中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050419

詐欺遊戲之少數決

學校名稱：新北市立海山高級中學

作者：	指導老師：
高二 董妍亭	葉昱昕

關鍵詞：少數決、期望值、約瑟夫(Josephus)問題

摘要

「少數決勝淘汰遊戲」就是每位玩家開始時付出 1 單位的代價，並針對 N 個玩家（劇中為 22 個）連續對一些二選一的選項投票，由少數一方獲勝，獲勝者始得進入下一輪的投票，直到剩下一位或兩位玩家為止，若只剩下一位，則由該玩家獲得最後的 N 單位獎金，若剩兩位，則由兩位玩家平分最後的 N 單位獎金，但所有人需償還原來遊戲開始時所付出 1 單位的代價。而日劇「詐欺遊戲」的主角提出「遊戲中結盟共 M 個玩家（劇中為 8 個）即能保證必勝」的方法。本研究打算藉由歸納法來探討在 N 個玩家下保證我方至少一人獲得最後勝利的結盟人數 M 並平分獲利，同時研究遊戲中的最高獲利、最低獲利與可以得到獲利的期望值為何？最後我巧妙的利用二進位來解決問題。

壹、前言：

一、研究動機：

最近看了韓劇「魷魚遊戲」後就對這類生存遊戲感到有趣，後來因緣際會下看到日劇「詐欺遊戲」其中第二回的「少數決勝淘汰遊戲」，覺得跟我們剛學的數列與級數與機率似乎有點關係，所以就求教老師，在老師的引導下探討該問題。而探討過程中發現與約瑟夫問題有些關聯性，就仿照約瑟夫問題，使用二進位法來解決問題中的最高獲利與最低獲利。

圖 1：魷魚遊戲，取自於 carousell 的銷售圖

二、研究目的：

「少數決勝淘汰遊戲」就是每位玩家遊戲開始時付出 1 單位的代價（劇中為一億日圓），並針對 N 個玩家（劇中為 22 個玩家）連續對一些二選一的選項投票，由少數一方獲勝，獲勝者始得進入下一輪的投票，直到剩下一位或兩位玩家為止，若只剩下一位，則由該玩家獲得最後的 N 單位獎金，若剩兩位，則由兩位玩家平分最後的 N 單位獎金，但所有人需償還原來遊戲開始時所付出 1 單位的代價。而日劇「詐欺遊戲」的主角提出「遊戲中結盟共 M 位玩家（劇中為 8 個玩家）即能保證必勝」的方法。本研究打算藉由歸納法來探討在 N 個玩家下

保證我方至少一人獲得最後勝利的結盟人數 M，同時研究遊戲中的最高獲利與最低獲利，另外我們也討論其他未結盟的玩家若採隨機回答，則可以得到獲利的期望值為何？最後我巧妙的利用二進位來解決問題。

三、文獻回顧：

「詐欺遊戲」（Liar Game）是根據日本漫畫家甲斐谷忍原作的同名漫畫所改編的電視劇，第一季由 2007 年 4 月 14 日起在富士電視台週六劇場首播，有第二季作品。少數決出自於第一季電視劇第 3-5 集，原著單行本：2。

遊戲名稱：少數決

比賽人數：22

參賽者最初持有的金額：1 億元(以名牌上的鑽石代表)

規則：每回合提出一個是非題，所有參賽者在 6 小時內選擇自己的回答(Yes/No)並投票。時間終了後進行開票，少數派的一方獲勝，多數派的一方全數淘汰，並背負 1 億元債務。持續進行到剩下 1 或 2 名玩家為止。

最高獎金：21 億元

敗者負債：1 億元 [1]

既然該電視劇於 2007 年就已經播出了，所以我就搜尋一下相關的網路解決方法，在百度百科裡就提出了電視劇中 22 人的必勝法，由 8 個人組隊來獲勝。[2]另外電視劇中另有一個福永必勝法，屬於狡詐的欺騙法，此法於網路上亦有討論。[3]

探討過程中發現與約瑟夫問題有關聯性，就參考 Graham、Knuth、Patashnrk，賴飛羆譯，Concrete Mathematics，具體數學。P.9～19[4]中處理約瑟夫問題的手段來解決少數決問題。

貳、研究設備及器材：

紙、筆、筆記型電腦、Microsoft Word 2019、Microsoft Excel 2019

參、研究過程：

一、研究問題定義：

「少數決勝淘汰遊戲」就是針對 N 個玩家詢問一些只能回答是或不是的問題，而問題回答是或不是可以隨意，要求每位玩家遊戲開始時付出 1 單位的代價，由少數的一方獲得勝利再進入下個問題，最終只剩下一兩個玩家獲得最後的 N 單位，但所有玩家需償還原來遊戲開始時所付出 1 單位代價。其中若結盟 M 位玩家即能保證必勝，並獲得利益。

(一) 針對玩家詢問的問題僅有兩個選項，只能回答是或不是，而問題的回答是或不是可以隨意，不必合實際狀況，例如問題為：你的性別是男性嗎？男性玩家可以回答是也可以回答不是，女性玩家亦同。若是下個問題為：你的性別是女性嗎？男性玩家可以回答是也可以回答不是，女性玩家亦同，也不必與前一個問題回答相同的性別。故回答簡化為是（當作為 0）與否（當作為 1），兩題回答皆為是（當作為 00），前是後否（當作為 01），前否後是（當作為 10），兩題回答皆為否（當作為 11），多題回答以此類推表示。

(二)若最後僅剩 1 人，則獨得所有的代價 N 單位，但緣由於結盟，故須償還 M 位玩家在原來遊戲開始時所付出 M 單位的代價，其餘平分，每位玩家可以獲得利益 $\frac{N-M}{M}$ 單位，研究中不討論反叛與不公平平分的狀況。

(三)若最後剩 2 人，則遊戲無法分出勝負，因為 2 人回答問題若恰為 1 是 1 否或是 2 是 0 否或是 0 是 2 否，皆無法淘汰成 1 人，故此種狀況則平分所有的代價 N 單位，但緣由於結盟，故每位玩家可以獲得利益 $\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}$ 單位。

(四)遊戲中若存在另一相同結盟，則遊戲會相持不下而無法分出勝負，故無特別提出的情形下都假設不存在另一個結盟團體，而其他玩家也是隨機回答。

二、名詞定義：

(一)遊戲中隨著其他玩家的隨機回答，能獲得的最大利益稱為**最高獲利**。

(二)遊戲中隨著其他玩家的隨機回答，能獲得的最小利益稱為**最低獲利**。

(三)若其他玩家回答為隨機的情形下計算所得到的利益期望值稱為**獲利期望值**。

三、問題初步分析：

參賽玩家人數$N=1$時對應的結盟玩家人數$M=1$，參賽玩家人數$N=2$時對應的結盟玩家人數$M=1$或 2，顯然獲利為 0，屬無聊狀況，此兩種狀況不分析。

(一) $N=3$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝且獨贏，方法為問問題時，1 人回答是，另 1 人回答否，則不論未結盟者回答是或否皆能必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益$\frac{N-M}{M}=\frac{1}{2}$單位，此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為$\frac{1}{2}$單位。

(二) $N=4$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝且獨贏，方法為問問題時，1 人回答是，另 1 人回答否，若 2 位未結盟者回答 1 是 1 否，則形成平手，重新問問題，若 2 位未結盟回答皆是或皆否，則形成必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益$\frac{N-M}{M}=1$單位，此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為 1 單位。

(三) $N=5$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝但未必獨贏，方法為問問題時，1 人回答是，另 1 人回答否，若 3 位未結盟者回答 2 是 1 否或 1 是 2 否，則形成兩人平分，最終勝利者獲得$\frac{N}{2}=\frac{5}{2}$，而每位結盟玩家可獲得利益$\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{1}{4}$單位，若 3 位未結盟回答皆是或皆否，則形成必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益$\frac{N-M}{M}=\frac{3}{2}$單位，計算二項分布，我將結果列於表 1。

表 1 ：$N=5$獲得利益期望值計算（未結合）

未結盟回答	3 是	2 是 1 否	1 是 2 否	3 否	總和
機率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
獲得利益	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	
乘積	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

將表格對稱結合為表 2。

表 2： $N=5$獲得利益期望值計算（已結合）

未結盟回答	3 是與 3 否（獨贏）	2 是 1 否與 1 是 2 否（兩人平分）	總和
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
獲得利益	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	
乘積	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

此時最高獲利為 $\frac{3}{2}$ 單位、最低獲利為 $\frac{1}{4}$ 單位與獲利期望值為 $\frac{9}{16}$ 單位。

(四) $N=5$時，若結盟人數 $M=4$即可保證必勝且獨贏，方法為問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，則不論最後 1 位未結盟者回答是或否都會形成雖是兩人平分但結盟包辦兩人，最終勝利者獲得 $N=5$，而每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}=\frac{1}{4}$ 單位。此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為 $\frac{1}{4}$ 單位。

(五) $N=6$時，結盟人數 $M=2$即可保證必勝但未必獨贏，方法為問問題時，1 人回答是，另 1 人回答否，若 4 位未結盟者回答 2 是 2 否則形成平手，重新問問題，若 4 位未結盟者回答 3 是 1 否或 1 是 3 否則形成兩人平分，最終勝利者獲得 $\frac{N}{2}=3$，而每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{1}{2}$ 單位，若 4 位未結盟回答皆是或皆否，則形成必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}=2$ 單位，計算二項分布，列於表 3。

表 3： $N=6$獲得利益期望值計算（未結合）

未結盟回答	4 是	3 是 1 否	2 是 2 否	1 是 3 否	4 否	總和
機率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
忽略平手 調整機率	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$		$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
獲得利益	2	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	2	
乘積	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$		$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$

將表格對稱結合為表 4。

表 4： $N=6$獲得利益期望值計算（已結合）

未結盟回答	4 是與 4 否（獨贏）	3 是 1 否與 1 是 3 否（兩人平分）	總和
忽略平手 調整機率	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
獲得利益	2	$\frac{1}{2}$	
乘積	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

此時最高獲利為 2 單位、最低獲利為 $\frac{1}{2}$ 單位與獲利期望值為 $\frac{4}{5}$ 單位。

(六) $N=6$時，若結盟人數 $M=4$即可保證必勝且獨贏，方法為問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，若 2 位未結盟者回答 1 是 1 否，則形成平手，重新問問題，若最後 2 位未結盟者皆回答是或否都會形成兩人平分但結盟包辦兩人，最終全贏獲得 $N=6$，而每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}=\frac{1}{2}$ 單位。此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為 $\frac{1}{2}$ 單位。

在初步分析中，我發現有些有趣的性質在討論中會反覆出現，先行討論證明如下：

定理 1 應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 $M=2^R$ 個。

證明：

由於問題僅有兩種回答，所以在保證必勝的情形下須涵蓋所有可能的答案，所以 R 輪的問題會有 2^R 種答案，故要應對 R 輪的問題需要有 2^R 個結盟的玩家。遊戲前先將所有的結盟玩家編號 0 至 2^R-1號，其回答問題的答案順序即為編號的 2 進位。例如應對 3 輪的問題需要有 $2^3=8$ 個結盟的玩家。遊戲前先將所有的結盟玩家編號 0 至 7 號，其 0 號回答問題的答案為 000，即為是是是，其 1 號回答問題的答案為 001，即為是是否，其 2 號回答問題的答案為 010，即為是否是，其 3 號回答問題的答案為 011，即為是否否，其 4 號回答問題的答案為 100，即為否是是，其他號回答以此類推。在此證明出應對 k 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家至少要 2^k 個，而在考慮利益最高的情形下當然結盟的玩家越少越好，故知要應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 2^R 個。若有平手的情形發生，則視為該次問題不存在而重新回答問題即可，例如應對 3 輪的問題，而其中第一輪第一次與第二輪第一次第二次皆發生平手情形，則 2 號回答問題的答案為(0)0(11)10，即為是是否否否是，其 4 號回答問題的答案為

(1)1(00)00，即為否否是是是是，在此解決有平手狀況。

定理 2 應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 $M=2^R$ 個。參賽玩家人數 N 中

若未結盟人數 $N-M$ 為偶數，則該輪少數勝利方未結盟人數人數至多 $\frac{N-M-2}{2}$

若未結盟人數 $N-M$ 為奇數，則該輪少數勝利方未結盟人數人數至多 $\frac{N-M-1}{2}$

證明：

由定理 1 知應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 $M=2^R$ 個。此輪回答是或不是各 $\frac{M}{2}=2^{R-1}$ 個，而未結盟人數 $N-M$ 若為偶數且該輪回答是或不是各 $\frac{N-M}{2}$ 個，則平手重新問問題，故分出勝負時，該輪少數勝利方未結盟人數人數至多 $\frac{N-M-2}{2}$，而未結盟人數 $N-M$ 為奇數，則該輪少數勝利方未結盟人數人數至多 $\frac{N-M-1}{2}$，顯然成立得證。

在總遊戲人數 N 人結盟玩家總人數 M 人且保證必勝且獨贏時，則每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}$ 單位，此時必為最高獲利。在總遊戲人數 N 人結盟玩家總人數 M 人且保證必勝但最終兩人平分時，則每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}$ 單位，此時為可能最低獲利。但在保證必勝的情形下最終結果只有獨贏或兩人平分，故可能的利益情形僅有獨贏 $\frac{N-M}{M}$ 單位與兩人平分 $\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}$ 單位兩種情形，但實際上的利益情形可能僅有獨贏一種。

四、問題進階分析：

研究發現參賽玩家人數 $N=7$ 時結盟人數 $M=2$ 無法保證必勝，因為問問題時，1 人回答是，另 1 人回答否，若 5 位未結盟者回答 3 是 2 否時，少數方否方有 3 人但我結盟人數僅有 1 人無法保證必勝，無法達成必勝條件，故結盟人數 M 須增加，而由定理 1 中得知結盟人數必為 2^R 的形式，故此時結盟人數 M 須增加為 4 人。

(一) $N=7$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，方法為第一輪問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，3 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 1 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可

保證必勝且獨贏，故知 $N=7$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}=\frac{3}{4}$ 單位，此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為 $\frac{3}{4}$ 單位。

(二) $N=8$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，方法為第一輪問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，4 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 1 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，故知 $N=8$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}=1$ 單位，此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為 1 單位。

(三) $N=9$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，方法為第一輪問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，5 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 2 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，若未結盟人數 2 人，由前段(二)中知 $N=4$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，故知 $N=9$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}=\frac{5}{4}$ 單位，此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為 $\frac{5}{4}$ 單位。

(四) $N=10$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，方法為第一輪問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，6 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 2 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，若未結盟人數 2 人，由前段(二)中知 $N=4$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，故知 $N=10$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝且獨贏，每位結盟玩家可獲得利益 $\frac{N-M}{M}=\frac{3}{2}$ 單位，此時最高獲利、最低獲利與獲利期望值皆為 $\frac{3}{2}$ 單位。

(五) $N=11$ 時，結盟人數 $M=4$ 可保證必勝但未必獨贏，方法為第一輪問問題時 2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，7 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 3 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，若未結盟人數 2 人，由前段(二)中知 $N=4$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，但若未結盟人數 3 人，由前段(三)中知 $N=5$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝但未必獨贏，第二輪中有機率 $\frac{1}{4}$ 獨贏，有機率 $\frac{3}{4}$ 兩人平分。獨贏則每位結盟玩家可獲得利益

$\dfrac{N-M}{M}=\dfrac{7}{4}$單位，若兩人平分，則每位結盟玩家可獲得利益$\dfrac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\dfrac{3}{8}$單位，計算二項分布如表 5：

表 5：$N=11$獲得利益期望值計算（未結合）

未結盟回答	7 是或 7 否	6 是 1 否或 1 是 6 否	5 是 2 否或 2 是 5 否	4 是 3 否或 3 是 4 否第二輪獨贏	4 是 3 否或 3 是 4 否第二輪兩人平分	總和
機率	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{35}{64}\times\frac{1}{4}$	$\frac{35}{64}\times\frac{3}{4}$	1
獲得利益	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{8}$	

將表格 5 轉換為表 6：

表 6：$N=11$獲得利益期望值計算（已結合）

最終勝利	獨贏	兩人平分	總和
獲得利益	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{8}$	
對應機率	$\frac{151}{256}$	$\frac{105}{256}$	1
乘積	$\frac{1057}{1024}$	$\frac{315}{2048}$	$\frac{2429}{2048}$

故知 N=11 時，結盟人數 M=4 即可保證必勝但未必獨贏，最高獲利為$\dfrac{7}{4}$單位、最低獲利為$\dfrac{3}{8}$單位與獲利期望值為$\dfrac{2429}{2048}$單位。

(六) $N=12$時，結盟人數$M=4$即可保證必勝但未必獨贏，方法為第一輪問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，8 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 3 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝且獨贏，若未結盟人數 2 人，由前段(二)中知$N=4$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝且獨贏，但若未結盟人數 3 人，由前段(三)中知 $N=5$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝但未必獨贏，第二輪中有機率$\dfrac{1}{4}$獨贏，有機率$\dfrac{3}{4}$兩人平分。獨贏則每位結盟玩家可獲得利益$\dfrac{N-M}{M}=2$單位，兩人平分，則每位結盟玩家可獲得利益$\dfrac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\dfrac{1}{2}$單位，計算二項

分布如表 7：

表 7： $N=12$ 獲得利益期望值計算（未結合）

未結盟回答	8 是或 8 否	7 是 1 否 或 1 是 7 否	6 是 2 否 或 2 是 6 否	5 是 3 否或 3 是 5 否第二輪獨贏	5 是 3 否或 3 是 5 否第二輪兩人平分	4 是 4 否	總和
機率	$\frac{1}{128}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{28}{128}$	$\frac{56}{128}\times\frac{1}{4}$	$\frac{56}{128}\times\frac{3}{4}$	$\frac{35}{128}$	1
調整機率	$\frac{1}{93}$	$\frac{8}{93}$	$\frac{28}{93}$	$\frac{56}{93}\times\frac{1}{4}$	$\frac{56}{93}\times\frac{3}{4}$		1
獲得利益	2	2	2	2	$\frac{1}{2}$		

將表格 7 轉換為表 8：

表 8： $N=12$ 獲得利益期望值計算（已結合）

最終勝利	獨贏	兩人平分	總和
獲得利益	2	$\frac{1}{2}$	
對應機率	$\frac{17}{31}$	$\frac{14}{31}$	1
乘積	$\frac{34}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{41}{31}$

故知 $N=12$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝但未必獨贏，最高獲利為 2 單位、最低獲利為 $\frac{1}{2}$ 單位與獲利期望值為 $\frac{41}{31}$ 單位。

(七) $N=13$ 時，結盟人數 $M=4$ 即可保證必勝但未必獨贏，方法為第一輪問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，9 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 4 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，若未結盟人數 2 人，由前段(二)中知 $N=4$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝且獨贏，但若未結盟人數 3 人，由前段(三)中知 $N=5$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝但未必獨贏，第二輪中有機率 $\frac{1}{4}$ 獨贏，有機率 $\frac{3}{4}$ 兩人平分。但若未結盟人數 4 人，由前段(五)中知 $N=6$ 時，結盟人數 $M=2$ 即可保證必勝但未必獨贏，第二輪中有機率 $\frac{1}{5}$ 獨贏，

有機率$\frac{4}{5}$兩人平分。獨贏則每位結盟玩家可獲得利益$\frac{N-M}{M}=\frac{9}{4}$單位，兩人平分，則每位結盟玩家可獲得利益$\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{5}{8}$單位，計算二項分布如表 9：

表 9： $N=13$獲得利益期望值計算（未結合）

未結盟回答	9 是或 9 否	8 是 1 否或 1 是 8 否	7 是 2 否或 2 是 7 否	6是3否或3是6否第二輪獨贏	6是3否或3是6否第二輪兩人平分	5是4否或4是5否第二輪獨贏	5是4否或4是5否第二輪兩人平分	總和
機率	$\frac{1}{256}$	$\frac{9}{256}$	$\frac{36}{256}$	$\frac{84}{256}\times\frac{1}{4}$	$\frac{84}{256}\times\frac{3}{4}$	$\frac{126}{256}\times\frac{1}{5}$	$\frac{126}{256}\times\frac{4}{5}$	1
獲得利益	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{8}$	

將表格 9 轉換為表 10：

表 10： $N=13$獲得利益期望值計算（已結合）

最終勝利	獨贏	兩人平分	總和
獲得利益	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{8}$	
對應機率	$\frac{461}{1280}$	$\frac{819}{1280}$	1
乘積	$\frac{4149}{5120}$	$\frac{4095}{10240}$	$\frac{12393}{10240}$

故知$N=13$時，結盟人數$M=4$即可保證必勝但未必獨贏，最高獲利為$\frac{9}{4}$單位、最低獲利為$\frac{5}{8}$單位與獲利期望值為$\frac{12393}{10240}$單位。

(八) $N=14$時，結盟人數$M=4$即可保證必勝但未必獨贏，方法為第一輪問問題時，2 人回答是，另 2 人回答否，由定理 2 知分出勝負時，10 位未結盟者於該輪少數勝利方人數至多 4 人，其中 0 人顯然獨贏，若未結盟人數 1 人，由前段(一)中知 $N=3$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝且獨贏，若未結盟人數 2 人，由前段(二)中知$N=4$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝且獨贏，但若未結盟人數 3 人，由前段(三)中知 $N=5$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝但未必獨贏，第二輪中有機率$\frac{1}{4}$獨贏，有機率$\frac{3}{4}$兩人平分。但若未結盟人數 4 人，由前

段(五)中知 $N=6$時，結盟人數$M=2$即可保證必勝但未必獨贏，第二輪中有機率$\frac{1}{5}$獨贏，有機率$\frac{4}{5}$兩人平分。獨贏則每位結盟玩家可獲得利益$\frac{N-M}{M}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$單位，兩人平分，則每位結盟玩家可獲得利益$\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{3}{4}$單位，計算二項分布如下表 11：

表 11：$N=14$獲得利益期望值計算（未結合）

未結盟回答	10 是或 10 否	9是1否或 1 是 9 否	8是2否或 2 是 8 否	7 是 3 否或 3 是 7 否第二輪獨贏	7 是 3 否或 3 是 7 否第二輪兩人平分
機率	$\frac{1}{512}$	$\frac{10}{512}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{120}{512}\times\frac{1}{4}$	$\frac{120}{512}\times\frac{3}{4}$
獲得利益	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$

未結盟回答	6 是 4 否或 4 是 6 否第二輪獨贏	6 是 4 否或 4 是 6 否第二輪兩人平分	5 是 5 否	總和
機率	$\frac{210}{512}\times\frac{1}{5}$	$\frac{210}{512}\times\frac{4}{5}$	$\frac{126}{512}$	1
獲得利益	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$		

將表格 11 轉換為表 12：

表 12：$N=14$獲得利益期望值計算（已結合）

最終勝利	獨贏	兩人平分	總和
獲得利益	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	
對應機率	$\frac{128}{386}$	$\frac{258}{386}$	1
乘積	$\frac{640}{772}$	$\frac{387}{772}$	$\frac{1027}{772}$

故知 N=14 時，結盟人數 M=4 即可保證必勝但未必獨贏，最高獲利為$\frac{5}{2}$單位、最低獲利為$\frac{3}{4}$單位與獲利期望值為$\frac{1027}{772}$單位。

討論至此，透過歸納 N=15 至 30，分析可得到以下定理，放在討論中證明：

定理 3 若找到結盟 $M = 2^R$ 個玩家，則參賽玩家人數 N 介於 2^R 至 $2^R + 2\times 2^R - 2$ 時，

此時結果必然是獨勝。

定理 4 若找到結盟 $M = 2^R$ 個玩家，則參賽玩家人數 N 介於 $2^R + 2\times 2^R - 1$ 至 $2^R + 3\times 2^R - 2$

時，此時結果可保證必勝但可能均分。

肆、研究結果：

一、將已經完成的 N、M、是否獨勝、最高獲利與最低獲利整理如表 13：

表 13：3 至 30 的是否獨勝、最高獲利與最低獲利表

N	3	4	5	6
M	2	2	2	2
是否獨勝	是	是	否	否
最高獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2=\frac{4}{2}$
最低獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$

N	7	8	9	10	11	12	13	14
M	4	4	4	4	4	4	4	4
是否獨勝	是	是	是	是	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2=\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$
最低獲利	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
M	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
是否獨勝	是	是	是	是	是	是	是	是	否	否	否	否	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{18}{8}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{20}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{22}{8}$
最低獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$

觀察表 13 規律，每列的數量為 4、8、16 與 2^{R+1} 有關，利用數列規律計算出(1)當參

賽玩家人數 $2\times 2^R-1\le N\le 4\times 2^R-2$ 時，最多問 R 個不平手的問題後可得出最終勝利者，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，則必有至少一個最終勝利者。(2) $2\times 2^R-1\le N\le 3\times 2^R-2$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果必獨贏，最高獲利與最低獲利均為 $\frac{N-M}{M}$ 單位。(3)當 $3\times 2^R-1\le N\le 4\times 2^R-2$ 時，此時若找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果可保證必勝但可能兩人均分，最高獲利為 $\frac{N-M}{M}$ 單位，最低獲利為 $\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{N-2M}{2M}=\frac{N-2\times 2^R}{2\times 2^R}$ 單位。

(4)當 $3\times 2^R-1\le N\le 4\times 2^R-2$ 時，此時若找到結盟 $M=2^{R+1}$ 個玩家，結果必獨贏，最高獲利與最低獲利均為 $\frac{N-M}{M}=\frac{N-2^{R+1}}{2^{R+1}}$ 單位，恰與(3)中的最低獲利相等，整理表 13 為表 14：

表 14：經過 R 輪（R+1 輪）不平手回合後是否獨勝、最高獲利與最低獲利表

N	$2\times 2^R-1$ 至 $3\times 2^R-2$	$3\times 2^R-1$ 至 $4\times 2^R-2$
M	2^R	2^R（2^{R+1}）
是否獨勝	是	否（是）
最高獲利	$\frac{N-M}{M}$	$\frac{N-M}{M}$（$\frac{N-M}{M}$）
最低獲利	$\frac{N-M}{M}$	$\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{N-2^{R+1}}{2^{R+1}}$（$\frac{N-M}{M}=\frac{N-2^{R+1}}{2^{R+1}}$）

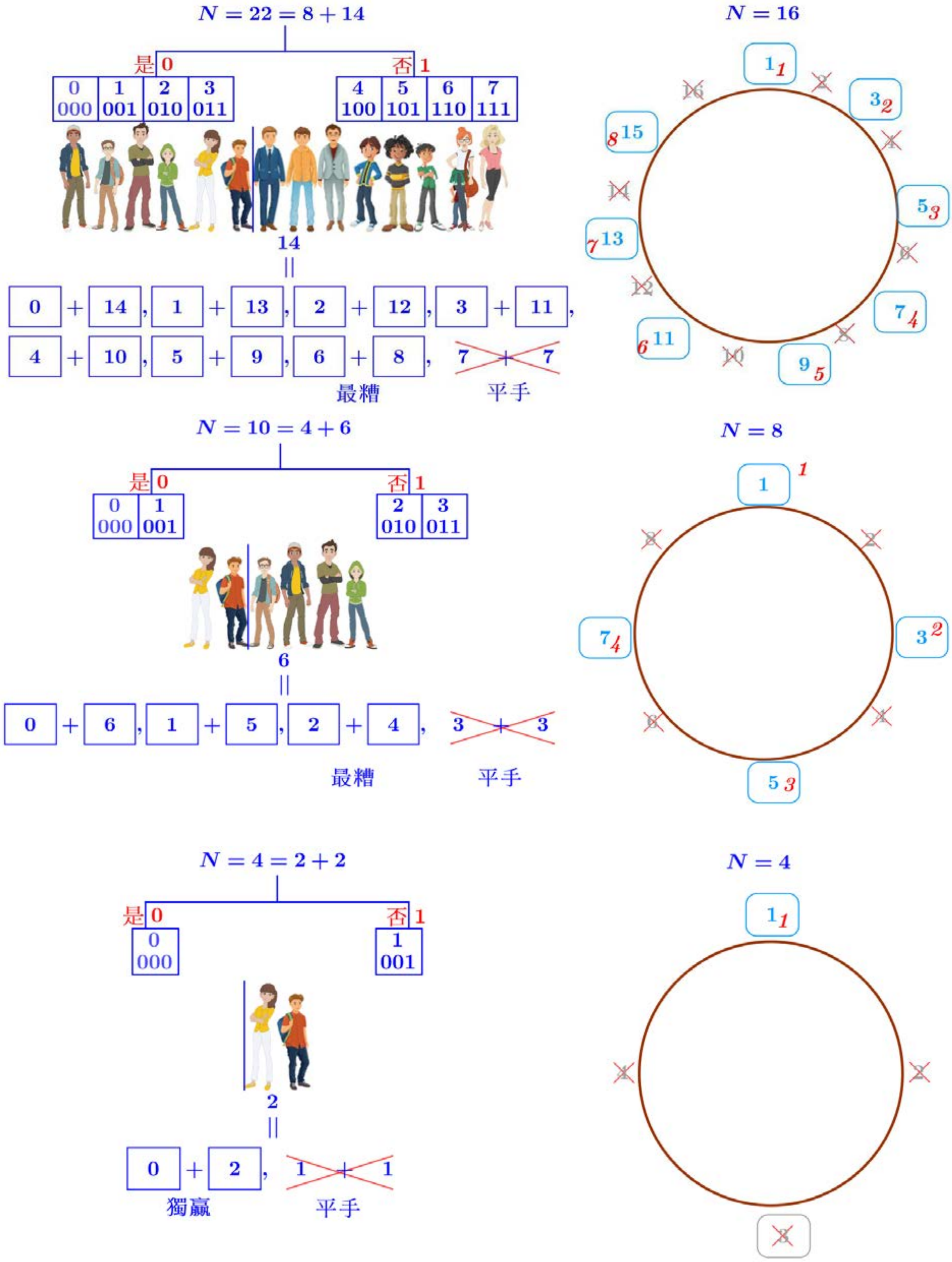

圖 2：多數決問題與約瑟夫問題

我在思考如何如何處理多數決問題時，嘗試使用數列來解決問題，得到上表 N 的一般型式但是最高獲利與最低獲利並未得到很良好的結果，嘗試使用機率手段來處理也未獲得任何結果，但是觀察每輪間的關係時，發現每一輪都會使得人數減少一半多一些，而結果會遞迴變成前面的人數，參考 2003 年學長所做的科展，[5]其與約瑟夫問題很相像，似乎都跟除 2 後有些關聯性，此時參考具體數學[4]裡的約瑟夫問題解決方法來解決多數決問題，竟然還得到不錯的結果，發現使用 $N+1$ 的二進位，可以得到最高獲利與最低獲利的公式，舉 $N=22$ 為例，$N+1$ 的二進位為 $(10111)_2$，長度為 $5=R+2$，亦即經過 R=3 輪不平手回合後必勝，其中 R=(N+1 的二進位長度) –2，N+1 的二進位第 2 位為 0 則我方為獨勝。再取 N+1 的二進位前兩位 $P=(10)_2$，其他位 $Q=(111)_2$ 則 $P=P_1+P_2=(01)_2+(01)_2$，$Q-1=Q_1+Q_2=(110)_2+(000)_2$，$P_1 \circ Q_1=(01110)_2=14$ 為最高（低）獲利的分子，分母為 $P_2 \circ Q_2=(01000)_2=8$，即為 $\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$。

再舉 N=29 為例，N+1 的二進位= $(11110)_2$，長度為 5=R+2，亦即經過 R=3 輪不平手回合後必勝，其中 R=(N+1 的二進位長度 –2)，N+1 的二進位第 2 位為 1 則可能兩人均分。再取 N+1 的二進位前兩位 $P=(11)_2$，其他位 $Q=(110)_2$，則 $P=P_1+P_2=(10)_2+(01)_2=(01)_2+(10)_2$，$Q-1=Q_1+Q_2=(101)_2+(000)_2$，此時有兩種情形，

(1) $P=P_1+P_2=(10)_2+(01)_2$，$P_1 \circ Q_1=(10101)_2=21$ 為最高獲利的分子，分母為 $P_2 \circ Q_2=(01000)_2=8$，即為 $\frac{21}{8}$。

(2) $P=P_1+P_2=(01)_2+(10)_2$，$P_1 \circ Q_1=(01101)_2=13$ 為最低獲利的分子，分母為 $P_2 \circ Q_2=(10000)_2=16$，即為 $\frac{13}{16}$。

本文中 $P \circ Q$ 表位元拼接，在電腦語言 verilog 中有語法 $P \circ Q = \text{verilog}\{P, Q\}$，例如 $P=(101)_2$，$Q=(011)_2$，則 $P \circ Q=(101)_2 \circ (011)_2=(101011)_2$，如果 $P=(ABC)_2$，$Q=(DEF)_2$，則 $P \circ Q=(ABC)_2 \circ (DEF)_2=(ABCDEF)_2$

其關聯性如圖 3：

$$N+1=(1\overset{P}{\boxed{B_R}}\,|\,\underbrace{\overbrace{\boxed{B_{R-1}}\ldots\boxed{B_1}\boxed{B_0}}^{Q}}_{R\text{位表需}R\text{輪}})_2 \quad \text{其中}B_i=0\text{或}1,\ i=0,1,2,\cdots\cdots,R$$

(1) $B_R=0$ 獨贏

$$\underset{\boxed{1}\boxed{0}_2}{P}=\begin{cases}P_1\ \boxed{0}\boxed{1}_2 & Q_1=Q=(B_{R-1}\ldots B_1B_0)_2\\ + & \\ P_2\ \boxed{0}\boxed{1}_2 & Q_2=(\underbrace{00\ldots00}_{R\text{個}})_2\end{cases}$$

獲利分子：$P_1\circ Q_1-1=(01B_{R-1}\ldots B_1B_0)_2-1$

獲利分母：$P_2\circ Q_2=(01\underbrace{00\ldots00}_{R\text{個}})_2$

獲利：$\dfrac{P_1\circ Q_1-1}{P_2\circ Q_2}$

(2) $B_R=1$ 可能均分 $P=(11)_2=(10)_2+(01)_2=(01)_2+(10)_2$

$$\underset{\boxed{1}\boxed{1}_2}{P}=\begin{cases}P_1\ \boxed{1}\boxed{0}_2 & \text{最高獲利分子：}P_1\circ Q_1-1=(10B_{R-1}\ldots B_1B_0)_2-1\\ + & \\ P_2\ \boxed{0}\boxed{1}_2 & \text{最高獲利分母：}P_2\circ Q_2=(01\underbrace{00\ldots00}_{R\text{個}})_2\end{cases}$$

最高獲利：$\dfrac{P_1\circ Q_1-1}{P_2\circ Q_2}$

$$\underset{\boxed{1}\boxed{1}_2}{P}=\begin{cases}P_1\ \boxed{0}\boxed{1}_2 & \text{最低獲利分子：}P_1\circ Q_1-1=(01B_{R-1}\ldots B_1B_0)_2-1\\ + & \\ P_2\ \boxed{1}\boxed{0}_2 & \text{最低獲利分母：}P_2\circ Q_2=(10\underbrace{00\ldots00}_{R\text{個}})_2\end{cases}$$

最低獲利：$\dfrac{P_1\circ Q_1-1}{P_2\circ Q_2}$

圖 3：利用二進位法處理多數決

將相關資料整理成 *Excel* 檔案，如下：

表 15：N 由 3 至 98 的二進位與是否獨勝、最高獲利與最低獲利關聯表

N	N+1 二進位	輪數 R	前2位P	其他位Q	第2位	必勝最少同盟數	必勝全拿同盟數	最高獲利分子	最高獲利分母	最高獲利	最低獲利分子	最低獲利分母	最低獲利
3	100	1	10	0	0	2	2	1	2	0.5	1	2	0.5
4	101	1	10	1	0	2	2	2	2	1	2	2	1
5	110	1	11	0	1	2	4	3	2	1.5	1	4	0.25
6	111	1	11	1	1	2	4	4	2	2	2	4	0.5
7	1000	2	10	00	0	4	4	3	4	0.75	3	4	0.75
8	1001	2	10	01	0	4	4	4	4	1	4	4	1
9	1010	2	10	10	0	4	4	5	4	1.25	5	4	1.25
10	1011	2	10	11	0	4	4	6	4	1.5	6	4	1.5
11	1100	2	11	00	1	4	8	7	4	1.75	3	8	0.375
12	1101	2	11	01	1	4	8	8	4	2	4	8	0.5
13	1110	2	11	10	1	4	8	9	4	2.25	5	8	0.625
14	1111	2	11	11	1	4	8	10	4	2.5	6	8	0.75
15	10000	3	10	000	0	8	8	7	8	0.875	7	8	0.875
16	10001	3	10	001	0	8	8	8	8	1	8	8	1
17	10010	3	10	010	0	8	8	9	8	1.125	9	8	1.125
18	10011	3	10	011	0	8	8	10	8	1.25	10	8	1.25
19	10100	3	10	100	0	8	8	11	8	1.375	11	8	1.375
20	10101	3	10	101	0	8	8	12	8	1.5	12	8	1.5
21	10110	3	10	110	0	8	8	13	8	1.625	13	8	1.625
22	10111	3	10	111	0	8	8	14	8	1.75	14	8	1.75
23	11000	3	11	000	1	8	16	15	8	1.875	7	16	0.4375
24	11001	3	11	001	1	8	16	16	8	2	8	16	0.5
25	11010	3	11	010	1	8	16	17	8	2.125	9	16	0.5625
26	11011	3	11	011	1	8	16	18	8	2.25	10	16	0.625
27	11100	3	11	100	1	8	16	19	8	2.375	11	16	0.6875
28	11101	3	11	101	1	8	16	20	8	2.5	12	16	0.75
29	11110	3	11	110	1	8	16	21	8	2.625	13	16	0.8125
30	11111	3	11	111	1	8	16	22	8	2.75	14	16	0.875
31	100000	4	10	0000	0	16	16	15	16	0.938	15	16	0.9375
32	100001	4	10	0001	0	16	16	16	16	1	16	16	1
33	100010	4	10	0010	0	16	16	17	16	1.063	17	16	1.0625
34	100011	4	10	0011	0	16	16	18	16	1.125	18	16	1.125
35	100100	4	10	0100	0	16	16	19	16	1.188	19	16	1.1875
36	100101	4	10	0101	0	16	16	20	16	1.25	20	16	1.25
37	100110	4	10	0110	0	16	16	21	16	1.313	21	16	1.3125
38	100111	4	10	0111	0	16	16	22	16	1.375	22	16	1.375
39	101000	4	10	1000	0	16	16	23	16	1.438	23	16	1.4375
40	101001	4	10	1001	0	16	16	24	16	1.5	24	16	1.5
41	101010	4	10	1010	0	16	16	25	16	1.563	25	16	1.5625
42	101011	4	10	1011	0	16	16	26	16	1.625	26	16	1.625
43	101100	4	10	1100	0	16	16	27	16	1.688	27	16	1.6875
44	101101	4	10	1101	0	16	16	28	16	1.75	28	16	1.75
45	101110	4	10	1110	0	16	16	29	16	1.813	29	16	1.8125
46	101111	4	10	1111	0	16	16	30	16	1.875	30	16	1.875
47	110000	4	11	0000	1	16	32	31	16	1.938	15	32	0.46875
48	110001	4	11	0001	1	16	32	32	16	2	16	32	0.5
49	110010	4	11	0010	1	16	32	33	16	2.063	17	32	0.53125
50	110011	4	11	0011	1	16	32	34	16	2.125	18	32	0.5625

N	N+1 二進位	輪數 R	前2位 P	其他位 Q	第2位	必勝最少同盟數	必勝全拿同盟數	最高獲利分子	最高獲利分母	最高獲利	最低獲利分子	最低獲利分母	最低獲利
51	110100	4	11	0100	1	16	32	35	16	2.188	19	32	0.59375
52	110101	4	11	0101	1	16	32	36	16	2.25	20	32	0.625
53	110110	4	11	0110	1	16	32	37	16	2.313	21	32	0.65625
54	110111	4	11	0111	1	16	32	38	16	2.375	22	32	0.6875
55	111000	4	11	1000	1	16	32	39	16	2.438	23	32	0.71875
56	111001	4	11	1001	1	16	32	40	16	2.5	24	32	0.75
57	111010	4	11	1010	1	16	32	41	16	2.563	25	32	0.78125
58	111011	4	11	1011	1	16	32	42	16	2.625	26	32	0.8125
59	111100	4	11	1100	1	16	32	43	16	2.688	27	32	0.84375
60	111101	4	11	1101	1	16	32	44	16	2.75	28	32	0.875
61	111110	4	11	1110	1	16	32	45	16	2.813	29	32	0.90625
62	111111	4	11	1111	1	16	32	46	16	2.875	30	32	0.9375
63	1000000	5	10	00000	0	32	32	31	32	0.969	31	32	0.96875
64	1000001	5	10	00001	0	32	32	32	32	1	32	32	1
65	1000010	5	10	00010	0	32	32	33	32	1.031	33	32	1.03125
66	1000011	5	10	00011	0	32	32	34	32	1.063	34	32	1.0625
67	1000100	5	10	00100	0	32	32	35	32	1.094	35	32	1.09375
68	1000101	5	10	00101	0	32	32	36	32	1.125	36	32	1.125
69	1000110	5	10	00110	0	32	32	37	32	1.156	37	32	1.15625
70	1000111	5	10	00111	0	32	32	38	32	1.188	38	32	1.1875
71	1001000	5	10	01000	0	32	32	39	32	1.219	39	32	1.21875
72	1001001	5	10	01001	0	32	32	40	32	1.25	40	32	1.25
73	1001010	5	10	01010	0	32	32	41	32	1.281	41	32	1.28125
74	1001011	5	10	01011	0	32	32	42	32	1.313	42	32	1.3125
75	1001100	5	10	01100	0	32	32	43	32	1.344	43	32	1.34375
76	1001101	5	10	01101	0	32	32	44	32	1.375	44	32	1.375
77	1001110	5	10	01110	0	32	32	45	32	1.406	45	32	1.40625
78	1001111	5	10	01111	0	32	32	46	32	1.438	46	32	1.4375
79	1010000	5	10	10000	0	32	32	47	32	1.469	47	32	1.46875
80	1010001	5	10	10001	0	32	32	48	32	1.5	48	32	1.5
81	1010010	5	10	10010	0	32	32	49	32	1.531	49	32	1.53125
82	1010011	5	10	10011	0	32	32	50	32	1.563	50	32	1.5625
83	1010100	5	10	10100	0	32	32	51	32	1.594	51	32	1.59375
84	1010101	5	10	10101	0	32	32	52	32	1.625	52	32	1.625
85	1010110	5	10	10110	0	32	32	53	32	1.656	53	32	1.65625
86	1010111	5	10	10111	0	32	32	54	32	1.688	54	32	1.6875
87	1011000	5	10	11000	0	32	32	55	32	1.719	55	32	1.71875
88	1011001	5	10	11001	0	32	32	56	32	1.75	56	32	1.75
89	1011010	5	10	11010	0	32	32	57	32	1.781	57	32	1.78125
90	1011011	5	10	11011	0	32	32	58	32	1.813	58	32	1.8125
91	1011100	5	10	11100	0	32	32	59	32	1.844	59	32	1.84375
92	1011101	5	10	11101	0	32	32	60	32	1.875	60	32	1.875
93	1011110	5	10	11110	0	32	32	61	32	1.906	61	32	1.90625
94	1011111	5	10	11111	0	32	32	62	32	1.938	62	32	1.9375
95	1100000	5	11	00000	1	32	64	63	32	1.969	31	64	0.484375
96	1100001	5	11	00001	1	32	64	64	32	2	32	64	0.5
97	1100010	5	11	00010	1	32	64	65	32	2.031	33	64	0.515625
98	1100011	5	11	00011	1	32	64	66	32	2.063	34	64	0.53125

透過對 *Excel* 檔案的觀察，獨贏時最高（低）獲利上限 2 但永遠不等於 2，兩人均分時最高獲利上限 3，但最永遠不等於 3。最低獲利上限 1 但永遠不等於 1，此結果放在定理 5。

伍、討論：

一、若參賽玩家人數 $N=2\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果必然是獨勝，最高獲利與最低獲利均為獨贏 $\frac{N-M}{M}$ 單位一種情形。而當參賽玩家人數 $N=3\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果可保證必勝但未必獨贏，最高獲利 $\frac{N-M}{M}$ 單位，最低獲利 $\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{1}{2}+\frac{L-2}{2^{R+1}}$ 單位。而當參賽玩家人數 $N=3\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$ 時，此時找到結盟 $M=2^{R+1}$ 個玩家，結果可保證必勝且獨贏，最高獲利與最低獲利均為獨贏 $\frac{N-M}{M}=\frac{1}{2}+\frac{L-2}{2^{R+1}}$ 單位。討論至此，可以發現當參賽玩家人數 $N=3\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果比找到結盟 $M=2^{R+1}$ 個玩家為佳。但是有趣的是，整合兩種必然獨贏的情形，可知若參賽玩家人數 $N=2^R+2^{R-1}-2+L, 1\le L\le 2^R+2^{R-1}$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果必然是獨勝，最高獲利與最低獲利均為獨贏 $\frac{N-M}{M}=\frac{1}{2}+\frac{L-2}{2^R}$ 單位一種情形。

上述討論即為經過 R 輪不平手回合後必勝

表 16：經過 R 輪不平手回合後，$M=2^R$，是否獨勝、最高獲利與最低獲利表

N	$N=2\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$	$N=3\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$ $4\times 2^R-2$
M	2^R	2^R
是否獨勝	是	否
最高獲利	$\frac{N-M}{M}=1+\frac{L-2}{2^R}$	$\frac{N-M}{M}=2+\frac{L-2}{2^R}$
最低獲利	$\frac{N-M}{M}=1+\frac{L-2}{2^R}$	$\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{1}{2}+\frac{L-2}{2^{R+1}}$

表 17：表 16，當 $R=1$

N	3	4	5	6
M	2	2	2	2
是否獨勝	是	是	否	否

最高獲利	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$
最低獲利	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

表 18：表 16，當 $R=2$

N	7	8	9	10	11	12	13	14
M	4	4	4	4	4	4	4	4
是否獨勝	是	是	是	是	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2=\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$
最低獲利	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

表 19：表 16， $R=3$

N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
M	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
是否獨勝	是	是	是	是	是	是	是	是	否	否	否	否	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{18}{8}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{20}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{22}{8}$
最低獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$

改上述討論為經過 R 輪不平手回合後必獨贏，如表 20。

表 20：經過 R 輪不平手回合後必獨贏， $M=2^R$ ，獲利表

N	$N=2^R+2^{R-1}-2+L,1\le L\le 2^R+2^{R-1}$
M	2^R
是否獨勝	是
獲利	$\frac{N-M}{M}=\frac{1}{2}+\frac{L-2}{2^R}$

表 21：表 20，當 $R=2$

N	5	6	7	8	9	10
M	4	4	4	4	4	4
是否獨勝	是	是	是	是	是	是
獲利	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$

表 22：表 20，$R=3$

N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
M	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8
是否獨勝	是	是	是	是	是	是	是	是	是	是	是	是
獲利	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$

二、利用數學歸納法（方法參見[6]）證明定理 3 與 4，推出推論 1 至 3：

定理 3 若找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，則參賽玩家人數 N 介於 2^R 至 $2^R+2\times2^R-2$ 時，此時結果必然是獨勝。

證明：(1)當 $R=1$ 時，此時找到結盟 $M=2$ 個玩家，則參賽玩家人數 $N=2$或3 或 4 時，由參研究方法或過程中的三、問題初步分析的(一) N=3 時與(二) $N=4$ 時得知，結果必然是獨勝。

(2)設 $R=R_0$ 時，此時找到結盟 $M_0=2^{R_0}$ 個玩家，則參賽玩家人數 N 介於 2^{R_0} 至 $2^{R_0}+2\times2^{R_0}-2$ 時，結果必然是獨勝。

(3)則當 $R=R_0+1$ 時，此時找到結盟 $M=2^{R_0+1}$ 個玩家，結果必然是獨勝。方法為第一輪問問題時，$M_0=2^{R_0}$ 人回答是，另 $M_0=2^{R_0}$ 人回答否，則未結盟者有 $N-M$ 最多有 $2\times2^{R_0+1}-2$，若回答問題時，是與否各有人數 $\frac{N-M}{2}$，則形成平手，重新問問題。故分出勝負時，回答問題時未結盟者中少數方人數為 0 人最多至 $\frac{N-M-2}{2}=2\times2^{R_0}-2$，此輪結束後，我結盟玩家有 $M_0=2^{R_0}$ 個，而參賽玩家人數 N 介於 2^{R_0} 至 $2^{R_0}+2\times2^{R_0}-2$，由(2)中的假設得知，結果必然是獨勝。

故由數學歸納法得知定理 3 成立。

推論 1 若參賽玩家人數 $N=2\times2^R-2+L, 1\le L\le2^R$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果必然是獨贏。

推論 2 當參賽玩家人數 $N=3\times2^R-2+L, 1\le L\le2^R$ 時，此時找到結盟 $M=2^{R+1}$ 個玩家，結果保證必勝且獨贏。

定理 4 若找到結盟 $M=2^R$ 個玩家則參賽玩家人數 N 介於 $2^R+2\times2^R-1$ 至 $2^R+3\times2^R-2$

時，此時結果可保證必勝但可能均分。

證明：

(1)當 $R=1$ 時，此時找到結盟 $M=2$ 個玩家，則參賽玩家人數 $N=5$ 或 6 時，

由參研究方法或過程中的三、問題初步分析的(三) $N=5$ 時與(五) N=6 時得知，

結果可保證必勝但可能均分。

(2)設 $R=R_0$ 時，此時找到結盟 $M_0=2^{R_0}$ 個玩家，則參賽玩家人數 N 介於

$2^{R_0}+2\times 2^{R_0}-1$ 至 $2^{R_0}+3\times 2^{R_0}-2$ 時，結果可保證必勝但可能均分。

(3)則當 $R=R_0+1$ 時，此時找到結盟 $M=2^{R_0+1}$ 個玩家，結果保證必勝但可能均分。

方法為第一輪問問題時， $M_0=2^{R_0}$ 人回答是，另 $M_0=2^{R_0}$ 人回答否，則未結盟者有

$N-M$ 最多有 $3\times 2^{R_0+1}-2$ ，若回答問題時，是與否各有人數 $\dfrac{N-M}{2}$ ，則形成平手，

重新問問題。故分出勝負時，回答問題時未結盟者中少數方人數為 0 人最多至

$\dfrac{N-M-2}{2}=3\times 2^{R_0}-2$ ，此輪結束後，我結盟玩家有 $M_0=2^{R_0}$ 個，而參賽玩家

人數 N 若介於 2^{R_0} 至 $2^{R_0}+2\times 2^{R_0}-2$ ，由定理 1 得知，結果必然是獨勝。但人數 N 若

介於 $2^{R_0}+2\times 2^{R_0}-1$ 至 $2^{R_0}+3\times 2^{R_0}-2$ ，由(2)中的假設得知，結果可保證必勝但可能

均分。故由數學歸納法得知定理 4 成立。

推論 3 若參賽玩家人數 $N=3\times 2^R-2+L$ ， $1\le L\le 2^R$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家

，結果可保證必勝但未必獨贏。

三、利用二進位法解決多數決問題

觀察最高獲利 $\dfrac{N-M}{M}$ 中，分子+分母=N，而二人均分的最低獲利 $\dfrac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\dfrac{N-2M}{2M}$

$=\dfrac{N-2\times 2^R}{2\times 2^R}$ 中，分子+分母=N 亦正確，而 N+1 的二進位前兩位 P，其他位 Q，

則 $N+1=P\circ Q$ ，文中 $P\circ Q$ 表位元拼接， $P\circ Q=\text{verilog}\{P,Q\}$ ，例如 $P=(101)_2$ ，

$Q=(011)_2$ ，則 $P\circ Q=(101)_2\circ(011)_2=(101011)_2$ ，如果 $P=(ABC)_2$ ， $Q=(DEF)_2$ ，則

$P\circ Q=(ABC)_2\circ(DEF)_2=(ABCDEF)_2$ 。而 $N=P\circ Q-1=(P_1+P_2)\circ(Q_1+Q_2)-1$

$=P_1\circ Q_1+P_2\circ Q_2-1$ ，所以正確決定分母 $P_2\circ Q_2$ 則分子必定正確。

(1)找到結盟 $M=2^R$ 個玩家則參賽玩家人數 N 介於 $2\times 2^R-1$ 至 $2^R+2\times 2^R-2$ 時，

由定理 1 知，此時結果必然是獨贏，最高獲利與最低獲利相同。則 N+1 介於 2×2^R 至 $2^R+2\times 2^R-1$，此時 N+1 的二進位前兩位 P=10， $M=2^R=(100\cdots 00)_2$ ，其中二進位有 R 個 0， $M=2^R=(100\cdots 00)_2=P_2\circ Q_2$ 正確。

(2)找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，則參賽玩家人數 N 介於 $2^R+2\times 2^R-1$ 至 $2^R+3\times 2^R-2$ 時，由定理 2 知，此時結果可能獨贏也可能均分，最高獲利為獨贏，最低獲利為兩人均分。則 N+1 介於 3×2^R 至 $4\times 2^R-1$ ，此時 N+1 的二進位前兩位 P=11，

最高獲利 $\dfrac{N-M}{M}$ 中，分子+分母=N。此時 N+1 的二進位前兩位 P=11，

$M=2^R=(100\cdots 00)_2$ ，其中二進位有 R 個 0， $M=2^R=(100\cdots 00)_2=P_2\circ Q_2$ 正確。

最低獲利 $\dfrac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\dfrac{N-2M}{2M}=\dfrac{N-2^{R+1}}{2^{R+1}}$ 中，分子+分母=N。此時 N+1 的二進位前兩位 P=11， $P_2\circ Q_2=(10)\circ(00\cdots 00)_2=2^{R+1}$ 分母正確。

由前段知正確決定分母 $P_2\circ Q_2$ 則分子必定正確，得證。

定理 5 獨贏時最高（低）獲利上限 2，但永遠不等於 2，兩人均分時最高獲利上限 3，但永遠不等於 3。最低獲利上限 1，但永遠不等於 1。

證明：

獨贏時由二進位得知獲利分子 $P_1\circ Q_1=(01)\circ Q_1$ ，但 Q_1 最多為 $(11\cdots 10)_2<2^R$

故最高獲利分子 $P_1\circ Q_1<2\times 2^R$ ，此時分母為 $M=2^R$ ，故比值小於 2，但不等於 2。

若兩人均分時則最低獲利顯然小於 1，因為 $P_1\circ Q_1=(01)\circ Q_1<(10)\circ Q_2=P_2\circ Q_2$ ，比值上限 1，但永遠不等於 1。若兩人均分時由二進位得知最高獲利分子 $P_1\circ Q_1=(10)\circ Q_1$ ，但 Q_1 最多為 $(11\cdots 10)_2<2^R$

故最高獲利分子 $P_1\circ Q_1<3\times 2^R$ ，此時分母為 $M=2^R$ ，故小於 3，但不等於 3。

四、電視劇中另有一個福永必勝法，福永利用 R 輪不平手問題，每個組織都需要結盟 $M=2^R$ 個玩家，3 個結盟組織共需 $3M=3\times 2^R$ ，但是福永每個組織皆佔 1 個名額，故總人數為 $N=3(M-1)+1=3\times 2^R-2$ ，恰為 R 輪不平手問題下能獨勝的最多人數，且比賽過程中福永所在的問題組皆能保證為少數，最後福永得勝時就打算捲款逃跑，幸好被識破。以上的福

永必勝法，在電視劇中為福永利用 R=3 輪不平手問題，每個組織都需要結盟 $M=2^R=8$ 個玩家，3 個結盟組織共需 $3M=3\times 2^R=24$，但是福永每個組織皆佔 1 個名額，故總人數為 $N=3(M-1)+1=3\times 2^R-2=22$，恰為 R=3 輪不平手問題下能獨勝的最多人數，且比賽過程中福永所在的問題組皆能保證為少數。

陸、結論：

由前面的研究獲得以下的結論：

(1)當參賽玩家人數 $2\times 2^R-1\le N\le 4\times 2^R-2$ 時，最多問 R 個不平手的問題後，可以得出最終勝利者，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，則必有至少一個最終勝利者。(2) $2\times 2^R-1\le N\le 3\times 2^R-2$ 時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果必是獨贏，最高獲利與最低獲利均為 $\dfrac{N-M}{M}$ 單位。

(3)當 $3\times 2^R-1\le N\le 4\times 2^R-2$ 時，此時若找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果可保證必勝但可能兩人均分，最高獲利為 $\dfrac{N-M}{M}$ 單位，最低獲利為 $\dfrac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\dfrac{N-2M}{2M}=\dfrac{N-2\times 2^R}{2\times 2^R}$ 單位。

(4)當 $3\times 2^R-1\le N\le 4\times 2^R-2$ 時，此時若找到結盟 $M=2^{R+1}$ 個玩家，結果必是獨贏，最高獲利與最低獲利均為 $\dfrac{N-M}{M}=\dfrac{N-2^{R+1}}{2^{R+1}}$ 單位，恰與(3)中的最低獲利相等，

研究中，發現此問題解決上類似約瑟夫問題，仿照約瑟夫問題利用二進位法來處理，將參賽玩家人數 N 轉 $N+1$ 的二進位，則經過 R 輪不平手回合後必勝，其中 R=(N+1 的二進位長度) −2，N+1 的二進位第 2 位為 0 則為獨勝，此時最高獲利與最低獲利相同。若為 1 則可能兩人均分，最高獲利與最低獲利不同。此時取 $N+1$ 的二進位前兩位 P，其他位 Q，

(1)若 $P=(10)_2$，則 $P=P_1+P_2=(01)_2+(01)_2$，$Q-1=Q_1+Q_2=Q_1+(0\cdots 0)_2$ P_1 結合 Q_1 為最高（低）獲利的分子，分母為 P_2 結合 $Q_2=(10\cdots 00)_2$，比值即最高（低）獲利。

若 $P=(11)_2=P_1+P_2=(10)_2+(01)_2=(01)_2+(10)_2$, $Q-1=Q_1+Q_2=Q_1+(0\cdots 0)_2$，會有兩種情形

(2) $P=P_1+P_2=(10)_2+(01)_2$， P_1 結合 Q_1 為最高獲利的分子， P_2 結合 $Q_2=(010\cdots 0)_2$ 為分母，比值即為最高獲利。

(3) $P=P_1+P_2=(01)_2+(10)_2$， P_1 結合 Q_1 為最低獲利的分子， P_2 結合 $Q_2=(100\cdots 0)_2$ 為分母，比值即為最低獲利。此時利用電腦即能處理大數字 N。

柒、參考文獻資料：

[1]維基百科。2022 年 2 月 13 日，https://zh.wikipedia.org/wiki/詐欺遊戲_(日本電視劇)

[2]百度百科。2022 年 2 月 13 日，取自 https://reurl.cc/j1om9Z (百度百科)

[3]欺詐遊戲中的少數決遊戲是怎麼玩兒的？2022 年 2 月 13 日，取自 https://reurl.cc/OAnRm7

[4]Graham、Knuth、Patashnrk，賴飛羆譯，Concrete Mathematics，具體數學，東華出版社，一版，台北市，P.9～19，1988 年出版。

[5]簡子為、詹朱聰、林豐正、林育翔 (2003)，九死一生，全國中小學第 43 屆科展高中組數學科作品。

[6]夏興國。數學歸納法縱橫談，台北市，九章出版社，1999 年出版。

【評語】050419

本作品討論「少數決勝淘汰遊戲」的策略與期望值。這是所有參賽作品中，唯一的探討機率的文章。作者對於人數少時窮舉了所有的可能並計算其期望值，作者對於結盟人數以達必勝的人數與策略進行相當完整的討論並利用數學歸納法證明。整體而言作者引進二進位的想法，是相當不錯的作品。 此外，作者表現出對數學研究的熱情，值得鼓勵。

作品簡報

詐欺遊戲之少數決

高級中等學校組
數學科

壹、簡介

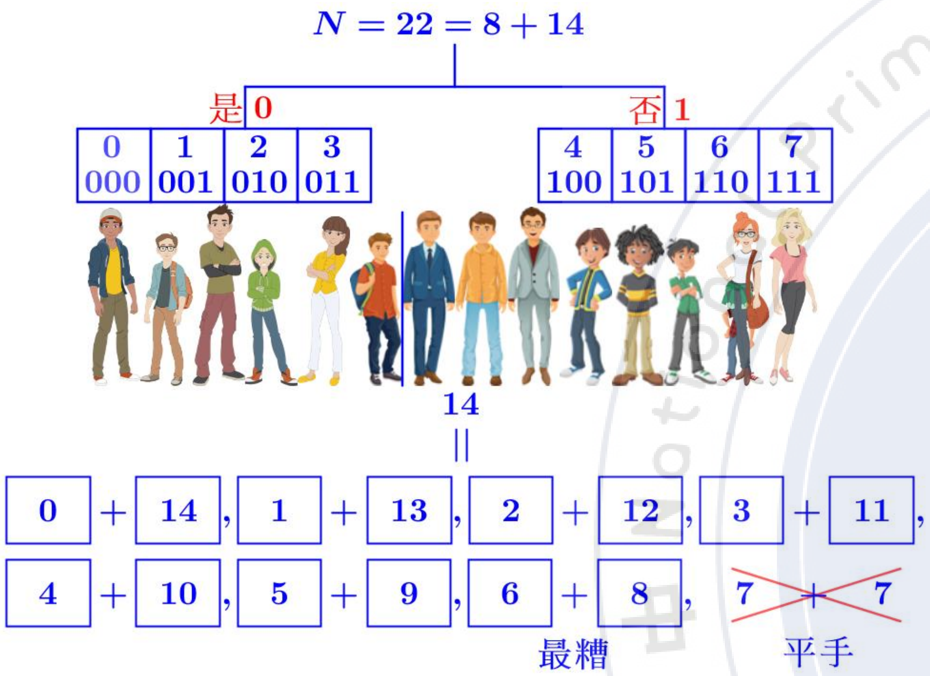

圖1-1：*N*=22

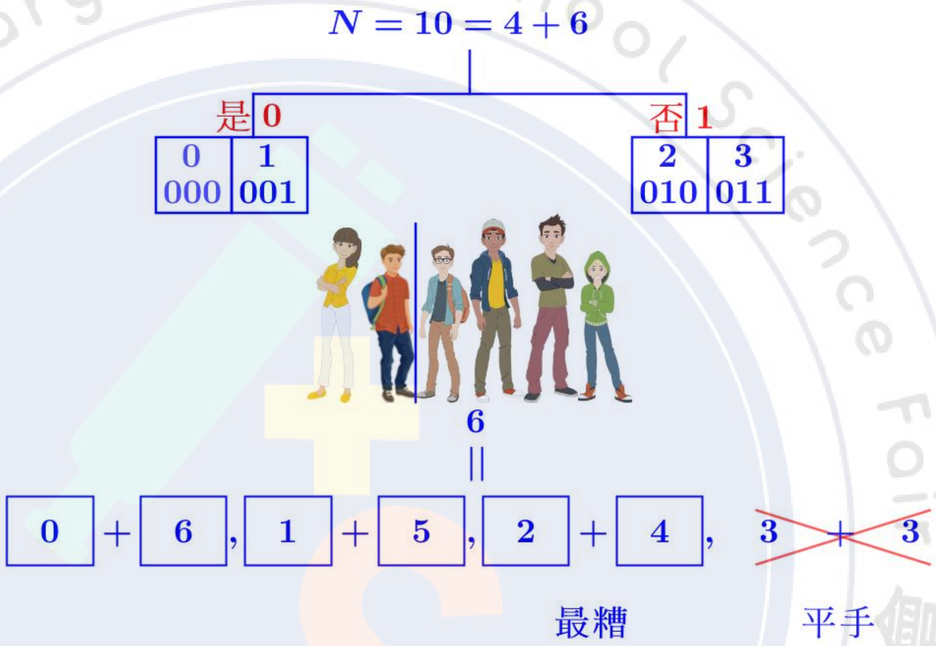

圖1-2 ：*N*=10

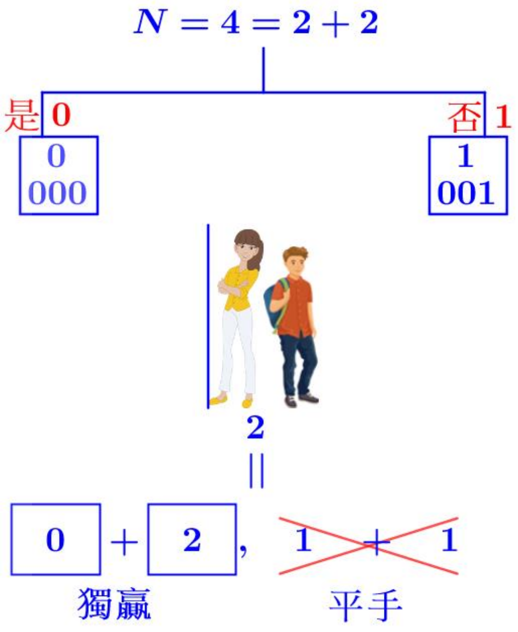

圖1-3：*N*=4

最近看了韓劇「魷魚遊戲」後就對這類生存遊戲感到有趣，後來因緣際會下看到日劇「詐欺遊戲」其中第二回的「少數決勝淘汰遊戲」，覺得跟我們剛學的數列與級數與機率似乎有點關係，所以就求教老師，在老師的引導下探討該問題。

貳、研究目的與問題

遊戲名稱：少數決

比賽人數：22

參賽者最初持有的金額：1億元(以名牌上的鑽石代表)

規則：

每回合提出一個是非題，所有參賽者在6小時內選擇自己的回答(Yes/No)並投票。時間終了後進行開票，少數派的一方獲勝，多數派的一方全數淘汰，並背負1億元債務。持續進行到剩下1或2名玩家為止。

最高獎金：21億元

敗者負債：1億元 [1]

參、研究過程與方法

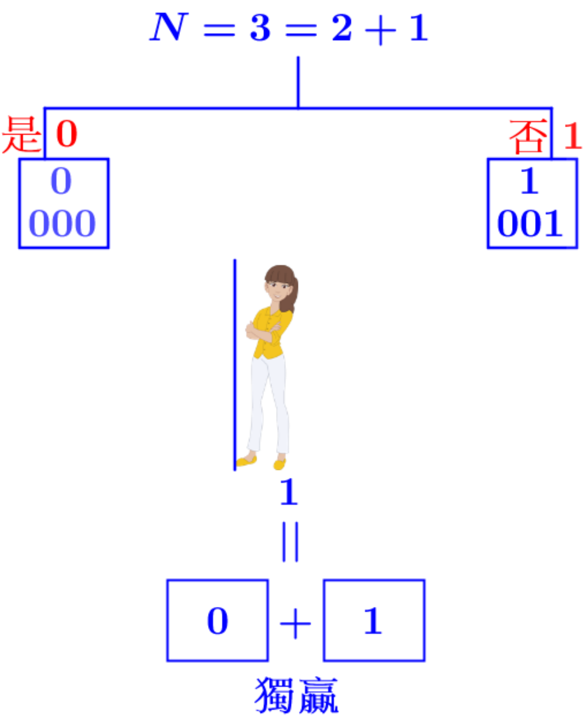

圖2-1：N=3

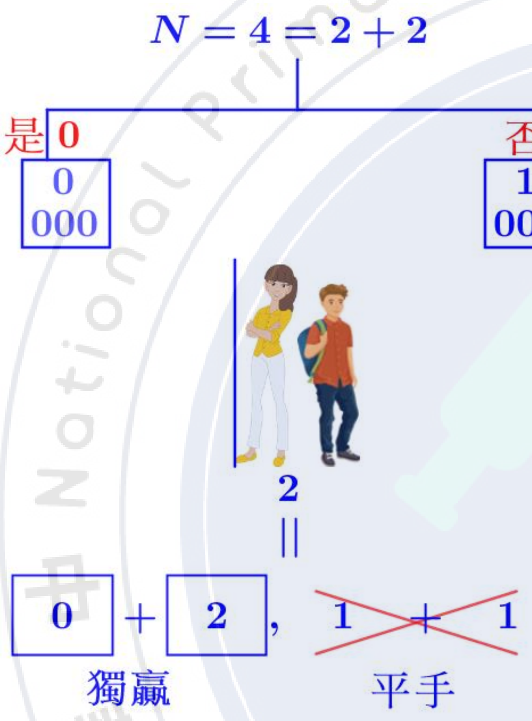

圖2-2：N=4

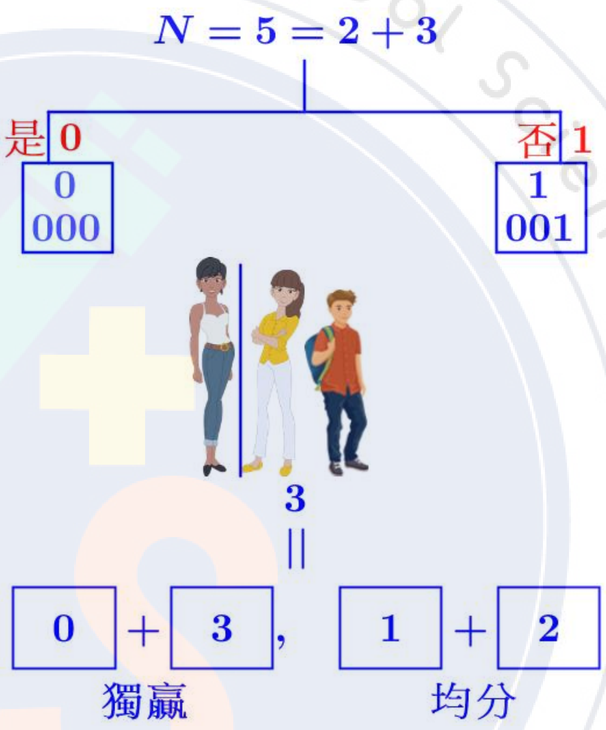

圖2-3：N=5

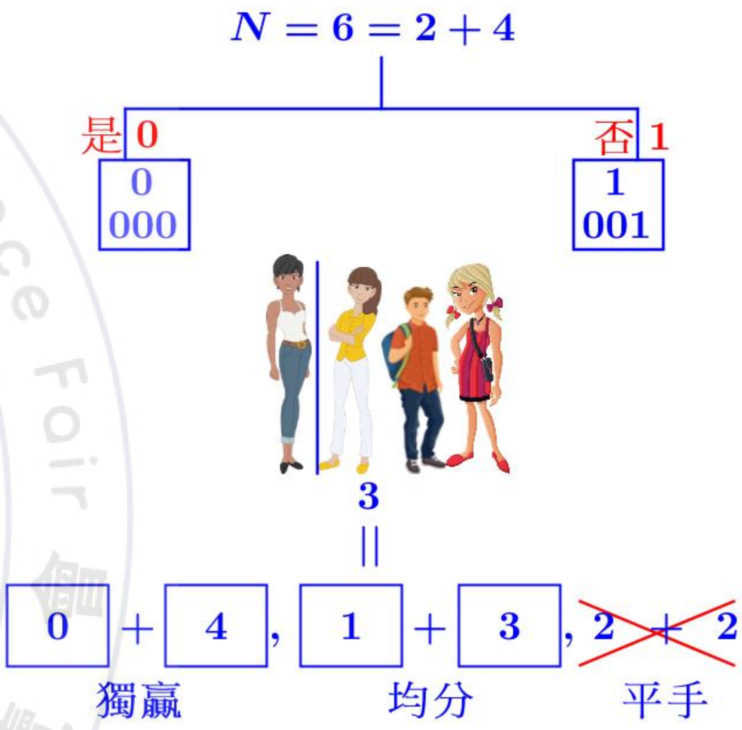

圖2-4：N=6

肆、研究結果

一、N、M、是否獨勝、最高獲利與最低獲利整理如表1：

表1：N、M、是否獨勝、最高獲利與最低獲利

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
M	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4
是否獨勝	是	是	否	否	是	是	是	是	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2=\frac{4}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2=\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$
最低獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
M	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
是否獨勝	是	是	是	是	是	是	是	是	否	否	否	否	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{18}{8}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{20}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{22}{8}$
最低獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$

二、二進位法觀察少數決結果：

表2：N由3至30的二進位與是否獨勝、最高獲利與最低獲利關聯表

N	N+1 二進位	輪數 R	前2位P	其他位Q	第2位	必勝最少同盟數	必勝全拿同盟數	最高獲利分子	最高獲利分母	最高獲利	最低獲利分子	最低獲利分母	最低獲利
3	100	1	10	0	0	2	2	1	2	0.5	1	2	0.5
4	101	1	10	1	0	2	2	2	2	1	2	2	1
5	110	1	11	0	1	2	4	3	2	1.5	1	4	0.25
6	111	1	11	1	1	2	4	4	2	2	2	4	0.5
7	1000	2	10	00	0	4	4	3	4	0.75	3	4	0.75
8	1001	2	10	01	0	4	4	4	4	1	4	4	1
9	1010	2	10	10	0	4	4	5	4	1.25	5	4	1.25
10	1011	2	10	11	0	4	4	6	4	1.5	6	4	1.5
11	1100	2	11	00	1	4	8	7	4	1.75	3	8	0.375
12	1101	2	11	01	1	4	8	8	4	2	4	8	0.5
13	1110	2	11	10	1	4	8	9	4	2.25	5	8	0.625
14	1111	2	11	11	1	4	8	10	4	2.5	6	8	0.75
15	10000	3	10	000	0	8	8	7	8	0.875	7	8	0.875
16	10001	3	10	001	0	8	8	8	8	1	8	8	1
17	10010	3	10	010	0	8	8	9	8	1.125	9	8	1.125
18	10011	3	10	011	0	8	8	10	8	1.25	10	8	1.25
19	10100	3	10	100	0	8	8	11	8	1.375	11	8	1.375
20	10101	3	10	101	0	8	8	12	8	1.5	12	8	1.5
21	10110	3	10	110	0	8	8	13	8	1.625	13	8	1.625
22	10111	3	10	111	0	8	8	14	8	1.75	14	8	1.75
23	11000	3	11	000	1	8	16	15	8	1.875	7	16	0.4375
24	11001	3	11	001	1	8	16	16	8	2	8	16	0.5
25	11010	3	11	010	1	8	16	17	8	2.125	9	16	0.5625
26	11011	3	11	011	1	8	16	18	8	2.25	10	16	0.625
27	11100	3	11	100	1	8	16	19	8	2.375	11	16	0.6875
28	11101	3	11	101	1	8	16	20	8	2.5	12	16	0.75
29	11110	3	11	110	1	8	16	21	8	2.625	13	16	0.8125
30	11111	3	11	111	1	8	16	22	8	2.75	14	16	0.875

1. 輪數 R=N+1 的二進位位數 – 2
   我方同盟人數為 2^R 。
2. N+1 的二進位第 2 位為 0，
   則我方為獨勝。
   N+1 的二進位第 2 位為 1，
   則可能兩人均分。
3. 將 N+1 的二進位拆成 P，Q
   則最高獲利與最低獲利和
   P，Q有關。

三、約瑟夫問題與少數決問題的關聯性(一)

約瑟夫問題：

表3：具體數學所列的約瑟夫問題規律

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(N)$	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

少數決問題：

表4：我所觀察的少數決問題規律

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	8	8
最高獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2=\frac{4}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2=\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$
最低獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

觀察每輪間的關係時，發現每一輪都會使得人數減少一半多一些，而結果會遞迴變成前面的人數，參考2003年學長所做的科展 [5]，其與約瑟夫問題很相像，似乎都跟除2後有些關聯性，此時參考具體數學[4]裡的約瑟夫問題解決方法來解決少數決問題。

三、約瑟夫問題與少數決問題的關聯性(二)

約瑟夫問題：總人數$N=2^m+k$，最後存活者$J(N)=2k+1$

少數決問題：總人數$N=2^m+k$=結盟人數M+未結盟人數，

約瑟夫問題：$N=22=(10110)_2$

$J(N)=(01101)_2=13$

少數決問題：

$$N=22=\underline{(10\overbrace{110}^{3\text{輪不平手問題}})_2}$$

$\downarrow$

1

$$\text{獲利}=\frac{(01110)_2}{(01000)_2}=\frac{14}{8}$$

少數決問題：$N=29=\underline{(11101)_2}$

$\downarrow$

1

$$\text{最高獲利}=\frac{(10101)_2}{(01000)_2}=\frac{21}{8}$$

$$\text{最低獲利}=\frac{(01101)_2}{(10000)_2}=\frac{13}{16}$$

四、利用二進位法處理少數決

$$N+1=(\overbrace{\boxed{B_R}}^{P}\,|\,\underbrace{\overbrace{\boxed{B_{R-1}}\dots\boxed{B_1}\boxed{B_0}}^{Q}}_{R\text{位表需}R\text{輪}})_2 \quad \text{其中 } B_i=0\text{ 或 }1,\ i=0,1,2,\cdots\cdots,R$$

(1) $B_R=0$ 獨贏

$$P=\underset{\boxed{1}\boxed{0}_2}{}\begin{cases} P_1\ \boxed{0}\boxed{1}_2\ Q_1=Q=(B_{R-1}\dots B_1B_0)_2 \\ + \\ P_2\ \boxed{0}\boxed{1}_2\ \ Q_2=(\underbrace{00\dots00}_{R\text{個}})_2 \end{cases}$$

獲利分子：$P_1\circ Q_1-1=(01B_{R-1}\dots B_1B_0)_2-1$

獲利分母：$P_2\circ Q_2=(01\underbrace{00\dots00}_{R\text{個}})_2$

獲利：$\dfrac{P_1\circ Q_1-1}{P_2\circ Q_2}$

(2) $B_R=1$ 可能均分 $P=(11)_2=(10)_2+(01)_2=(01)_2+(10)_2$

$$\boxed{1}\boxed{1}_2\begin{cases} P_1\ \boxed{1}\boxed{0}_2\ \text{最高獲利分子：}P_1\circ Q_1-1=(10B_{R-1}\dots B_1B_0)_2-1 \\ + \\ P_2\ \boxed{0}\boxed{1}_2\ \text{最高獲利分母：}P_2\circ Q_2=(01\underbrace{00\dots00}_{R\text{個}})_2 \end{cases}$$

最高獲利：$\dfrac{P_1\circ Q_1-1}{P_2\circ Q_2}$

$$P=\underset{\boxed{1}\boxed{1}_2}{}\begin{cases} P_1\ \boxed{0}\boxed{1}_2\ \text{最低獲利分子：}P_1\circ Q_1-1=(01B_{R-1}\dots B_1B_0)_2-1 \\ + \\ P_2\ \boxed{1}\boxed{0}_2\ \text{最低獲利分母：}P_2\circ Q_2=(10\underbrace{00\dots00}_{R\text{個}})_2 \end{cases}$$

最低獲利：$\dfrac{P_1\circ Q_1-1}{P_2\circ Q_2}$

伍、討論

表5：人數範圍、結盟人數與是否獨勝的關係

N	$N=2\times2^R-2+L$, $1\le L\le 2^R$	$N=3\times2^R-2+L$, $1\le L\le 2^R$	$N=2^R+2^{R-1}-2+L$, $1\le L\le 2^R+2^{R-1}$
M	2^R	2^R	2^R
是否獨勝	是	否	是
最高獲利	$\frac{N-M}{M}=1+\frac{L-2}{2^R}$	$\frac{N-M}{M}=2+\frac{L-2}{2^R}$	$\frac{N-M}{M}=\frac{1}{2}+\frac{L-2}{2^R}$
最低獲利	$\frac{N-M}{M}=1+\frac{L-2}{2^R}$	$\frac{\frac{1}{2}N-M}{M}=\frac{1}{2}+\frac{L-2}{2^{R+1}}$	

六、結論

表6 ：結論整理

情形	玩家人數	問題數	結盟人數	結果
1	$2\times2^R-1\le N\le4\times2^R-2$	R	2^R	至少一個勝利者
2	$2\times2^R-1\le N\le3\times2^R-2$	R	2^R	獨贏
3	$3\times2^R-1\le N\le4\times2^R-2$	R	2^R	可能均分
4	$3\times2^R-1\le N\le4\times2^R-2$	R	2^{R+1}	獨贏

少數決問題解決上類似約瑟夫問題，仿照約瑟夫問題利用二進位法來處理，將參賽玩家人數N轉為N+1的二進位，則經過R輪不平手回合後必勝，其中R=(N+1的二進位長度)-2，N+1的二進位第2位為0則為獨勝，此時最高獲利與最低獲利相同。若N+1的二進位第2位為1則可能兩人均分，最高獲利與最低獲利不同。

陸、結論

1. 獨贏時最高（低）獲利上限 2，但永不等於 2，下限略低於 1 。

2. 兩人均分時最高獲利上限 3，但永遠不等於 3，下限略低於 2。最低獲利上限 1，但永不等於 1，下限略低於 1/2。

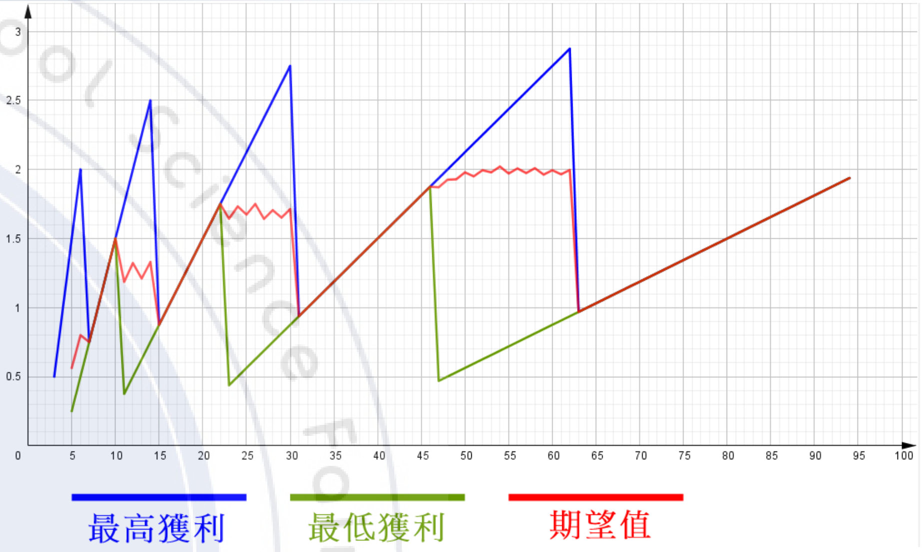

圖3：最高穫利最低獲利與期望值

References

[1] Graham 、 Knuth、Patashnrk (賴飛羆譯，1988) 。Concrete Mathematics (中譯：具體數學)， 一版，p.9～p.19。 台北市：東華。

[2] 簡子為、詹朱聰、林豐正、林育翔 (2003) 。九死一生。中華民國第43屆中小學科學展覽會高中組數學科作品。

[3] 夏興國(1999)。數學歸納法縱橫談。台北市：九章。