

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

佳作

050418

跟著拿破崙一起壓縮多邊形吧！

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 高二 林彥宇 高二 陳漢	指導老師： 王世豪
------------------------	--------------

關鍵詞：拿破崙定理、壓縮、多邊形

摘要

本文旨在推廣拿破崙定理「以任意三角形各邊為邊分別向外作正三角形，則它們的中心(三心)連線必構成一個正三角形」至「對多邊形各邊為邊分別向外作正多邊形，則正多邊形的中心點(三心)可依序連成正多邊形」時成立的多邊形條件(此多邊形稱為拿破崙多邊形)。本文證明出拿破崙多邊形、平行多邊形與壓縮多邊形的成立條件互為等價，並推廣拿破崙法為「對多邊形各邊為底邊分別向外作相似三角形，其中相似三角形頂點依序連線」且討論完畢。

壹、前言

一、研究動機

在一次查詢資料中，瀏覽到一個關於拿破崙定理的作品，看完後感到很有趣，並且發現仍有諸多未解以及許多可以延伸的問題值得去探討，於是開始了本文的研究。

二、研究目的

- (一) 歸納壓縮多邊形的性質。
- (二) 找出判斷此多邊形是否為壓縮多邊形的方法。
- (三) 證明出壓縮多邊形和拿破崙多邊形的充要關係。
- (四) 推廣拿破崙法至一般情形。

三、文獻回顧

在第 55 屆科展作品中，作者以純幾何證明「給定一壓縮軸與正五邊形或正六邊形，可以使用軸壓縮與拿破崙法作出拿破崙多邊形」，此結果等價於「在邊數為五或六時，壓縮多邊形即為拿破崙多邊形」，並且在研究結果中草率地下了「所有奇數以及偶數邊形皆可由五邊形與六邊形的結果類推得知」此結論，但是並沒有附上詳細的證明與說明。經我們進一步研究後發現情況並非如他所想，若是以相同的手法是無法證明出結論的。我們以七邊形為例，嘗試使用原作者的方法證明。

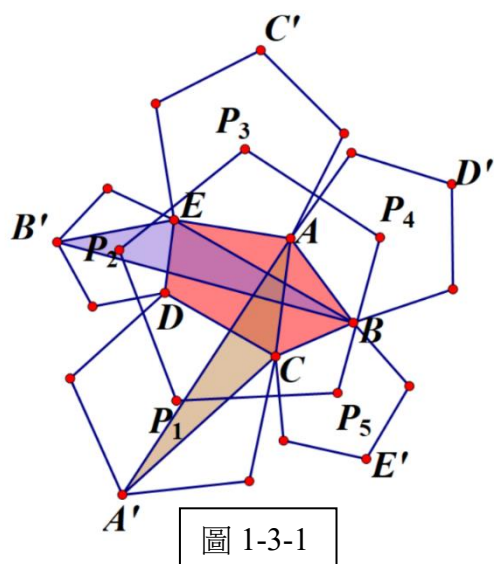


圖 1-3-1

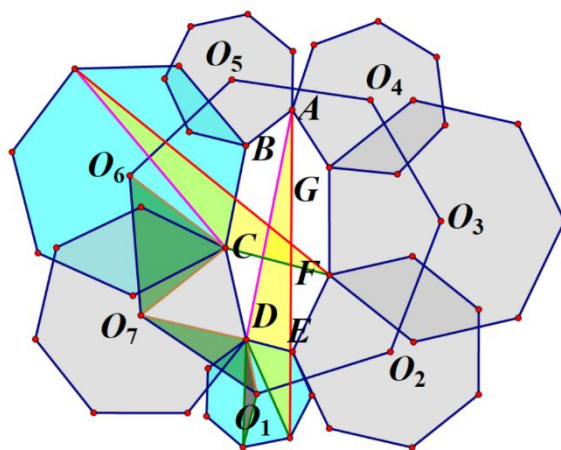


圖 1-3-2

圖 1-3-1 為原作品在五邊形證明時作完輔助線的圖形，因此我們以七邊形以相同的手法作出相同的輔助線(如圖 1-3-2)。

[原作者證明 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 為正多邊形方法]

- (一) 由三角形的全等性質證明 $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \overline{EE'}$ 。
- (二) 由三角形相似性質及(一)的結果證明 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 邊長相等。
- (三) 由兩組相似三角形得到 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 每個角度皆是 108° 。
- (四) 綜合(二)與(三)得證： $P_1P_2P_3P_4P_5$ 為正多邊形。

首先簡單敘述原作者證明手法：

觀察圖 2-1-2，與圖 2-1-1 不同的是在(二)「由三角形的相似性質...」無法找出相似的三角形(著色部分)。因此原作者提出的「可推廣至所有 n 邊形」此推測有誤，於是我們決定使用其他方法研究。

貳、研究設備及器材

電腦、紙、筆、繪圖軟體 Geogebra、繪圖軟體 Geometer's sketchpad。

參、研究過程或方法

一、名詞定義

(一) 對角線數

任選 n 邊形上一頂點命名為起始點，定義起始點編號為 1，由起始點開始順時針依序編號每一頂點為 2、3、...、 n (稱編號 k 的點為 P_k)，對於 n 邊形的一條對角線或

邊，將兩頂點編號數相加模 n 後稱該數為該對角線或邊之對角線數。

(二) 拿破崙法與拿破崙多邊形

給定一 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ ，分別以 $\overline{A_kA_{k+1}}$ ($k=1,2,\dots,n, A_{n+1}=A_1$) 為邊向外作正 n 邊形，記此類正 n 邊形中心分別為 B_1, B_2, \dots, B_n ，此過程稱為拿破崙法。若 $B_1B_2\dots B_n$ 為正多邊形，則稱 $A_1A_2\dots A_n$ 為拿破崙多邊形。

(三) 逆拿破崙法

給定一正 n 邊形依順時針編號 $B_1B_2\dots B_n$ ，可由任一點 A_1 以頂點 B_1 為中心逆時針旋轉

$\frac{2\pi}{n}$ 得到一點 A_2 ，再由 A_2 以頂點 B_2 為中心逆時針旋轉 $\frac{2\pi}{n}$ 得到一點 A_3 ，依此類推

旋轉 $n-1$ 次後依序得 A_1, A_2, \dots, A_n 共 n 個點。若在旋轉第 n 次後，所得的 A_{n+1} 與 A_1 重合，即 $A_1A_2\dots A_n$ 為拿破崙多邊形時，稱上述操作為逆拿破崙法。

(四) 軸壓縮、壓縮多邊形、壓縮倍率

給定一直線 L 與一點 B ，以點 B 在直線 L 上的垂足為伸縮中心，將點 B 伸縮 k 倍可得一點 A (僅考慮相對於直線 L ，與點 B 同側的點 A)，則稱上述操作為軸壓縮， k 即為壓縮倍率。若給定一正多邊形 $B_1B_2\dots B_n$ ，對直線 L 進行軸壓縮後可得一多邊形 $A_1A_2\dots A_n$ ，則定義 $A_1A_2\dots A_n$ 為壓縮多邊形。

(五) 點連線平行性質

給定一 n 邊形中，若對於任一頂點皆滿足以下兩個條件，則稱該 n 邊形具有點連線平行性質：

1. 該頂點編號 P_1 ，其餘頂點順時針依序編號為 P_2, P_3, \dots, P_n 。
2. 對角線分為兩種型態 $\overline{P_kP_{n-k}}$ 與 $\overline{P_kP_{n-k+1}}$ ：(下文皆將邊視為對角線)

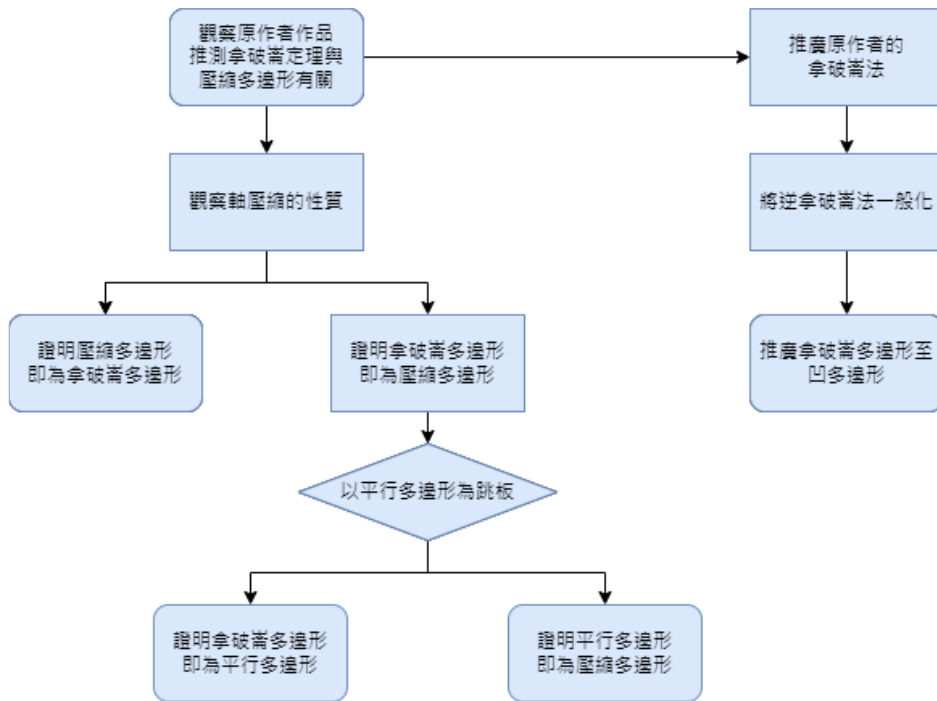
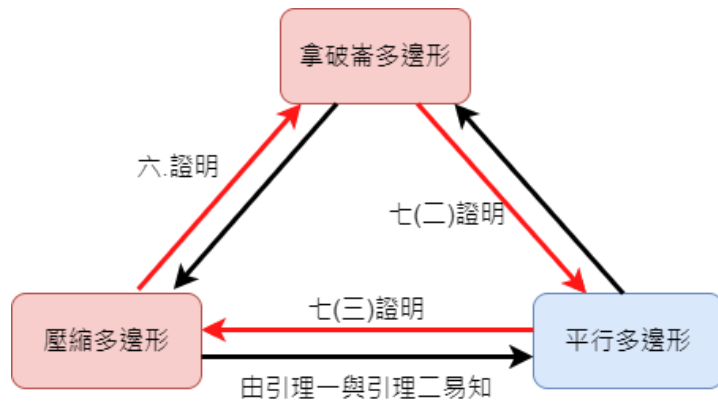
對於所有 $\overline{P_kP_{n-k}}$ ($1 \leq k < \frac{n}{2}$, $k \in \mathbb{N}$) 皆彼此平行，

且對於所有 $\overline{P_kP_{n-k+1}}$ ($1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$) 也皆彼此平行。

(六) 平行多邊形

滿足點連線平行性質的多邊形稱之為平行多邊形。

二、研究流程



三、軸壓縮性質

原作者提出下列兩壓縮性質，並且皆完整地證明完畢，在我們研究中會使用軸壓縮性質

〔引理一〕

兩平行線段以同一直線進行軸壓縮後，其線段長短比值壓縮前後保持不變。

〔引理二〕

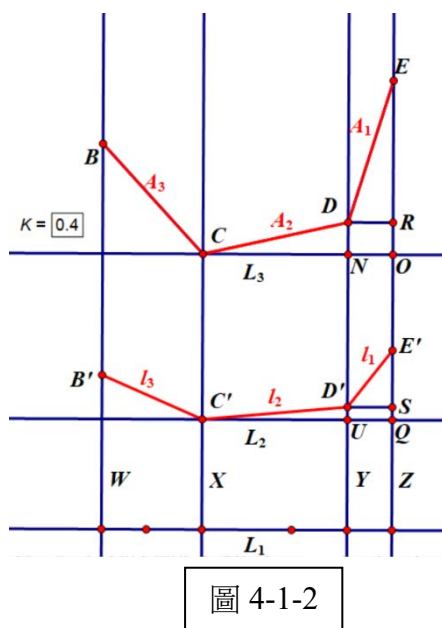
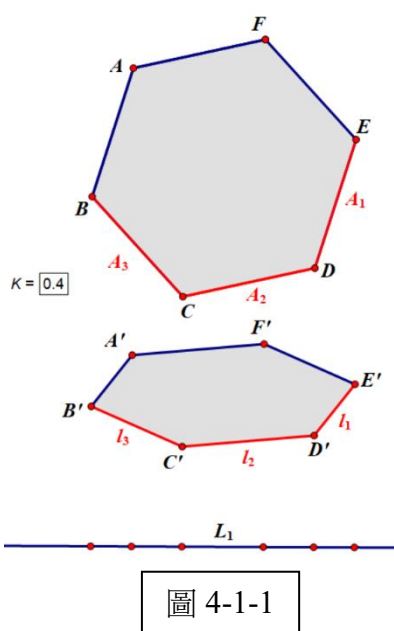
兩平行線段以同一直線進行軸壓縮後，依舊保持平行。

完成各項推導。

四、找出判斷是否為壓縮多邊形之方法

給定任一 n 邊形，在知道 n 和所有邊長大小的情況下，如何判定此多邊形是否為壓縮多

邊形？我們先以六邊形為例，作出正多邊形經過軸壓縮後的圖形(如圖 4-1-1)



設 $A_1 = A_2 = A_3 = l$ ， $\angle DCN = \theta$ ， $\beta = \angle EDC = \frac{360^\circ}{n}$ ，壓縮倍率為 K ，壓縮軸為直線 L_1

可將圖 5-2-1 簡化成圖 5-2-2，其中直線 W, X, Y, Z 為 B, C, D, E 對壓縮軸 L_1 的垂線，

直線 L_2, L_3 為平行壓縮軸 L_1 ，且分別過 C', C 的平行線，

可經由三角比標示出：

$$\angle D'C'U = \alpha, \quad \overline{E'S} = K \cdot l \cdot \sin(\beta - \theta), \quad \overline{D'S} = -l \cdot \cos(\beta - \theta), \quad \overline{D'U} = K \cdot l \cdot \sin(\theta)$$

$$\overline{UC'} = l \cdot \cos(\theta), \quad \overline{C'M} = -l \cdot \cos(\beta + \theta), \quad \overline{MB'} = K \cdot l \cdot \sin(\beta + \theta)$$

利用畢氏定理可得方程式：

$$\begin{cases} l_1^2 = l^2 (1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta - \theta)) \dots\dots ① \\ l_2^2 = l^2 (1 + (K^2 - 1) \sin^2(\theta)) \dots\dots ② \\ l_3^2 = l^2 (1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta + \theta)) \dots\dots ③ \end{cases}$$

將 $\frac{②-①}{③-②}$ 可得 $\angle DCN$ 值，將 $\frac{①}{③}$ 可得壓縮倍率 K ，計算過程見附錄一。

(一) 公式整理

我們易知一壓縮多邊形的壓縮軸方向必有兩種且相互垂直 \Rightarrow 必然存在一個

$\theta' = \theta + 90^\circ$ ，令 $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ 並分別代入後續計算的公式結果，整理出公式如下：

判別是否為壓縮多邊形公式

$$J = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2 - l_2^2}, T = \frac{l_1^2}{l_3^2}, \theta_1 = \frac{\tan^{-1}\left(\tan(\beta)\frac{1+J}{1-J}\right)}{2}, \theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{T-1}{\sin^2(\beta-\theta_1) - T\sin^2(\beta+\theta_1)} + 1}, K_2 = \sqrt{\frac{T-1}{\sin^2(\beta-\theta_2) - T\sin^2(\beta+\theta_2)} + 1}$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\tan(\beta)\frac{J+1}{1-J}\right)}{2}\right)K_1\right), \alpha_2 = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\tan(\beta)\frac{J+1}{1-J}\right)}{2}\right)K_2\right)$$

五、壓縮多邊形即為拿破崙多邊形

以下我們會利用壓縮多邊形的幾何性質，證明壓縮多邊形即為拿破崙多邊形。

(一) 觀察

對 n 邊形每一邊向外作正 n 邊形，可等價於：對 n 邊形每一邊向外作以邊為底，頂角為 $\frac{360^\circ}{n}$ 的等腰三角形。

觀察正多邊形以及壓縮多邊形的關聯性， O_1 為原始正多邊形的中心， O_2 為 O_1 對直線 L 以倍率 $k = 0.5$ 為進行軸壓縮後的結果。

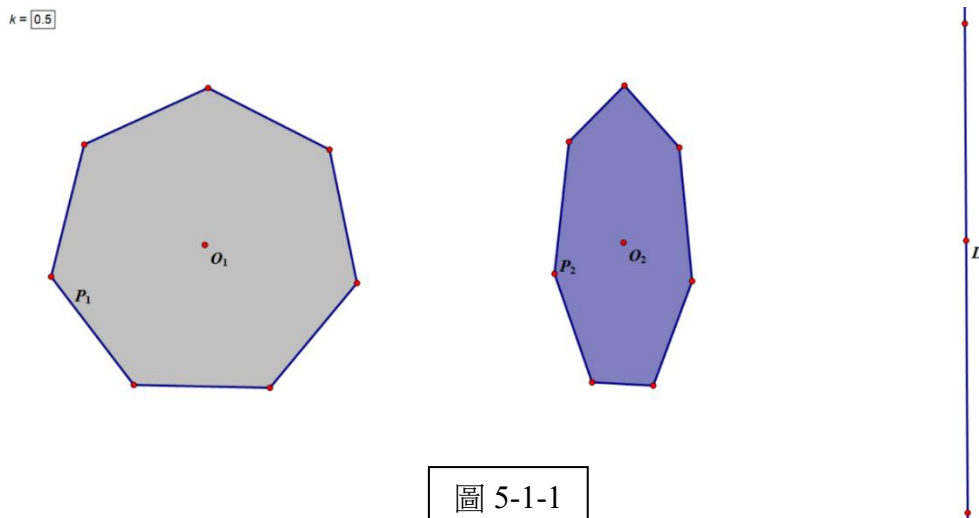


圖 5-1-1

如圖 5-1-2，將原始正多邊形平移 $\overline{O_1O_2}$ ，並且作平行壓縮軸 L 且過 O_2 的直線 M ，對壓縮多邊形及正多邊形分別作拿破崙法分別得七邊形 $D_1D_2\dots D_7$ 與正七邊形 $B_1B_2\dots B_7$ 。觀察 B_1, B_2, D_1, D_2 四點，發現 D_1, D_2 兩點會分別在 $\overline{O_2B_1}, \overline{O_2B_2}$ 上移動，並且在任意的壓縮倍率下， $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{D_1D_2}$ ，因此推測

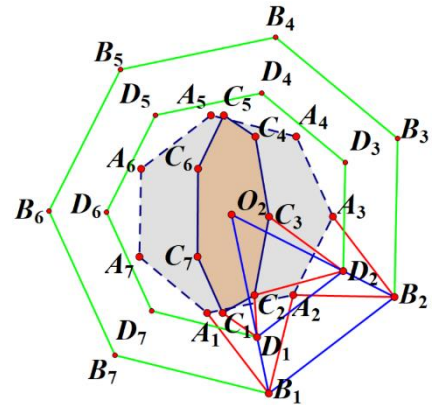


圖 5-1-2

〔推測性質〕

$\overline{O_2D_n} = \overline{O_2B_n} \cdot r, r \in \mathbb{R}$ ，並且 D_n 恆在 $\overline{O_2B_n}$ 上。

若證明出推測性質，即可確定一個 B_n 會對應到一個 D_n ，間接證明壓縮多邊形即為拿破崙多邊形。

D_n 恆在 $\overline{O_2B_n}$ 上等價於 $\overline{O_2D_1} : \overline{O_2B_1} = \overline{D_1D_1'} : \overline{B_1B_1'}$ ，其中 B_1', D_1' 為 B_1, D_1 分別在直線 M 上的垂足。只需計算上述四段線段的長度即可完成證明。

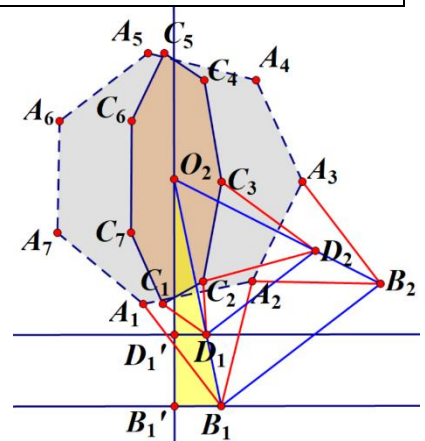


圖 5-1-3

〔定理二〕

所有壓縮多邊形皆為拿破崙多邊形。

<證明>

見圖 5-2-1 令原始正多邊形邊長為 x ， $\angle B_1O_2B_1' = \theta$ ， R 為 Q 對 $\overline{D_1D_1'}$ 的垂足， S 為 C_2 對 $\overline{A_1V}$ 的垂足， W 為 A_2 對 $\overline{A_1V}$ 的垂足

$\therefore O_2A_1B_1A_2$ 為菱形，且 P 為 $\overline{A_1A_2}$ 中點

$\therefore \overline{O_2P} = \frac{1}{2}\overline{O_2B_1}$ 又 $\overline{PP'} \parallel \overline{B_1B_1'} \therefore \overline{O_2B_1'} = 2\overline{O_2P'}$ ，

$\overline{B_1B_1'} = 2\overline{PP'}$

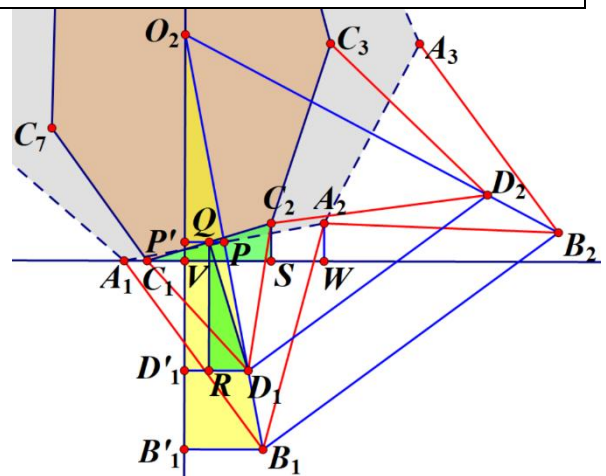


圖 5-2-1

$$\overline{B_1B'_1} = \overline{B_1O_2} \sin \theta = 2\overline{O_2P} \sin \theta = 2 \cdot \frac{1}{2} x \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \sin \theta = x \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \sin \theta$$

$$\overline{O_2B'_1} = \overline{O_2B_1} \cos \theta = 2 \cdot \overline{O_2P} \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{2} x \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \cos \theta = x \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \cos \theta$$

$$\because \angle P'QC_1 + \angle C_1QR = 90^\circ = \angle C_1QR + \angle RQD_1 \therefore \angle P'QC_1 = \angle RQD_1$$

且 $\overline{PP'} \parallel \overline{C_1S}$, $\therefore \angle P'QC_1 = \angle SC_1C_2 = \angle RQD_1$, $\Delta QRD_1 \sim \Delta C_1SC_2$ (AAA)

$$\overline{D_1R} = \overline{C_2S} \cdot \frac{\overline{QD_1}}{\overline{C_1C_2}} = \overline{C_2S} \cdot \frac{\frac{1}{2} \overline{C_1C_2} \cdot \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right)}{\overline{C_1C_2}} = \overline{C_2S} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right)$$

$$\overline{QR} = \overline{SC_1} \cdot \frac{\overline{QD_1}}{\overline{C_1C_2}} = \overline{SC_1} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{C_1C_2} \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right)}{\overline{C_1C_2}} = \overline{SC_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right)$$

$$\because \angle PUO_2 = \angle A_1UV, \angle O_2PU = 90^\circ = \angle A_1VU \therefore \angle B_1O_2B'_1 = \angle UA_1V$$

又 $\overline{C_2S} = \overline{A_2W} = x \sin \angle UA_1V = x \sin \theta$, $\overline{C_1S} = \overline{A_1W} \cdot k = x \cos \angle UA_1V \cdot k = kx \cos \theta$

$$\therefore \overline{D_1R} = \frac{1}{2} x \sin \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right), \overline{QR} = \frac{1}{2} kx \cos \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right)$$

$$\overline{P'Q} = \overline{PP'} \cdot k, \overline{D_1R} = \overline{P'Q}, \overline{QR} = \overline{P'D'_1}$$

$$\overline{D_1D'_1} = \overline{D_1R} + \overline{P'D'_1} = \frac{1}{2} x \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \sin \theta \cdot k + \frac{1}{2} x \sin \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) = x \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \sin \theta \cdot \frac{1}{2} (k+1)$$

$$\overline{O_2D'_1} = \overline{O_2P'} + \overline{P'D'_1} = \frac{1}{2} x \cos \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) + \frac{1}{2} kx \cos \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) = x \cos \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} (k+1)$$

$$\overline{O_2D'_1} : \overline{O_2B'_1} = x \cos \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} (k+1) : x \cos \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) = \frac{1}{2} (k+1) : 1$$

$$\overline{D_1D'_1} : \overline{B_1B'_1} = x \sin \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} (k+1) : x \sin \theta \cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right) = \frac{1}{2} (k+1) : 1$$

$\therefore \overline{O_2D'_1} : \overline{O_2B'_1} = \overline{D_1D'_1} : \overline{B_1B'_1}$, 可知 D_1 在 $\overline{O_2B'_1}$ 上, 壓縮多邊形即為拿破崙多邊形。

六、拿破崙多邊形即為壓縮多邊形

(一) 觀察

由於拿破崙多邊形的條件過少, 且不好使用, 因此我們使用了「平行多邊形」作為證明的跳板。

(二) 拿破崙多邊形即為平行多邊形

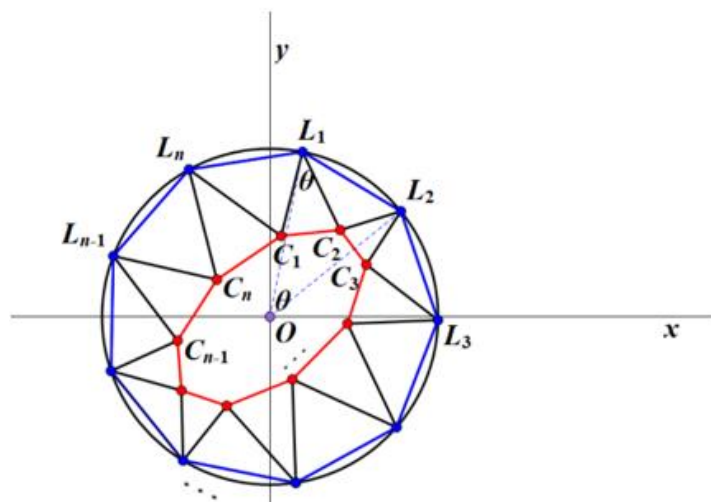


圖 6-2-1

在一單位圓上任取一點 L_1 ，作內接正 n 邊形 $L_1L_2 \dots L_n$ (如圖 6-2-1，順時針編號)，接著任意取一點 C_1 (命名為起始點) 開始對 L_1 作逆拿破崙法。

$$\text{令 } C_k = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}, L_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \theta = \frac{2\pi}{n}$$

由逆拿破崙法可列出關係式 $C_{k+1} - L_k = R_\theta(C_k - L_k)$

由命題可知 $L_k = R_{-k\theta}L_1$ ， $C_{k+1} - L_k = R_\theta(C_k - L_k)$ ，

則 $C_{k+1} - L_k = R_\theta(C_k - L_k) \Leftrightarrow C_{k+1} = R_{-k\theta}L_1 + R_\theta C_k - R_\theta L_k$

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= R_{-k\theta}L_1 + R_\theta C_k - R_\theta L_k = R_\theta C_k + R_{-k\theta}L_1 - R_\theta(R_{-k\theta}L_1) \\ &= R_\theta C_k + (R_{-k\theta} - R_{-(k+1)\theta})L_1 = R_\theta C_k + (R_{-k\theta} - R_{-(k+1)\theta})L_1 \end{aligned}$$

將 $C_{k+1} = R_\theta C_k + (R_{-k\theta} - R_{-(k+1)\theta})L_1$ 同左乘以 $R_{-(k+1)\theta}$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} R_{-(k-1)\theta}C_{k+1} = R_{(-k)\theta}C_k + (R_{(-2k-1)\theta} - R_{(-2k)\theta})L_1 \\ R_{(-k-2)\theta}C_{k+2} = R_{(-k-1)\theta}C_{k+1} + (R_{(-2k-3)\theta} - R_{(-2k-2)\theta})L_1 \\ R_{(-k-3)\theta}C_{k+3} = R_{(-k-2)\theta}C_{k+2} + (R_{(-2k-5)\theta} - R_{(-2k-4)\theta})L_1 \\ \vdots \\ R_{(-m)\theta}C_m = R_{(-m+1)\theta}C_{m-1} + (R_{(-2m+1)\theta} - R_{(-2m+2)\theta})L_1 \end{cases} \\ +) &\hline &R_{(-m)\theta}C_m = R_{(-k)\theta}C_k + \left(\sum_{t=0}^{n-1} R_{-(2t+1)\theta} - \sum_{t=0}^{n-1} R_{-(2t)\theta} \right) L_1 \end{aligned}$$

其中 $0 \leq k < m \leq n$ ， $k, n \in \mathbb{Z}$ 。將 k 用 1 代入得

$$\begin{aligned}
R_{(-m)\theta}C_m &= C_1 + \left(\sum_{t=0}^{m-1} R_{-(2t+1)\theta} - \sum_{t=0}^{m-1} R_{-(2t)\theta} \right) L_1 = C_1 + \left((R_{-\theta} - I) \sum_{t=0}^{m-1} R_{-(2t)\theta} \right) L_1 \\
&= C_1 + (R_{-\theta} - I)(I - R_{-2\theta})^{-1}(I - R_{-2m\theta})L_1 \\
&\Leftrightarrow C_m = R_{m\theta}C_1 + R_{m\theta}(R_{-\theta} - I)(I - R_{-2\theta})^{-1}(I - R_{-2m\theta})L_1
\end{aligned}$$

將 m 用 n 代入 $\Rightarrow C_{n+1} = C_1$ ，故從 C_1 按逆時針旋轉 θ 角，作點 C_2, C_3, \dots ，做 n 次後得到的 C_{n+1} 會與 C_1 重合 \Rightarrow 證明出逆拿破崙法。

$$\begin{aligned}
C_m &= R_{m\theta}C_1 + R_{m\theta}(R_{-\theta} - I)(I - R_{-2\theta})^{-1}(I - R_{-2m\theta})L_1 \\
&= R_{m\theta}C_1 + R_{m\theta}(R_{-\theta} - I)(I + R_{-\theta})^{-1}(I - R_{-\theta})^{-1}(I - R_{-2m\theta})L_1 \\
&= R_{m\theta}C_1 - R_{m\theta}(I + R_{-\theta})^{-1}(I - R_{-2m\theta})L_1
\end{aligned}$$

在此定義走一步：在多邊形 $P_1P_2\dots P_n$ 中，若以 P_1 為起點順時鐘走 γ 步，即到達 $P_{1+\gamma}$ ；同理， P_1 逆時鐘走 γ 步，即到達 $P_{1+n-\gamma}$ 。

在多邊形 $C_1C_2\dots C_n$ 中，由 C_0 朝順時針及逆時針各走 γ 步 ($1 \leq \gamma < \frac{n+1}{2}, \gamma \in \mathbb{N}$)

得 C_γ 和 $C_{n-\gamma}$ (如圖 6-2-2, 6-2-3)，將 m 用 γ 、 $n-\gamma$ 分別代入後相減求向量，

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C_\gamma - C_{n-\gamma} &= (R_{\gamma\theta} - R_{(n-\gamma)\theta})C_1 - (I + R_{-\theta})^{-1} \left((R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta}) - (R_{(n-\gamma)\theta} - R_{-(n-\gamma)\theta}) \right) L_1 \\
&= (R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta})C_1 - (I + R_{-\theta})^{-1} (R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta} + R_{\gamma\theta}) L_1 \\
&= (R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta}) \left(C_1 - 2(I + R_{-\theta})^{-1} L_1 \right)
\end{aligned}$$

$$\text{又 } R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -2\sin(\gamma\theta) \\ 2\sin(\gamma\theta) & 0 \end{bmatrix} = 2\sin(\gamma\theta) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2\sin(\gamma\theta) R_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow C_\gamma - C_{n-\gamma} = 2\sin(\gamma\theta) R_{\frac{\pi}{2}} \left(C_1 - 2(I + R_{-\theta})^{-1} L_1 \right)$$

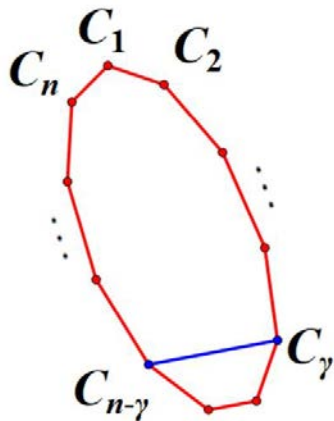


圖 6-2-2

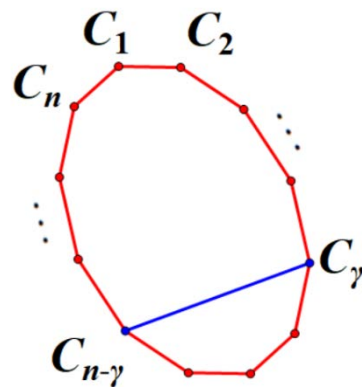


圖 6-2-3

故當 $1 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ 時， $C_{\gamma_2} - C_{n-\gamma_2} = (C_{\gamma_1} - C_{n-\gamma_1}) \frac{\sin(\gamma_2\theta)}{\sin(\gamma_1\theta)}$ ，

所以兩向量 $(C_{\gamma_1} - C_{n-\gamma_1}), (C_{\gamma_2} - C_{n-\gamma_2})$ 彼此平行。

又因為 $C_{n+1} = C_1, C_{n+2} = C_2 \dots$ ，考慮從 C_λ ($1 < \lambda \leq n, \lambda \in \mathbb{N}$) 開始時，可以重新將 C_λ 視為 C_1 ，可得到線段平行的相同結論。

模仿上述方法在偶數多邊形 $C_1 C_2 \dots C_n$ 中，由 C_1 朝順時針走 γ 步，朝逆時針走 $\gamma+1$ 步

($1 \leq \gamma < \frac{n}{2}, \gamma \in \mathbb{N}$) 得 C_γ 和 $C_{n-\gamma-1}$ (如圖 6-2-4)，將 m 用 γ 、 $n-\gamma-1$ 分別代入

後相減求向量。

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_\gamma - C_{n-\gamma-1} &= (R_{\gamma\theta} - R_{(n-\gamma-1)\theta})C_1 - (I + R_{-\theta})^{-1} (R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta} - R_{(n-\gamma-1)\theta} + R_{-(n-\gamma-1)\theta})L_1 \\ &= (R_{\gamma\theta} - R_{-(\gamma+1)\theta})C_1 - (I + R_{-\theta})^{-1} (R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta} - R_{-(\gamma+1)\theta} + R_{(\gamma+1)\theta})L_1 \end{aligned}$$

$$\because R_{\gamma\theta} - R_{-\gamma\theta} - R_{-(\gamma+1)\theta} + R_{(\gamma+1)\theta} = (\sin(\gamma\theta) + \sin(\gamma\theta + \theta))2R_{\frac{\pi}{2}} = 4\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)R_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\because R_{\gamma\theta} - R_{-(\gamma+1)\theta}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 2\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right) & -2\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right) \\ 2\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right) & 2\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \\ &= 2\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\frac{-\theta}{2} & -\cos\frac{-\theta}{2} \\ \cos\frac{-\theta}{2} & \sin\frac{-\theta}{2} \end{bmatrix} = 2\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)R_{\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

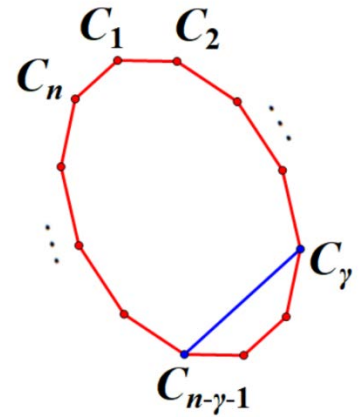


圖 6-2-4

$$\therefore C_\gamma - C_{n-\gamma-1}$$

$$= 2\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)R_{\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}C_1 - (I + R_{-\theta})^{-1} \left(4\sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)R_{\frac{\pi}{2}}\right)L_1$$

$$= \sin\left(\frac{2\gamma\theta + \theta}{2}\right) \left(2R_{\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}C_1 - 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(I + R_{-\theta})^{-1}R_{\frac{\pi}{2}}L_1\right)$$

$$\text{故當 } 1 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \frac{n}{2} \text{ 時， } C_{\gamma_2} - C_{n-\gamma_2-1} = (C_{\gamma_1} - C_{n-\gamma_1-1}) \frac{\sin\left(\frac{2\gamma_2\theta + \theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\gamma_1\theta + \theta}{2}\right)}$$

所以兩向量 $(C_{\gamma_1} - C_{n-\gamma_1-1}), (C_{\gamma_2} - C_{n-\gamma_2-1})$ 彼此平行，

符合點連線平行性質，故可推得定理三：

〔定理三〕

拿破崙多邊形即為平行多邊形。

並且由證明點連線平行性質的過程可得平行多邊形對角線長度的比例為 $\frac{\sin(\gamma_2\theta)}{\sin(\gamma_1\theta)}$ 或

$$\frac{\sin\left(\frac{2\gamma_2\theta+\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\gamma_1\theta+\theta}{2}\right)},$$

易知正多邊形其對應平行線段比例亦為 $\frac{\sin(\gamma_2\theta)}{\sin(\gamma_1\theta)}$ 或

$$\frac{\sin\left(\frac{2\gamma_2\theta+\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\gamma_1\theta+\theta}{2}\right)},$$

可知線段 $\overline{C_{\gamma_1}C_{n-\gamma_1}}$, $\overline{C_{\gamma_2}C_{n-\gamma_2}}$ 的比值或 $\overline{C_{\gamma_1}C_{n-\gamma_1-1}}$, $\overline{C_{\gamma_2}C_{n-\gamma_2-1}}$ 的比值

與其原正多邊形的對應線段比值相等。

〔引理三〕

平行多邊形的一組平行的對角線或邊，與正多邊形對應的對角線或邊的長度比例相同。

(三) 平行多邊形即為壓縮多邊形

由壓縮多邊形的定義，欲證結論等價於「對一給定平行多邊形找到一壓縮軸以及壓縮比例，對壓縮軸進行軸壓縮後可得到一正多邊形」。

首先，必須先觀察平行多邊形具有哪些幾何性質：

由對角線數的定義「兩頂點編號數相加模 n 後即為該對角線之對角線數」與點連線平行性質可得下列引理。

〔引理四〕

給定一平行多邊形兩條對角線，若對角線數相等，則兩對角線平行。

接著，觀察平行多邊形對角線的長度可得下列引理。

〔引理五〕

給定一邊數為 n 的平行多邊形，所有對角線數為 k 的對角線中，若其中包含了平行多邊形的一邊，則以此邊為第零邊，其餘邊依與第零邊的距離編號依序加一，則第 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 邊的長度最長。

<說明>

如圖 6-3-1，給定一平行多邊形 $P_1P_2\dots P_n$ ，若將 $\overline{P_1P_n}$ 令為第零邊， $\overline{P_{1+a}P_{n-a}}$

即為第 a 邊，則第 $[\frac{n}{4}]$ 邊為同斜率對角線中最長的對角線。

<證明>

由於引理五只討論對角線長度，因此可使用引理三，在過程中使用正多邊形來證明。

給定一正 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ ，討論與 $\overline{P_1P_n}$ 同方向的對角線，由於正多邊形具有

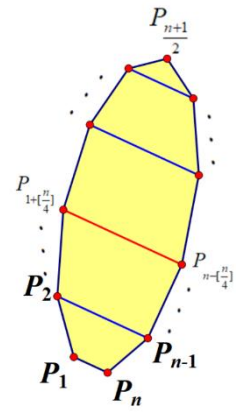


圖 6-3-1

許多條對稱軸，在這邊鎖定過 P_1 、 P_n 中點的對稱軸，因此僅需在 P_1 、 P_n 中擇一討論即可。

使 P_1 沿正多邊形的邊順時針前進， P_n 沿正多邊形的邊逆時針前進，其中兩點前進速率相同。

若 P_1 旋轉度數超過 90° ，則由正多邊形的對稱性可知 P_n 亦旋轉超過 90° ，此時 $\overline{P_1P_n}$ 長度會慢慢減少，設 P_1 旋轉了 a 次 ($a \in \mathbb{N}$)，正多邊形每個外角皆為 $\frac{360^\circ}{n}$ ，可列出 $a \times \frac{360^\circ}{n} \leq 90^\circ \dots \textcircled{1}$

整理後可得 $a \leq \frac{n}{4}$ ，依 a 的條件可知 $a \leq [\frac{n}{4}]$ ，得證。

在這邊先下個小結論：平行多邊形的幾何性質有引理四與引理五。

接著，由點連線平行性質的定義，最簡單的平行多邊形即為**平行四邊形**，因此我們以平行四邊形為證明的楔子，結合了我們在(三)提出的等價命題，想找出「對於一給定的平行四邊形，在欲壓縮成一固定長寬比矩形的條件下，是否可以找到壓縮軸以及軸壓縮比例。」

如圖 6-3-2，給定一平行四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ ，已

知 $\overline{A'_1A'_2} = \overline{A'_3A'_4} = a$ ， $\overline{A'_2A'_3} = \overline{A'_1A'_4} = b$ ， $\overline{A'_1A'_3} = e$ ，

假設壓縮倍率為 k ，壓縮軸為 L ，平行四邊形

$A'_1A'_2A'_3A'_4$ 對直線 L 以倍率 k 進行軸壓縮後，會

得到一矩形 $A_1A_2A_3A_4$ (壓縮前後點 A'_n 對應到點

A_n)，其中 $\overline{A_1A_2} = c$ ， $\overline{A_2A_3} = d$ ， $\frac{c}{d} = R$ 。

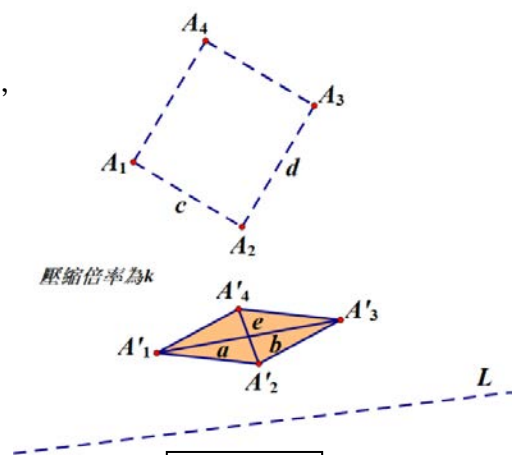


圖 6-3-2

作平行壓縮軸 L 的兩直線 L_1 、 L_2 分別過點 A'_2 與 A_2 ，點 B 與點 C 分別在直線 L_1 、 L_2 上(如圖 6-3-3)，令 $\angle A_3A_2C$ 為 θ ， $\angle A'_3A'_2B$ 為 δ 。

$\because A_1A_2A_3A_4$ 為矩形， $\angle A_1A_2A_3 = 90^\circ$

$\therefore \overline{A_1A_2}$ 與直線 L_2 的夾角為 $90^\circ - \theta$ ，

$$d = \sqrt{(d \sin \theta)^2 + (d \cos \theta)^2}$$

根據軸壓縮的定義「一點對壓縮軸的垂直距離乘

以倍率 k 」可得 $b = \sqrt{(kd \sin \theta)^2 + (d \cos \theta)^2}$ ，化簡 $d = b \sqrt{\frac{1}{(k \sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2}}$

同理 $a = \sqrt{(kc \sin(90 - \theta))^2 + (c \cos(90 - \theta))^2} = \sqrt{(kc \cos \theta)^2 + (c \sin \theta)^2}$

$$c = a \sqrt{\frac{1}{(k \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}}, \quad R = \frac{c}{d} = \frac{a \sqrt{\frac{1}{(k \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}}}{b \sqrt{\frac{1}{(k \sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2}}} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{(k \sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2}{(k \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}}$$

$$R^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{(k \sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2}{(k \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}, \quad \text{將其交叉相乘}$$

整理可得

$$R^2 b^2 k^2 \cos^2 \theta + R^2 b^2 \sin^2 \theta = a^2 k^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta$$

$$k^2 = \frac{a^2 \cos^2 \theta - b^2 R^2 \sin^2 \theta}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}$$

$$k = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \theta - b^2 R^2 \sin^2 \theta}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}}$$

因此只須證明 θ 存在，即可知壓縮倍率 k 。

作一直線 L_3 平行壓縮軸 L 且過點 A_1 ，再作一直線 L_4 平行壓縮軸 L 且過點 A'_1 ，如圖 6-3-4，令點 A_1 對壓縮軸 L 的垂足為 F_1 ，點 A_3 對壓縮軸 L 的垂足為 F_3 ，直線 L_3 交 $\overline{A_3F_3}$ 於點 M' ，直線 L_4 交 $\overline{A_3F_3}$ 於點 M ，鎖定三角形 A_1MA_3 ，

$$\overline{A_1M} = d \cos \theta + c \sin \theta \quad \overline{A'_1M'} = k \overline{A_3M} = k |d \sin \theta - c \cos \theta|$$

$$\overline{A'_1M'} = \overline{A_1M} \quad (\text{因 } \overline{A_1M} \parallel \text{壓縮軸 } L)$$

$$\begin{aligned} \overline{A'_1A_3} &= \sqrt{(\overline{A'_1M'})^2 + (\overline{A'_3M'})^2} = \sqrt{(d \cos \theta + c \sin \theta)^2 + k^2 (d \sin \theta - c \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{c^2 (k^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + d^2 (k^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2cd \sin \theta \cos \theta (k^2 - 1)} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

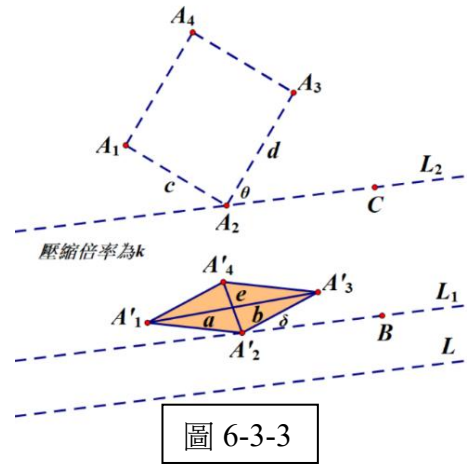


圖 6-3-3

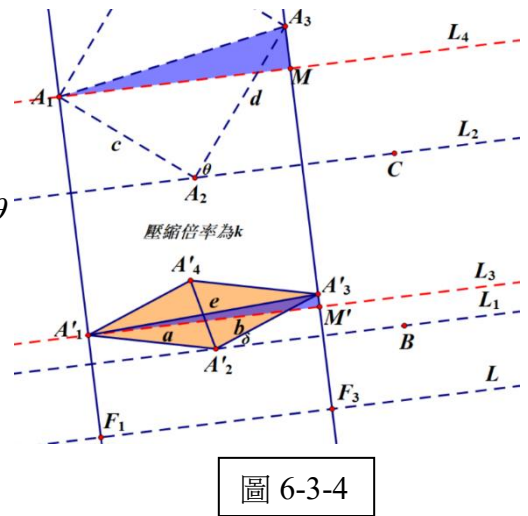


圖 6-3-4

將 $b = \sqrt{(kd \sin \theta)^2 + (d \cos \theta)^2}$ 與 $a = \sqrt{(kc \cos \theta)^2 + (c \sin \theta)^2}$ 代入①式且平方後得

$$\overline{A_1 A_3}^2 = a^2 + b^2 - 2cd \sin \theta \cos \theta (k^2 - 1) \dots \textcircled{2}, \text{ 將 } k^2 = \frac{a^2 \cos^2 \theta - b^2 R^2 \sin^2 \theta}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta} \text{ 代入②式平}$$

$$\text{方後得 } (a^2 + b^2 - \overline{A_1 A_3}^2) = 4c^2 d^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{a^2 \cos^2 \theta - b^2 R^2 \sin^2 \theta}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta} - 1 \right)^2$$

$$\text{將 } c = a \sqrt{\frac{1}{(k \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}} \text{ 與 } d = b \sqrt{\frac{1}{(k \sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2}} \text{ 後且整理後得}$$

$$(a^2 + b^2 - \overline{A_1 A_3}^2) =$$

$$4 \left(\frac{a^2}{(k \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \right) \left(\frac{b^2}{(k \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{a^2 - b^2 R^2}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta} \right)^2$$

再次將 $k^2 = \frac{a^2 \cos^2 \theta - b^2 R^2 \sin^2 \theta}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}$ 代入且乘開整理後得

$$(a^2 + b^2 - \overline{A_1 A_3}^2) =$$

$$\frac{4a^2 b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta)^2}{(a^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta)(b^2 R^2 \cos^4 \theta - b^2 R^2 \sin^4 \theta)} \left(\frac{a^2 - b^2 R^2}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta} \right)^2$$

$$\text{約分得 } (a^2 + b^2 - \overline{A_1 A_3}^2) = \frac{4a^2 b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{a^2 b^2 R^2 (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta)^2} (a^2 - b^2 R^2)^2$$

$$a^2 + b^2 - \overline{A_1 A_3}^2 = \frac{2 \sin \theta \cos \theta (a^2 - b^2 R^2)}{R^2 (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta)} = \frac{\sin 2\theta (a^2 - b^2 R^2)}{R \cos 2\theta},$$

$$\tan 2\theta = \frac{R(a^2 + b^2 - \overline{A_1 A_3}^2)}{a^2 - b^2 R^2}.$$

由計算結果知：若給定 a 、 b 、 R 、 $\overline{A_1 A_3}$ ，則可計算出 $\tan 2\theta$ 的值，並得到 θ

將 θ 代入 $k^2 = \frac{a^2 \cos^2 \theta - b^2 R^2 \sin^2 \theta}{b^2 R^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}$ 求出 k ，

又由軸壓縮的定義可知 $\tan \delta = k \tan \theta$ ，將 θ 代入可計算出 δ ， δ 即為壓縮軸與 $\overline{A_2 A_4}$ 的夾角，因此可找出壓縮軸。

將此結果寫成以下定理四：

〔定理四〕

給定一平行四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ ，並且邊長與對角線長度皆為已知，即可依據欲壓縮成的矩形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 邊長比值求出平行四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的壓縮軸與軸壓縮比例。

定理四的結論可論述成「平行四邊形可以壓縮成固定長寬比的矩形」，這與我們欲證結論的等價論述「平行多邊形可以壓縮成正多邊形」是很相像的。

在此先釐清，定理四闡述的對象為平行四邊形以及矩形，因此證明想法必須從平行四邊形與矩形起手。

定理四的條件有二，必須給定一個四邊長度以及對角線長度皆為已知的平行四邊形以及欲壓縮成矩形的長寬比。

由引理五，我們可以在平行多邊形外構造一平行四邊形，並且可以再由引理三計算對角線長度。

且正多邊形外圍可以由引理五找出正多邊形內最長的對角線，進而構造出一矩形，並且該矩形長寬比顯然只受到正多邊形邊數影響。

接下來我們回到平行多邊形即為壓縮多邊形，由上述條件與想法，我們使用了**點重合**的證明思維，再次等價命題為：

「在平行四邊形壓縮後的矩形中構造一正多邊形，若平行多邊形經相同的壓縮比例與壓縮軸進行軸壓縮後，與所構造的正多邊形重合即得證**平行多邊形即為壓縮多邊形**。」

故接下來討論「如何在平行多邊形外構造平行四邊形」：

由引理五可知：

當 $n = 2k + 1$ 時， P_{1+a} 會與 P_{n-a} 重合，因此 $a = \frac{n-1}{2}$ ，對稱軸通過的點為 $P_{\frac{n+1}{2}}$ ，

當 $n = 2k$ 時， P_{1+a+1} 會與 P_{n-a} 重合，因此 $a = \frac{n-2}{2}$ ，對稱軸通過的點為 $\overline{P_{\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}+1}}$ 的中點

因此在闡述平行四邊形的做法時必須分奇偶邊數討論：

〔平行四邊形的作法〕

目的：在平行多邊形外構造一平行四邊形

令給定的平行多邊形邊數為 n

1. $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ (如圖 6-3-5)

- (1) 取 $\overline{P_1 P_n}$ 中點 M ，連 $\overline{P_{\frac{n+1}{2}} M}$ 。
- (2) 作兩直線 L_2, L_4 分別過 $P_{1+\lceil \frac{n}{4} \rceil}, P_{n-\lceil \frac{n}{4} \rceil}$ 且都與 $\overline{P_{\frac{n+1}{2}} M}$ 平行。
- (3) 延伸 $\overline{P_1 P_n}$ 交 L_2, L_4 於 C_1, C_4 。
- (4) 作一直線 L_3 交 L_2, L_4 於 C_2, C_3 。
- (5) 平行四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 即為所求。

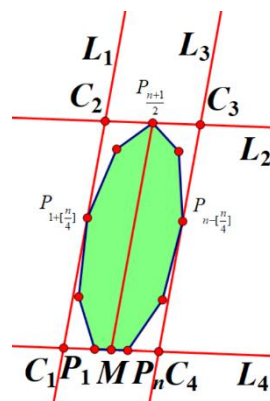


圖 6-3-5

2. $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ (如圖 6-3-6)

- 取 $\overline{P_1 P_n}$ 中點 M 、 $\overline{P_{\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}+1}}$ 中點 N ，連 \overline{NM} 。
- (1) 取作兩直線 L_2, L_4 分別過 $P_{1+\lceil \frac{n}{4} \rceil}, P_{n-\lceil \frac{n}{4} \rceil}$ 且都與 \overline{NM} 平行。
 - (2) 延伸 $\overline{P_1 P_n}$ 交 L_2, L_4 於 C_1, C_4 。
 - (3) 延伸 $\overline{P_{\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}+1}}$ 交 L_2, L_4 於 C_2, C_3 。
 - (4) 平行四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 即為所求。

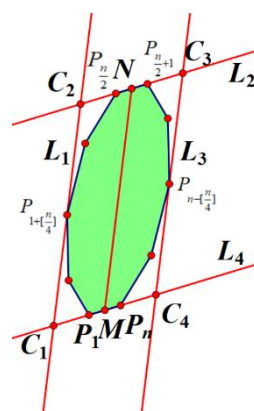


圖 6-3-6

由引理一知在邊上的點經軸壓縮後依舊在邊上，因此將平行多邊形的頂點分為兩部分討論。

設在矩形內所構造的正多邊形為 $Z_1 Z_2 \dots Z_k$

平行多邊形的頂點 P_k 經軸壓縮後會成一點 Z'_k

1. 在平行四邊形上的點

首先描述引理六

〔引理六〕

給定一梯形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (如圖 7-3-7)，取 \overline{AB} 中點 M ，連對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 E ，連 \overline{ME} 交 \overline{CD} 於 N ，則點 N 為 \overline{CD} 中點。

<證明>

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 可得 $\triangle BME \sim \triangle DNE$ 、 $\triangle AME \sim \triangle CNE$

$$\therefore \frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NE}}, \frac{\overline{AM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NE}}, \text{ 又 } \overline{BM} = \overline{AM} \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{ME}}$$

$$\therefore \frac{\overline{DN}}{\overline{NE}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NE}}, \overline{DN} = \overline{CN}, \text{ 得證。}$$

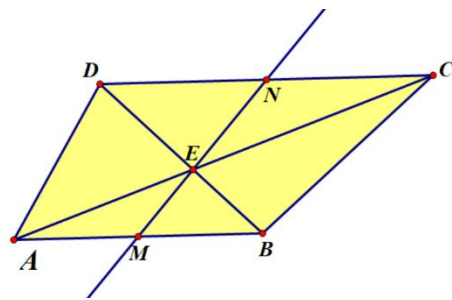


圖 6-3-7

(1) $\frac{P_n}{2}$ 、 $\frac{P_n}{2+1}$ 與 $\frac{P_{n+1}}{2}$

由引理五可知需要以邊數 n 的奇偶性分類討論

a. $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$

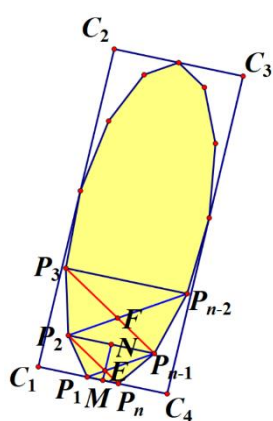


圖 6-3-8

如圖 6-3-8，令 $\overline{P_2P_n}$ 與 $\overline{P_1P_{n-1}}$ 交於 E ， $\overline{P_nP_{n-2}}$ 與 $\overline{P_3P_{n-1}}$ 交於 F

$\overline{P_1P_n}$ 中點為 M ， $\overline{P_2P_{n-1}}$ 中點為 N ，

連 \overline{ME} 並延長，由引理六可知會交 $\overline{P_2P_{n-1}}$ 於 N

由點連線平行性質知 $\overline{P_1P_{n-1}} \parallel \overline{P_2P_{n-2}}$ 、 $\overline{P_2P_n} \parallel \overline{P_3P_{n-1}}$

故 EP_2FP_{n-1} 為平行四邊形。

又 N 為 $\overline{P_2P_{n-1}}$ 中點，故 E 、 N 、 F 三點必共線。

鎖定 \overline{NF} ，再由引理六可知延長後會過 $\overline{P_3P_{n-2}}$ 中點。

因此在平行多邊形內會有層狀的梯型構造如 $P_1P_2P_{n-1}P_n$ 、 $P_2P_3P_{n-2}P_{n-1}$ ，

\overline{ME} 延長後會過所有與 $\overline{P_1P_n}$ 平行的對角線的中點，最後過 $\frac{P_{n+1}}{2}$ 。

又由平行四邊形的做法可知 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} C_2 C_3 P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 為平行四邊形，因此 $\frac{P_{n+1}}{2}$ 亦

為 $\overline{C_2C_3}$ 中點，設 $C_1C_2C_3C_4$ 壓縮後會變矩形 $D_1D_2D_3D_4$ ，由引理一可知

$Z'_{\frac{n+1}{2}}$ 也是 $\overline{D_2D_3}$ 的中點，因此與 $Z_{\frac{n+1}{2}}$ 重合。

b. $n = 2k, k \in \mathbb{N}$

如圖 6-3-9，同 a，偶數邊形的平行多邊形內也會有層狀的梯型構造

如 $P_1P_2P_{n-1}P_n$ 、 $P_2P_3P_{n-2}P_{n-1}$ ， \overline{ME} 延長後也會過所有與 $\overline{P_1P_n}$ 平行的對角

線的中點，但因為邊數是偶數，因此 \overline{ME} 延長後最後會過 $\frac{P_n P_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ 的中

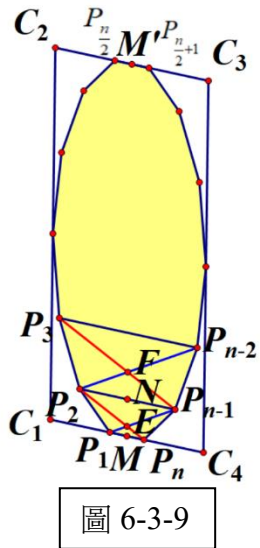


圖 6-3-9

點 M' 。又由平行四邊形的做法可知 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} C_2 C_3 P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 為平行四邊形，因此 M' 亦為 $\overline{C_2 C_3}$ 中點。

設 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 壓縮後會變矩形 $D_1 D_2 D_3 D_4$ ，由引理一可知壓縮後的點 M' 也是 $\overline{D_2 D_3}$ 的中點...①，且 $Z'_{\frac{n}{2}}$ 、 $Z'_{\frac{n}{2}+1}$ 皆在 $\overline{D_2 D_3}$ 上，

並且 $\overline{Z'_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} Z'_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}} = \overline{D_2 D_3}$ 。由平行四邊形的做法可知 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} C_2 C_3 P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 為平

行四邊形 $\Rightarrow \overline{P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}} = \overline{C_2 C_3}$ ，由引理三知 $\frac{\overline{P_{\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}+1}}}{\overline{P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}}} = \frac{\overline{Z'_{\frac{n}{2}} Z'_{\frac{n}{2}+1}}}{\overline{Z'_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} Z'_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}}}$

因此 $\frac{\overline{P_{\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}+1}}}{\overline{C_2 C_3}} = \frac{\overline{Z'_{\frac{n}{2}} Z'_{\frac{n}{2}+1}}}{\overline{D_2 D_3}}$ ，綜合①可知 $Z'_{\frac{n}{2}}$ 、 $Z'_{\frac{n}{2}+1}$ 分別與 $Z_{\frac{n}{2}}$ 、 $Z_{\frac{n}{2}+1}$ 重合。

(2) P_1 、 P_n

如圖 7-3-9，由(1)可推得點 M 亦為 $\overline{C_1 C_4}$ 中點，由引理一可知 Z'_1 、 Z'_n 皆在 $\overline{D_1 D_4}$ 上採用與 b. 相同的證明手法，使用引理三以及平行四邊形作法即可知 Z'_1 、 Z'_n 分別與 Z_1 、 Z_n 重合。

(3) $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 $P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$

於 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 $P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 與 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 有關，因此需將邊數 n 分成 $4k+1$ 、 $4k+2$ 、 $4k+3$ 、

$4k+4$ ($k \in \mathbb{N}$) 四種情況討論。經研究後發現四種情況只有些許差異，因此我們將詳述 $4k+1$ 的情況，其餘情況皆同理。

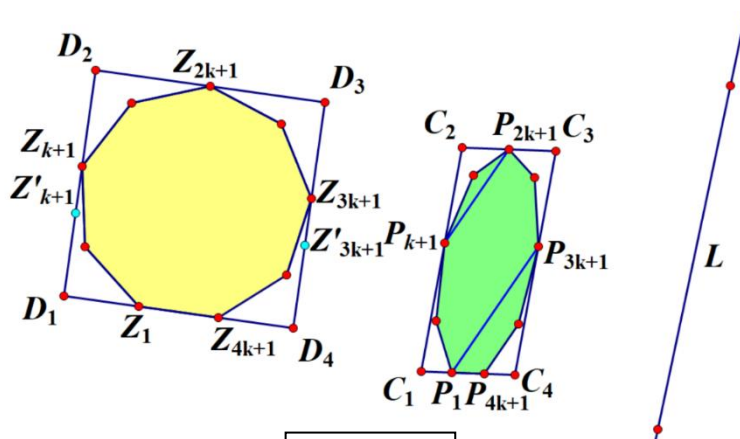


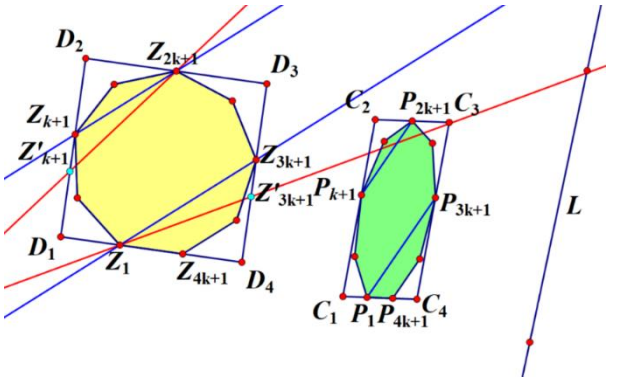
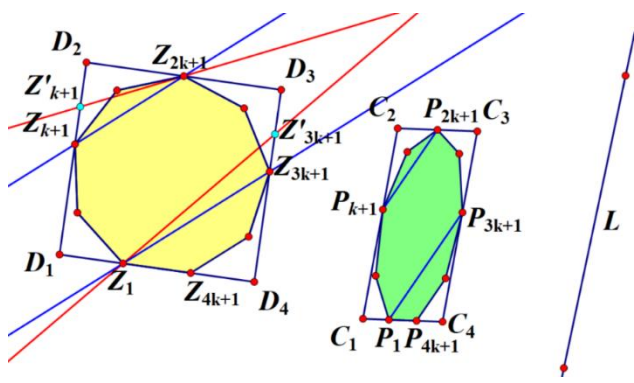
圖 6-3-10

如圖 6-3-10

將 n 以 $4k+1$ 代入後 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \rightarrow P_{k+1}$ 、 $P_{\frac{n+1}{2}} \rightarrow P_{2k+1}$ 、 $P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \rightarrow P_{3k+1}$ ，

由平行四邊形作法可知 $\overline{P_{k+1}P_{3k+1}} \parallel \overline{C_2C_3}$ ，再由引理二可知 $\overline{Z'_{k+1}Z'_{3k+1}} \parallel \overline{D_2D_3}$ ，

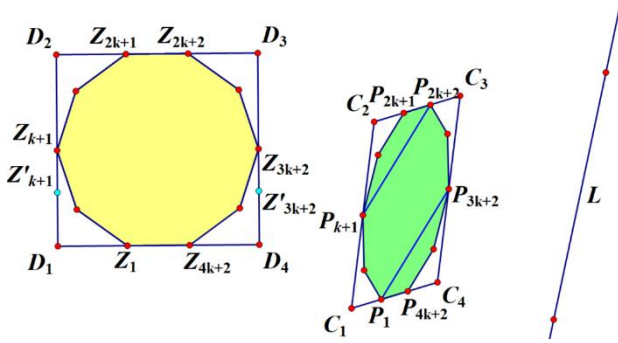
又由正多邊形作法可知 $\overline{Z_{k+1}Z_{3k+1}} \parallel \overline{D_2D_3}$ ，因此 Z'_{k+1} 、 Z'_{3k+1} 只會的位置只有兩種情形：

a. Z'_{k+1} 位在 $\overline{Z_{k+1}D_1}$ 上， Z'_{3k+1} 位在 $\overline{Z_{3k+1}D_4}$ 上	b. Z'_{k+1} 位在 $\overline{Z_{k+1}D_2}$ 上， Z'_{3k+1} 位在 $\overline{Z_{3k+1}D_3}$ 上
 <p style="text-align: center;">圖 6-3-11</p>	 <p style="text-align: center;">圖 6-3-12</p>
<p>如圖 6-3-11，由對角線數的性質可知 $\overline{P_1P_{3k+1}} \parallel \overline{P_{k+1}P_{2k+1}}$，</p> <p>由引理二可知 $\overline{Z'_1Z'_{3k+1}} \parallel \overline{Z'_{k+1}Z'_{2k+1}}$。</p> <p>由(1)及(2)可知 Z'_1 與 Z_1 重合，Z'_{2k+1} 與 Z_{2k+1} 重合，因此</p> $\overline{Z'_1Z'_{3k+1}} \parallel \overline{Z'_{k+1}Z'_{2k+1}} \Leftrightarrow \overline{Z_1Z'_{3k+1}} \parallel \overline{Z'_{k+1}Z_{2k+1}} \dots \textcircled{1}$ <p>連 $\overline{Z'_{k+1}Z_{2k+1}}$、$\overline{Z'_{3k+1}Z_1}$，</p> <p>可將 $\overline{Z'_{k+1}Z_{2k+1}}$ 視為 $\overline{Z_{k+1}Z_{2k+1}}$ 以 Z_{2k+1} 為中心逆時針旋轉；</p> <p>$\overline{Z'_{3k+1}Z_1}$ 視為 $\overline{Z_{3k+1}Z_1}$ 以 Z_1 為中心順時針旋轉，</p> <p>由於一直線為順時針，一直線為逆時針，因此兩條原本平行的直線在旋轉後不可能平行，與$\textcircled{1}$不符。</p>	<p>如圖 6-3-12，由對角線數的性質可知 $\overline{P_1P_{3k+1}} \parallel \overline{P_{k+1}P_{2k+1}}$，</p> <p>由引理二可知 $\overline{Z'_1Z'_{3k+1}} \parallel \overline{Z'_{k+1}Z'_{2k+1}}$</p> <p>由(1)及(2)可知 Z'_1 與 Z_1 重合，Z'_{2k+1} 與 Z_{2k+1} 重合</p> <p>因此</p> $\overline{Z'_1Z'_{3k+1}} \parallel \overline{Z'_{k+1}Z'_{2k+1}} \Leftrightarrow \overline{Z_1Z'_{3k+1}} \parallel \overline{Z'_{k+1}Z_{2k+1}} \dots \textcircled{2}$ <p>連 $\overline{Z'_{k+1}Z_{2k+1}}$、$\overline{Z'_{3k+1}Z_1}$，</p> <p>可將 $\overline{Z'_{k+1}Z_{2k+1}}$ 視為 $\overline{Z_{k+1}Z_{2k+1}}$ 以 Z_{2k+1} 為中心順時針旋轉；</p> <p>$\overline{Z'_{3k+1}Z_1}$ 視為 $\overline{Z_{3k+1}Z_1}$ 以 Z_1 為中心逆時針旋轉，</p> <p>由於一直線為順時針，一直線為逆時針，因此兩條原本平行的直線在旋轉後不可能平行，與$\textcircled{2}$不符。</p>

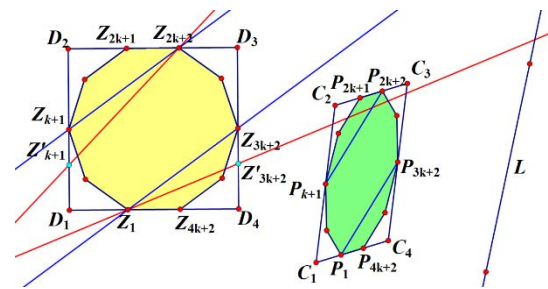
綜合 a. b. 可知 Z'_{k+1} 、 Z'_{3k+1} 必分別與 Z_{k+1} 、 Z_{3k+1} 重合。

再來 $4k+2$ 、 $4k+3$ 、 $4k+4$ 的情況礙於篇幅，在此只呈現圖片，證明原理與過程皆與 $4k+1$ 相同採用歸謬證法。

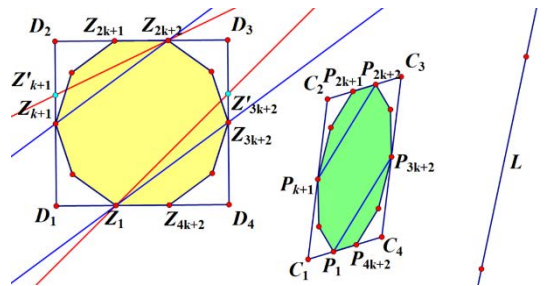
[$n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) 時 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 $P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 的位置]



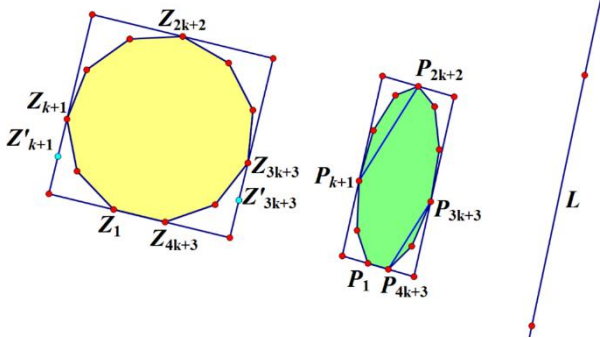
Z'_{k+1} 位在 $\overline{Z_{k+1}D_1}$ 上, Z'_{3k+2} 位在 $\overline{Z_{3k+2}D_4}$ 上



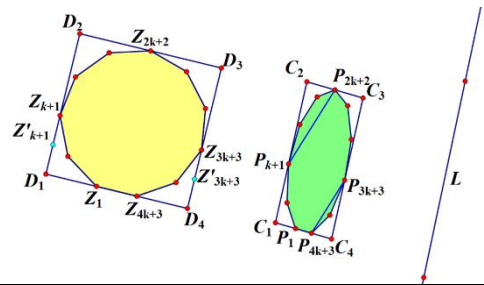
Z'_{k+1} 位在 $\overline{Z_{k+1}D_2}$ 上, Z'_{3k+2} 位在 $\overline{Z_{3k+2}D_3}$ 上



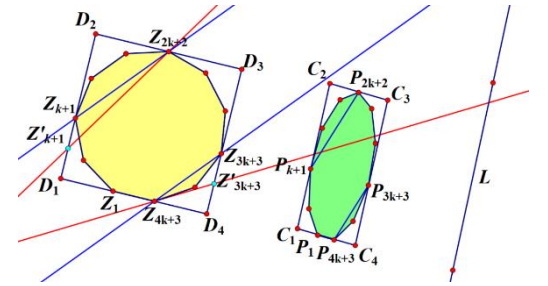
[$n = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) 時 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 $P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 的位置]

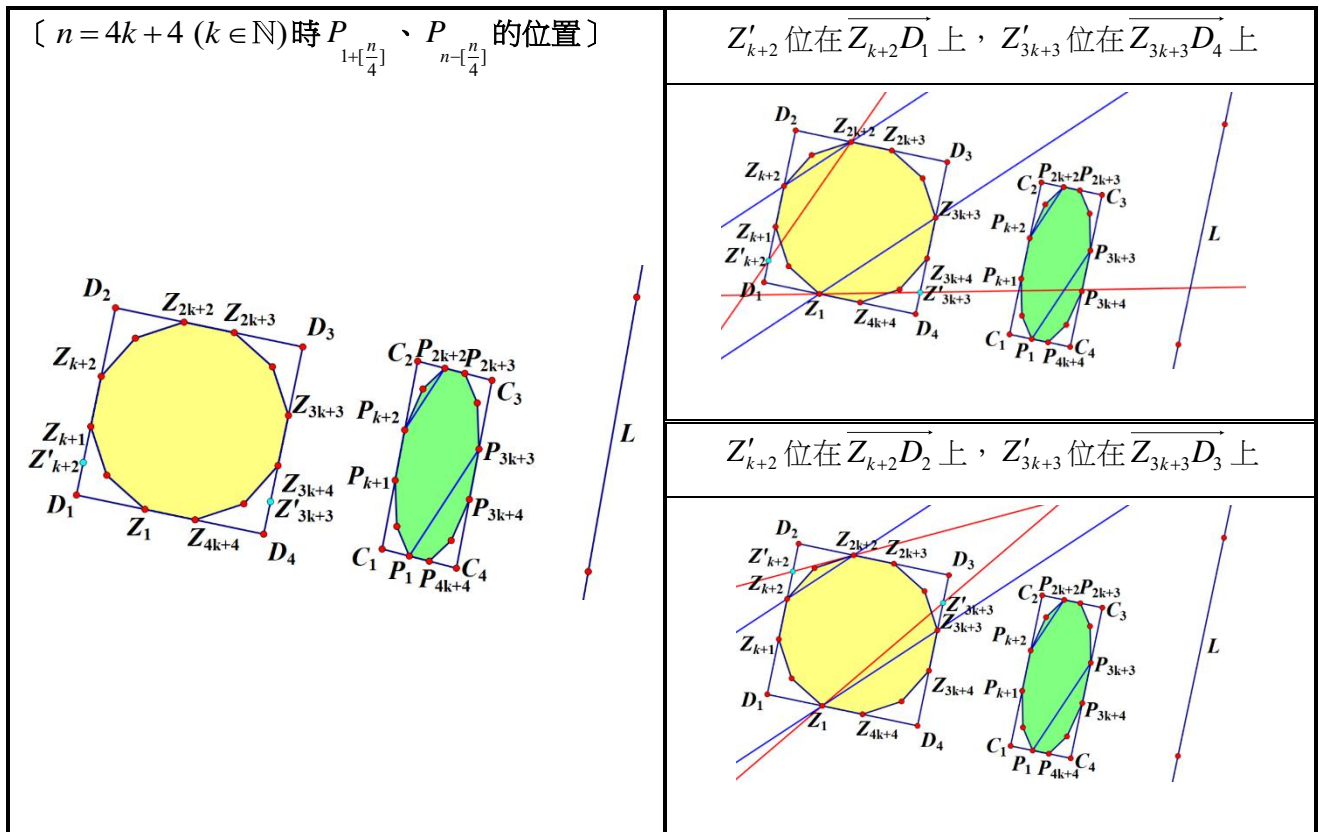


Z'_{k+1} 位在 $\overline{Z_{k+1}D_1}$ 上, Z'_{3k+3} 位在 $\overline{Z_{3k+3}D_4}$ 上



Z'_{k+1} 位在 $\overline{Z_{k+1}D_2}$ 上, Z'_{3k+3} 位在 $\overline{Z_{3k+3}D_3}$ 上





綜合四種情況可推得，對任意邊數平行多邊形， P_1 、 $P_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 $P_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 P_n 壓縮後

分別會與 Z_1 、 $Z_{1+\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 $Z_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ 、 Z_n 重合，

當邊數為奇數時， $\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{2}$ 壓縮後會與 $\frac{Z_{\frac{n+1}{2}}}{2}$ 重合；

當邊數為偶數時， $\frac{P_{\frac{n}{2}}}{2}$ 、 $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ 壓縮後分別會與 $\frac{Z_{\frac{n}{2}}}{2}$ 、 $\frac{Z_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ 重合。

2. 不在平行四邊形上的點

由 1. 可知根據平行多邊形邊數的不同，會有不同編號的幾個頂點與正多邊形重合，若使用這些正多邊形的頂點由點連線平行性質作出其餘不在平行四邊形上的頂點，即可啟動同一法，說明平行多邊形壓縮後與正多邊形重合。

因要由 1. 所證明出重合的點作出其餘不在平行四邊形上的頂點，而 1.(3) 須將邊數 n 分成 $4k+1$ 、 $4k+2$ 、 $4k+3$ 、 $4k+4$ ($k \in \mathbb{N}$) 四種情況討論，因此此部分也需要以同樣的方式討論作法。研究後發現 $4k+1$ 與 $4k+3$ 兩者情況相似，而 $4k+2$ 與 $4k+4$ 的情況差異也並不大，因此在此只詳述 $4k+1$ 與 $4k+2$ 兩種情況。

(1) $n = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

如圖 6-3-13，在矩形 $D_1D_2D_3D_4$ 邊上有 Z_1 、 Z_{k+1} 、 Z_{2k+1} 、 Z_{3k+1} 、 Z_{4k+1} 五點，主要想法為：由對角線數的定義可知目前可作出七個對角線數 $k+2$ 、

$2k+2$ 、 $3k+2$ 、 1 、 $k+1$ 、 $2k+1$ 、 $3k+1$ ，設欲作出的點為 Z_a ，若 Z_a 與已知的五點連線可得到上述已知的七個對角線數，即可作出 Z_a 。

以下描述作法：

[$n=4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) 平行多邊形作法]

目的：作出其餘不在矩形上的頂點

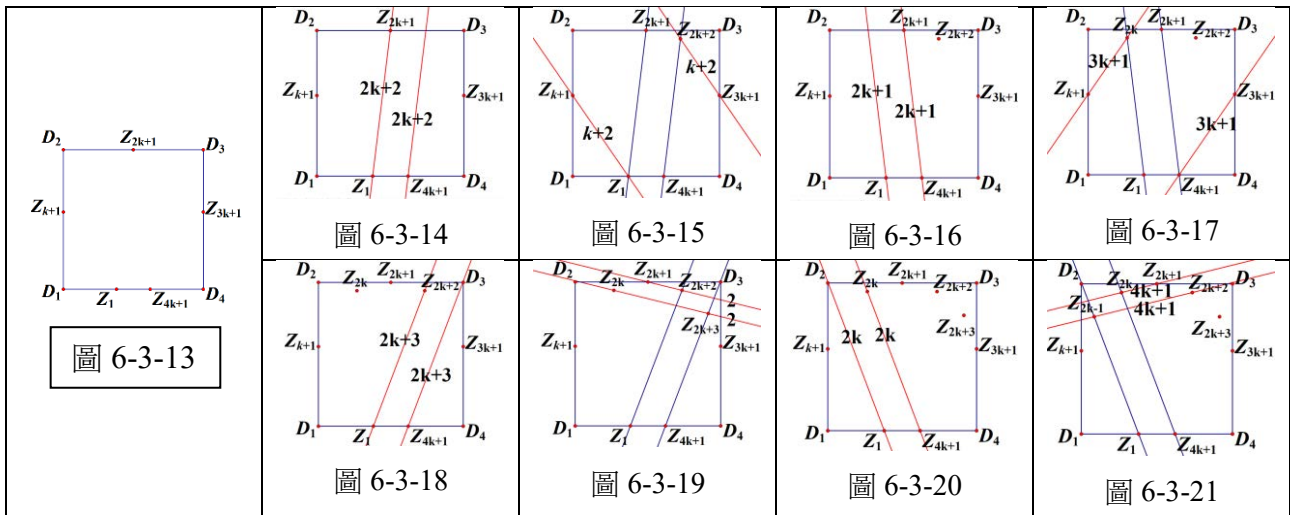
給定：矩形 $D_1D_2D_3D_4$ 及邊上五點 Z_1 、 Z_{k+1} 、 Z_{2k+1} 、 Z_{3k+1} 、 Z_{4k+1}

步驟：

- a. 連 $\overline{Z_1Z_{2k+1}}$ ，作一直線 L_{2k+2} 平行 $\overline{Z_1Z_{2k+1}}$ 且過 Z_{4k+1} (如圖 6-3-14)
- b. 連 $\overline{Z_1Z_{k+1}}$ ，作一直線 L_{k+2} 平行 $\overline{Z_1Z_{k+1}}$ 且過 Z_{3k+1} ，與 L_{2k+2} 交於 Z_{2k+2} (如圖 6-3-15)
- c. 連 $\overline{Z_{2k+1}Z_{4k+1}}$ ，作一直線 L_{2k+1} 平行 $\overline{Z_{2k+1}Z_{4k+1}}$ 且過 Z_1 (如圖 6-3-16)
- d. 連 $\overline{Z_{3k+1}Z_{4k+1}}$ ，作一直線 L_{3k+1} 平行 $\overline{Z_{3k+1}Z_{4k+1}}$ 且過 Z_{k+1} ，與 L_{2k+1} 交於 Z_{2k} (如圖 6-3-17)
- e. 連 $\overline{Z_1Z_{2k+2}}$ ，作一直線 L_{2k+3} 平行 $\overline{Z_1Z_{2k+2}}$ 且過 Z_{4k+1} (如圖 6-3-18)
- f. 連 $\overline{Z_{2k+1}Z_{2k+2}}$ ，作一直線 L_2 平行 $\overline{Z_{2k+1}Z_{2k+2}}$ 且過 Z_{2k} ，與 L_{2k+3} 交於 Z_{2k+3} (如圖 6-3-19)
- g. 連 $\overline{Z_{2k}Z_{4k+1}}$ ，作一直線 L_{2k} 平行 $\overline{Z_{2k}Z_{4k+1}}$ 且過 Z_1 (如圖 6-3-20)
- h. 連 $\overline{Z_{2k}Z_{2k+1}}$ ，作一直線 L_{4k+1} 平行 $\overline{Z_{2k}Z_{2k+1}}$ 且過 Z_{2k+2} ，與 L_{2k} 交於 Z_{2k+1} (如圖 6-3-21)

可發現在作出 Z_{2k+3} 的過程中，僅使用到 Z_{2k} 、 Z_{2k+1} 、 Z_{2k+2} 此連續三點以及 Z_1 、 Z_{4k+1} 兩點，在作出 Z_{2k+1} 的過程中，也僅使用到 Z_{2k} 、 Z_{2k+1} 、 Z_{2k+2} 此連續三點以及 Z_1 、 Z_{4k+1} 兩點。因此可推斷出：

若 Z_{a-3} 、 Z_{a-2} 、 Z_{a-1} 為已知，且 Z_1 、 Z_{4k+1} 亦為已知，則可作出 Z_a 或 Z_{a-4} 。依此類推，其餘不在矩形上的點皆可由點連線平行性質搭配對角線數性質作出。



(2) $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

如圖 6-3-22，在矩形 $D_1D_2D_3D_4$ 邊上有 Z_1 、 Z_{k+1} 、 Z_{2k+1} 、 Z_{2k+2} 、 Z_{3k+2} 、 Z_{4k+2} 六點。想法與 $n = 4k + 1$ 的情況相同。以下描述作法：

[$n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) 平行多邊形作法]

目的：作出其餘不在矩形上的頂點。

給定：矩形 $D_1D_2D_3D_4$ 及邊上六點 Z_1 、 Z_{k+1} 、 Z_{2k+1} 、 Z_{2k+2} 、 Z_{3k+2} 、 Z_{4k+2}

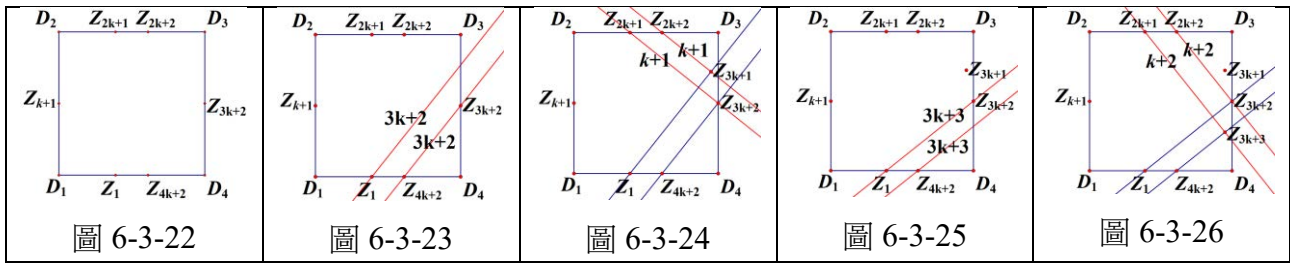
步驟：

- 連 $\overline{Z_{3k+2}Z_{4k+2}}$ ，作一直線 L_{3k+2} 平行 $\overline{Z_{3k+2}Z_{4k+2}}$ 且過 Z_1 (如圖 6-3-23)
- 連 $\overline{Z_{2k+1}Z_{3k+2}}$ ，作一直線 L_{k+1} 平行 $\overline{Z_{2k+1}Z_{3k+2}}$ 且過 Z_{2k+2} ，與 L_{3k+2} 交於 Z_{3k+1} (如圖 6-3-24)
- 連 $\overline{Z_1Z_{3k+2}}$ ，作一直線 L_{3k+3} 平行 $\overline{Z_1Z_{3k+2}}$ 且過 Z_{4k+2} (如圖 6-3-25)
- 連 $\overline{Z_{2k+2}Z_{3k+2}}$ ，作一直線 L_{k+2} 平行 $\overline{Z_{2k+2}Z_{3k+2}}$ 且過 Z_{2k+1} ，與 L_{3k+3} 交於 Z_{3k+3} (如圖 6-3-26)

可發現在作出 Z_{3k+3} 的過程中，僅使用到 Z_{2k+1} 、 Z_{2k+2} 此連續二點以及 Z_1 、 Z_{4k+2} 兩點與 Z_{3k+2} ，在作出 Z_{3k+1} 的過程中，也僅使用到 Z_{2k+1} 、 Z_{2k+2} 此連續二點以及 Z_1 、 Z_{4k+2} 兩點與 Z_{3k+2} ，

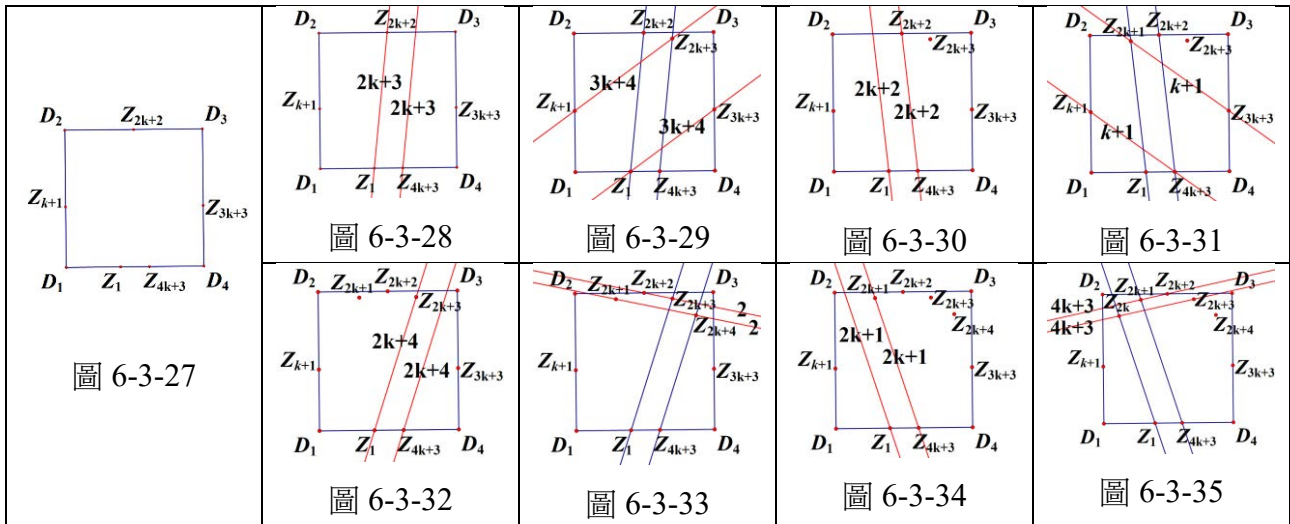
因此可推斷出：

設欲作出的點為 Z_a ，若 Z_1 、 Z_{4k+2} 為已知，且 Z_{2k+1} 、 Z_{2k+2} 亦為已知，即可由 Z_{a-1} 或 Z_{a+1} 作出點 Z_a 。依此類推，其餘不在矩形上的點皆可由點連線平行性質搭配對角線數性質依據此作法作出。



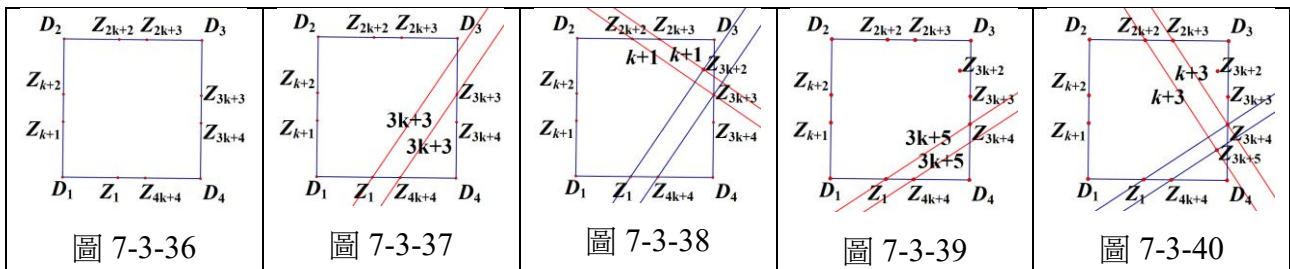
(3) $n = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$)

與 $n = 4k + 1$ 情況相同。



(4) $n = 4k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$)

與 $n = 4k + 2$ 情況相同。



綜合(1)、(2)、(3)、(4)可知邊數 n 在四種情況下皆可使用點連線平行性質與對角線數性質，以類似遞迴的手法作出不在平行四邊形的邊上，也就是壓縮後不在矩形邊上的頂點。由於是以已知與正多邊形頂點重合的頂點，使用點連線平行性質，因此由同一法可知這些作出來的頂點也會與正多邊形重合。

由 1. 與 2. 知平行多邊形可壓縮成正多邊形，因此平行多邊形即為壓縮多邊形。

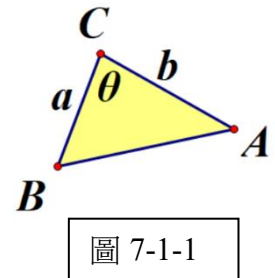
結合(二)的結果「拿破崙多邊形為平行多邊形」與(三)的結果「平行多邊形為壓縮多邊形」可得定理五：

〔定理五〕

拿破崙多邊形即為壓縮多邊形。

七、拿破崙多邊形的推廣

由於「各邊向外作正多邊形取中心點」可視為「各邊向外作特定三角形的相似形」。接下來我們將特定三角形推廣至一般三角形，如圖 7-1-1，設新作的三角形兩邊長為 a 、 b ，夾角為 θ 。



研究方法即在原本逆拿破崙法中將「點 C_0 對點 L_0 逆時針旋轉 $\frac{2\pi}{n}$ 」

改為「由點 B 對點 C 旋轉 θ 再伸 $\frac{b}{a}$ 倍到達點 A 」(如圖 7-1-1)，其中

點 B 對應 C_0 點 C 對應 L_0 點 A 對應 C_1 再仿效上述步驟做 n 次，並將此方法定義為廣義逆拿破崙法。以下皆利用複數平面的概念做計算。

C_k 和 L_k 的位置定義皆與七(二)同，但將其表示法改為複數型態。

令 $C_k = \alpha_k + i\beta_k$, $L_k = x_k + iy_k$

$$\omega_r = \frac{b}{a}(\cos\theta + i\sin\theta), \omega_r \neq 1, \bar{\omega} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

將原本旋轉矩陣 R_θ 轉換為圖 8-1-1，故定義出 $\omega_r = \frac{b}{a}(\cos\theta + i\sin\theta), \omega_r \neq 1$

由命題知 $L_t = L_0\bar{\omega}^t$, $C_t = (C_{t-1} + L_t)\omega_r + L_t$

並將 $C_t = (C_{t-1} - L_{t-1})\omega_r + L_{t-1}$ 同乘以 ω_r^{t-1} 並寫成遞迴式

$$\begin{aligned} C_1 \times \omega_r^{t-1} &= \omega_r^{t-1} \times ((C_0 - L_0)\omega_r + L_0) \\ C_2 \times \omega_r^{t-2} &= \omega_r^{t-2} \times ((C_1 - L_1)\omega_r + L_1) \\ C_3 \times \omega_r^{t-3} &= \omega_r^{t-3} \times ((C_2 - L_2)\omega_r + L_2) \\ &\vdots \\ +) \quad C_t \times \omega_r^0 &= \omega_r^0 \times ((C_{t-1} - L_{t-1})\omega_r + L_{t-1}) \\ \hline C_t &= C_0\omega_r^t - (\omega_r - 1)L_0(\bar{\omega}^0\omega_r^{t-1} + \bar{\omega}^1\omega_r^{t-2} + \dots + \bar{\omega}^{t-1}\omega_r^{t-t}) \end{aligned}$$

情況 1: $\omega_r \neq \bar{\omega}$

$$C_t = C_0\omega_r^t - (\omega_r - 1)L_0(\bar{\omega}^0\omega_r^{t-1} + \bar{\omega}^1\omega_r^{t-2} + \dots + \bar{\omega}^{t-1}\omega_r^0) = C_0\omega_r^t - (\omega_r - 1)L_0 \frac{\omega_r^t - \bar{\omega}^t}{\omega_r - \bar{\omega}} \dots\dots(1)$$

$$\text{欲使 } C_t = C_0 \Rightarrow (\omega_r - 1)L_0 \frac{\omega_r^t - \bar{\omega}^t}{\omega_r - \bar{\omega}} = C_0(\omega_r^t - 1)$$

$$\text{對 } n \text{ 邊形而言 (} t \text{ 用 } n \text{ 代入), } \omega_r^n \neq 1 \quad C_0 = \frac{(\omega_r - 1)L_0}{\omega_r - \bar{\omega}} \quad \dots\dots(2)$$

將(2)代回(1)得 $C_i = C_0 \bar{\omega}'$ 證明出利用廣義逆拿破崙法後的結果會得出此拿破崙多邊形為正多邊形。

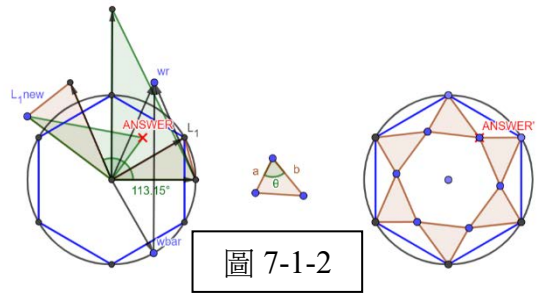


圖 7-1-2

接著利用複數的幾何意義作圖(如圖 7-1-2)

⇒ 證明並驗證出在此情況下所給定的 ω_r 能決定出唯一點 C_0 ，且利用廣義逆拿破崙法後的結果會得出此拿破崙多邊形為正多邊形。

$$\omega_r^n = 1 \text{ 時 } \omega_r = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 2, \dots, n-1$$

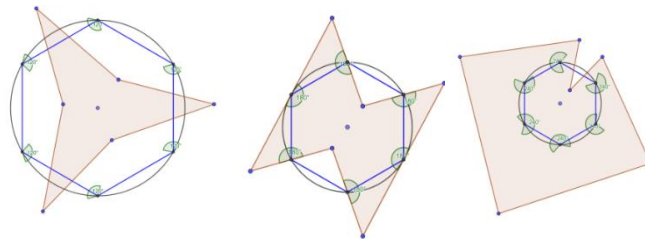


圖 7-1-3

如圖 7-1-3，由左至右為 $n = 6$ ， $k = 2, 3, 4$

情況 2： $\omega_r = \bar{\omega}$

也就是原始的逆拿破崙法。

對 n 邊形而言(t 用 n 代入)： $C_n = C_0 - (1 - \omega_r^{n-1})L_0n$ ， $(1 - \omega_r^{n-1})L_0n = 0$ ， $\omega_r^{n-1} = 1$

$$\Rightarrow \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} \sin(n\theta - \theta) = 0, \sin(n\theta - \theta) = 0 \therefore \cos(n\theta - \theta) = 1 \vee -1$$

$$\Rightarrow \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} \cos(n\theta - \theta) = 1, \text{ 又 } \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} > 0, \text{ 故 } \cos(n\theta - \theta) = 1 \therefore n\theta - \theta = 2t\pi, t \in \{0, \mathbb{N}\}$$

$$\omega_r = \bar{\omega}, \cos 2t\pi = \cos \frac{2\pi(n-1)}{n}, \text{ 其中 } n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3。$$

肆、研究結果

一、壓縮多邊形的性質

正多邊形軸壓縮後，其內部的比例線段以及平行線段會與軸壓縮前保持一致，易知壓縮多邊形即為平行多邊形。

二、判定壓縮多邊形之方法

給定一 n 邊形，已知 n 及隨意三個連續邊長長度，將公式代入，若在 θ_1 和 θ_2 上各出現一組正多邊形，則此多邊形為壓縮多邊形。

$$J = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2 - l_2^2}, T = \frac{l_1^2}{l_3^2}, \theta_1 = \frac{\tan^{-1}\left(\tan(\beta)\frac{1+J}{1-J}\right)}{2}, \theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{T-1}{\sin^2(\beta-\theta_1) - T\sin^2(\beta+\theta_1)} + 1}, K_2 = \sqrt{\frac{T-1}{\sin^2(\beta-\theta_2) - T\sin^2(\beta+\theta_2)} + 1}$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\tan(\beta)\frac{J+1}{1-J}\right)}{2}\right)K_1\right), \alpha_2 = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\tan(\beta)\frac{J+1}{1-J}\right)}{2}\right)K_2\right)$$

三、壓縮多邊形等價於拿破崙多邊形

(一) 壓縮多邊形為拿破崙多邊形

僅使用輔助線以及相似三角形，即可完成證明。

(二) 拿破崙多邊形為平行多邊形

利用逆拿破崙法與旋轉矩陣計算，得出拿破崙多邊形擁有點連線平行性質，再由平行多邊形的定義得證。

(三) 平行多邊形為壓縮多邊形

將平行多邊形簡化為平行四邊形，並以此為跳板，採用點重合想法，對不同邊數進行討論完成證明。

四、拿破崙法的研究與推廣

使用了複數平面計算並再次證明了逆拿破崙法，並且將問題推廣為「多邊形 $C_0C_1\dots C_{n-1}$ 各邊作相似三角形 $C_kC_{k+1}L_k, k=0, 1, \dots, n-1$ 」，利用廣義逆拿破崙法，「以 L_k 為中心將 C_k 旋轉再縮放至 C_{k+1} 」對應的複數令為 ω_r ，有以下三情形：

1. $\omega_r \neq 1$ 時，此時能找出唯一的 C_0 。
2. $(\omega_r)^n = 1$ 時，此時 $\omega_r = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k=2, \dots, n-1$
3. $\omega_r = \bar{\omega}$ ，即為最初的逆拿破崙法。

伍、討論

一、判別壓縮多邊形公式的 θ 角

我們將一開始的結果代入 Geogebra 中做驗證，發現當 θ 達特定度數區間時會無法還原出正多邊形。推測是因為在計算公式時使用了大量了 \tan^{-1} ，因此產生了許多對 θ 大小的限制。進一步思考後發現存在兩個相差九十度的 θ ，並且研究在計算過程中使用 \tan^{-1} 所產生的角度限制，經過審查及比對後發現代入四組數對 $(\theta_1, K_1)(\theta_1, K_2)(\theta_2, K_1)(\theta_2, K_2)$ 後，

可以在兩個方向上各出現一組正多邊形。因此只要給定我們任一 n 邊形，在知道 n 和隨意三個連續邊長大小的情況下，代入以上公式，只要在兩方向上各出現一組正多邊形，便可知道此多邊形為壓縮多邊形。

二、旋轉矩陣與平行多邊形

最一開始也想只使用綜合幾何，也就是作輔助線的方式完成證明，但研究過程中發現給定的拿破崙多邊形擁有「旋轉」此幾何性質，在純幾何此方面我們認為較難使用與操作，因此最終選擇啟動旋轉矩陣來計算與證明。

而最終結果可整理成點連線平行性質，很自然地會聯想到前面所研究的軸壓縮性質(引理一與引理二)，因此定義了平行多邊形進行下一步研究。

三、每一邊向外作相似三角形之推廣

目前我們研究只知道有一常數值 k 可決定拿破崙多邊形的形狀，未來期望可以朝「研究在 k 不同的情況下所對應的拿破崙多邊形對多邊形邊數而言是否有規律或是其他關聯」部分做進一步的研究與探討。

四、文獻探討之延伸

在利用複數平面推廣完拿破崙多邊形後，我們希望能呼應原作者的方式，用綜合幾何的方式去證明出壓縮多邊形為拿破崙多邊形，得出以下初步的想法（以七邊形為例）：

對一壓縮多邊形 $AB...G$ 做拿破崙法後令點如圖，可由引理

三得出三角形 $\triangle BFQ \cong \triangle PGD(SAS)$ 與線段 $\frac{\overline{QJ_1}}{J_1K} = \frac{\overline{BO}}{OK}$ 兩個結

論，同理可得 $\overline{OJ_1} = \overline{OJ_3}$ ，如此一來便能證明多邊形

$J_1J_2...J_7$ 為正多邊形。

由於研究時間有限，接下來會朝著此部分嘗試將其一般化。

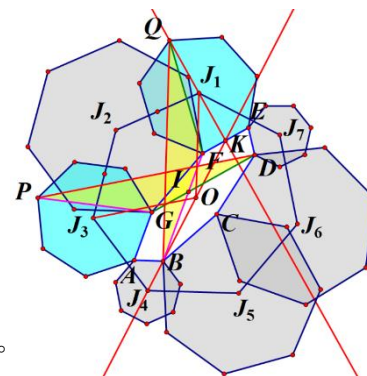


圖 4-1-1

陸、結論

- 一、歸納壓縮多邊形的性質有引理一與引理二。
- 二、已研究出檢驗多邊形是否為壓縮多邊形的公式。
- 三、已證明出壓縮多邊形與拿破崙多邊形為充要關係。
- 四、推廣到各邊作相似三角形時，已找出並證明所有對應的推廣拿破崙多邊形。

柒、參考文獻資料

- 一、黃家冠。拿破崙定理對多邊形之推廣。中華民國第 55 屆中小學科展。
- 二、維基百科(民 110 年 11 月 27 日)。複數平面。取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/複數平面>。

(附錄一)

$$\Leftrightarrow \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2 - l_2^2} = J, \quad \frac{l_1^2}{l_3^2} = T$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{l^2 \left((K^2 - 1) \sin^2(\theta) - (K^2 - 1) \sin^2(\beta - \theta) \right)}{l^2 \left((K^2 - 1) \sin^2(\beta + \theta) - (K^2 - 1) \sin^2(\theta) \right)} \\ &= \frac{l^2 \left((K^2 - 1) \sin(\beta) \sin(2\theta - \beta) \right)}{l^2 \left((K^2 - 1) \sin(\beta + 2\theta) \sin(\beta) \right)} \\ &= \frac{\sin(2\theta - \beta)}{\sin(\beta + 2\theta)} \end{aligned}$$

$$\text{則 } J \sin(\beta + 2\theta) = \sin(2\theta - \beta)$$

$$\Rightarrow J \sin(\beta) \cos(2\theta) + J \cos(\beta) \sin(2\theta) = \sin(2\theta) \cos(\beta) - \cos(2\theta) \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow (1 - J) \sin(2\theta) \cos(\beta) = (J + 1) \sin(\beta) \cos(2\theta)$$

$$\Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{(J + 1)}{(1 - J)} \tan(\beta)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\tan^{-1} \left(\frac{J + 1}{1 - J} \tan(\beta) \right)}{2}$$

$$T = \frac{l^2 \left(1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta - \theta) \right)}{l^2 \left(1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta + \theta) \right)} = \frac{\left(1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta - \theta) \right)}{\left(1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta + \theta) \right)}$$

$$\text{則 } T + T(K^2 - 1) \sin^2(\beta + \theta) = 1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta - \theta)$$

$$\Rightarrow (K^2 - 1) \left(\sin^2(\beta - \theta) - T \sin^2(\beta + \theta) \right) = T - 1$$

$$\Rightarrow K^2 = \frac{T - 1}{\sin^2(\beta - \theta) - T \sin^2(\beta + \theta)} + 1$$

$$\Rightarrow K = \pm \sqrt{\frac{T - 1}{\sin^2(\beta - \theta) - T \sin^2(\beta + \theta)} + 1}$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{D'C}}{\overline{UC'}} = \frac{Kl \sin(\theta)}{l \cos(\theta)} = K \tan(\theta), \quad \text{將 } \theta \text{ 代入 } \Rightarrow$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\tan \left(\frac{\tan^{-1} \left(\frac{J + 1}{1 - J} \tan(\beta) \right)}{2} \right) K \right)$$

【評語】 050418

本作品是將第 55 屆高中數學科展第三名所得的重要觀察：「壓縮多邊形即為拿破崙多邊形」，加以完證證明。主要的證明工具是使用「平行多邊形」作為證明跳板。就證明的邏輯來說，尚稱完整。但就證明寫作來說，證明所使用之符號與所附之圖形經常無法搭配，顯見整份作品並未經仔細校對。就本作品的結論「壓縮多邊形即為拿破崙多邊形」來說，的確是一個不錯的結果，只可惜這個結果是第 55 屆作品所觀察得到的，並非是本次作品之主要創新之處。然而，本作品更重要的結果其實是，「如何判別任意一個凸 n 邊形是否為壓縮多邊形」，卻只有在附錄(page 30)給出短短一頁說明。該附錄結論只需要用到三個邊長加上三個角度即可判別，應該只會是個特例。建議作者可以朝這個方向加以修正改進。

作品簡報



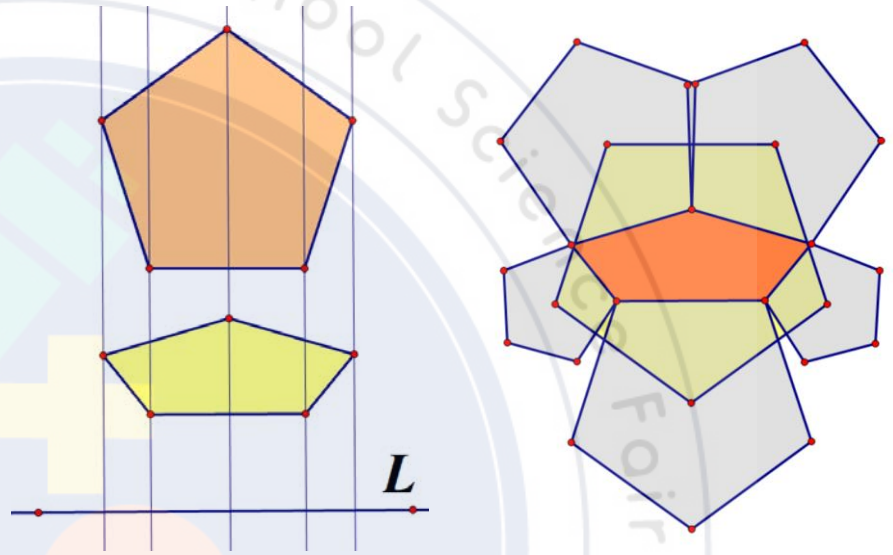
跟著拿破崙一起壓縮多邊形吧！

科別：數學科

組別：高級中等學校組

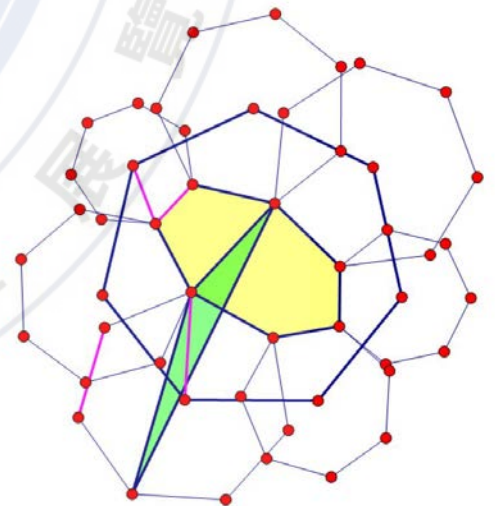
研究問題與動機

當多邊形邊數為五或六時，
壓縮多邊形即為拿破崙多邊形



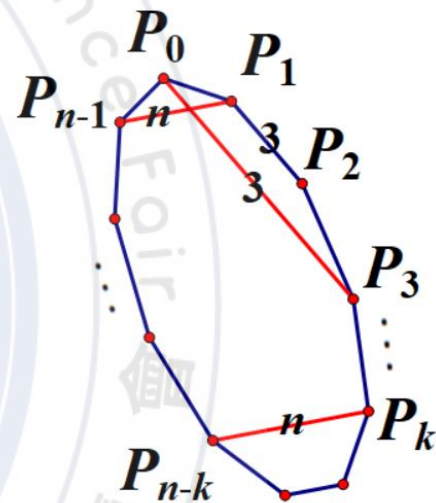
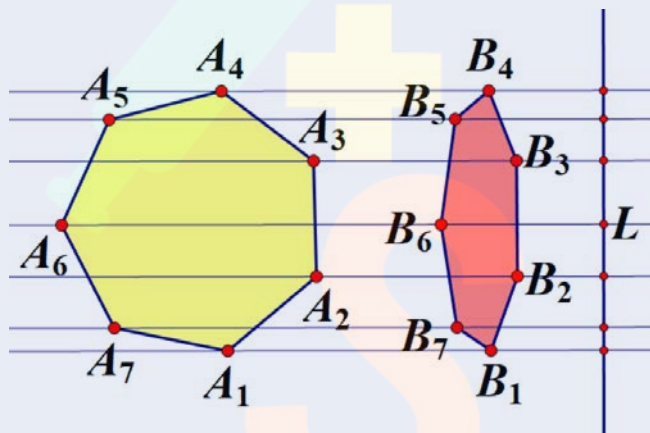
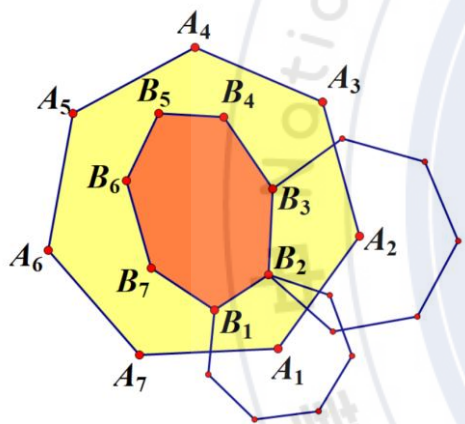
文獻探討

使用原作者認為可推廣至更多邊形的證明
手法嘗試推廣至七邊形的情況，發現無法
找出相似三角形，導致無法完成證明。



名詞定義

- 一、拿破崙多邊形與拿破崙法
- 二、壓縮多邊形與壓縮軸
- 三、對角線數以及點連線平行性質



研究目的

- 一、證明拿破崙多邊形與壓縮多邊形為充要條件
- 二、一般多邊形是否也具有拿破崙定理？若有，是否可以將拿破崙定理中「向外作正多邊形」推廣成「向外作相似形」？

研究流程



研究方法

還原壓縮多邊形為正多邊形的方法

研究多邊形中其中三個連續邊並令點如圖，

可由畢氏定理與軸壓縮的定義

列出以下聯立組：

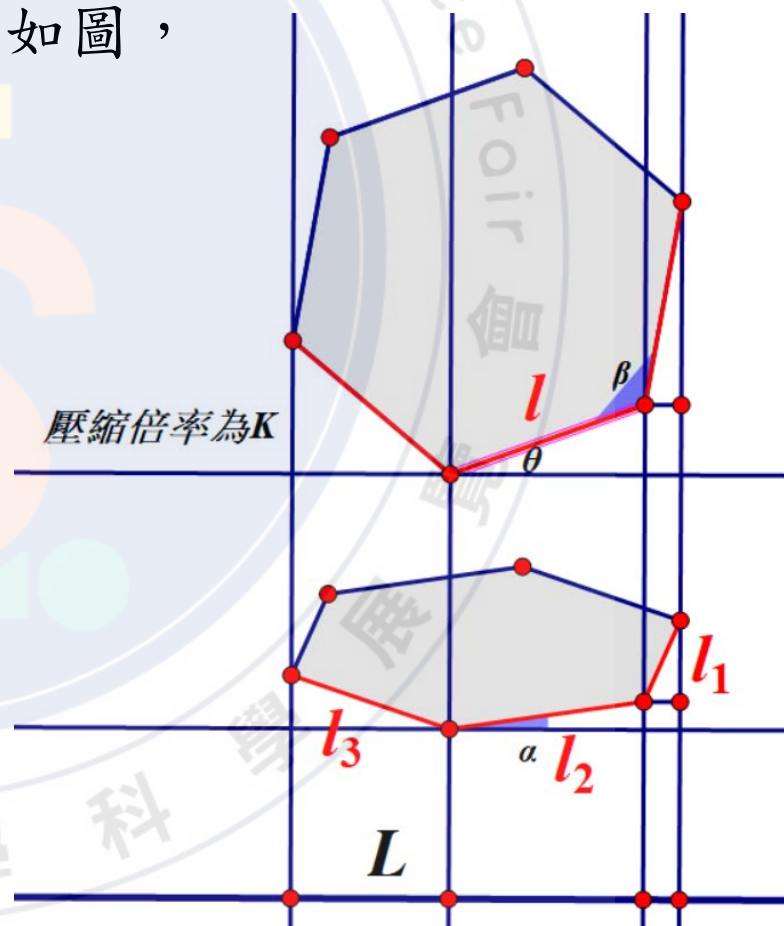
$$l_1^2 = l^2 (1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta - \theta)) \dots\dots ①$$

$$l_2^2 = l^2 (1 + (K^2 - 1) \sin^2(\theta)) \dots\dots ②$$

$$l_3^2 = l^2 (1 + (K^2 - 1) \sin^2(\beta + \theta)) \dots\dots ③$$

可解得 θ 與 K

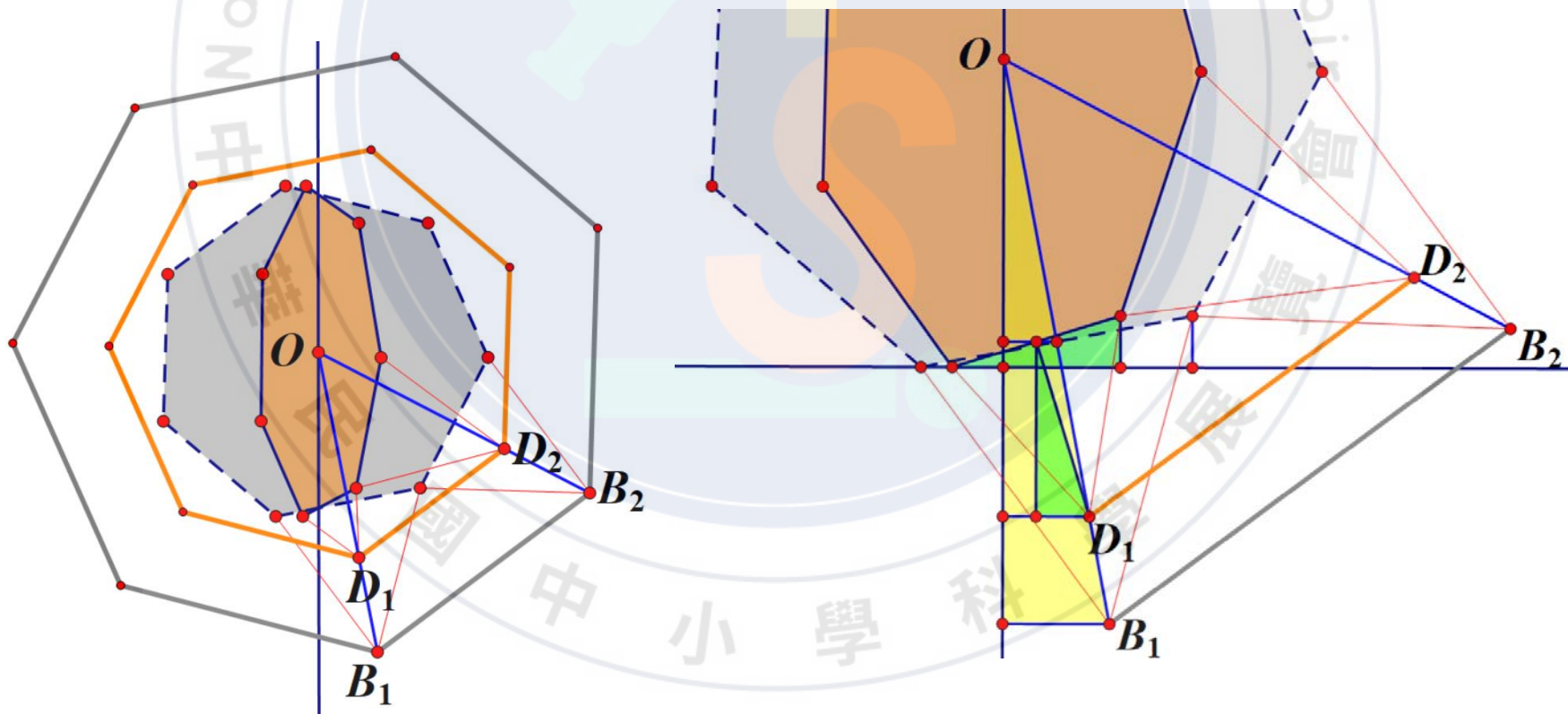
代入軟體即可還原壓縮多邊形



壓縮多邊形即為拿破崙多邊形

證明想法為：

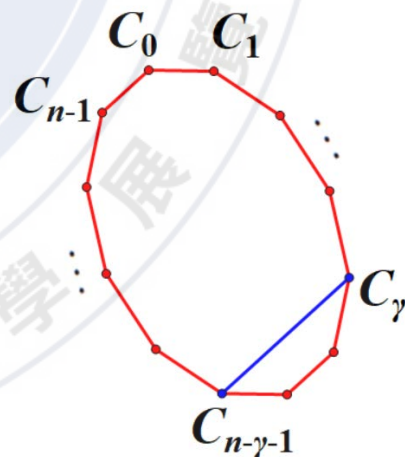
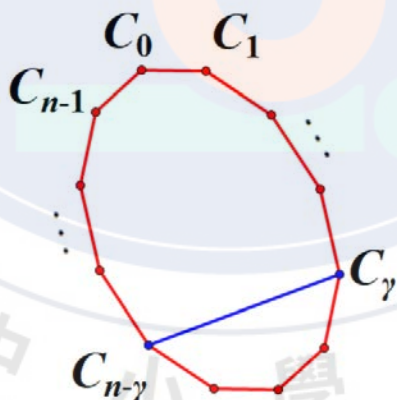
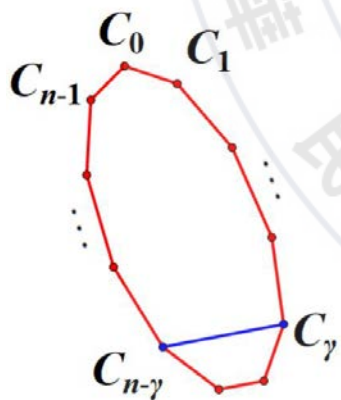
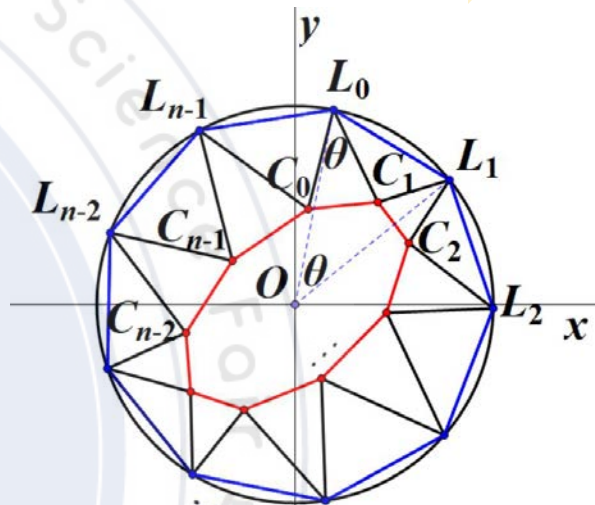
藉由證明點 D_n 會在 $\overline{OB_n}$ 上以 O 為中心伸縮，得編號 D 多邊形為編號 B 多邊形的等比例縮放，得編號 D 多邊形為拿破崙多邊形。



拿破崙多邊形即為平行多邊形

對一單位圓內接的正多邊形作逆拿破崙法，
以圓心 O 為原點，使用旋轉矩陣計算。

表示出拿破崙多邊形每一頂點座標，
相減求得對角線的向量，發現相差常數倍！



平行多邊形即為壓縮多邊形

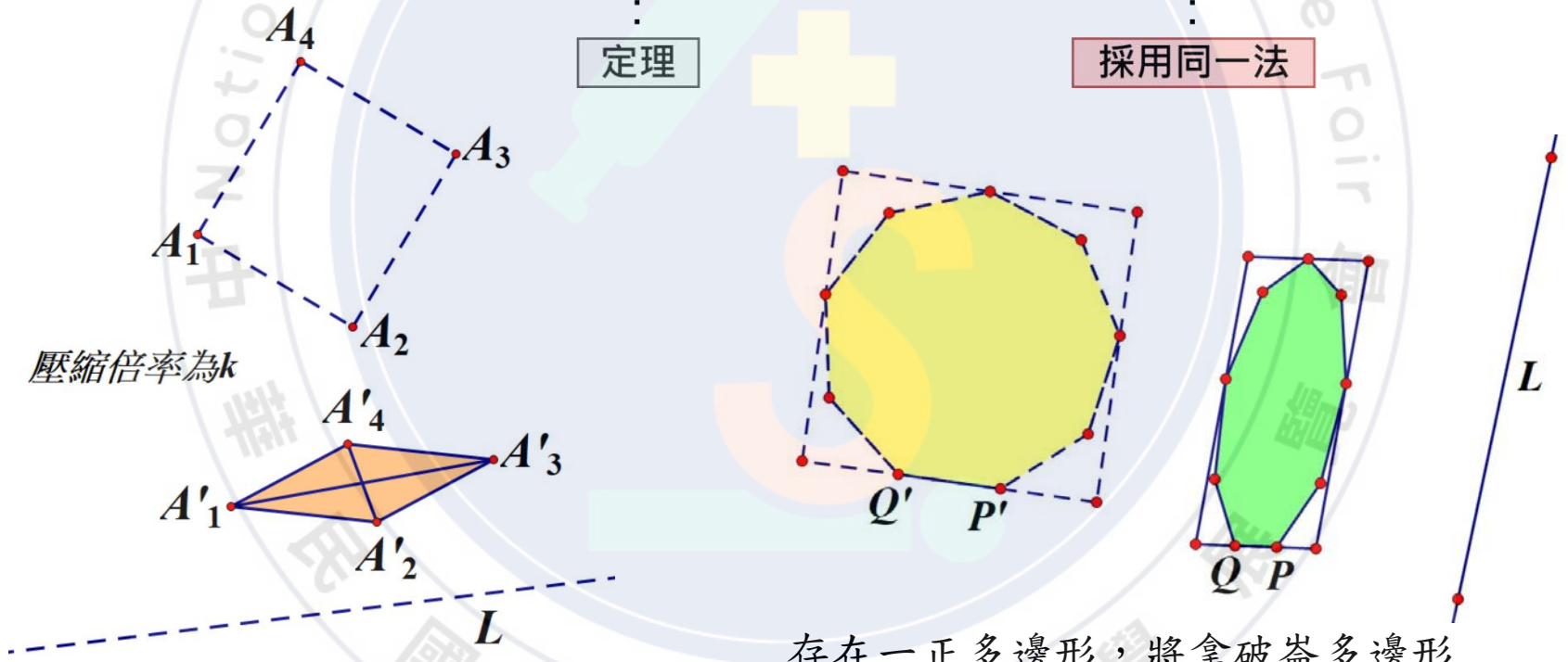
觀察平行多邊形的性質

將多邊形簡化為平行四邊形觀察

點重合想法

定理

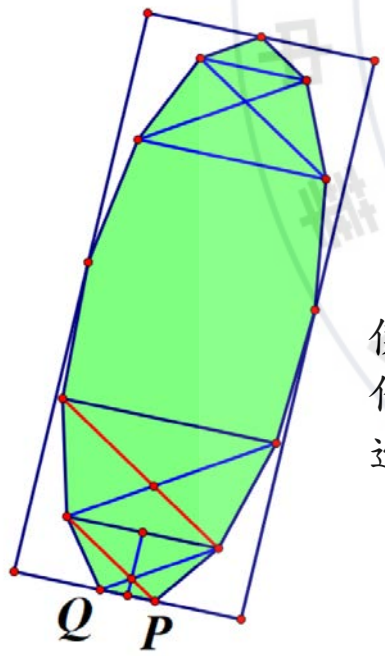
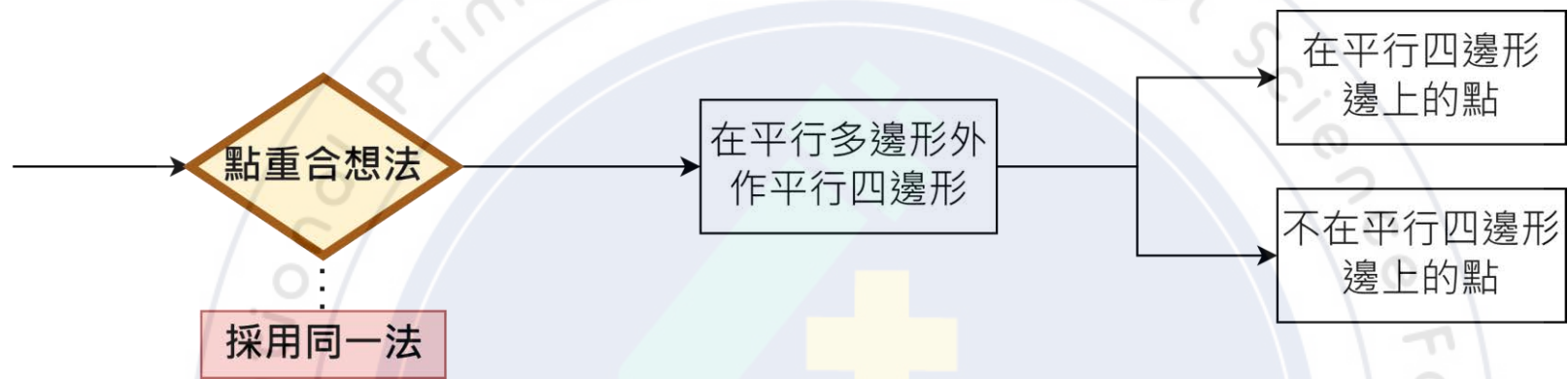
採用同一法



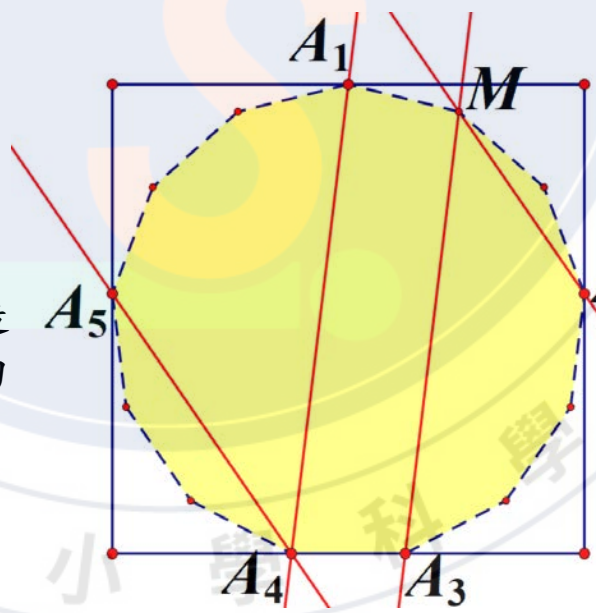
可給定實線的平行四邊形
得到虛線的矩形與壓縮軸

存在一正多邊形，將拿破崙多邊形
使用上一步求出的壓縮軸與壓縮倍
率進行軸壓縮後可與每一頂點重合。

平行多邊形即為壓縮多邊形



使用層狀梯型構造作出在外的平行四邊形



將平行四邊形壓縮成矩形後，希望平行多邊形也能壓縮成正多邊形

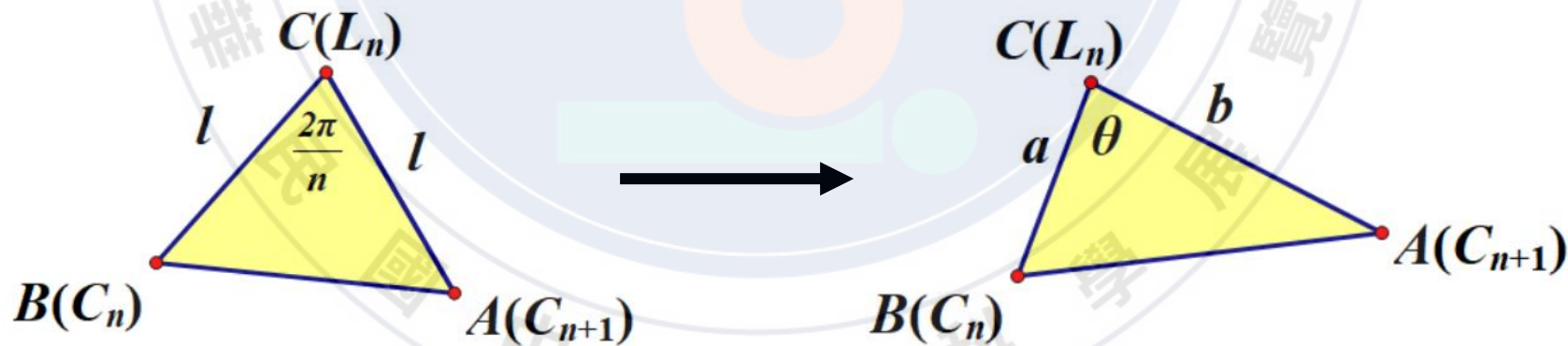
拿破崙法的推廣

對多邊形每一邊向外作相似的等腰三角形(拿破崙法)

推廣為向外作相似三角形。

證明方式將逆拿破崙法轉化為：

「由點 B 以點 C 為中心旋轉 θ 再伸縮 $\frac{b}{a}$ 倍至點 A 」



$$\bar{\omega} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

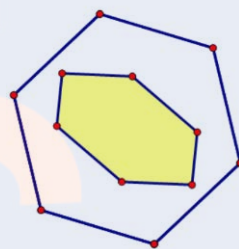
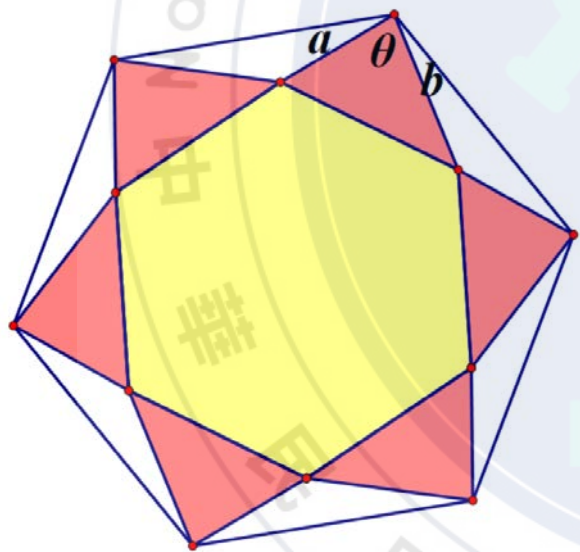
$$\omega_r = \frac{b}{a} (\cos \theta + i \sin \theta), \omega_r \neq 1$$

拿破崙法的推廣

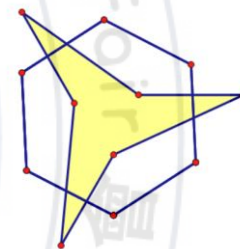
使用複數平面計算後得下列三種情形：

情況一： $\omega_r \neq \bar{\omega}$, $\omega_r^n \neq 1$

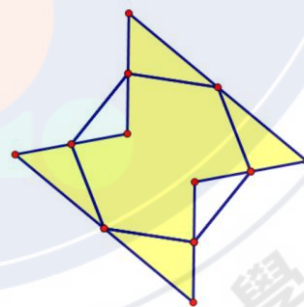
情況二： $\omega_r \neq \bar{\omega}$, $\omega_r^n = 1$



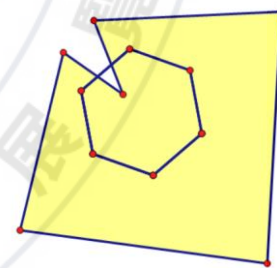
$k=1$



$k=2$



$k=3$



$k=4$

情況三： $\omega_r = \bar{\omega}$ ，計算後矛盾，拿破崙多邊形不存在

結論

- 一、歸納了壓縮多邊形的性質。
- 二、研究出將壓縮多邊形還原為正多邊形的方法。
- 三、一個多邊形是拿破崙多邊形的**充要條件**為它是壓縮多邊形。
- 四、推廣到各邊作相似三角形時，已找出並證明所有對應的推廣拿破崙多邊形。

參考文獻

- 一、黃家冠。拿破崙定理對多邊形之推廣。中華民國第55屆中小學科展。
- 二、維基百科(民110年11月27日)。複數平面。
取自<https://zh.wikipedia.org/wiki/複數平面>。