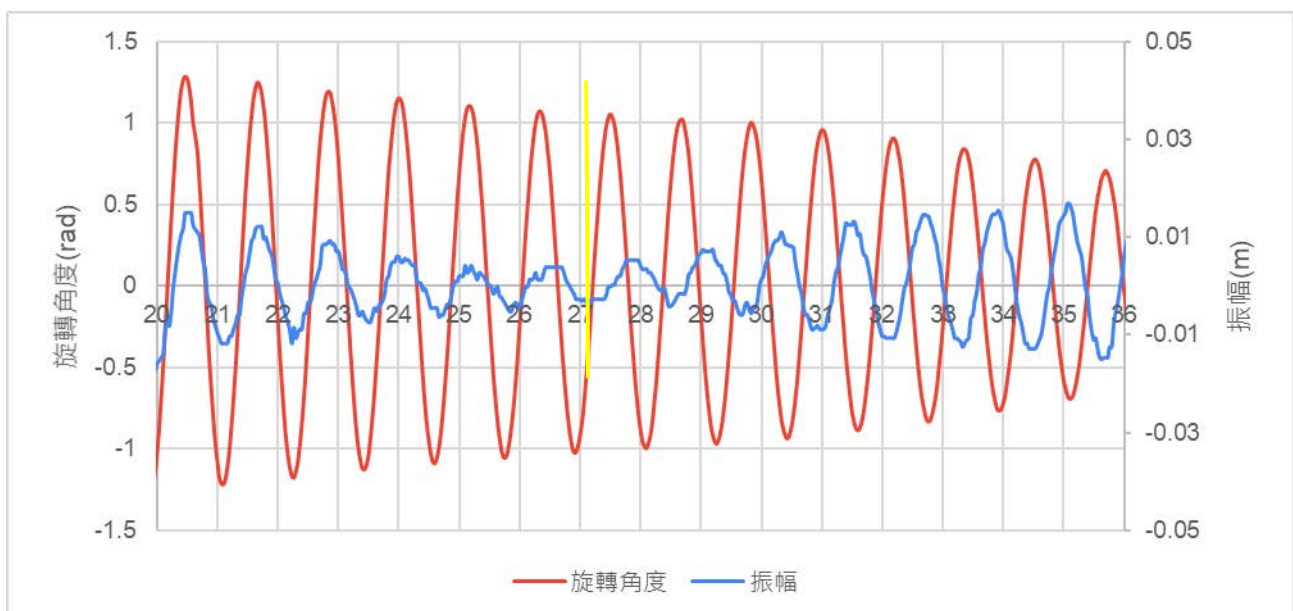
(三)特殊的過渡狀態



圖(八) 40 克韋氏擺運動情形擷取(0-50 秒)

我們推測相同的垂直振動和水平轉動週期是形成耦合振盪的條件之一，然而從上圖卻發現一個奇怪的地方，就是垂直振動週期和水平轉動週期形成的圖形並沒有完整的嵌合在一起。以40克為例，10秒左右的地方可以明顯看出當垂直振動的振幅是正值(即向上)時，水平轉動的旋轉角度也恰為正值(即向左)，且其同時到達極限(速度為零)，而40秒左右的地方垂直振動的振幅是正值(即向上)時，水平轉動的旋轉角度為負值(即向右)，但仍同時到達極限(速度為零)。換句話說，從10秒至40秒的時間會使垂直振動和水平旋轉的周期數相差 $1/2$ ，但這與結果(二)假設矛盾，於是我們決定仔細檢視其運動情形來找出原因

從圖(八)可以發現大約23秒到30秒之間震動開始呈現些微不協調，特別是在最振幅到達最小時突然有一個扭曲的曲線。為了方便觀察，我們將圖片局部放大：



圖(九) 40克韋氏擺運動情形擷取(20-36秒)

由圖(九)可以看出，當振幅接近最小值時，振動曲線較不圓滑，有一些細小的抖動，似乎顯示能量的轉換相對不穩定，而且圖形並非呈現標準的正弦函數，而是以圖(九)標示的黃線為界，以左頂點向左偏，以右頂點向右偏，直到振幅逐漸變大後情況才趨於穩定。再者，黃線處的頂點呈現一個平台狀，顯示其並不是振動到最底時直接回彈，而是停留了一段時間，加上振動曲線在接近最小值時不穩定，有兩三次的振動週期似乎略大於平時，我們推測這可能是造成垂直振動和水平轉動圖形會中途岔開的原因。另外，我們發現以黃線為界，兩邊的圖形很像以黃線為自由端的波反射，顯示其能量的轉換與表現方式可能與波的反射方式相似。

#### (四)能量轉換程度和週期差相關

從上圖我們發現，在垂直振動達到第一個最低點時，20 克和 50 克的組別振幅頗大，反觀 30 克和 40 克的組別振幅極小，似乎顯示每一組的能量在水平和垂直間轉換的程度有差異。有鑑於結果(一)推斷出垂直振動週期和水平轉動週期間的關係會影響耦合振盪的產生，因此我們決定以垂直振動週期和水平轉動週期的關係切入，試圖找出造成能量轉換差異的原因。我們列出每一組的垂直振動週期和水平轉動週期，結果如下：

質量		20克		30克		40克		50克	
振 動 週 期	轉 動 週 期	0.866	0.934	1.033	1.033	1.166	1.2	1.132	1.266
		0.833	0.936	1.033	1.034	1.165	1.2	1.134	1.266
		0.853	0.934	1.032	1.033	1.167	1.2	1.129	1.266
		0.832	0.934	1.031	1.033	1.166	1.197	1.136	1.266
		0.833	0.934	1.033	1.034	1.163	1.2	1.134	1.266
平均		0.8434	0.9344	1.0324	1.0334	1.1654	1.1994	1.133	1.266
標準差		0.015405	0.000894	0.000894	0.000548	0.001517	0.001342	0.002646	0
週期差		0.091		0.001		0.034		0.133	

表(十) 不同質量韋氏擺之垂直振動週期和水平轉動週期

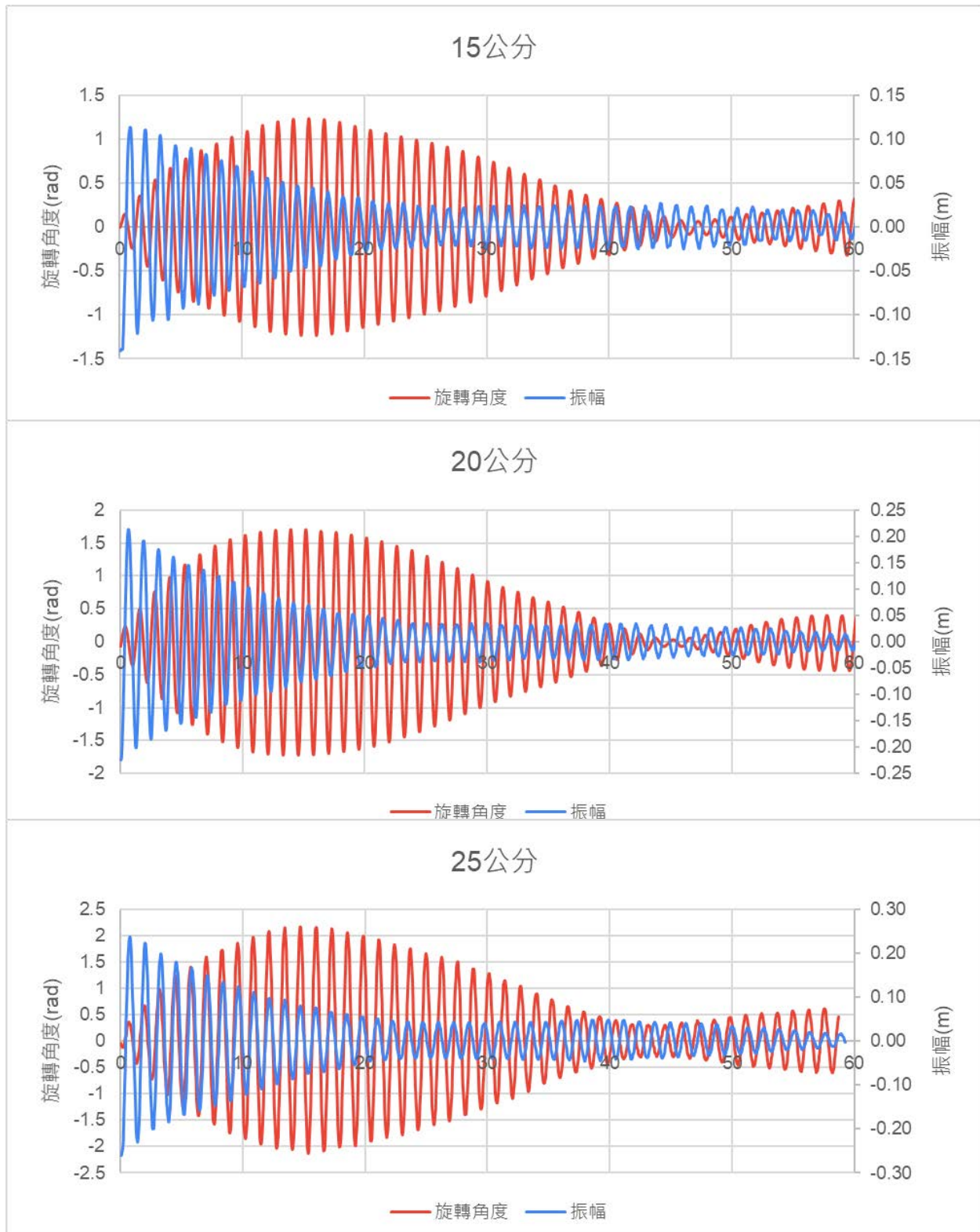
由上圖可以看出 30 克和 40 克的組別其垂直振動週期和水平轉動週期十分接近，而 20 克和 50 克的組別其垂直振動週期和水平轉動週期相差較大，因此可以推測垂直振動週期和水平轉動週期愈接近，其能量在水平和垂直間轉換的程度越大，換言之，垂直振動週期和水平轉動週期愈趨近相同者，會出現愈佳的耦合振盪現象。這個結果也再次印證了結果(二)的推測。

#### (五)韋氏擺能量轉換週期與質量呈正相關

從上圖可以看出，20 克、30 克、40 克的組別其能量轉換週期(垂直振動的振幅或水平轉動的角度從最小到最大再到最小所需的時間)皆隨著質量增加而變大，但 50 克組別的能量轉換週期卻和 30 克的差不多。綜合結果(三)，我們推測可能因為 50 克的垂直振動週期和水平轉動週期相差較大，導致形成的韋氏擺並不標準。所以忽略 50 克組別的結果，我們發現能量轉換週期似乎與系統所含能量多寡成正相關。

## 二、不同下拉長度的韋氏擺

由實驗一可以看出不同質量的韋氏擺有略為相異的運動情形，其中最顯著的就是能量的轉換週期不同。因此我們設計實驗二，固定重物質量，改變下拉長度，創造出質量相同(即垂直振動週期和水平轉動週期相同)但所含能量的不同三個組別，以判斷實驗一的結果(五)，能量轉換週期究竟與重物質量還是所含能量有直接的關聯。



圖(十一) 不同下拉長度韋氏擺之運動情形

### (一)運動狀態相同

由上圖可以看出，15 公分、20 公分、30 公分的組別呈現的運動曲線幾乎相同，只是旋轉角度和振幅等比例的增加，說明相同的質量，在垂直的振動和水平的轉動間有相同的耦合振盪情形。

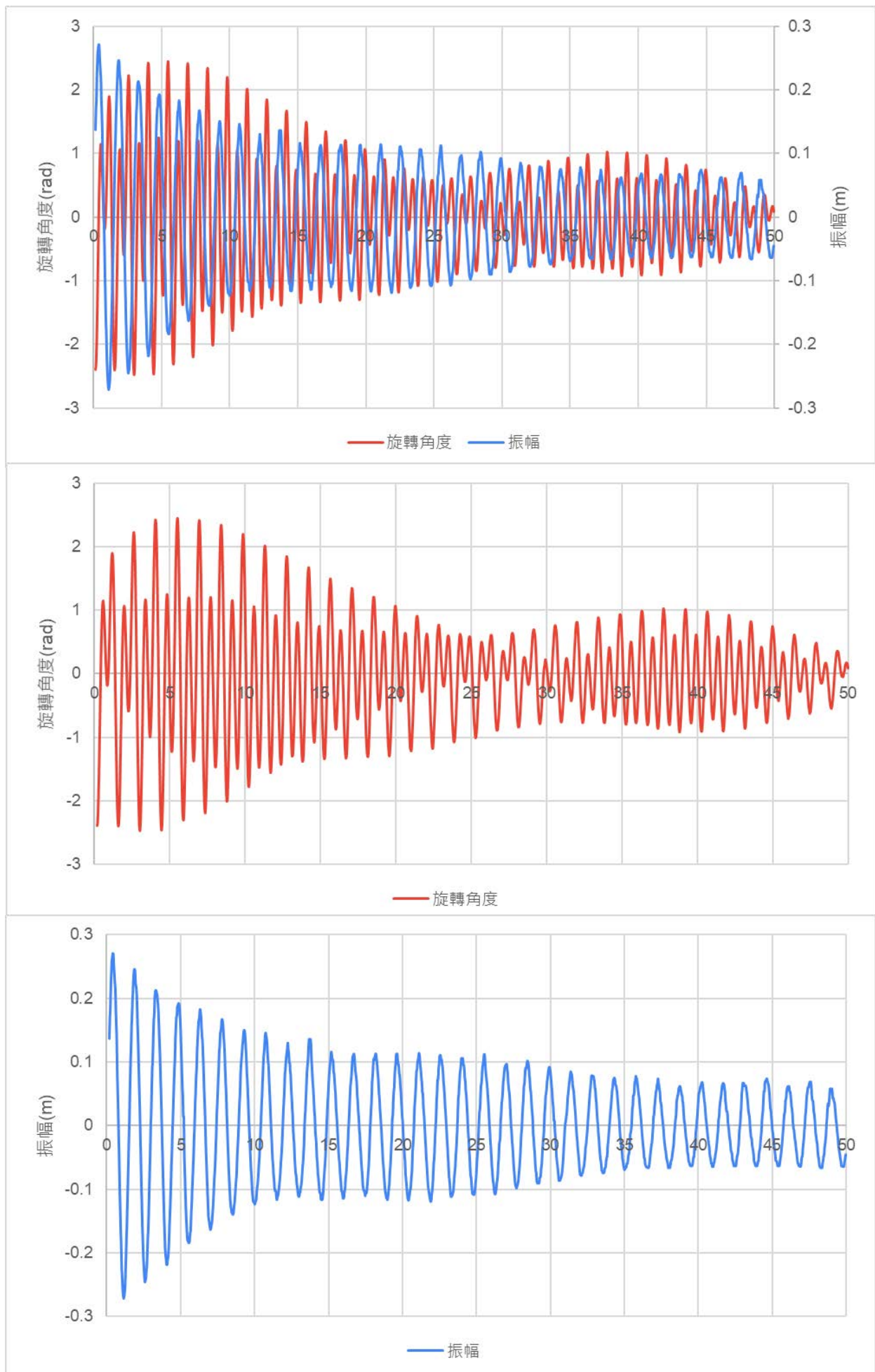
### (二)韋氏擺運動情形和垂直振動及水平轉動週期有關

由實驗二可以得知，下拉長度只和垂直的振幅和水平的旋轉角度大小有關，並不會影響韋氏擺的運動情形，說明系統的能量多寡和其運動並無關係，但實驗一的結果顯示改變重物質量會影響其運動狀態，因此我們認為韋氏擺的運動模式最直接的影響因素是垂直振動即水平轉動的週期。綜合實驗一和實驗二的結果，我們推測在垂直振動週期和水平轉動週期差距極小時(意即趨近理想的韋氏擺)，能量在垂直振動和水平轉動間的轉換週期和該週期的量值有關。

### 三、振動週期為旋轉週期兩倍的韋氏擺

根據實驗一和實驗二可以確定，當垂直振動週期與水平轉動週期相同時，可以形成耦合振盪。於是我們想嘗試一下，若是兩者呈現倍數關係，會不會有甚麼特殊的運動情形。首先我們嘗試了垂直振動週期/水平轉動週期=1/2 的情況，結果下拉後並沒有出現耦合振盪，並非韋氏擺。而後我們想嘗試垂直振動週期/水平轉動週期=2 的情形，但由於塑膠彈簧伸縮和扭轉的彈力常數無法提供這種條件，於是我們另外選用金屬的彈簧來製作，結果發現實驗不僅出現了韋氏擺的運動模式，其水平方向還出現了特殊的轉動情形。





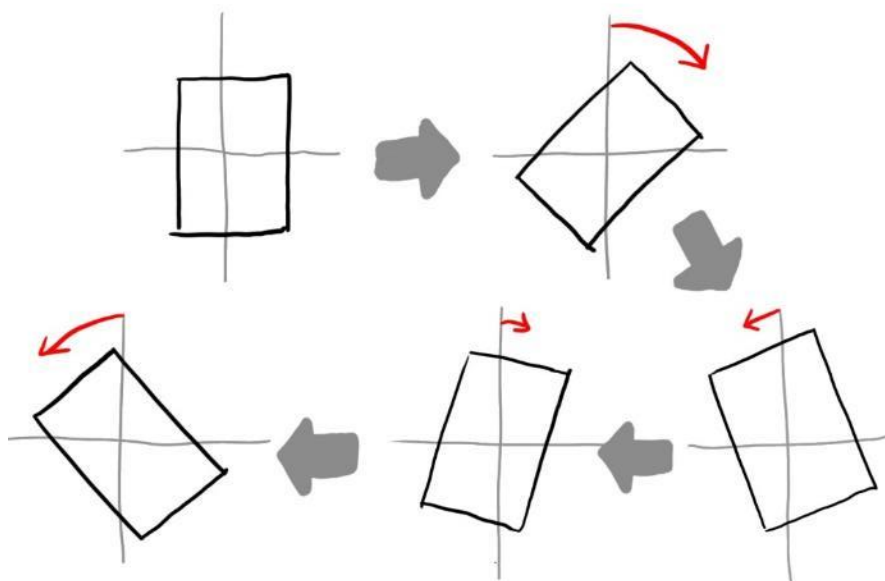
圖(十二) 振動週期為旋轉週期兩倍的韋氏擺之運動情形

### (一)出現耦合震盪的運動情形

從上圖可以看出來，此裝置有出現垂直的振動與水平的轉動交替著變大變小的情形，雖然與垂直振動水平轉動週期相同的理想韋氏擺比起來垂直振動振幅的變化較小，能量轉換得沒有很完全，但從水平旋轉的圖可以看出有出現明顯的水平旋轉，且旋轉角度有明顯的起伏變化，證明垂直振動週期/水平轉動週期=2 的情形能量亦可在垂直振動與水平轉動間流動，形成耦合振盪。

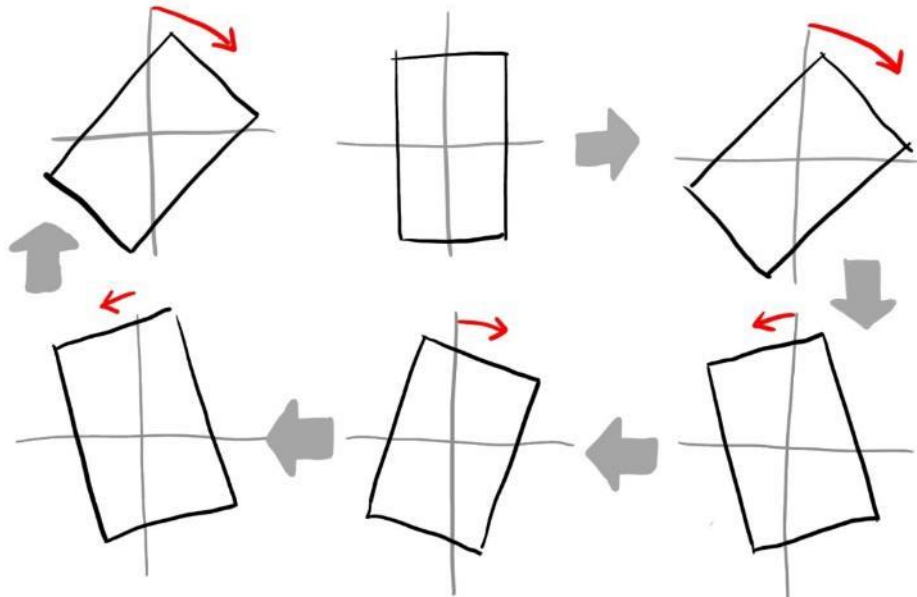
### (二)特殊的水平轉動情形

從上面水平轉動的圖可以發現，其旋轉的方式呈現一個有趣的規律:向其中一邊(左方或右方)轉動一個大角度後，轉一個小角度向另一邊，又轉一個小角度回原來的方位，再度轉一個大角度向另一邊，如此反覆循環。



圖(十三) 振動週期為旋轉週期兩倍的韋氏擺之特殊水平轉動示意圖

而隨著轉動的時間增加，其中一邊的大角度會慢慢縮小，最後在水平轉動到達低谷(意即能量最少)的過渡期出現向其中一邊轉動一個大角度後轉一個小角度向另一邊，又轉一個小角度回原來的方位，再轉一個小角度向另一邊，最後轉一個大角度回原來的方向。



圖(十四) 振動週期為旋轉週期兩倍的韋氏擺之特殊水平轉動的過渡期示意圖

這種轉動情形持續隨著過渡期結束而慢慢回到平時的轉動方式(如圖(十三))。

之所以會有這樣反向位(anti-phase)的情況發生，是因為在這組實驗組中我們採用了振動週期為旋轉週期兩倍的韋氏擺，由於其振動週期為轉動週期的兩倍，因此在能量轉移時會有延遲的現象，導致其旋轉相位在整個能量轉換過程中會有反向位的情況發生

## 伍、討論

從我們的實驗可以分別看出能量在垂直方向和水平方向的轉換，但並不能得知系統整體的能量變化情形，所以我們試著將系統的總能量計算出來。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\kappa\theta^2$$

其中  $m$  為重物質質量， $v$  為振動速度， $I$  為轉動慣量， $\omega$  為轉動角速度， $k$  為彈簧伸縮的彈力常數， $x$  為以平衡長度為基準點的振幅， $\kappa$  為彈簧扭轉的彈力常數， $\theta$  為轉動角度。

首先我們先算出轉動慣量  $I$ 。我們先整理出不同幾何形狀的轉動慣量公式：

矩形(長  $a$ /寬  $b$ /質量  $m$ ):  $\frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$

圓形(半徑  $r$ /質量  $m$ ):  $\frac{1}{2}mr^2$

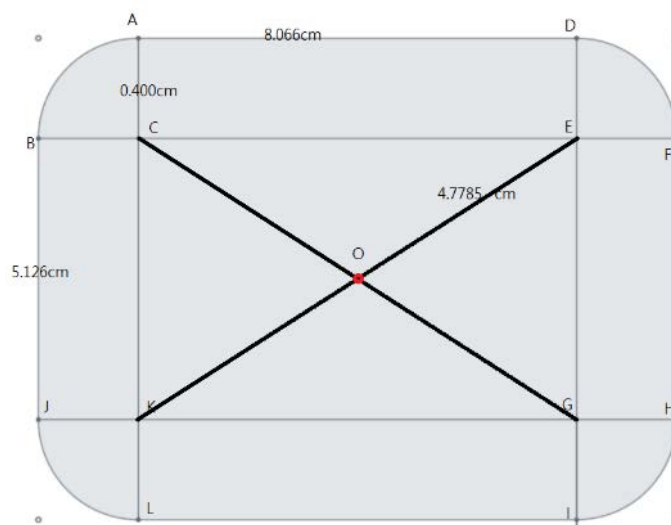
球形(半徑  $r$ /質量  $m$ ):  $\frac{2}{5}mr^2$

圓筒(半徑  $r$ /高  $h$ /質量  $m$ ):  $m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$

平行軸定理: 若將質量  $m$  轉動慣量  $I_0$  的原物平移至距離轉軸  $x$  處，則轉動慣量  $I = I_0 + md^2$

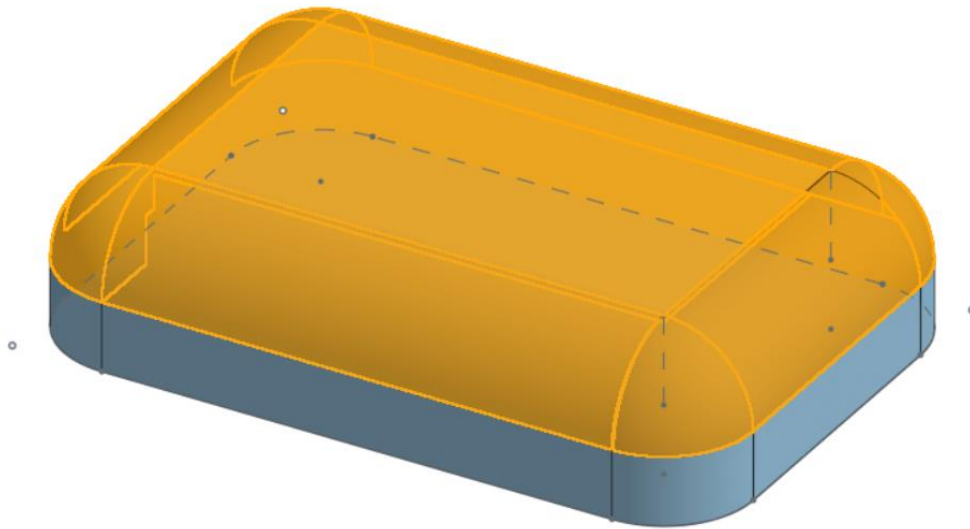
伸展定理: 將物體沿轉軸平行移動，則物體的轉動慣量不變。

接著我們用上述的公式分別算出撲克牌、盒蓋、盒身、固定撲克牌部分的轉動慣量再相加



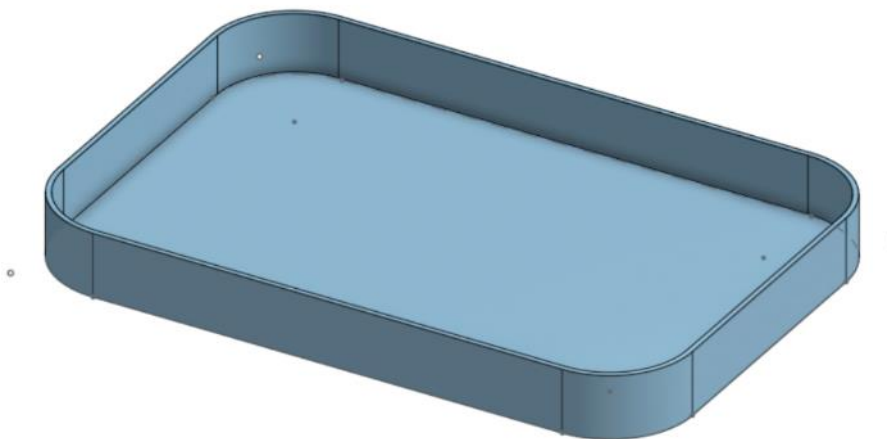
圖(十五) 撲克牌示意圖

首先是撲克牌。經由測量，我們得知一張撲克牌質量為 1.654 克，而每條線段長度如上圖所示，我們將此撲克牌分成：扇形 ABC，矩形 ADEC，扇形 DEF，矩形 EFHG，扇形 GHI，矩形 GILK，扇形 JKL，矩形 BCKJ 以及矩形 CEGK。根據矩形及圓形的公式以及平行軸定理可算出一張撲克牌的轉動慣量為  $12.3449496 \times 10^{-7}$ ，再由伸展定理可知若有  $n$  張撲克牌則轉動慣量為  $n \cdot 12.3449496 \times 10^{-7}$ 。



圖(十六) 撲克牌盒蓋示意圖(黃色部分)

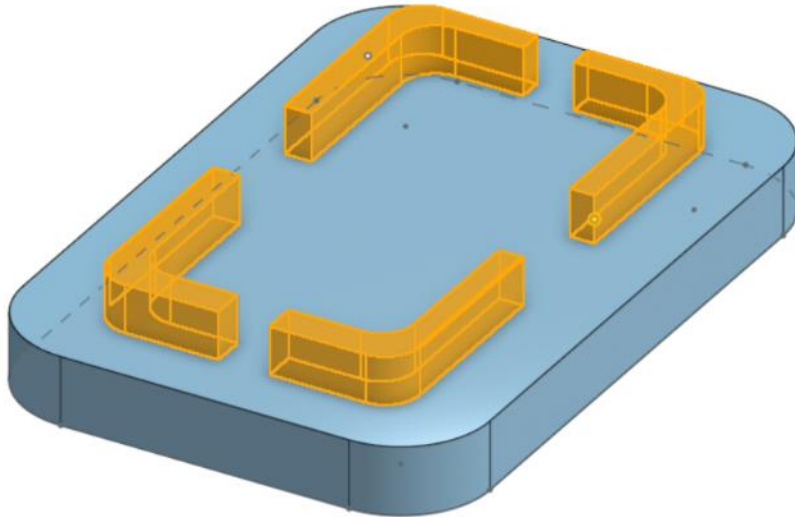
接著我們根據矩形、球形、圓筒的公式以及平行軸定理，依照撲克牌的計算方法計算出盒蓋的轉動慣量為  $167.08348 \times 10^{-7}$ 。



圖(十七) 撲克牌盒身示意圖

再來我們根據矩形、圓形、平行軸定理以及伸展定理，計算出盒身的轉動慣量為  $137.49971 \times 10^{-7}$ 。





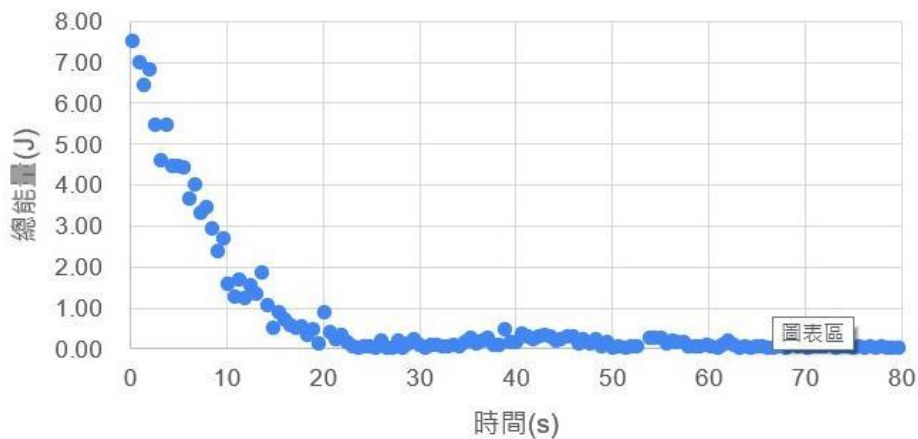
圖(十八) 固定撲克牌部分示意圖(黃色部分)

最後我們根據矩形、圓形、平行軸定理以及伸展定理可以計算出固定撲克牌部分(黃色處)的轉動慣量為  $21.01689 \times 10^{-7}$ 。

綜合上面的計算，我們得知重物的轉動慣量  $I$  為  $(325.60008 + n \times 12.3449496) \times 10^{-7}$ ，其中  $n$  為撲克牌張數。

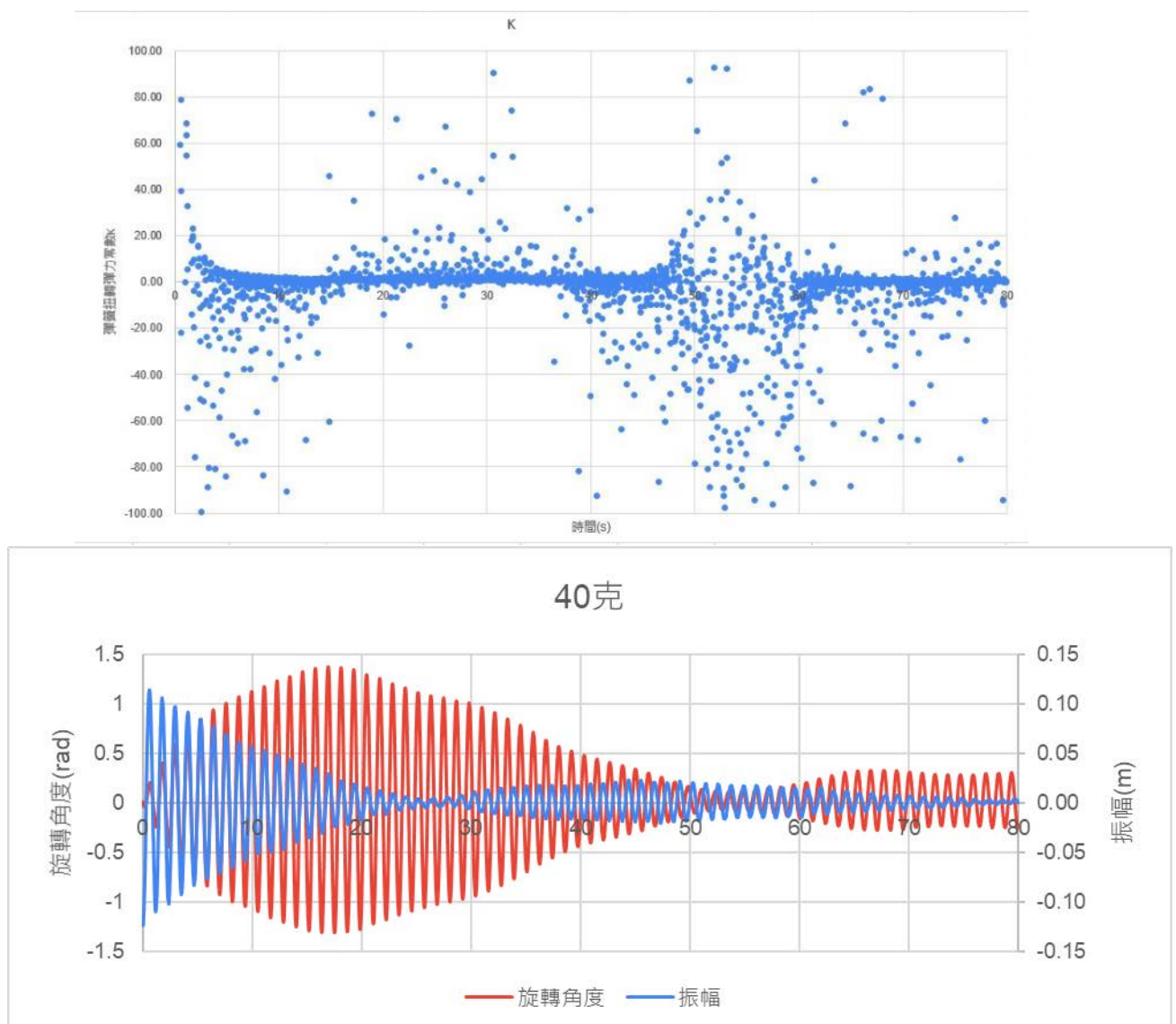
計算完轉動慣量後，我們決定以耦合振盪情形理想的 40 克組別進行總能量的計算，然而我們因為設備限制無法求出彈簧扭轉的彈力常數  $\kappa$ ，不過因為旋轉週期小的緣故，每秒約會出現兩次  $\theta$  趨近零的時候，樣本點數量足夠，因此我們決定取  $\theta$  趨近零的點來計算總能量對時間的變化。

40克總能量對時間圖



圖(十九) 40 克組別總能量對時間圖

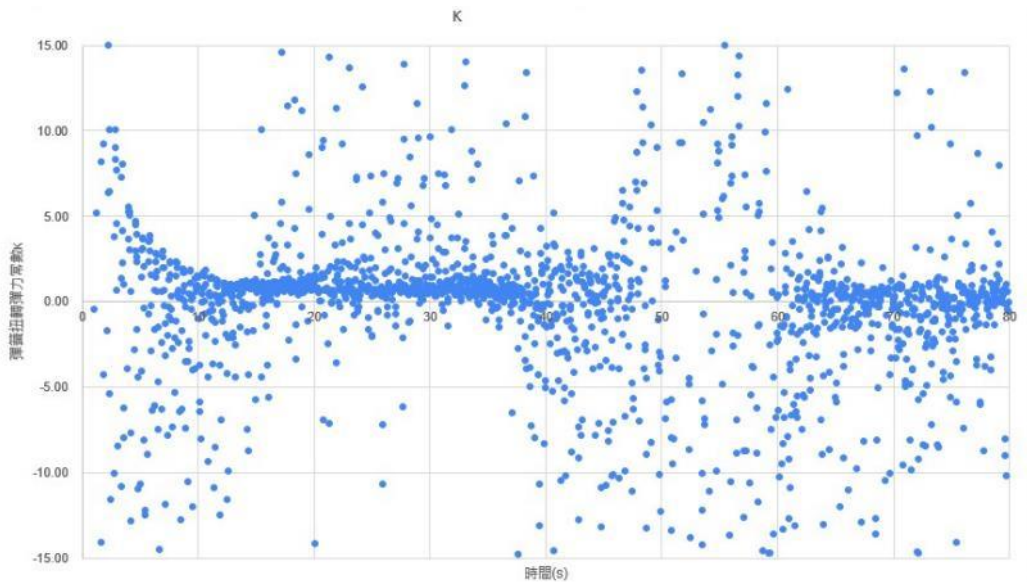
從圖中可以看出能量從開始到 20 秒呈現快速下降，到 20 秒之後就逐漸趨緩，似乎呈現出對數函數的特徵。我們想到通常彈簧簡諧振盪總能量衰減的情形對時間的函數都能以  $E = Ae^{-Bt}$  的形式呈現，如果可以找出系統每一個時間點的總能量，便可利用總能量進一步反推彈簧的  $\kappa$ 。我們用 excel 軟體得出 40 克組別總能量對時間的函數為  $E = 1.852e^{-0.062t}$ ，我們將該函數帶入每一個觀測點的時間，就可以得出每一點的總能量  $E$ ，接著把  $E$  減去已知的  $(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2)$ ，就可以得出  $\frac{1}{2}\kappa\theta^2$ ，其中  $\theta$  為已知的數值，因此我們就可以求出  $\kappa$ 。我們將每一點求出的  $\kappa$  做成圖：



圖(二十) 每一觀測點算出的  $\kappa$  值與對照的運動狀態圖

從此圖可以看出， $\kappa$  大致集中在某個範圍，有部分零星的點數值極高是因為  $\theta$  很小，導致用

$\frac{1}{2} \kappa \theta^2$  除上  $\theta^2$  時值變得很大，而對照前面實驗結果的運動狀態圖可以發現，剛開始時旋轉角度從零逐漸變大，而 50~60 秒是水平轉動的角度到達低點的時候，這兩段時間內所有的旋轉角度都很小，導致算出的  $\kappa$  數值很大且分散。忽略那些零星的數值，為了更清楚看到集中區域的  $\kappa$  數值我們將圖(二十)的縱座標範圍縮小，做出一個更細的圖：

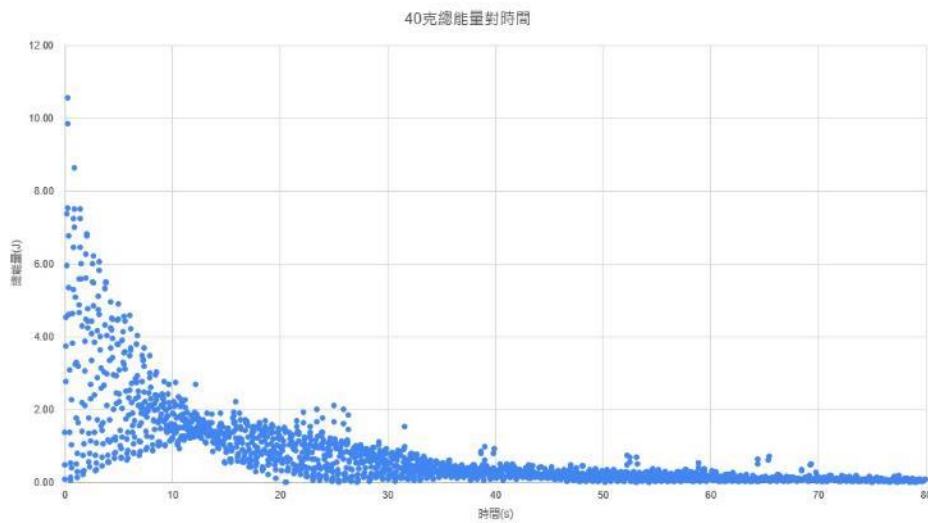


圖(二十一) 每一觀測點算出的  $\kappa$  值(縱座標範圍縮小)

從圖(二十一)可以看出，放大檢視後的  $\kappa$  值依然集中在一定範圍。經過計算，我們得出  $\kappa$  的平均為 1.75，與上圖的點集中區域相符。

為了進一步確認用這種方法算出的  $\kappa$  是否有參考價值，我們將  $\kappa = 1.75$  帶回  $E = \frac{1}{2}mv^2 +$

$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\kappa\theta^2$  算出推導的 E 值，並用推導的系統總能量對時間作圖：



圖(二十二) 用推導出的  $\kappa$  算出的 40 克組別總能量對時間圖

然而顯示的結果並不是一條線，輪廓線下面還有好多點，形成一個類似面的狀態，不過 10~15 秒的部分這種情形比較沒有那麼嚴重。我們馬上聯想到，這種情形可能跟前面出現部分數值極大的  $\kappa$  有相同的道理，都是因為  $\theta$  很小，因此只要數值有非常小的誤差就會導致整個算出的值有很大的偏差。我們隨機點取約 30 個圖上的點進行驗證，結果證實了我們的猜想，那些下面的點的確都有很小的  $\theta$  值。所以如果只看上面的輪廓線的話，結果與圖(十八)的結果十分相近，證明用韋氏擺的裝置來進行  $\kappa$  的測量是可行的，且算出的數值具有參考價值。

## 陸、結論

一、一般情況下影響韋氏擺耦合振盪情形的條件:

- (一)垂直振盪週期與水平轉動週期相同
- (二)垂直振盪週期與水平轉動週期愈接近形成的耦合振盪愈理想
- (三)系統振幅愈大(下拉長度愈長)所形成的韋氏擺之垂直振盪振幅與水平轉動角度愈大
- (四)能量轉換週期與垂直振盪與水平轉動的週期有關，而非系統所含能量

二、韋氏擺出現條件例外情形:

當系統的垂直振動週期為水平旋轉週期的兩倍時，也有明顯的耦合震盪現象，屬於韋氏擺。且其水平方向出現特殊的轉動情形

三、韋氏擺可以作為測定彈簧扭轉彈力常數的新方法:

我們可以利用韋氏擺的運動狀態數據建立起系統總能量對時間的關係，進而求出彈簧的扭轉彈力常數。

## 柒、參考資料及其他

(1) The Action Lab. (2020, December 24). The Amazing Physics Of The Wilberforce Pendulum.

YouTube. [https://youtu.be/M0Zjl\\_tMOZg](https://youtu.be/M0Zjl_tMOZg)

(2) Richard E. Berg & Todd S. Marshall. (1989, November 6). Wilberforce pendulum oscillations and normal modes.

(3) Miro Plavčić, Paško Županović, and Željana Bonačić Lošić. (2009, August 20). The resonance of the Wilberforce pendulum and the period of beats.

(4) 國立中央大學物理學系網站。 <https://www.phy.ncu.edu.tw/>



## 【評語】 051802

本作品探討韋氏擺垂直震盪與轉動之耦合運動。它雖然不是一個新的課題，但仍有些可以探討的空間。作者們也看到一些有趣的結果，當系統的垂直振動週期為水平旋轉週期的兩倍時，也有明顯的耦合震盪現象。如果可以繼續追尋耦合的機制，也許會有更多的理解。

## 作品簡報

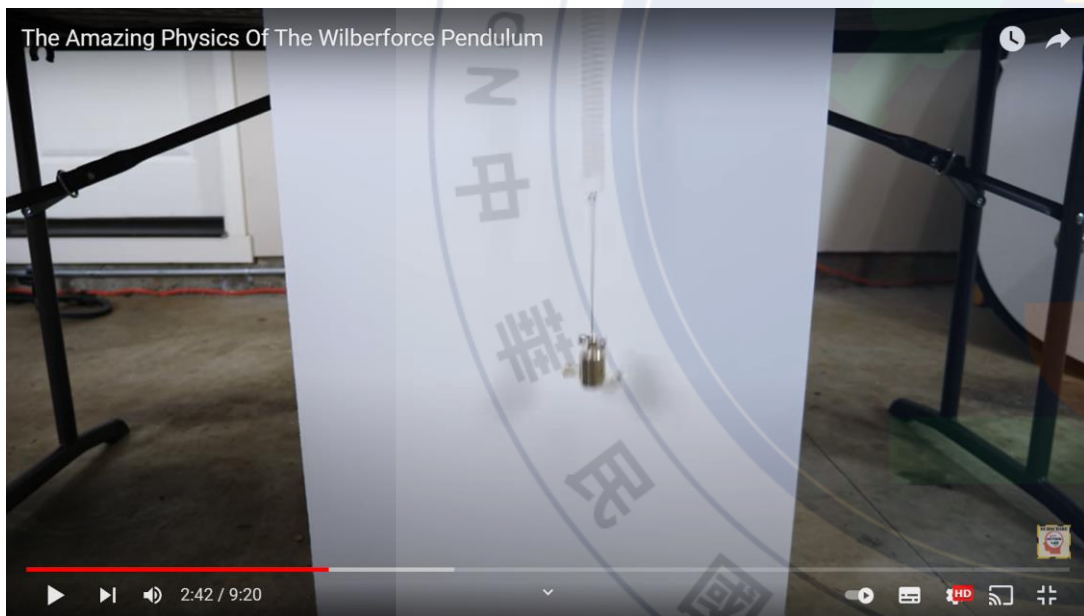
# 探曠索「韋」

探討韋氏擺的耦合震盪情形與應用

關鍵詞:韋氏擺、耦合振盪、能量轉換

# 前言

## 研究動機



## 研究目的

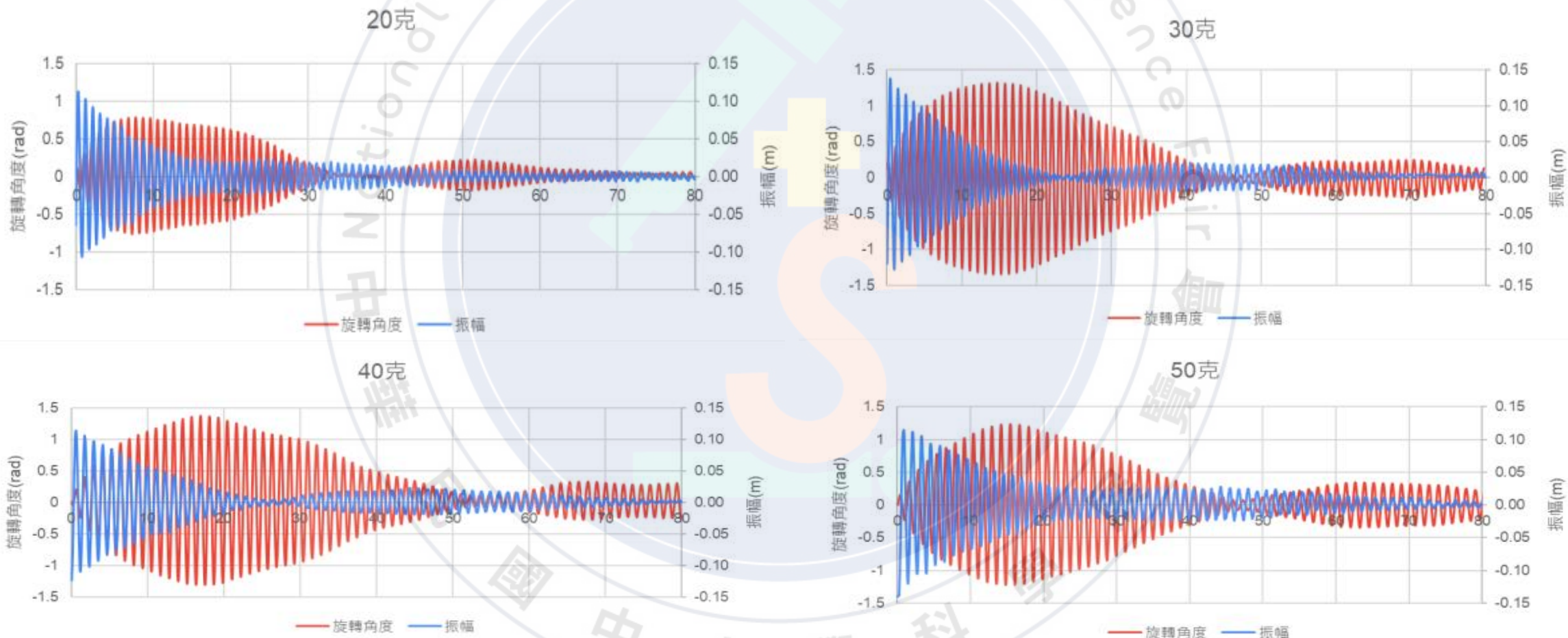
- 一、製作出具有耦合震盪情形的韋氏擺
- 二、比較不同重物質量的韋氏擺運動情形
- 三、比較不同振幅的韋氏擺運動情形
- 四、探討影響韋氏擺耦合震盪情形的條件
- 五、利用韋氏擺來進行彈簧扭轉彈力常數的測定

# 研究架構





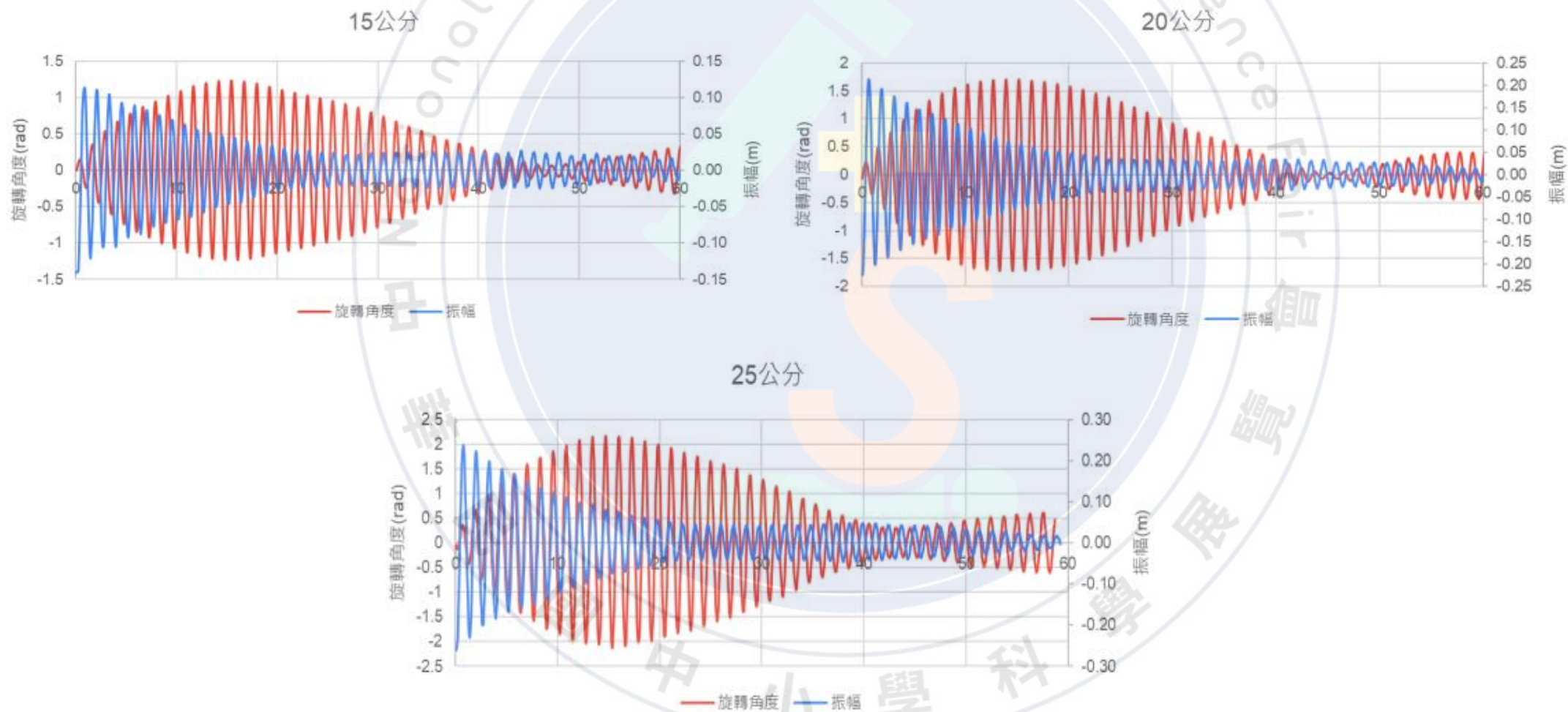
# 研究結果—不同質量



# 研究結果—週期

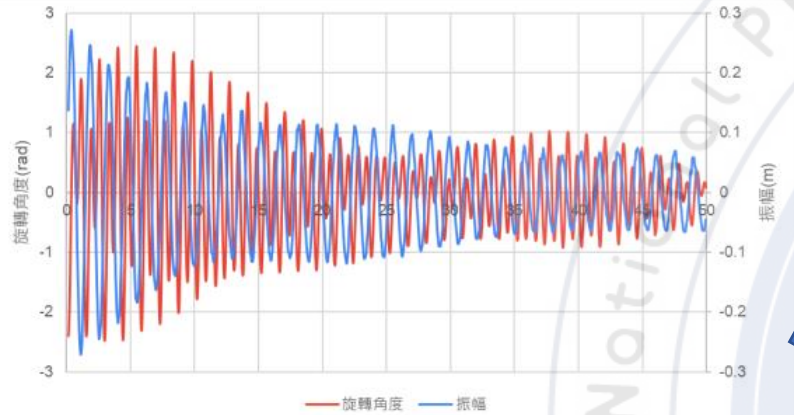
質量		20克		30克		40克		50克	
振動週期	轉動週期	0.866	0.934	1.033	1.033	1.166	1.2	1.132	1.266
		0.833	0.936	1.033	1.034	1.165	1.2	1.134	1.266
		0.853	0.934	1.032	1.033	1.167	1.2	1.129	1.266
		0.832	0.934	1.031	1.033	1.166	1.197	1.136	1.266
		0.833	0.934	1.033	1.034	1.163	1.2	1.134	1.266
平均	0.8434	0.9344	1.0324	1.0334	1.1654	1.1994	1.133	1.266	
標準差	0.015405	0.000894	0.000894	0.000548	0.001517	0.001342	0.002646	0	
週期差	0.091		0.001		0.034		0.133		

# 研究結果—不同振幅

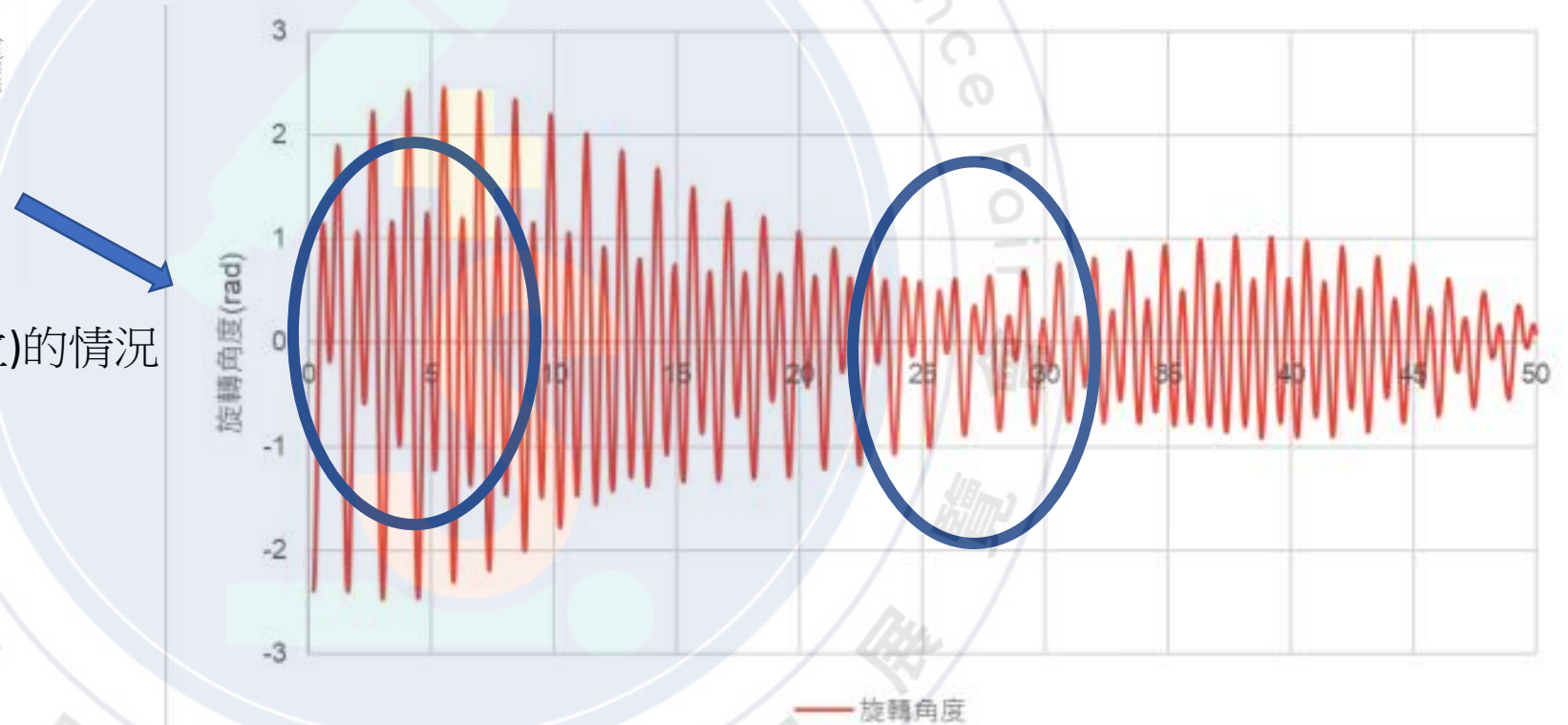




# 研究結果一振動週期為轉動週期兩倍



Anti-phase(反相位)的情況



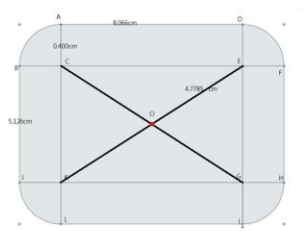
# 討論一總能量變化計算

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\kappa\theta^2$$

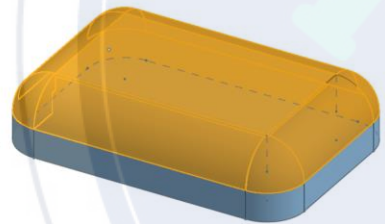
轉動慣量計算

未知  
 $\theta \rightarrow 0$

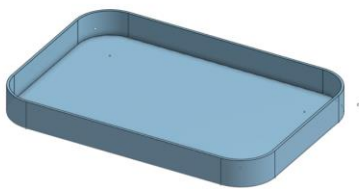
40克總能量對時間圖



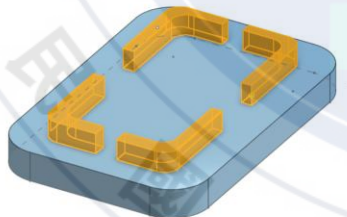
$$I_1 = n \cdot 12.3449496 \times 10^{-7}$$



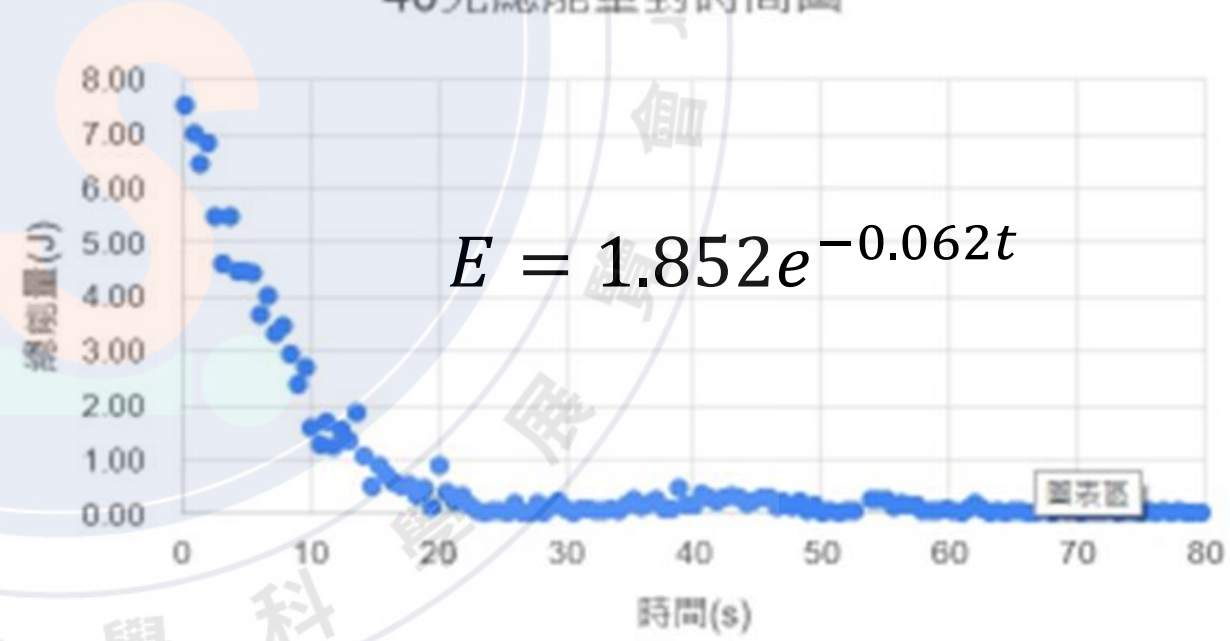
$$I_2 = 167.08348 \times 10^{-7}$$



$$I_3 = 137.49971 \times 10^{-7}$$



$$I_4 = 21.01689 \times 10^{-7}$$



$$E = 1.852e^{-0.062t}$$

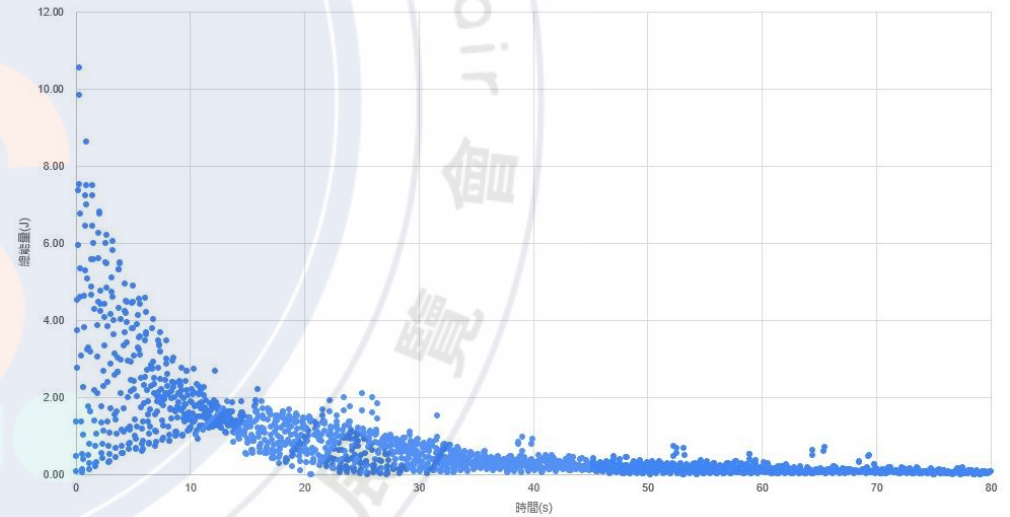
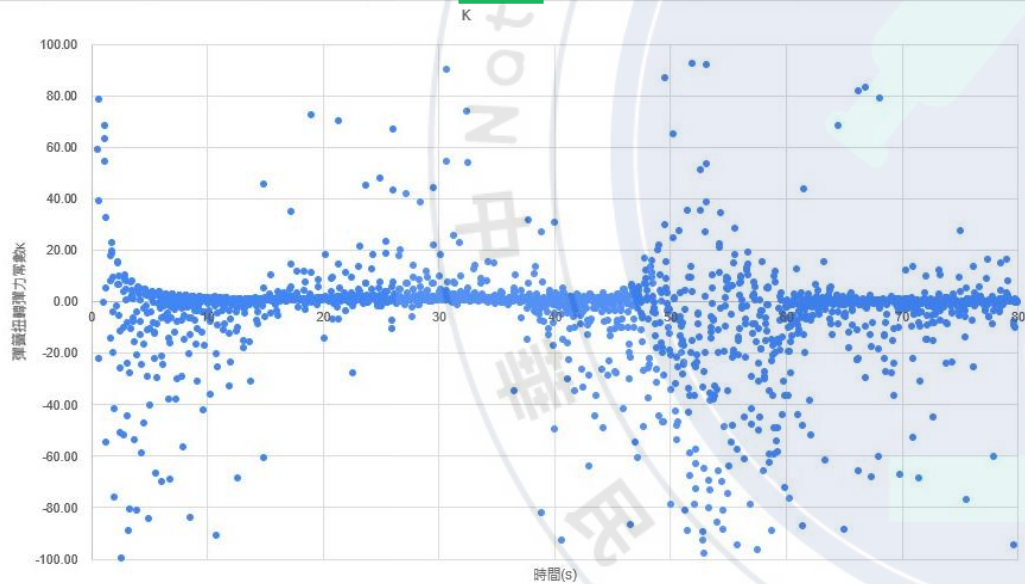


# 討論一彈簧扭轉彈力常數測定

代回

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\kappa\theta^2$$

做圖



$\kappa$ 平均=1.75

# 結論

一、一般情況下影響韋氏擺耦合振盪情形的條件：

(1) 垂直振盪週期與水平轉動週期相同形成耦合振盪

(2) 能量轉換週期與垂直振盪與水平轉動的週期有關

二、韋氏擺出現條件例外情形：

垂直振動週期 = 水平旋轉週期  $\times 2$ ，有特殊轉動情形

三、韋氏擺可以作為測定彈簧扭轉彈力常數的新方法

# 參考資料

- (1) The Action Lab. (2020, December 24). The Amazing Physics Of The Wilberforce Pendulum. YouTube. Richard E. Berg & Todd S. Marshall. (1989, November 6). Wilberforce pendulum oscillations and normal modes.
- (2) Miro Plavčić, Paško Županović, and Željana Bonačić Lošić. (2009, August 20). The resonance of the Wilberforce pendulum and the period of beats.
- (4) 國立中央大學物理學系網站。  
<https://www.phy.ncu.edu.tw/>