中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050415

球面 n 邊形的孟氏共線與西瓦共點定理

學校名稱：國立鹿港高級中學

作者：	指導老師：
高二 張子修 高二 黃景榆 高二 陳俊亨	鄭仕豐

關鍵詞：Menelaus' theorem、Ceva's theorem、球面 n 邊形

摘要

本文主要在探討平面幾何學中的兩個重要結果—三角形中的『Menelaus 定理』與『Ceva 定理』推廣到任意的『球面 n 邊形』的相對應結果，對於任意的球面 n 邊形，我們分別找到了『球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理』與『球面 n 邊形的 Ceva 共點定理』的一般化結果。

壹、 研究動機

在高一的時候，學校有開設多元選修課－『動態藝數 2D 與 3D』的課程，課程中會用動態幾何軟體 Geogebra 去繪製一些平面上或空間中的靜態與動態圖形，此套軟體結合了代數與幾何的概念，相當有趣，它可以快速地實驗與繪製許多巧妙與充滿藝術美感的圖形，於是我們也嘗試去繪製一些上課沒有講過的內容，或者加入一些個人的創思與發想。後來在一個偶然地機會裡，發現了參考資料[1]中的一些結果，裏頭主要探討平面上的兩個幾何學上重要結果－三角形中的『Menelaus 定理』與『Ceva 定理』推廣到任意多邊形的情形，於是我們就在思考如果在球面上呢？球面多邊形是不是也會有類似的可能結果，我查詢了相關可能的文獻資料，後來在參考資料[2]中有找到球面三角形的『Menelaus 定理』的結果描述，但是它並沒有詳細的證明，只是約略地提到可以使用『拉格朗日等式』來作證明，然而我們對該恆等式所知不多，所以我們就想說可不可以找到一個較初等的證明方式，想說盡量利用高中有學習過的工具來嘗試證明看看，皇天不負苦心人，我們最後成功地找到並證明『球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理』與『球面 n 邊形的 Ceva 共點定理』的一般化結果。研究過程可說相當的不輕鬆，不過能夠獲致自己一開始預設的目標，真的非常開心。

在研究過程中，我們主要從球面三角形、四邊形與五邊形的『Menelaus 共線定理』著手出發，然後接著把『球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理』的一般化結果完成；再來，則是將思考轉向球面三角形、四邊形與五邊形的『Ceva 共點定理』的結果形式探索，最終完成了『球面 n 邊形的 Ceva 共點定理』的一般化形式的探尋與證明。

貳、 研究目的

一、『球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理』的一般化形式的探尋與證明。

二、『球面 n 邊形的 Ceva 共點定理』的一般化形式的探尋與證明。

參、 研究設備及器材

頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體（Microsoft Word, Geogebra5.0）

肆、 研究過程與方法

我們的研究過程步驟大致如下：

一、球面上線段的內分點與外分點公式 ⇒ 二、球面上弧向量的定義 ⇒ 三、兩個弧向量之正弦值之比值求法的定義 ⇒ 四、球面三角形的『Menelaus 共線定理』 ⇒ 五、球面四邊形的『Menelaus 共線定理』 ⇒ 六、球面五邊形的『Menelaus 共線定理』 ⇒ 七、球面 n 邊形的『Menelaus 共線定理』 ⇒ 八、球面三角形的『Ceva 共點定理』 ⇒ 九、球面四邊形的『Ceva 共點定理』 ⇒ 十、球面五邊形的『Ceva 共點定理』 ⇒ 十一、球面 n 邊形的『Ceva 共點定理』

(一).預備知識：

為了使整篇文章書寫起來可以順暢一些，我們需要一些預備的工具，可以讓我們在證明一些結果時更加方便些，以下是一些可能會用到的結果與預備知識。

定義 1：(單位球面的定義)

空間中，單位球面S^2是球心為$O(0,0,0)$且半徑為 1 的球面，其方程式為$S^2: x^2+y^2+z^2=1$。

(註：本篇文章中所提到的球面，除非特別說明，否則均預設為單位球面。)

定義 2：(單位球面上兩點距離的定義)

空間中，已知單位球面$S^2: x^2+y^2+z^2=1$，又$A(a_1,a_2,a_3)$與$B(b_1,b_2,b_3)$為S^2上給定的相異兩點，則

(1) 通過球心$O(0,0,0)$、A與B三點的平面與S^2之交集為一大圓Γ；

(2) A與B兩點的球面距離AB規定為『大圓Γ上的劣弧AB的長度』，則$AB\in(0,\pi]$。

(3) 球面S^2上通過A與B兩點的直線即指上述(1)中的大圓Γ。

(4) 球面S^2上通過A與B兩點的線段AB即指上述(2)中之『大圓Γ上的劣弧AB』，其長度即定義為『大圓Γ上的劣弧AB的長度』。

(5) 若P與Q為球面S^2上的兩相異點，且$\overline{PQ}$為球面S^2之一直徑的兩端點，則稱『P為Q之對徑點』且『Q為P之對徑點』，亦即『P與Q互為對徑點』。

公式 1：(球面上線段的內分點公式)(參考資料[2]之第 288 頁)

設點X為單位球面S^2上的線段AB的內分點，$AB=\alpha$，$AX=tAB=t\alpha$，$XB=(1-t)AB=(1-t)\alpha$，$0<t<1$，其中S^2的球心為$O(0,0,0)$且半徑為 1，則

$$X=\frac{(\sin(1-t)\alpha)\times A+(\sin t\alpha)\times B}{\sin\alpha}。$$

證明：

法(一)：詳見參考資料[2]之第 285 頁至第 288 頁。

法(二)：我們發現上述法(一)的證明方式較為複雜，需要利用到外積與拉格朗日恆等式，於是我們試著找一個較為初等的方法，詳述如下：

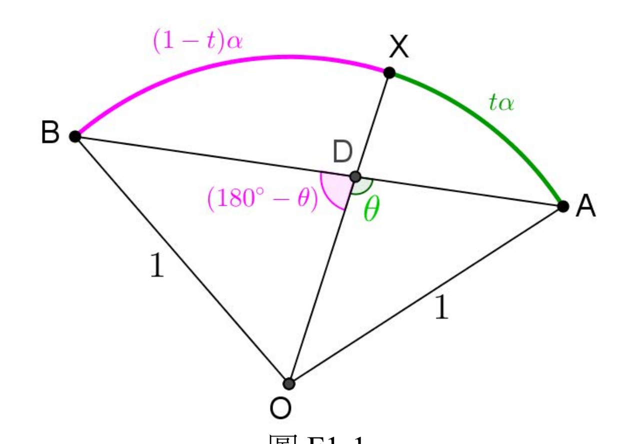


圖 F1-1

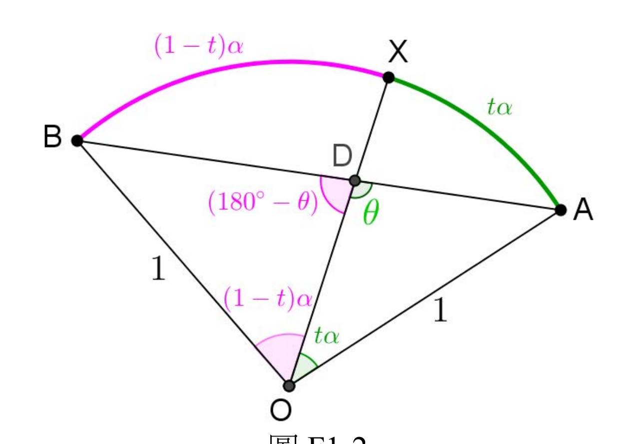


圖 F1-2

設$\angle ODA=\theta$，則$\angle ODB=(180^\circ-\theta)$，則

(i). $AX=1\times\angle AOX\Rightarrow t\alpha=1\times\angle AOX\Rightarrow\angle AOX=t\alpha$；

$XB=1\times\angle XOB\Rightarrow(1-t)\alpha=1\times\angle XOB\Rightarrow\angle XOB=(1-t)\alpha$。

(ii). 在ΔAOD中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(t\alpha)}=\dfrac{1}{\sin\theta}\Rightarrow\overline{AD}=\dfrac{\sin(t\alpha)}{\sin\theta}$；

在ΔBOD中，由正弦定理知，

$$\frac{\overline{DB}}{\sin((1-t)\alpha)}=\frac{1}{\sin(180^\circ-\theta)}\Rightarrow\overline{DB}=\frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\theta}\text{；}$$

故可推知$\overline{AD}:\overline{DB}=\dfrac{\sin(t\alpha)}{\sin\theta}:\dfrac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\theta}=\sin(t\alpha):\sin((1-t)\alpha)$；

由空間中向量的內分點公式可得

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\overrightarrow{OA}+\frac{\sin(t\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\overrightarrow{OB}$$

因為球心為$O(0,0,0)$，所以$\overrightarrow{OA}=A$，$\overrightarrow{OB}=B$，$\overrightarrow{OD}=D$，因此

$$\Rightarrow D=\frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\times A+\frac{\sin(t\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\times B=\frac{\sin((1-t)\alpha)\times A+\sin(t\alpha)\times B}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}$$

(iii). 由上圖 F1-2 知$\overrightarrow{OX}=u\times\overrightarrow{OD}$，其中$u$為實數；

又因為$|\overrightarrow{OX}|=1$，所以$1=1^2=|\overrightarrow{OX}|^2=\overrightarrow{OX}\bullet\overrightarrow{OX}=\left(u\times\overrightarrow{OD}\right)\bullet\left(u\times\overrightarrow{OD}\right)=u^2\times\left(\overrightarrow{OD}\bullet\overrightarrow{OD}\right)$

$$\Rightarrow 1=u^2\times\left[\left(\frac{\sin((1-t)\alpha)\times\overrightarrow{OA}+\sin(t\alpha)\times\overrightarrow{OB}}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\right)\bullet\left(\frac{\sin((1-t)\alpha)\times\overrightarrow{OA}+\sin(t\alpha)\times\overrightarrow{OB}}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 1=\frac{u^2}{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]^2}\times\left[\left(\sin((1-t)\alpha)\times\overrightarrow{OA}+\sin(t\alpha)\times\overrightarrow{OB}\right)\bullet\left(\sin((1-t)\alpha)\times\overrightarrow{OA}+\sin(t\alpha)\times\overrightarrow{OB}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 1=\frac{u^2\times\left[\sin^2((1-t)\alpha)\times\left(\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OA}\right)+2\sin((1-t)\alpha)\times\sin(t\alpha)\times\left(\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}\right)+\sin^2(t\alpha)\times\left(\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OB}\right)\right]}{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]^2}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{u^2\times\left[\sin^2((1-t)\alpha)\times 1+2\sin((1-t)\alpha)\times\sin(t\alpha)\times(1\times 1\times\cos\alpha)+\sin^2(t\alpha)\times 1\right]}{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]^2}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{u^2\times\left[\sin^2((1-t)\alpha)+2\sin((1-t)\alpha)\times\sin(t\alpha)\times\cos\alpha+\sin^2(t\alpha)\right]}{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]^2}$$

$$\Rightarrow u=\frac{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]}{\left[\sin^2((1-t)\alpha)+2\sin((1-t)\alpha)\times\sin(t\alpha)\times\cos\alpha+\sin^2(t\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow u=\frac{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]}{\left[\sin^2((1-t)\alpha)+2\sin((1-t)\alpha)\times\left(\frac{\sin(t\alpha+\alpha)+\sin(t\alpha-\alpha)}{2}\right)+\sin^2(t\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}}\quad\text{(利用積化和差公式)}$$

$$\Rightarrow u=\frac{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]}{\left[\sin^2((1-t)\alpha)+\sin((1-t)\alpha)\times\left(\sin((1+t)\alpha)-\sin((1-t)\alpha)\right)+\sin^2(t\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow u=\frac{[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)]}{\left[\sin^2((1-t)\alpha)+\left(\sin((1-t)\alpha)\times\sin((1+t)\alpha)-\sin^2((1-t)\alpha)\right)+\sin^2(t\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow u=\frac{\left[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)\right]}{\left[\sin^2((1-t)\alpha)+\left(\left(\sin^2\alpha-\sin^2(t\alpha)\right)-\sin^2((1-t)\alpha)\right)+\sin^2(t\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}}$$ (利用**正弦函數的平方差公式**)

$$\Rightarrow u=\frac{\left[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)\right]}{\left[\sin^2\alpha\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow u=\frac{\left[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)\right]}{\sin\alpha}$$

(iv). 由(ii)和(iii)得知 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OD}\times u=D\times u$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OX}=\frac{\sin((1-t)\alpha)\times A+\sin(t\alpha)\times B}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\times\frac{\left[\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)\right]}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OX}=\frac{\sin((1-t)\alpha)\times A+\sin(t\alpha)\times B}{\sin\alpha}$$

又 $O(0,0,0)$ 為球心，所以 $\overrightarrow{OX}=X$ ，故得證 $X=\dfrac{\sin((1-t)\alpha)\times A+\sin(t\alpha)\times B}{\sin\alpha}$

法(三)：接著，我們嘗試用外積的方法去處理，相較於法(二)，我們發現法(三)似乎又更簡潔了一些，詳述如下：

(i). $\overset{\frown}{AX}=1\times\angle AOX\Rightarrow t\alpha=1\times\angle AOX\Rightarrow\angle AOX=t\alpha$

$\overset{\frown}{XB}=1\times\angle XOB\Rightarrow(1-t)\alpha=1\times\angle XOB\Rightarrow\angle XOB=(1-t)\alpha$ 。

(ii). $D=\overrightarrow{OD}=\dfrac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\sin(t\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\overrightarrow{OB}$

(iii). 由上圖 F1-2 知 $\overrightarrow{OX}=u\times\overrightarrow{OD}$ ，其中 u 為實數；則

$$\overrightarrow{OX}\times\overrightarrow{OB}=u(\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OB})$$

$$\Rightarrow 1\times1\times\sin((1-t)\alpha)=u\times\left(\frac{\sin((1-t)\alpha)(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})+\sin(t\alpha)(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OB})}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow \sin((1-t)\alpha)=u\times\left(\frac{\sin((1-t)\alpha)(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow \sin((1-t)\alpha)=u\times\left(\frac{\sin((1-t)\alpha)(\sin\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow u=\frac{(\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha))}{(\sin\alpha)}$$

(iv). 所以 $X=\overrightarrow{OX}=u\times\overrightarrow{OD}=u\times D$

$$=\frac{(\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha))}{(\sin\alpha)}\times\left(\frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\overrightarrow{OA}+\frac{\sin(t\alpha)}{\sin(t\alpha)+\sin((1-t)\alpha)}\overrightarrow{OB}\right)$$

$=\dfrac{\sin((1-t)\alpha)\times A+\sin(t\alpha)\times B}{\sin\alpha}$ ，故得證原命題成立。 □

因著上述『**公式 1**』之『球面上線段的<u>**內分點公式**</u>』，我們也想實際而精確地寫出『球面上線段的<u>**外分點公式**</u>』的具體形式，以便本文後續應用上的便利性，詳述如下之『**公式 2**』。

公式 2：(球面上線段的外分點公式)

設點 X 為單位球面 S^2 上的線段 AB 的外分點， $AB=\alpha$ ， $AX=tAB=t\alpha$ ，
$XB=(1+t)AB=(1+t)\alpha$ ， $t>0$ 且 $t\alpha\le\pi$ ，其中 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑為 1，則
$X=\dfrac{\left(\sin(1-(-t))\alpha\right)\times A+\left(\sin(-t\alpha)\right)\times B}{\sin\alpha}$ 。

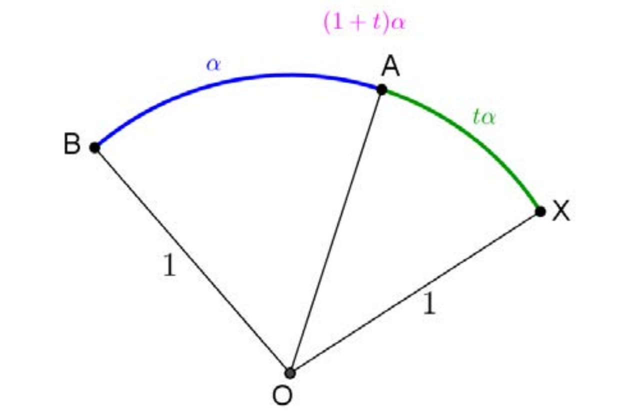


圖 F2-1

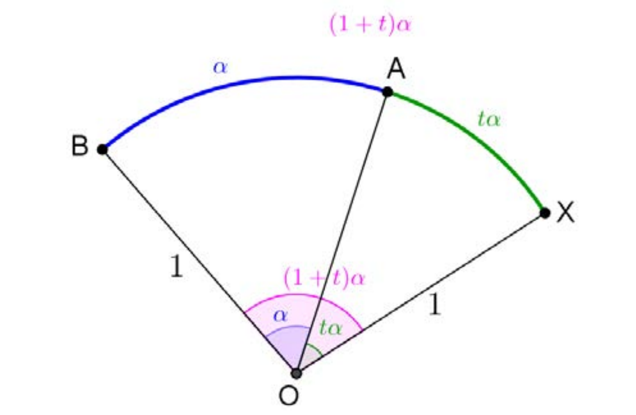


圖 F2-2

證明：

(i). $\because A$點是 B 與 X 之內分點，所以由**公式 1(球面上線段的內分點公式)**得知，

$$A=\frac{\left(\sin\alpha\right)\times X+\left(\sin t\alpha\right)\times B}{\sin((1+t)\alpha)}$$

$$\Rightarrow A\times\sin((1+t)\alpha)=\left(\sin\alpha\right)\times X+\left(\sin t\alpha\right)\times B$$

$$\Rightarrow\left(\sin\alpha\right)\times X=A\times\sin((1+t)\alpha)-\left(\sin t\alpha\right)\times B$$

$$\Rightarrow\left(\sin\alpha\right)\times X=A\times\sin((1-(-t))\alpha)+\left(\sin(-t\alpha)\right)\times B$$

$$\Rightarrow X=\frac{\left(\sin(1-(-t))\alpha\right)\times A+\left(\sin(-t\alpha)\right)\times B}{\sin\alpha}$$ ，故得證原命題成立。 □

Remark 1：(球面上線段的外分點公式的第二種觀點)

設點 X 為單位球面 S^2 上的線段 AB 的外分點， $AB=\alpha$ ， $AX=tAB=t\alpha$ ，
$XB=(1+t)AB=(1+t)\alpha$ ， $t>0$ ， $t\alpha\le\pi$ ，其中 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑為 1，則
$X=\dfrac{\left(\sin(1-(-t))\alpha\right)\times A+\left(\sin(-t\alpha)\right)\times B}{\sin\alpha}$ ；若我們令 $u=-t$ ，則
$X=\dfrac{\left(\sin(1-u)\alpha\right)\times A+\left(\sin(u\alpha)\right)\times B}{\sin\alpha}$ ，其中 $u=-t<0$ ，此時我們發現該調整後的寫法與公式 1 的形式一致，唯此處的 $u<0$ 。 □

為了本文後續描述上的方便，我們給了如下關於『弧向量』的定義，並且規定了兩個弧向量之正弦值之比值求法，詳述如下之『**定義 1**』。

定義 3：(弧向量及兩個弧向量之正弦值之比值求法)

(1) 我們以 $\overset{\frown}{PQ}$ 表示以 P 點為起始點且 Q 點為終點沿著 PQ 繞行的弧向量，讀作『弧向量 PQ』或『PQ 弧向量』。

(2) 已知 $\overset{\frown}{PQ}$ 與 $\overset{\frown}{RS}$ 為落在單位球面 S^2 之同一個大圓上的兩個弧向量，當『$\overset{\frown}{PQ}$ 與 $\overset{\frown}{RS}$ 同為逆時針繞行』或『$\overset{\frown}{PQ}$ 與 $\overset{\frown}{RS}$ 同為順時針繞行』時，則我們稱 $\overset{\frown}{PQ}$ 與 $\overset{\frown}{RS}$ 同方向(或

說同向)，如下圖 D1-1 與圖 D1-2 所示。

(3) 已知 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{RS}$ 為落在單位球面 S^2 之同一個大圓上的兩個弧向量，當『 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{RS}$ 有一個是逆時針繞行且另一個是順時針繞行』時，則我們稱 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{RS}$ 反方向(或說反向)，如下圖 D1-3 與圖 D1-4 所示。

(4) 我們規定

$$\frac{\sin \overrightarrow{PQ}}{\sin \overrightarrow{RS}} := \begin{cases} \dfrac{\sin PQ}{\sin RS} & \text{，當 } \overrightarrow{PQ} \text{ 與 } \overrightarrow{RS} \text{ 同方向時} \\ -\dfrac{\sin PQ}{\sin RS} & \text{，當 } \overrightarrow{PQ} \text{ 與 } \overrightarrow{RS} \text{ 反方向時} \end{cases} \text{。}$$

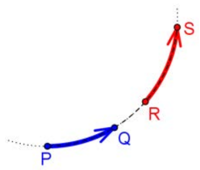


圖 D1-1

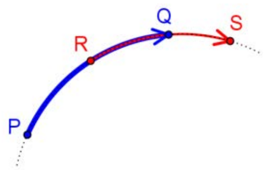


圖 D1-2

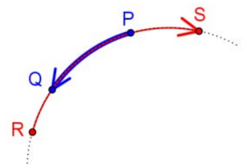


圖 D1-3

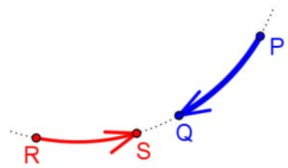


圖 D1-4

於此介紹一下平面幾何學上兩個重要的結果 —『三角形的 Menelaus 共線定理』與『三角形的 Ceva 共點定理』如下『**引理 0-1**』與『**引理 0-2**』所述。

引理 0-1：(平面上三角形的 Menelaus 共線定理)

假設平面上有一三角形 ABC，又 D、E 與 F 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，滿足 D、E 與 F 三點共線，且 D、E 與 F 三點不與三角形 ABC 三頂點重合，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$。

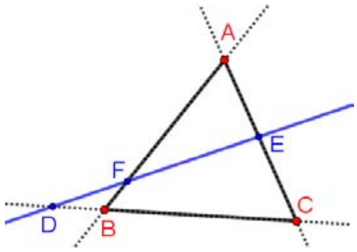


圖 L0-1-1

引理 0-2：(平面上三角形的 Ceva 共點定理)

已知平面上有一三角形 ABC，D、E 與 F 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，且 D、E 與 F 異於三頂點 A、B、C，若 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 與 $\overleftrightarrow{CF}$ 三直線共交點 P，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$。

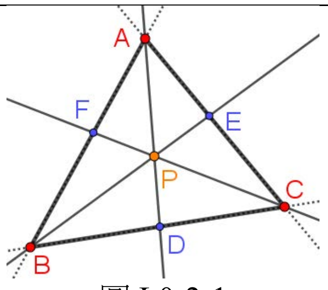


圖 L0-2-1

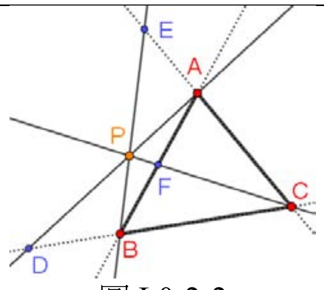


圖 L0-2-2

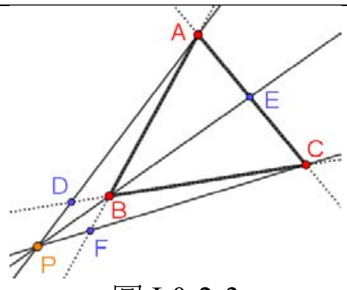


圖 L0-2-3

在參考資料[2]中，曾經提到如下『**引理 1**』之結果，可是書中並未提供完整的證明，於是我們想嘗試著給予嚴謹的證明，詳述如下。

引理 1：(球面三角形的 Menelaus 共線定理)

設 D 、 E 、 F 分別為單位球面 S^2 上之球面三角形 ABC 三邊弧 BC 、弧 CA 、弧 AB 或其延長線上的相異三點，且 D 、 E 、 F 異於球面三角形 ABC 的三頂點與三頂點之對徑點，如下圖 L1-1 所示，則 D 、 E 、 F 三點共線的**充要條件**為 $\dfrac{\sin \overrightarrow{AF}}{\sin \overrightarrow{FB}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{BD}}{\sin \overrightarrow{DC}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{CE}}{\sin \overrightarrow{EA}}=-1$ 。

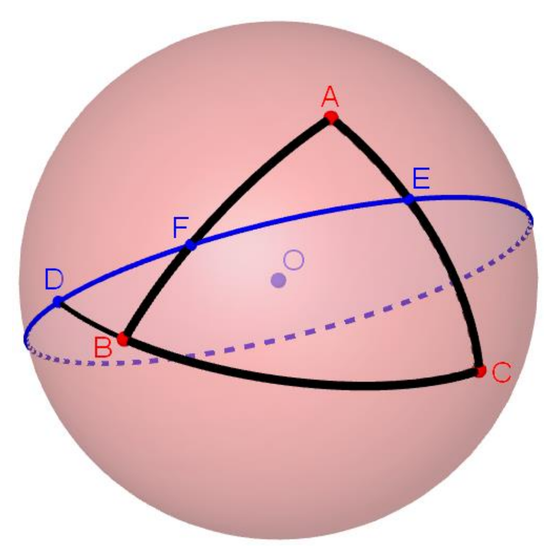


圖 L1-1

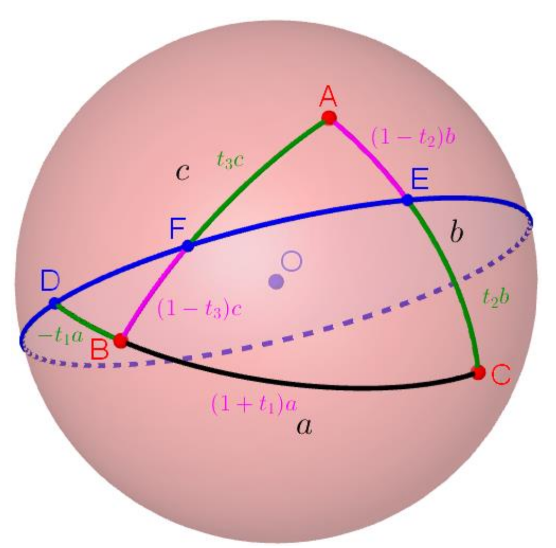


圖 L1-2

證明: 已知單位球面 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑 $r=1$ ，於此我們僅考慮 D 為 BC 之外分點、 E 與 F 分別為 CA 與 AB 之內分點的情形，其餘情形的證明方法類似，則

(i). 設 $BC=a$ ， $CA=b$ ， $AB=c$ ， $BD=-t_1a$ ， $CE=t_2b$ ， $AF=t_3c$ ，其中 $t_1<0$ ， $0<t_2<1$ ， $0<t_3<1$ ，則 $DC=BC+BD=a+(-t_1a)=(1-t_1)a$ ， $EA=CA-CE=b-t_2b=(1-t_2)b$ ， $FB=AB-AF=c-t_3c=(1-t_3)c$ 。

(ii). 由**公式 1**、**公式 2(球面上線段的外分點公式)**及 **Remark 1** 得知，

$$D=\frac{\left(\sin(1-t_1)a\right)\times B+\left(\sin(t_1a)\right)\times C}{\sin a}，\quad (\text{利用}\textbf{公式 2}\text{與}\textbf{ Remark 1})$$

$$E=\frac{\left(\sin(1-t_2)b\right)\times C+\left(\sin(t_2b)\right)\times A}{\sin b}，\quad (\text{利用}\textbf{公式 1})$$

$$F=\frac{\left(\sin(1-t_3)c\right)\times A+\left(\sin(t_3c)\right)\times B}{\sin c}。\quad (\text{利用}\textbf{公式 1})$$

(iii). $\because D$ 、 E 與 F 三點共線，$\therefore O$ 、 D 、 E 與 F 四點共平面 Γ ，

又 $\because (\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE})\perp\overrightarrow{OF}$ ， $\therefore (\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE})\bullet\overrightarrow{OF}=0 \Rightarrow (D\times E)\bullet F=0$

(註明：此處的 $(\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE})\bullet\overrightarrow{OF}$ 表示向量 $\overrightarrow{OD}$ 與向量 $\overrightarrow{OE}$ 先作外積後再與向量 $\overrightarrow{OF}$ 作內積)

$$\Rightarrow\left\{\left[\frac{\left(\sin(1-t_1)a\right)\times B+\left(\sin(t_1a)\right)\times C}{\sin a}\right]\times\left[\frac{\left(\sin(1-t_2)b\right)\times C+\left(\sin(t_2b)\right)\times A}{\sin b}\right]\right\}\bullet\left[\frac{\left(\sin(1-t_3)c\right)\times A+\left(\sin(t_3c)\right)\times B}{\sin c}\right]=0$$

$$\Rightarrow\left\{\left[\left(\sin(1-t_1)a\right)\times B+\left(\sin(t_1a)\right)\times C\right]\times\left[\left(\sin(1-t_2)b\right)\times C+\left(\sin(t_2b)\right)\times A\right]\right\}\bullet\left[\left(\sin(1-t_3)c\right)\times A+\left(\sin(t_3c)\right)\times B\right]=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(B\times C\right)+\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(B\times A\right)\\+\left(\sin(t_1a)\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(C\times C\right)+\left(\sin(t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(C\times A\right)\end{array}\right\}\bullet\left[\left(\sin(1-t_3)c\right)\times A+\left(\sin(t_3c)\right)\times B\right]=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(B\times C\right)+\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(B\times A\right)\\+\left(\sin(t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(C\times A\right)\end{array}\right\}\bullet\left[\left(\sin(1-t_3)c\right)\times A+\left(\sin(t_3c)\right)\times B\right]=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(\sin(1-t_3)c\right)\times\left[\left(B\times C\right)\bullet A\right]+\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(\sin(t_3c)\right)\times\left[\left(B\times C\right)\bullet B\right]\\+\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(1-t_3)c\right)\times\left[\left(B\times A\right)\bullet A\right]+\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(t_3c)\right)\times\left[\left(B\times A\right)\bullet B\right]\\+\left(\sin(t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(1-t_3)c\right)\times\left[\left(C\times A\right)\bullet A\right]+\left(\sin(t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(t_3c)\right)\times\left[\left(C\times A\right)\bullet B\right]\end{array}\right\}=0$$

$$\Rightarrow\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(\sin(1-t_3)c\right)\times\left[\left(B\times C\right)\bullet A\right]+\left(\sin(t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(t_3c)\right)\times\left[\left(C\times A\right)\bullet B\right]=0$$

$$\Rightarrow-\left(\sin(t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(t_3c)\right)\times\left[\left(C\times A\right)\bullet B\right]=\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(\sin(1-t_3)c\right)\times\left[\left(B\times C\right)\bullet A\right]$$

又因為$\left(C\times A\right)\bullet B=\left(B\times C\right)\bullet A$，所以

$$\left(\sin(-t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(t_3c)\right)=\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(\sin(1-t_3)c\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\left(\sin(-t_1a)\right)\times\left(\sin(t_2b)\right)\times\left(\sin(t_3c)\right)}{\left(\sin(1-t_1)a\right)\times\left(\sin(1-t_2)b\right)\times\left(\sin(1-t_3)c\right)}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\left(\sin(-t_1a)\right)}{\left(\sin(1-t_1)a\right)}\times\frac{\left(\sin(t_2b)\right)}{\left(\sin(1-t_2)b\right)}\times\frac{\left(\sin(t_3c)\right)}{\left(\sin(1-t_3)c\right)}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\sin BD}{\sin DC}\times\frac{\sin CE}{\sin EA}\times\frac{\sin AF}{\sin FB}=1\ \Rightarrow\ \frac{\sin AF}{\sin FB}\times\frac{\sin BD}{\sin DC}\times\frac{\sin CE}{\sin EA}=1$$

(iv). 如圖 L1-2 所示，因為 $\overrightarrow{AF}$ 與 $\overrightarrow{FB}$ 同方向、 $\overrightarrow{BD}$ 與 $\overrightarrow{DC}$ 反方向及 $\overrightarrow{CE}$ 與 $\overrightarrow{EA}$ 同方向，所以

$$\frac{\sin\overrightarrow{AF}}{\sin\overrightarrow{FB}}\times\frac{\sin\overrightarrow{BD}}{\sin\overrightarrow{DC}}\times\frac{\sin\overrightarrow{CE}}{\sin\overrightarrow{EA}}=\left(\frac{\sin AF}{\sin FB}\right)\times\left(-\frac{\sin BD}{\sin DC}\right)\times\left(\frac{\sin CE}{\sin EA}\right)=-1$$

(v). 反之，若$\dfrac{\sin\overrightarrow{AF}}{\sin\overrightarrow{FB}}\times\dfrac{\sin\overrightarrow{BD}}{\sin\overrightarrow{DC}}\times\dfrac{\sin\overrightarrow{CE}}{\sin\overrightarrow{EA}}=-1$，則仿照步驟(iii)與步驟(iv)可以逆推得到$D$、$E$、$F$三點共線，故得證原命題成立。 □

完成『球面三角形的 Menelaus 共線定理』的證明之後，我們想嘗試看看能否推廣到球面四邊形，經過努力之後發現也有類似的結果，如下『定理 1』所示。

定理 1：(球面四邊形的 Menelaus 共線定理)

設P_1、P_2、P_3、P_4分別為單位球面S^2上之球面四邊形面$A_1A_2A_3A_4$的四邊弧A_1A_2、弧A_2A_3、弧A_3A_4、弧A_4A_1或其延長線上的相異四點，且P_1、P_2、P_3、P_4異於球面四邊形$A_1A_2A_3A_4$的四頂點與四頂點之對徑點，如下圖 T1-1 所示，若P_1、P_2、P_3、P_4四點共線，則

$$\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_1}}{\sin\overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_2}}{\sin\overrightarrow{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3P_3}}{\sin\overrightarrow{P_3A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4P_4}}{\sin\overrightarrow{P_4A_1}}=1\ 。$$

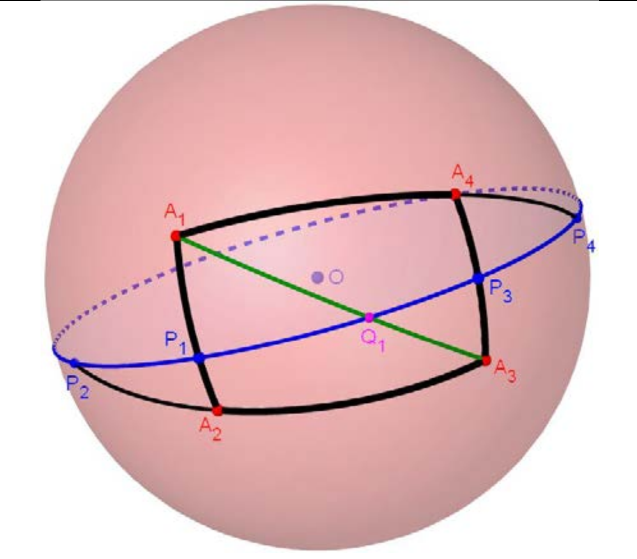


圖 T1-1

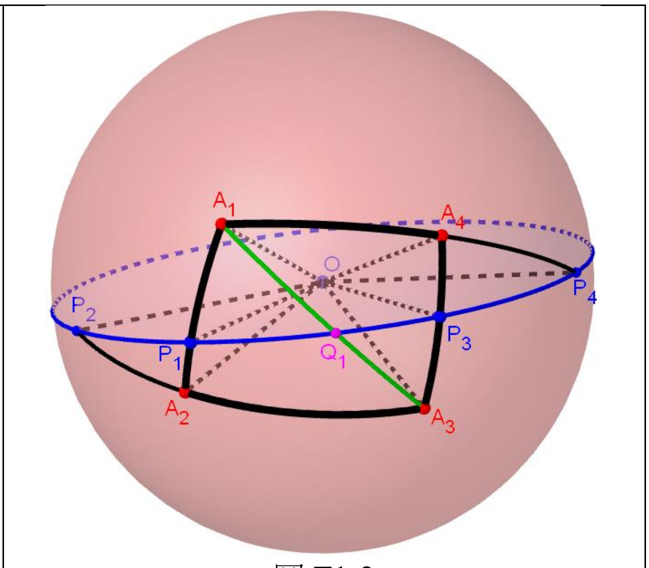


圖 T1-2

證明: 已知單位球面 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑 $r=1$

(i). 沿球面 S^2 作弧 A_1A_3 ，則弧 A_1A_3 將 $A_1A_2A_3A_4$ 分割成兩個球面三角形，亦即球面三角形 $A_1A_2A_3$ 與球面三角形 $A_1A_3A_4$ 。

(ii). 假設 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 四點共直線 L (即通過 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 四點的大圓弧)，且 L 與弧 A_1A_3 或其延長線相交於點 Q_1 。

(iii). 根據引理 1(球面三角形的 Menelaus 共線定理)可知：

$$\frac{\sin \overrightharpoon{A_1P_1}}{\sin \overrightharpoon{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_2P_2}}{\sin \overrightharpoon{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3Q_1}}{\sin \overrightharpoon{Q_1A_1}}=-1 \text{ 與 } \frac{\sin \overrightharpoon{A_1Q_1}}{\sin \overrightharpoon{Q_1A_3}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3P_3}}{\sin \overrightharpoon{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_4P_4}}{\sin \overrightharpoon{P_4A_1}}=-1 \text{，}$$

將上述二式相乘可得

$$\frac{\sin \overrightharpoon{A_1P_1}}{\sin \overrightharpoon{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_2P_2}}{\sin \overrightharpoon{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3Q_1}}{\sin \overrightharpoon{Q_1A_1}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_1Q_1}}{\sin \overrightharpoon{Q_1A_3}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3P_3}}{\sin \overrightharpoon{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_4P_4}}{\sin \overrightharpoon{P_4A_1}}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\sin \overrightharpoon{A_1P_1}}{\sin \overrightharpoon{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_2P_2}}{\sin \overrightharpoon{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3Q_1}}{\sin \overrightharpoon{Q_1A_3}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_1Q_1}}{\sin \overrightharpoon{Q_1A_1}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3P_3}}{\sin \overrightharpoon{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_4P_4}}{\sin \overrightharpoon{P_4A_1}}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\sin \overrightharpoon{A_1P_1}}{\sin \overrightharpoon{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_2P_2}}{\sin \overrightharpoon{P_2A_3}}\times(-1)\times\frac{\sin A_3Q_1}{\sin Q_1A_3}\times(-1)\frac{\sin A_1Q_1}{\sin Q_1A_1}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3P_3}}{\sin \overrightharpoon{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_4P_4}}{\sin \overrightharpoon{P_4A_1}}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\sin \overrightharpoon{A_1P_1}}{\sin \overrightharpoon{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_2P_2}}{\sin \overrightharpoon{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_3P_3}}{\sin \overrightharpoon{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overrightharpoon{A_4P_4}}{\sin \overrightharpoon{P_4A_1}}=1 \text{，故得證原命題成立。} \quad \square$$

完成『球面四邊形的 Menelaus 共線定理』的證明之後，我們想嘗試看看能否推廣到球面五邊形，經過努力之後發現也有類似的結果，如下『定理 2』所示。

定理 2：(球面五邊形的 Menelaus 共線定理)

設 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 分別為單位球面 S^2 上之球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的五邊弧 A_1A_2 、弧 A_2A_3 、弧 A_3A_4 、弧 A_4A_5 、弧 A_5A_1 或其延長線上的相異五點，且 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 異於球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的五頂點與五頂點之對徑點，如下圖 T2-1 所示，若 P_1 、 P_2 、 P_3 、

P_4 、 P_5 五點共線，則 $\dfrac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_5P_5}}{\sin \overset{\frown}{P_5A_1}} = -1$ 。

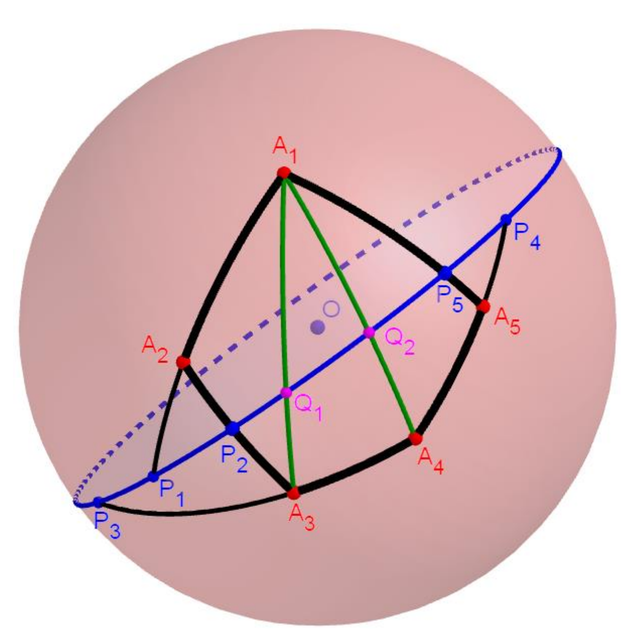


圖 T2-1

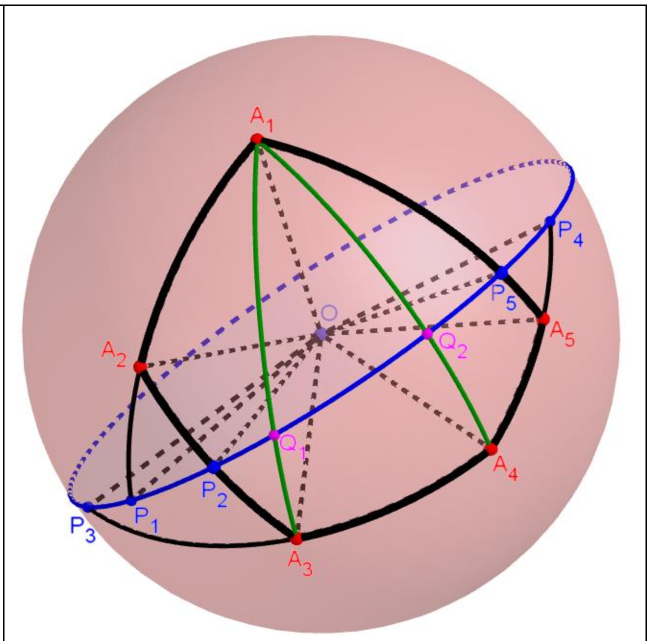


圖 T2-2

證明: 已知單位球面 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑 $r=1$

(i). 沿球面 S^2 作弧 A_1A_3 與弧 A_1A_4 ，此二弧將 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 分割成三個球面三角形，亦即球面三角形 $A_1A_2A_3$ 、球面三角形 $A_1A_3A_4$ 與球面三角形 $A_1A_4A_5$ 。

(ii). 假設 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 五點共直線 L (即通過 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 五點的大圓弧)，且 L 與弧 A_1A_3 、弧 A_1A_4 或其延長線分別相交於點 Q_1 、點 Q_2 。

(iii). 根據引理 1(球面三角形的 Menelaus 共線定理)可知： $\dfrac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_3Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_1}} = -1$ 、

$\dfrac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_3}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_4Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_1}} = -1$ 、 $\dfrac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_4}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{A_5P_5}}{\sin \overset{\frown}{P_5A_1}} = -1$ ，

將上述三式相乘可得

$$\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_3}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_4}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_5P_5}}{\sin \overset{\frown}{P_5A_1}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_3}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_4}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_5P_5}}{\sin \overset{\frown}{P_5A_1}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}} \times (-1) \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_3}} \times (-1) \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_1}}{\sin \overset{\frown}{Q_1A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}} \times$$

$$(-1) \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_4}} \times (-1) \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_2}}{\sin \overset{\frown}{Q_2A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_5P_5}}{\sin \overset{\frown}{P_5A_1}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_2P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_3}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_3P_3}}{\sin \overrightarrow{P_3A_4}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_4P_4}}{\sin \overrightarrow{P_4A_5}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_5P_5}}{\sin \overrightarrow{P_5A_1}} = -1$$ ，故得證原命題成立。 □

完成『球面五邊形的 Menelaus 共線定理』的證明之後，我們想嘗試看看能否推廣到球面 n 邊形，經過努力之後發現也有類似的結果，如下『定理 3』所示。

定理 3：(球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理)

設 P_1 、 P_2 、⋯ 、 P_n 分別為單位球面 S^2 上之球面 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 邊弧 A_1A_2 、弧 A_2A_3 、弧 A_3A_4 、⋯、弧 $A_{n-1}A_n$ 、弧 A_nA_1 或其延長線上的相異 n 點，且 P_1 、 P_2 、⋯ 、 P_n 異於球面 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 個頂點與 n 個頂點之對徑點，如下圖 T3-1 與 T3-2 所示，若 P_1 、 P_2 、⋯ 、 P_n 等 n 點共線，則 $\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_2P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_3}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_3P_3}}{\sin \overrightarrow{P_3A_4}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_4P_4}}{\sin \overrightarrow{P_4A_5}} \times \cdots \times \frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin \overrightarrow{P_{n-1}A_n}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_nP_n}}{\sin \overrightarrow{P_nA_1}} = (-1)^n$ 。

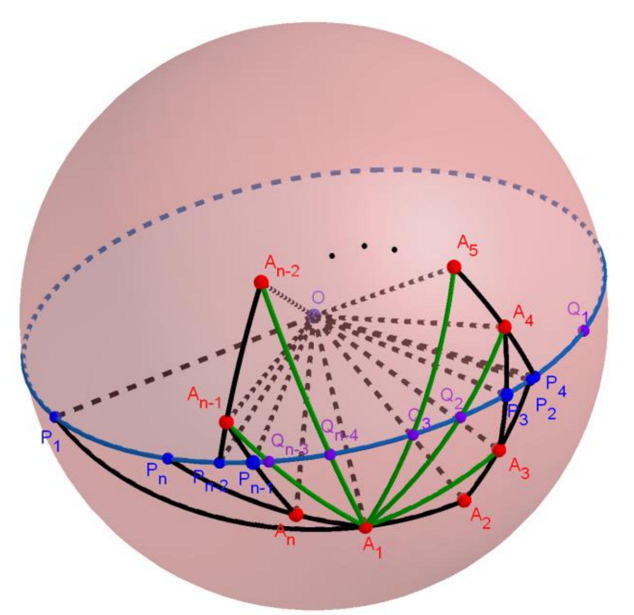


圖 T3-1(定理 3 之證明方法(一))

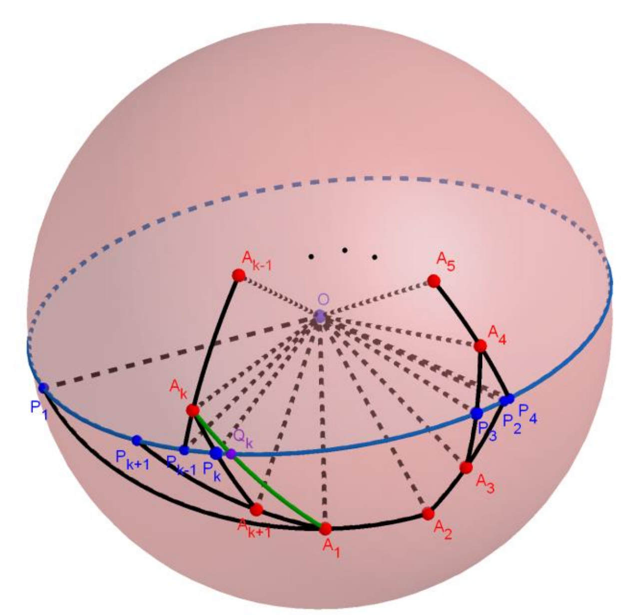


圖 T3-2 (定理 3 之證明方法(二))

證明:

方法(一)：

(i). 沿球面 S^2 作弧 A_1A_3 、弧 A_1A_4 、⋯、弧 A_1A_{n-2} 與弧 A_1A_{n-1} ，將 n 邊形分割成 $(n-2)$ 個球面三角形，亦即球面三角形 $A_1A_2A_3$ 、球面三角形 $A_1A_3A_4$ 、球面三角形 $A_1A_4A_5$ 、⋯、球面三角形 $A_1A_{n-2}A_{n-1}$ 與球面三角形 $A_1A_{n-1}A_n$ 。

(ii). 假設 P_1 、 P_2 、⋯ 、 P_n 等 n 點共直線 L (即通過 P_1 、 P_2 、⋯ 、 P_n 等 n 點的大圓弧)，且 L 與弧 A_1A_3 、弧 A_1A_4 、⋯、弧 A_1A_{n-2} 、弧 A_1A_{n-1} 或其延長線分別相交於點 Q_1 、點 Q_2 、⋯、點 Q_{n-4} 、點 Q_{n-3} 。

(iii). 將步驟(i)中之 $(n-2)$ 個球面三角形分別利用引理 1(球面三角形的 Menelaus 共線定理)之結果可得

$$(1)\quad \frac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_2P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_3}} \times \frac{\sin \overrightarrow{A_3Q_1}}{\sin \overrightarrow{Q_1A_1}} = -1$$

$$(2)\quad \frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_1}}{\sin\overrightarrow{Q_1A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3P_3}}{\sin\overrightarrow{P_3A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4Q_2}}{\sin\overrightarrow{Q_2A_1}}=-1$$

$$(3)\quad \frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_2}}{\sin\overrightarrow{Q_2A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4P_4}}{\sin\overrightarrow{P_4A_5}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_5Q_3}}{\sin\overrightarrow{Q_3A_1}}=-1$$

……

$$(n\text{-}3)\quad \frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_{n-4}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-4}A_{n-2}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-2}P_{n-2}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}Q_{n-3}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-3}A_1}}=-1$$

$$(n\text{-}2)\quad \frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_{n-3}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-3}A_{n-1}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_n}}{\sin\overrightarrow{P_nA_1}}=-1$$

(iv). 將上述步驟(iii)中之$(n-2)$個式子相乘可得

$$\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_1}}{\sin\overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_2}}{\sin\overrightarrow{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3Q_1}}{\sin\overrightarrow{Q_1A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_1}}{\sin\overrightarrow{Q_1A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3P_3}}{\sin\overrightarrow{P_3A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4Q_2}}{\sin\overrightarrow{Q_2A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_2}}{\sin\overrightarrow{Q_2A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4P_4}}{\sin\overrightarrow{P_4A_5}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_5Q_3}}{\sin\overrightarrow{Q_3A_1}}\times\ldots$$

$$\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_{n-4}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-4}A_{n-2}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-2}P_{n-2}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}Q_{n-3}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-3}A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_{n-3}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-3}A_{n-1}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_n}}{\sin\overrightarrow{P_nA_1}}=(-1)^{n-2}$$

推知

$$\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_1}}{\sin\overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_2}}{\sin\overrightarrow{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3Q_1}}{\sin\overrightarrow{Q_1A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_1}}{\sin\overrightarrow{Q_1A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3P_3}}{\sin\overrightarrow{P_3A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4Q_2}}{\sin\overrightarrow{Q_2A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_2}}{\sin\overrightarrow{Q_2A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4P_4}}{\sin\overrightarrow{P_4A_5}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_5Q_3}}{\sin\overrightarrow{Q_3A_5}}\times\ldots$$

$$\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_{n-4}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-4}A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-2}P_{n-2}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}Q_{n-3}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-3}A_{n-1}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1Q_{n-3}}}{\sin\overrightarrow{Q_{n-3}A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_n}}{\sin\overrightarrow{P_nA_1}}=(-1)^{n-2}$$

再由定義 3(4)推知

$$\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_1}}{\sin\overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_2}}{\sin\overrightarrow{P_2A_3}}\times(-1)\times\frac{\sin A_3Q_1}{\sin Q_1A_3}\times(-1)\times\frac{\sin A_1Q_1}{\sin Q_1A_1}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3P_3}}{\sin\overrightarrow{P_3A_4}}\times(-1)\times\frac{\sin A_4Q_2}{\sin Q_2A_4}\times$$

$$(-1)\times\frac{\sin A_1Q_2}{\sin Q_2A_1}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4P_4}}{\sin\overrightarrow{P_4A_5}}\times(-1)\times\frac{\sin A_5Q_3}{\sin Q_3A_5}\times\ldots\times(-1)\times\frac{\sin A_1Q_{n-4}}{\sin Q_{n-4}A_1}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-2}P_{n-2}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-2}A_{n-1}}}\times$$

$$(-1)\times\frac{\sin A_{n-1}Q_{n-3}}{\sin Q_{n-3}A_{n-1}}\times(-1)\times\frac{\sin A_1Q_{n-3}}{\sin Q_{n-3}A_1}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_n}}{\sin\overrightarrow{P_nA_1}}=(-1)^{n-2}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_1}}{\sin\overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_2}}{\sin\overrightarrow{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3P_3}}{\sin\overrightarrow{P_3A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4P_4}}{\sin\overrightarrow{P_4A_5}}\times\ldots\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_n}}{\sin\overrightarrow{P_nA_1}}=(-1)^{n-2}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_1}}{\sin\overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_2}}{\sin\overrightarrow{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_3P_3}}{\sin\overrightarrow{P_3A_4}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_4P_4}}{\sin\overrightarrow{P_4A_5}}\times\ldots\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_n}}{\sin\overrightarrow{P_nA_1}}=\frac{(-1)^n}{(-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_nP_n}}{\sin \overset{\frown}{P_nA_1}}=(-1)^n$$

，故得證原命題成立。 □

方法(二)：數學歸納法

(i). 當 $n=3$ 時，由引理 1 得知 $\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_1}}=-1$，故此時原命題成立。

(ii). 假設 $n=k$ 時原命題成立，亦即

$$\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin \overset{\frown}{P_kA_1}}=(-1)^k$$

(iii). 當 $n=k+1$ 時，

假設 P_1、P_2、⋯、P_{k+1} 等 $k+1$ 點共直線 L (即通過 P_1、P_2、⋯、P_{k+1} 等 $k+1$ 點的大圓弧)，若 L 與弧 A_kA_1 或其延長線相交於一點 Q_k，則

$$\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin \overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kQ_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_1}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin \overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kQ_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_1}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin \overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kQ_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_1}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin \overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\left(\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kQ_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_1}}\right)\times\left(\frac{\sin \overset{\frown}{A_1Q_k}}{\sin \overset{\frown}{Q_kA_k}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin \overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}\right)$$

$$=(-1)^k\times(-1)=(-1)^{k+1}$$

，故當 $n=k+1$ 時，原命題亦成立，所以由數學歸納法得證原命題成立，亦即

$$\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_nP_n}}{\sin \overset{\frown}{P_nA_1}}=(-1)^n$$

□

經過許多努力之後，終於找到了『球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理』的一般化形式，真的是興奮至極。又因為平面上三角形的『Menelaus 共線定理』與『Ceva 共點定理』互為對偶的結果，我們在想平面上的『Ceva 共點定理』是否也能在球面上找到相對應的結果，於是我們先從球面三角形下手，果然有所獲，順利地找到了『球面三角形的 Ceva 共點定理』，如下『定理 4』所述。

定理 4：(球面三角形的 Ceva 共點定理)

設 D、E、F 分別為單位球面 S^2 上的球面三角形 ABC 的三邊弧 BC 、弧 CA 與弧 AB 或其延長線上的相異三點，且 D 、E 、F 異於球面三角形 ABC 的三頂點與三頂點之對徑點，如下圖 T4-1 所示，則弧 AD 、弧 BE 與弧 CF 三弧共交點 P 的充要條件為 $\dfrac{\sin \overset{\frown}{AF}}{\sin \overset{\frown}{FB}}\times\dfrac{\sin \overset{\frown}{BD}}{\sin \overset{\frown}{DC}}\times\dfrac{\sin \overset{\frown}{CE}}{\sin \overset{\frown}{EA}}=1$ 。

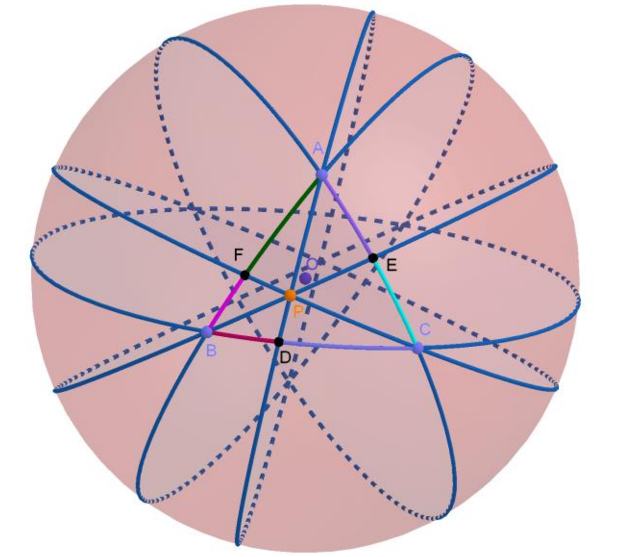


圖 T4-1

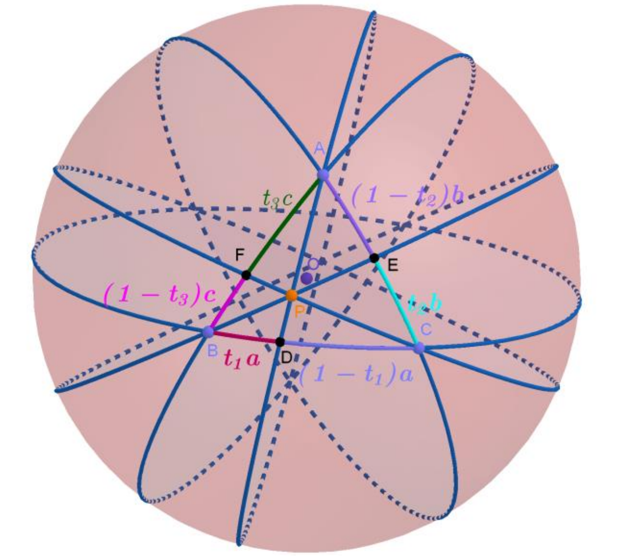


圖 T4-2

證明：我們分兩種情形討論如下：

(一). 第一種情形：當 D 、 E 與 F 分別為 BC 、 CA 與 AB 之內分點時，則

(i). 令 $BC=a$ ， $CA=b$ ， $AB=c$ ， $BD=(t_1a)$ ， $CE=(t_2b)$ ， $AF=(t_3c)$ ，其中 $0<t_1<1$ ， $0<t_2<1$ ， $0<t_3<1$ ，則可推知 $DC=BC-BD=(1-t_1)a$ ， $EA=CA-CE=(1-t_2)b$ ， $FB=AB-AF=(1-t_3)c$ 。

(ii). 由**公式 1(球面上線段的內分點公式)**得知，

$$D=\frac{(\sin(1-t_1)a)\times B+(\sin(t_1a))\times C}{\sin a},$$

$$E=\frac{(\sin(1-t_2)b)\times C+(\sin(t_2b))\times A}{\sin b},$$

$$F=\frac{(\sin(1-t_3)c)\times A+(\sin(t_3c))\times B}{\sin c}。$$

(iii). $\because$ O 、C 、F 、P 共平面，$\therefore (\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OF})\bullet\overrightarrow{OP}=0$ ，

又 O 為原點，故上式又可寫作：$(C\times F)\bullet P=0$

$$\Rightarrow\left(C\times\frac{(\sin(1-t_3)c)\times A+(\sin(t_3c))\times B}{\sin c}\right)\bullet P=0$$

$$\Rightarrow\left(C\times\frac{\sin\left(FB\right)\times A+\sin\left(AF\right)\times B}{\sin c}\right)\bullet P=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\sin\left(FB\right)((C\times A)\bullet P)+\sin\left(AF\right)((C\times B)\bullet P)}{\sin c}\right)=0$$

$$\Rightarrow \sin\left(FB\right)\left((C\times A)\bullet P\right)+\sin\left(AF\right)\left((C\times B)\bullet P\right)=0$$

$$\Rightarrow \sin\left(AF\right)\left((C\times B)\bullet P\right)=-\sin\left(FB\right)\left((C\times A)\bullet P\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(AF\right)\left(-(B\times C)\bullet P\right)=-\sin\left(FB\right)\left((C\times A)\bullet P\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(AF\right)\left((B\times C)\bullet P\right)=\sin\left(FB\right)\left((C\times A)\bullet P\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin AF}{\sin FB}=\frac{(C\times A)\bullet P}{(B\times C)\bullet P}$$

(iv). $\because O$ 、A 、D 、P 共平面，仿照上述步驟(iii)之方法可得 $\dfrac{\sin BD}{\sin DC}=\dfrac{(A\times B)\bullet P}{(C\times A)\bullet P}$ 。

(v). $\because O$ 、B 、E 、P 共平面，仿照上述步驟(iii)之方法可得 $\dfrac{\sin CE}{\sin EA}=\dfrac{(B\times C)\bullet P}{(A\times B)\bullet P}$ 。

(vi). 綜合上述步驟(iii)、(iv)與(v)之結果可得

$$\frac{\sin AF}{\sin FB}\times\frac{\sin BD}{\sin DC}\times\frac{\sin CE}{\sin EA}=\frac{(C\times A)\bullet P}{(B\times C)\bullet P}\times\frac{(A\times B)\bullet P}{(C\times A)\bullet P}\times\frac{(B\times C)\bullet P}{(A\times B)\bullet P}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \overset{\frown}{AF}}{\sin \overset{\frown}{FB}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{BD}}{\sin \overset{\frown}{DC}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{CE}}{\sin \overset{\frown}{EA}}=\frac{\sin AF}{\sin FB}\times\frac{\sin BD}{\sin DC}\times\frac{\sin CE}{\sin EA}=1$$

，故得證此時原命題成立。

(二).第二種情形：當 D 為 BC 之內分點、 E 與 F 分別為 CA 與 AB 之外分點時，則

(i) $\because D$ 為 BC 之內分點，所以由**公式 1(球面上線段的內分點公式)**得知，

$$D=\frac{\left(\sin(1-t_1)a\right)\times B+\left(\sin(t_1a)\right)\times C}{\sin a}$$ ，其中 $0<t_1<1$ ；

(ii) $\because E$ 為 CA 之外分點，所以由**公式 2(球面上線段的外分點公式)** 及 **Remark 1** 得知，

$$E=\frac{\left(\sin(1-t_2)b\right)\times C+\left(\sin(t_2b)\right)\times A}{\sin b}$$ ，其中 $t_2<0$ ；

(iii) $\because F$ 為 AB 之外分點，所以由**公式 2(球面上線段的外分點公式)** 及 **Remark 1** 得知，

$$F=\frac{\left(\sin(1-t_3)c\right)\times A+\left(\sin(t_3c)\right)\times B}{\sin c}$$ ，其中 $t_3<0$ ；

(vii). 接下來，仿照上述第一種情形之步驟(iii)、(iv)、(v)與(vi)之方法可得

$$\frac{\sin\left(AF\right)}{\sin\left(FB\right)}\times\frac{\sin\left(BD\right)}{\sin\left(DC\right)}\times\frac{\sin\left(CE\right)}{\sin\left(EA\right)}=\frac{(C\times A)\bullet P}{(B\times C)\bullet P}\times\frac{(A\times B)\bullet P}{(C\times A)\bullet P}\times\frac{(B\times C)\bullet P}{(A\times B)\bullet P}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \overset{\frown}{AF}}{\sin \overset{\frown}{FB}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{BD}}{\sin \overset{\frown}{DC}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{CE}}{\sin \overset{\frown}{EA}}=\left((-1)\times\frac{\sin\left(AF\right)}{\sin\left(FB\right)}\right)\times\frac{\sin\left(BD\right)}{\sin\left(DC\right)}\times\left((-1)\times\frac{\sin\left(CE\right)}{\sin\left(EA\right)}\right)=1$$

，故得證此時原命題成立。 □

完成了『球面三角形的 Ceva 共點定理』的證明之後，接下來我們試著去考慮『球面四

邊形』之情形，詳細之結果如下『定理 5』所述。

定理 5：(球面四邊形的 Ceva 共點定理)

假設單位球面 S^2 上有一球面四邊形 $ABCD$，且 P 點為球面 S^2 上一定點，P 點不落在球面四邊形 $ABCD$ 四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線 AC 與 BD 所在的直線上，且直線 CP、DP 與直線 AB 分別交於 P_1 與 P_2，直線 DP、AP 與直線 BC 分別交於 P_3 與 P_4，直線 AP、BP 與直線 CD 分別交於 P_5 與 P_6，直線 BP、CP 與直線 DA 分別交於 P_7 與 P_8，如下圖 T5-1 所示，則 $\dfrac{\sin \overset{\frown}{AP_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1B}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{AP_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2B}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{BP_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3C}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{BP_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4C}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{CP_5}}{\sin \overset{\frown}{P_5D}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{CP_6}}{\sin \overset{\frown}{P_6D}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{DP_7}}{\sin \overset{\frown}{P_7A}} \times \dfrac{\sin \overset{\frown}{DP_8}}{\sin \overset{\frown}{P_8A}} = 1$。

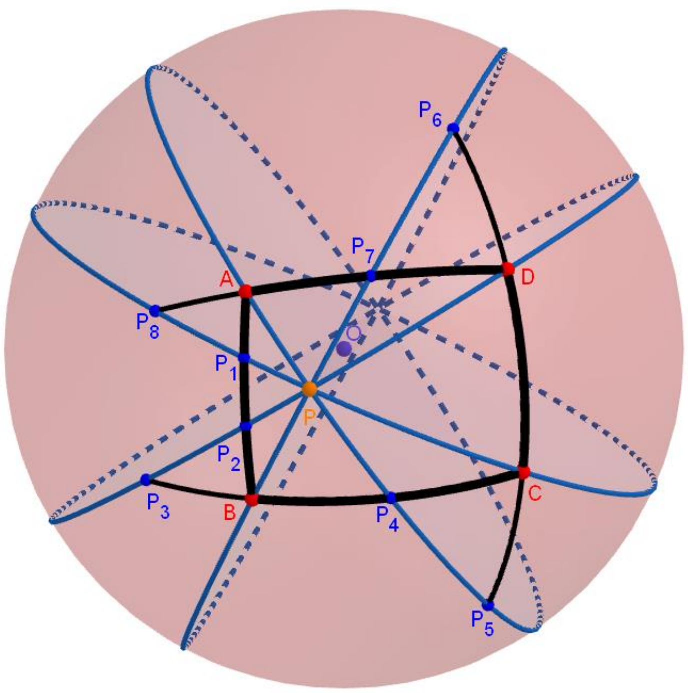


圖 T5-1

證明：如上圖 T5-1 所示，我們僅考慮 P 在球面四邊形 $ABCD$ 內部的情形，其餘情形的證明方法類似。以上圖 T5-1 為例，P_1、P_2、…、P_8 等八個點中只有四個點為球面四邊形 $ABCD$ 邊上的內分點，其他四個點則為球面四邊形 $ABCD$ 邊上的外分點，亦即

P_1、P_2 為 AB 的內分點；P_3 為 BC 的外分點；P_4 為 BC 的內分點；P_5、P_6 為 CD 的外分點；P_7 為 DA 的內分點；P_8 為 DA 的外分點。接下來，我們分成幾個步驟證明如下：

(i). $\because$ O、C、P_1、P 共平面，$\therefore (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OP_1}) \bullet \overrightarrow{OP} = 0$，

又 O 為原點，故上式又可寫作 $(C \times P_1) \bullet P = 0$。再仿照『定理 4』證明過程中情形(一)的步驟(i)、(ii)與(iii)可得 $\sin\left(AP_1\right)\left((C\times B)\bullet P\right) + \sin\left(P_1B\right)\left((C\times A)\bullet P\right) = 0$，由此推知，

$$\sin\left(AP_1\right)\left((C\times B)\bullet P\right) = -\sin\left(P_1B\right)\left((C\times A)\bullet P\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(AP_1\right)\left(-(B\times C)\bullet P\right) = -\sin\left(P_1B\right)\left((C\times A)\bullet P\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin AP_1}{\sin P_1B} = \frac{(C\times A)\bullet P}{(B\times C)\bullet P}$$ 。

(ii). $\because O$ 、D 、P_2 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin AP_2}{\sin P_2B}=\dfrac{(D\times A)\bullet P}{(B\times D)\bullet P}$

$\because O$ 、D 、P_3 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin BP_3}{\sin P_3C}=\dfrac{(D\times B)\bullet P}{(C\times D)\bullet P}$

$\because O$ 、A 、P_4 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin BP_4}{\sin P_4C}=\dfrac{(A\times B)\bullet P}{(C\times A)\bullet P}$

$\because O$ 、A 、P_5 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin CP_5}{\sin P_5D}=\dfrac{(A\times C)\bullet P}{(D\times A)\bullet P}$

$\because O$ 、B 、P_6 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin CP_6}{\sin P_6D}=\dfrac{(B\times C)\bullet P}{(D\times B)\bullet P}$

$\because O$ 、B 、P_7 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin DP_7}{\sin P_7A}=\dfrac{(B\times D)\bullet P}{(A\times B)\bullet P}$

$\because O$ 、C 、P_8 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin DP_8}{\sin P_8A}=\dfrac{(C\times D)\bullet P}{(A\times C)\bullet P}$

(iii). 利用上述步驟(i)與(ii)等八個等式可得

$$\frac{\sin \overrightarrow{AP_1}}{\sin \overrightarrow{P_1B}}\times\frac{\sin \overrightarrow{AP_2}}{\sin \overrightarrow{P_2B}}\times\frac{\sin \overrightarrow{BP_3}}{\sin \overrightarrow{P_3C}}\times\frac{\sin \overrightarrow{BP_4}}{\sin \overrightarrow{P_4C}}\times\frac{\sin \overrightarrow{CP_5}}{\sin \overrightarrow{P_5D}}\times\frac{\sin \overrightarrow{CP_6}}{\sin \overrightarrow{P_6D}}\times\frac{\sin \overrightarrow{DP_7}}{\sin \overrightarrow{P_7A}}\times\frac{\sin \overrightarrow{DP_8}}{\sin \overrightarrow{P_8A}}$$

$$=\frac{\sin AP_1}{\sin P_1B}\times\frac{\sin AP_2}{\sin P_2B}\times(-1)\times\frac{\sin BP_3}{\sin P_3C}\times\frac{\sin BP_4}{\sin P_4C}\times(-1)\times\frac{\sin CP_5}{\sin P_5D}\times(-1)\times\frac{\sin CP_6}{\sin P_6D}\times\frac{\sin DP_7}{\sin P_7A}\times(-1)\times\frac{\sin DP_8}{\sin P_8A}$$

$$=\frac{\sin AP_1}{\sin P_1B}\times\frac{\sin AP_2}{\sin P_2B}\times\frac{\sin BP_3}{\sin P_3C}\times\frac{\sin BP_4}{\sin P_4C}\times\frac{\sin CP_5}{\sin P_5D}\times\frac{\sin CP_6}{\sin P_6D}\times\frac{\sin DP_7}{\sin P_7A}\times\frac{\sin DP_8}{\sin P_8A}$$

$$=\frac{(C\times A)\bullet P}{(B\times C)\bullet P}\times\frac{(D\times A)\bullet P}{(B\times D)\bullet P}\times\frac{(D\times B)\bullet P}{(C\times D)\bullet P}\times\frac{(A\times B)\bullet P}{(C\times A)\bullet P}\times\frac{(A\times C)\bullet P}{(D\times A)\bullet P}\times\frac{(B\times C)\bullet P}{(D\times B)\bullet P}\times\frac{(B\times D)\bullet P}{(A\times B)\bullet P}\times\frac{(C\times D)\bullet P}{(A\times C)\bullet P}$$

$=1$ ，故得證原命題成立。 □

完成了『球面四邊形的 Ceva 共點定理』的證明之後，接下來我們試著去考慮『球面五邊形』之情形，詳細之結果如下『定理 6』所述。

定理 6：(球面五邊形的 Ceva 共點定理)

假設單位球面 S^2 上有一球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ ，且 P 點為球面 S^2 上一定點， P 點不落在球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 五邊所在的直線上，亦不落在其對角線所在的直線上，且直線 A_3P 、 A_4P 、 A_5P 與直線 A_1A_2 分別交於 P_1 、 P_2 與 P_3 ，直線 A_4P 、 A_5P 、 A_1P 與直線 A_2A_3 分別交於 P_4 、 P_5 與 P_6 ，直線 A_5P 、 A_1P 、 A_2P 與直線 A_3A_4 分別交於 P_7 、 P_8 與 P_9 ，直線 A_1P 、 A_2P 、 A_3P 與直線 A_4A_5 分別交於 P_{10} 、 P_{11} 與 P_{12} ，直線 A_2P 、 A_3P 、 A_4P 與直線 A_5A_1 分別交於 P_{13} 、 P_{14} 與 P_{15} ， 如下圖 T6-1 所示，則

$$\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_2}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3A_2}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_4}}{\sin \overset{\frown}{P_4A_3}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_5}}{\sin \overset{\frown}{P_5A_3}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_6}}{\sin \overset{\frown}{P_6A_3}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_7}}{\sin \overset{\frown}{P_7A_4}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_8}}{\sin \overset{\frown}{P_8A_4}} \times$$

$$\frac{\sin \overset{\frown}{A_3P_9}}{\sin \overset{\frown}{P_9A_4}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_{10}}}{\sin \overset{\frown}{P_{10}A_5}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_{11}}}{\sin \overset{\frown}{P_{11}A_5}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_4P_{12}}}{\sin \overset{\frown}{P_{12}A_5}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_5P_{13}}}{\sin \overset{\frown}{P_{13}A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_5P_{14}}}{\sin \overset{\frown}{P_{14}A_1}} \times \frac{\sin \overset{\frown}{A_5P_{15}}}{\sin \overset{\frown}{P_{15}A_1}} = 1$$

。

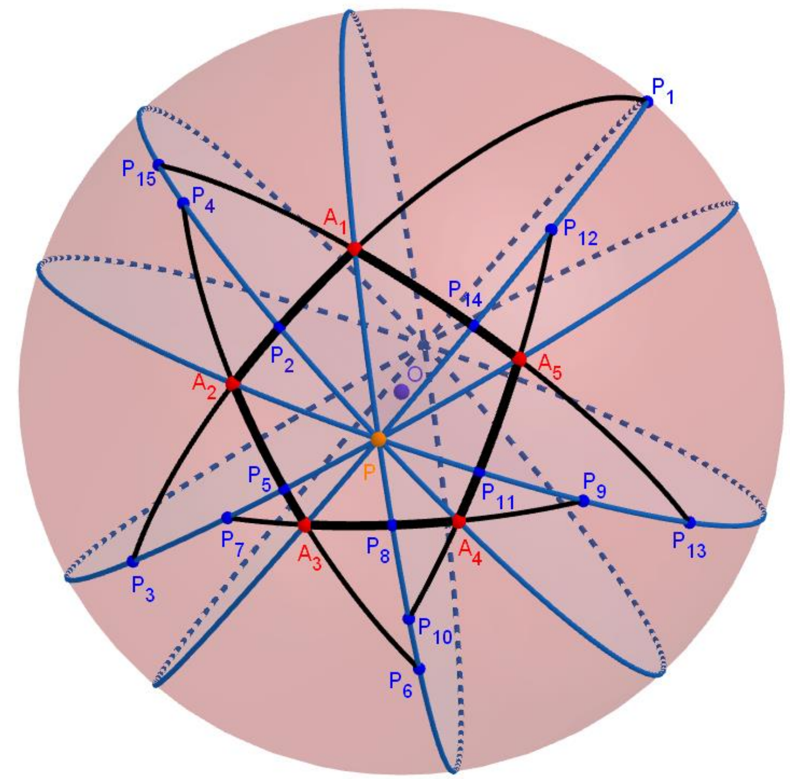


圖 T6-1

證明：如上圖 T6-1 所示，我們僅考慮 P 在球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 內部的情形，其餘情形的證明方法類似。以上圖 T6-1 為例，P_1、P_2、⋯、P_{15} 等十五個點中只有五個點為球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 邊上的內分點，其他十個點則為球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 邊上的外分點，亦即 P_2、P_5、P_8、P_{11} 與 P_{14} 分別為 $\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\overset{\frown}{A_2A_3}$、$\overset{\frown}{A_3A_4}$、$\overset{\frown}{A_4A_5}$ 與 $\overset{\frown}{A_5A_1}$ 的內分點；P_1 與 P_3、P_4 與 P_6、P_7 與 P_9、P_{10} 與 P_{12}、P_{13} 與 P_{15} 分別為 $\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\overset{\frown}{A_2A_3}$、$\overset{\frown}{A_3A_4}$、$\overset{\frown}{A_4A_5}$ 與 $\overset{\frown}{A_5A_1}$ 的外分點。接下來，我們分成幾個步驟證明如下：

(i). $\because O$、A_3、P_1、P 共平面，$\therefore (\overrightarrow{OA_3} \times \overrightarrow{OP_1}) \bullet \overrightarrow{OP} = 0$，

又 O 為原點，故上式又可寫作 $(A_3 \times P_1) \bullet P = 0$。再仿照『定理 4』證明過程中情形(一)的步驟(i)、(ii)與(iii)可得 $\sin\left(\overset{\frown}{A_1P_1}\right)((A_3 \times A_2) \bullet P) + \sin\left(\overset{\frown}{P_1A_2}\right)((A_3 \times A_1) \bullet P) = 0$，由此推知，

$$\sin\left(\overset{\frown}{A_1P_1}\right)((A_3 \times A_2) \bullet P) = -\sin\left(\overset{\frown}{P_1A_2}\right)((A_3 \times A_1) \bullet P)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\overset{\frown}{A_1P_1}\right)(-(A_2 \times A_3) \bullet P) = -\sin\left(\overset{\frown}{P_1A_2}\right)((A_3 \times A_1) \bullet P)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}} = \frac{(A_3 \times A_1) \bullet P}{(A_2 \times A_3) \bullet P}$$ 。

(ii). $\because O$ 、A_4 、P_2 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_1P_2}{\sin P_2A_2}=\dfrac{(A_4\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_4)\bullet P}$

$\because O$ 、A_5 、P_3 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_1P_3}{\sin P_3A_2}=\dfrac{(A_5\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_5)\bullet P}$

$\because O$ 、A_4 、P_4 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_2P_4}{\sin P_4A_3}=\dfrac{(A_4\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_4)\bullet P}$

$\because O$ 、A_5 、P_5 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_2P_5}{\sin P_5A_3}=\dfrac{(A_5\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_5)\bullet P}$

$\because O$ 、A_1 、P_6 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_2P_6}{\sin P_6A_3}=\dfrac{(A_1\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_1)\bullet P}$

$\because O$ 、A_5 、P_7 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_3P_7}{\sin P_7A_4}=\dfrac{(A_5\times A_3)\bullet P}{(A_4\times A_5)\bullet P}$

$\because O$ 、A_1 、P_8 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_3P_8}{\sin P_8A_4}=\dfrac{(A_1\times A_3)\bullet P}{(A_4\times A_1)\bullet P}$

$\because O$ 、A_2 、P_9 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_3P_9}{\sin P_9A_4}=\dfrac{(A_2\times A_3)\bullet P}{(A_4\times A_2)\bullet P}$

$\because O$ 、A_1 、P_{10} 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_4P_{10}}{\sin P_{10}A_5}=\dfrac{(A_1\times A_4)\bullet P}{(A_5\times A_1)\bullet P}$

$\because O$ 、A_2 、P_{11} 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_4P_{11}}{\sin P_{11}A_5}=\dfrac{(A_2\times A_4)\bullet P}{(A_5\times A_2)\bullet P}$

$\because O$ 、A_3 、P_{12} 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_4P_{12}}{\sin P_{12}A_5}=\dfrac{(A_3\times A_4)\bullet P}{(A_5\times A_3)\bullet P}$

$\because O$ 、A_2 、P_{13} 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_5P_{13}}{\sin P_{13}A_1}=\dfrac{(A_2\times A_5)\bullet P}{(A_1\times A_2)\bullet P}$

$\because O$ 、A_3 、P_{14} 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_5P_{14}}{\sin P_{14}A_1}=\dfrac{(A_3\times A_5)\bullet P}{(A_1\times A_3)\bullet P}$

$\because O$ 、A_4 、P_{15} 、P 共平面，仿照上述步驟(i)之方法，同理可得 $\dfrac{\sin A_5P_{15}}{\sin P_{15}A_1}=\dfrac{(A_4\times A_5)\bullet P}{(A_1\times A_4)\bullet P}$

(iii). 利用上述步驟(i)與(ii)等十五個等式可得

$$\frac{\sin A_1P_1}{\sin P_1A_2}\times\frac{\sin A_1P_2}{\sin P_2A_2}\times\frac{\sin A_1P_3}{\sin P_3A_2}\times\frac{\sin A_2P_4}{\sin P_4A_3}\times\frac{\sin A_2P_5}{\sin P_5A_3}\times\frac{\sin A_2P_6}{\sin P_6A_3}\times\frac{\sin A_3P_7}{\sin P_7A_4}\times\frac{\sin A_3P_8}{\sin P_8A_4}\times$$

$$\frac{\sin A_3P_9}{\sin P_9A_4}\times\frac{\sin A_4P_{10}}{\sin P_{10}A_5}\times\frac{\sin A_4P_{11}}{\sin P_{11}A_5}\times\frac{\sin A_4P_{12}}{\sin P_{12}A_5}\times\frac{\sin A_5P_{13}}{\sin P_{13}A_1}\times\frac{\sin A_5P_{14}}{\sin P_{14}A_1}\times\frac{\sin A_5P_{15}}{\sin P_{15}A_1}$$

$$
\begin{aligned}
&=(-1)\times\frac{\sin A_1P_1}{\sin P_1A_2}\times\frac{\sin A_1P_2}{\sin P_2A_2}\times(-1)\times\frac{\sin A_1P_3}{\sin P_3A_2}\times(-1)\times\frac{\sin A_2P_4}{\sin P_4A_3}\times\frac{\sin A_2P_5}{\sin P_5A_3}\times(-1)\times\frac{\sin A_2P_6}{\sin P_6A_3}\times\\
&(-1)\times\frac{\sin A_3P_7}{\sin P_7A_4}\times\frac{\sin A_3P_8}{\sin P_8A_4}\times(-1)\times\frac{\sin A_3P_9}{\sin P_9A_4}\times(-1)\times\frac{\sin A_4P_{10}}{\sin P_{10}A_5}\times\frac{\sin A_4P_{11}}{\sin P_{11}A_5}\times(-1)\times\frac{\sin A_4P_{12}}{\sin P_{12}A_5}\times\\
&(-1)\times\frac{\sin A_5P_{13}}{\sin P_{13}A_1}\times\frac{\sin A_5P_{14}}{\sin P_{14}A_1}\times(-1)\times\frac{\sin A_5P_{15}}{\sin P_{15}A_1}\\
&=\frac{\sin A_1P_1}{\sin P_1A_2}\times\frac{\sin A_1P_2}{\sin P_2A_2}\times\frac{\sin A_1P_3}{\sin P_3A_2}\times\frac{\sin A_2P_4}{\sin P_4A_3}\times\frac{\sin A_2P_5}{\sin P_5A_3}\times\frac{\sin A_2P_6}{\sin P_6A_3}\times\\
&\frac{\sin A_3P_7}{\sin P_7A_4}\times\frac{\sin A_3P_8}{\sin P_8A_4}\times\frac{\sin A_3P_9}{\sin P_9A_4}\times\frac{\sin A_4P_{10}}{\sin P_{10}A_5}\times\frac{\sin A_4P_{11}}{\sin P_{11}A_5}\times\frac{\sin A_4P_{12}}{\sin P_{12}A_5}\times\frac{\sin A_5P_{13}}{\sin P_{13}A_1}\times\frac{\sin A_5P_{14}}{\sin P_{14}A_1}\times\frac{\sin A_5P_{15}}{\sin P_{15}A_1}\\
&=\frac{(A_3\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_3)\bullet P}\times\frac{(A_4\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_4)\bullet P}\times\frac{(A_5\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_5)\bullet P}\times\frac{(A_4\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_4)\bullet P}\times\frac{(A_5\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_5)\bullet P}\times\frac{(A_1\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_1)\bullet P}\times\\
&\frac{(A_5\times A_3)\bullet P}{(A_4\times A_5)\bullet P}\times\frac{(A_1\times A_3)\bullet P}{(A_4\times A_1)\bullet P}\times\frac{(A_2\times A_3)\bullet P}{(A_4\times A_2)\bullet P}\times\frac{(A_1\times A_4)\bullet P}{(A_5\times A_1)\bullet P}\times\frac{(A_2\times A_4)\bullet P}{(A_5\times A_2)\bullet P}\times\frac{(A_3\times A_4)\bullet P}{(A_5\times A_3)\bullet P}\times\\
&\frac{(A_2\times A_5)\bullet P}{(A_1\times A_2)\bullet P}\times\frac{(A_3\times A_5)\bullet P}{(A_1\times A_3)\bullet P}\times\frac{(A_4\times A_5)\bullet P}{(A_1\times A_4)\bullet P}
\end{aligned}
$$

$=1$，故得證原命題成立。 □

完成了『球面五邊形的 Ceva 共點定理』的證明之後，接下來我們試著去考慮『球面 n 邊形』之情形，詳細之結果如下『定理 7』所述。

定理 7：(球面 n 邊形的 Ceva 共點定理)

假設單位球面 S^2 上有一球面 n 邊形 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_n$，且 P 點為球面 S^2 上一定點，P 點不落在球面 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 邊所在直線上，亦不落在其對角線所在的直線上，且直線 A_3P、A_4P、…、A_nP 與直線 A_1A_2 分別交於 P_1、P_2、…、P_{n-2}；直線 A_4P、A_5P、…、A_nP、A_1P 與直線 A_2A_3 分別交於 $P_{(n-2)+1}$、$P_{(n-2)+2}$、…、$P_{2(n-2)}$；直線 A_5P、A_6P、…、A_nP、A_1P、A_2P 與直線 A_3A_4 分別交於 $P_{2(n-2)+1}$、$P_{2(n-2)+2}$、…、$P_{3(n-2)}$，…；直線 $A_{k+3}P$、$A_{k+4}P$、…、A_nP、A_1P、A_2P、…、A_kP 與直線 $A_{k+1}A_{k+2}$ 分別交於 $P_{k(n-2)+1}$、$P_{k(n-2)+2}$、…、$P_{(k+1)(n-2)}$；…；直線 A_2P、A_3P、…、$A_{n-2}P$、$A_{n-1}P$ 與直線 A_nA_1 分別交於 $P_{(n-1)(n-2)+1}$、$P_{(n-1)(n-2)+2}$、…、$P_{n(n-2)}$，則

$$\left(\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_1}}{\sin\overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_2}}{\sin\overrightarrow{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_{n-2}}}{\sin\overrightarrow{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin\overrightarrow{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin\overrightarrow{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin\overrightarrow{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots\times$$

$$\left(\frac{\sin\overrightarrow{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin\overrightarrow{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin\overrightarrow{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin\overrightarrow{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times$$

$$\left(\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin\overrightarrow{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin\overrightarrow{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin\overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin\overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin\overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin\overrightarrow{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

(亦即

$$\prod_{i=1}^{n-2}\frac{\sin\overrightarrow{A_1P_i}}{\sin\overrightarrow{P_iA_2}}\times\prod_{i=(n-2)+1}^{2(n-2)}\frac{\sin\overrightarrow{A_2P_i}}{\sin\overrightarrow{P_iA_3}}\times\cdots\times\prod_{i=k(n-2)+1}^{(k+1)(n-2)}\frac{\sin\overrightarrow{A_{k+1}P_i}}{\sin\overrightarrow{P_iA_{k+2}}}\times\cdots\times\prod_{i=(n-2)(n-2)+1}^{(n-1)(n-2)}\frac{\sin\overrightarrow{A_{n-1}P_i}}{\sin\overrightarrow{P_iA_n}}\times\prod_{i=(n-1)(n-2)+1}^{n(n-2)}\frac{\sin\overrightarrow{A_nP_i}}{\sin\overrightarrow{P_iA_1}}=1)$$

，其中對於 $0\le k\le n-1$ ，$1\le j\le n-2$ ，滿足 $P_{k(n-2)+j}$ 落在直線 $A_{k+1}A_{k+2}$ 上，亦即直線 $A_{k+1}A_{k+2}$ 上有 $(n-2)$ 個點 $P_{k(n-2)+1}$ 、 $P_{k(n-2)+2}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{(k+1)(n-2)}$ 。

證明：

(i). $\because O$ 、A_3 、P_1 、P 共平面，$\therefore(\overrightarrow{OA_3}\times\overrightarrow{OP_1})\bullet\overrightarrow{OP}=0$ ，

又 O 為原點，故上式又可寫作 $(A_3\times P_1)\bullet P=0$ 。再仿照『定理 4』證明過程中情形(一)的步驟(i)、(ii)與(iii)可得 $\sin\left(A_1P_1\right)\left((A_3\times A_2)\bullet P\right)+\sin\left(P_1A_2\right)\left((A_3\times A_1)\bullet P\right)=0$ ，由此推知，

$$\sin\left(A_1P_1\right)\left((A_3\times A_2)\bullet P\right)=-\sin\left(P_1A_2\right)\left((A_3\times A_1)\bullet P\right)$$

$$\Rightarrow\sin\left(A_1P_1\right)\left(-(A_2\times A_3)\bullet P\right)=-\sin\left(P_1A_2\right)\left((A_3\times A_1)\bullet P\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin A_1P_1}{\sin P_1A_2}=\frac{(A_3\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_3)\bullet P}\text{ 。}$$

(ii). 仿照上述步驟(ii)之方法，同理可得

(iii-1)

$\because O$ 、A_3 、P_1 、P 共平面，$\therefore\dfrac{\sin A_1P_1}{\sin P_1A_2}=\dfrac{(A_3\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_3)\bullet P}$ $\cdots(1)$

$\because O$ 、A_4 、P_2 、P 共平面，$\therefore\dfrac{\sin A_1P_2}{\sin P_2A_2}=\dfrac{(A_4\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_4)\bullet P}$ $\cdots(2)$

$\because O$ 、A_5 、P_3 、P 共平面，$\therefore\dfrac{\sin A_1P_3}{\sin P_3A_2}=\dfrac{(A_5\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_5)\bullet P}$ $\cdots(3)$

$\cdots$

$\because O$ 、A_{j+2} 、P_j 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_1 P_j}{\sin P_j A_2} = \dfrac{(A_{j+2} \times A_1) \bullet P}{(A_2 \times A_{j+2}) \bullet P} \quad \cdots(j)$

…

$\because O$ 、A_n 、$P_{n\text{-}2}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_1 P_{n-2}}{\sin P_{n\text{-}2} A_2} = \dfrac{(A_n \times A_1) \bullet P}{(A_2 \times A_n) \bullet P} \quad \cdots(n\text{-}2)$

(iii-2)

$\because O$ 、A_4 、$P_{(n\text{-}2)+1}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_2 P_{(n\text{-}2)+1}}{\sin P_{(n\text{-}2)+1} A_3} = \dfrac{(A_4 \times A_2) \bullet P}{(A_3 \times A_4) \bullet P} \quad \cdots((n\text{-}2)+1)$

$\because O$ 、A_5 、$P_{(n\text{-}2)+2}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_2 P_{(n\text{-}2)+2}}{\sin P_{(n\text{-}2)+2} A_3} = \dfrac{(A_5 \times A_2) \bullet P}{(A_3 \times A_5) \bullet P} \quad \cdots((n\text{-}2)+2)$

$\because O$ 、A_6 、$P_{(n\text{-}2)+3}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_2 P_{(n\text{-}2)+3}}{\sin P_{(n\text{-}2)+3} A_3} = \dfrac{(A_6 \times A_2) \bullet P}{(A_3 \times A_6) \bullet P} \quad \cdots((n\text{-}2)+3)$

…

$\because O$ 、A_{j+3} 、$P_{(n\text{-}2)+j}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_2 P_{(n\text{-}2)+j}}{\sin P_{(n\text{-}2)+j} A_3} = \dfrac{(A_{j+3} \times A_2) \bullet P}{(A_3 \times A_{j+3}) \bullet P} \quad \cdots((n\text{-}2)+j)$

…

$\because O$ 、A_n 、$P_{(n\text{-}2)+(n-3)}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_2 P_{(n\text{-}2)+(n-3)}}{\sin P_{(n\text{-}2)+(n-3)} A_3} = \dfrac{(A_n \times A_2) \bullet P}{(A_3 \times A_n) \bullet P} \quad \cdots((n\text{-}2)+(n-3))$

$\because O$ 、A_1 、$P_{2(n\text{-}2)}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_2 P_{2(n\text{-}2)}}{\sin P_{2(n\text{-}2)} A_3} = \dfrac{(A_1 \times A_2) \bullet P}{(A_3 \times A_1) \bullet P} \quad \cdots(2(n\text{-}2))$

(iii-3)

$\because O$ 、A_5 、$P_{2(n\text{-}2)+1}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_3 P_{2(n\text{-}2)+1}}{\sin P_{2(n\text{-}2)+1} A_4} = \dfrac{(A_5 \times A_3) \bullet P}{(A_4 \times A_5) \bullet P} \quad \cdots(2(n\text{-}2)+1)$

$\because O$ 、A_6 、$P_{2(n\text{-}2)+2}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_3 P_{2(n\text{-}2)+2}}{\sin P_{2(n\text{-}2)+2} A_4} = \dfrac{(A_6 \times A_3) \bullet P}{(A_4 \times A_6) \bullet P} \quad \cdots(2(n\text{-}2)+2)$

$\because O$ 、A_7 、$P_{2(n\text{-}2)+3}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_3 P_{2(n\text{-}2)+3}}{\sin P_{2(n\text{-}2)+3} A_4} = \dfrac{(A_7 \times A_3) \bullet P}{(A_4 \times A_7) \bullet P} \quad \cdots(2(n\text{-}2)+3)$

…

$\because O$ 、A_{j+4} 、$P_{2(n\text{-}2)+j}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_3 P_{2(n\text{-}2)+j}}{\sin P_{2(n\text{-}2)+j} A_4} = \dfrac{(A_{j+4} \times A_3) \bullet P}{(A_4 \times A_{j+4}) \bullet P} \quad \cdots(2(n\text{-}2)+j)$

…

$\because O$ 、A_n 、$P_{2(n\text{-}2)+(n-4)}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_3 P_{2(n\text{-}2)+(n-4)}}{\sin P_{2(n\text{-}2)+(n-4)} A_4} = \dfrac{(A_n \times A_3) \bullet P}{(A_4 \times A_n) \bullet P} \quad \cdots(2(n\text{-}2)+(n-4))$

$\because O$ 、A_1 、$P_{2(n\text{-}2)+(n-3)}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_3 P_{2(n\text{-}2)+(n-3)}}{\sin P_{2(n\text{-}2)+(n-3)} A_4} = \dfrac{(A_1 \times A_3) \bullet P}{(A_4 \times A_1) \bullet P} \quad \cdots(2(n\text{-}2)+(n-3))$

$\because O$ 、A_2 、$P_{3(n\text{-}2)}$ 、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_3 P_{3(n\text{-}2)}}{\sin P_{3(n\text{-}2)} A_4} = \dfrac{(A_2 \times A_3) \bullet P}{(A_4 \times A_2) \bullet P} \quad \cdots(3(n\text{-}2))$

(iii-4)

$\because O$、A_{k+3}、$P_{k(n-2)+1}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}{\sin P_{k(n-2)+1}A_{k+2}} = \dfrac{(A_{k+3}\times A_{k+1})\bullet P}{(A_{k+2}\times A_{k+3})\bullet P} \quad \cdots(k(n-2)+1)$

$\because O$、A_{k+4}、$P_{k(n-2)+2}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}{\sin P_{k(n-2)+2}A_{k+2}} = \dfrac{(A_{k+4}\times A_{k+1})\bullet P}{(A_{k+2}\times A_{k+4})\bullet P} \quad \cdots(k(n-2)+2)$

$\because O$、A_{k+5}、$P_{k(n-2)+3}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_{k+1}P_{k(n-2)+3}}{\sin P_{k(n-2)+3}A_{k+2}} = \dfrac{(A_{k+5}\times A_{k+1})\bullet P}{(A_{k+2}\times A_{k+5})\bullet P} \quad \cdots(k(n-2)+3)$

$\cdots$

$\because O$、$A_{(k+2)+j}$、$P_{k(n-2)+j}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_{k+1}P_{k(n-2)+j}}{\sin P_{k(n-2)+j}A_{k+2}} = \dfrac{(A_{(k+2)+j}\times A_{k+1})\bullet P}{(A_{k+2}\times A_{(k+2)+j})\bullet P} \quad \cdots(k(n-2)+j)$

$\cdots$

$\because O$、$A_{(k+2)+(n-3)}$、$P_{k(n-2)+(n-3)}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_{k+1}P_{k(n-2)+(n-3)}}{\sin P_{k(n-2)+(n-3)}A_{k+2}} = \dfrac{(A_{(k+2)+(n-3)}\times A_{k+1})\bullet P}{(A_{k+2}\times A_{(k+2)+(n-3)})\bullet P} \quad \cdots(k(n-2)+(n-3))$

$\because O$、$A_{(k+2)+(n-2)}$、$P_{(k+1)(n-2)}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}{\sin P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}} = \dfrac{(A_{(k+2)+(n-2)}\times A_{k+1})\bullet P}{(A_{k+2}\times A_{(k+2)+(n-2)})\bullet P} \quad \cdots((k+1)(n-2))$

(iii-5)

$\because O$、A_2、$P_{(n-1)(n-2)+1}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}{\sin P_{(n-1)(n-2)+1}A_1} = \dfrac{(A_2\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_2)\bullet P} \quad \cdots((n-1)(n-2)+1)$

$\because O$、A_3、$P_{(n-1)(n-2)+2}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}{\sin P_{(n-1)(n-2)+2}A_1} = \dfrac{(A_3\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_3)\bullet P} \quad \cdots((n-1)(n-2)+2)$

$\because O$、A_4、$P_{(n-1)(n-2)+3}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_nP_{(n-1)(n-2)+3}}{\sin P_{(n-1)(n-2)+3}A_1} = \dfrac{(A_4\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_4)\bullet P} \quad \cdots((n-1)(n-2)+3)$

$\cdots$

$\because O$、A_{j+1}、$P_{(n-1)(n-2)+j}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_nP_{(n-1)(n-2)+j}}{\sin P_{(n-1)(n-2)+j}A_1} = \dfrac{(A_{j+1}\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_{j+1})\bullet P} \quad \cdots((n-1)(n-2)+j)$

$\cdots$

$\because O$、A_{n-1}、$P_{n(n-2)}$、P 共平面，$\therefore \dfrac{\sin A_nP_{n(n-2)}}{\sin P_{n(n-2)}A_1} = \dfrac{(A_{n-1}\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_{n-1})\bullet P} \quad \cdots(n(n-2))$

(iii). 觀察上述 $n(n-2)$ 個式子，我們發現各個比值的分子與分母具有如下的規則：

(iv-1)　以 A_1 來看：

分子有 $(A_3\times A_1)\bullet P$、$(A_4\times A_1)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_1)\bullet P$

分母有 $(A_3\times A_1)\bullet P$、$(A_4\times A_1)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_1)\bullet P$

(iv-2)　以 A_2 來看：

分子有 $(A_4\times A_2)\bullet P$、$(A_5\times A_2)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_2)\bullet P$、$(A_1\times A_2)\bullet P$

分母有 $(A_4\times A_2)\bullet P$、$(A_5\times A_2)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_2)\bullet P$、$(A_1\times A_2)\bullet P$

(iv-3)　以 A_3 來看：

分子有 $(A_5\times A_3)\bullet P$、$(A_6\times A_3)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_3)\bullet P$、$(A_1\times A_3)\bullet P$、$(A_2\times A_3)\bullet P$

分母有 $(A_5\times A_3)\bullet P$、$(A_6\times A_3)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_3)\bullet P$、$(A_1\times A_3)\bullet P$、$(A_2\times A_3)\bullet P$

(iv-4)　以 A_{n-1} 來看：

分子有 $(A_1 \times A_{n-1}) \bullet P$ 、$(A_2 \times A_{n-1}) \bullet P$ 、⋯、$(A_{n-3} \times A_{n-1}) \bullet P$ 、$(A_{n-2} \times A_{n-1}) \bullet P$

分母有 $(A_1 \times A_{n-1}) \bullet P$ 、$(A_2 \times A_{n-1}) \bullet P$ 、⋯、$(A_{n-3} \times A_{n-1}) \bullet P$ 、$(A_{n-2} \times A_{n-1}) \bullet P$

(iv-5)　以 A_n 來看：

分子有 $(A_2 \times A_n) \bullet P$ 、$(A_3 \times A_n) \bullet P$ 、⋯、$(A_{n-2} \times A_n) \bullet P$ 、$(A_{n-1} \times A_n) \bullet P$

分母有 $(A_2 \times A_n) \bullet P$ 、$(A_3 \times A_n) \bullet P$ 、⋯、$(A_{n-2} \times A_n) \bullet P$ 、$(A_{n-1} \times A_n) \bullet P$

(iv). 我們依『球面 n 邊形為凸 n 邊形或凹 n 邊形』及『點 P 落在球面 n 邊形內部或外部』，分四類情形討論下：

(v-1) 若球面 n 邊形為凸 n 邊形且點 P 在球面 n 邊形內部，則

當 $n=3$ 時，有 3 個交點 P_i 在球面三角形的邊上，0 個在球面三角形的邊的延長線上。

當 $n=4$ 時，有 4 個交點 P_i 在球面四邊形的邊上，4 個在球面四邊形的邊的延長線上。

當 $n=5$ 時，有 5 個交點 P_i 在球面五邊形的邊上，10 個在球面五邊形的邊的延長線上。

⋯

當 $n=m$ 時，有 m 個交點在球面 n 邊形的邊上，$m(m-3)$ 個在球面 n 邊形的邊的延長線上。

因為 m 為大於或等於 3 的正整數，所以 $m(m-3)$)必為**偶數**，因此推知 $(-1)^{m(m-3)}=1$ 。

(v-2)若球面 n 邊形為凸 n 邊形且點 P 在球面 n 邊形外部，則經觀察球面凸四邊形與球面凸五邊形發現會有偶數個交點 P_i 落在球面 n 邊形的邊的延長線上。具體來說，

當 $n=3$ 時，有 1 個交點 P_i 在球面三角形的邊上，2 個在球面三角形的邊的延長線上。

當 $n=4$ 時，有 2 個交點 P_i 在球面四邊形的邊上，6 個在球面四邊形的邊的延長線上。

當 $n=5$ 時，有 3 個交點 P_i 在球面五邊形的邊上，12 個在球面五邊形的邊的延長線上。

⋯

當 $n=m$ 時，有 $(m-2)$ 個交點在球面 n 邊形的邊上，$(m\text{-}1)(m-2)$ 個在球面 n 邊形的邊的延長線上。

因為 m 為大於或等於 3 的正整數，所以 $(m\text{-}1)(m-2)$)必為**偶數**，因此推知

$(-1)^{(m-1)(m-2)}=1$ 。

(v-3)若球面 n 邊形為凹 n 邊形且點 P 在球面 n 邊形內部，則經觀察球面凸四邊形與球面凸五邊形發現會有**偶數個**交點 P_i 落在球面 n 邊形的邊的延長線上。

(v-4)若球面 n 邊形為凹 n 邊形且點 P 在球面 n 邊形外部，則經觀察球面凸四邊形與球面凸五邊形發現會有**偶數個**交點 P_i 落在球面 n 邊形的邊的延長線上。

(v). 利用上述步驟(iv)之觀察發現，將步驟(iii)中之 $n(n\text{-}2)$ 個式子全部相乘分子分母相消後可得

(vi-1)

$$\left(\frac{\sin \overline{A_1P_1}}{\sin \overline{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overline{A_1P_2}}{\sin \overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_1P_{n-2}}}{\sin \overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\sin \overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\sin \overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin \overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots\times$$

$$\left(\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times$$

$$\left(\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin \overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

(vi-2)

表 T7-1(步驟(iv)中之 n(n-2)個等式的所有分子分母相消之規則，以 n=8 為例說明如下。)

第(1)至(6)式之分子	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)	第(1)至(6)式之分子	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)
第(1)至(6)式之分母	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)	第(1)至(6)式之分母	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)
第(7)至(12)式之分子	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	(8, 2)	(1, 2)	第(7)至(12)式之分子	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	(8, 2)	(1, 2)
第(7)至(12)式之分母	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 1)	第(7)至(12)式之分母	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 1)
第(13)至(18)式之分子	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)	(8, 3)	(1, 3)	(2, 3)	第(13)至(18)式之分子	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)	(8, 3)	(1, 3)	(2, 3)
第(13)至(18)式之分母	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 1)	(4, 2)	第(13)至(18)式之分母	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 1)	(4, 2)
第(19)至(24)式之分子	(6, 4)	(7, 4)	(8, 4)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	第(19)至(24)式之分子	(6, 4)	(7, 4)	(8, 4)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)
第(19)至(24)式之分母	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	第(19)至(24)式之分母	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)
第(25)至(30)式之分子	(7, 5)	(8, 5)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	第(25)至(30)式之分子	(7, 5)	(8, 5)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)
第(25)至(30)式之分母	(6, 7)	(6, 8)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	第(25)至(30)式之分母	(6, 7)	(6, 8)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)
第(31)至(36)式之分子	(8, 6)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	第(31)至(36)式之分子	(8, 6)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)
第(31)至(36)式之分母	(7, 8)	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	第(31)至(36)式之分母	(7, 8)	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)
第(37)至(42)式之分子	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)	第(37)至(42)式之分子	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)
第(37)至(42)式之分母	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)	第(37)至(42)式之分母	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)
第(43)至(48)式之分子	(2, 8)	(3, 8)	(4, 8)	(5, 8)	(6, 8)	(7, 8)	第(43)至(48)式之分子	(2, 8)	(3, 8)	(4, 8)	(5, 8)	(6, 8)	(7, 8)
第(43)至(48)式之分母	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	第(43)至(48)式之分母	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)
為了方便起見，							上述表格以n＝8為例						
將$(A_3XA_1)\bullet P$視為(3, 1)							紅色兩欄會一對一相消						
將$(A_iXA_j)\bullet P$視為(i, j)							綠色兩欄會一對一相消						
							藍色兩欄會一對一相消						

(vi-3)

表 T7-2(步驟(iv)中之 n(n-2)個等式的所有分子分母相消之規則，以 n=9 為例說明如下。)

第(1)至(7)式之分子	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)	(9, 1)		(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)	(9, 1)
第(1)至(7)式之分母	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)	(2, 9)		(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)	(2, 9)
第(8)至(14)式之分子	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	(8, 2)	(9, 2)	(1, 2)		(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	(8, 2)	(9, 2)	(1, 2)
第(8)至(14)式之分母	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)	(3, 1)		(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)	(3, 1)
第(15)至(21)式之分子	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)	(8, 3)	(9, 3)	(1, 3)	(2, 3)		(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)	(8, 3)	(9, 3)	(1, 3)	(2, 3)
第(15)至(21)式之分母	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 9)	(4, 1)	(4, 2)		(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 9)	(4, 1)	(4, 2)
第(22)至(28)式之分子	(6, 4)	(7, 4)	(8, 4)	(9, 4)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)		(6, 4)	(7, 4)	(8, 4)	(9, 4)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)
第(22)至(28)式之分母	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 9)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)		(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 9)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)
第(29)至(35)式之分子	(7, 5)	(8, 5)	(9, 5)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)		(7, 5)	(8, 5)	(9, 5)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)
第(29)至(35)式之分母	(6, 7)	(6, 8)	(6, 9)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)		(6, 7)	(6, 8)	(6, 9)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)
第(36)至(42)式之分子	(8, 6)	(9, 6)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)		(8, 6)	(9, 6)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)
第(36)至(42)式之分母	(7, 8)	(7, 9)	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)		(7, 8)	(7, 9)	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)
第(43)至(49)式之分子	(9, 7)	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)		(9, 7)	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)
第(43)至(49)式之分母	(8, 9)	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)		(8, 9)	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)
第(50)至(56)式之分子	(1, 8)	(2, 8)	(3, 8)	(4, 8)	(5, 8)	(6, 8)	(7, 8)		(1, 8)	(2, 8)	(3, 8)	(4, 8)	(5, 8)	(6, 8)	(7, 8)
第(50)至(56)式之分母	(9, 1)	(9, 2)	(9, 3)	(9, 4)	(9, 5)	(9, 6)	(9, 7)		(9, 1)	(9, 2)	(9, 3)	(9, 4)	(9, 5)	(9, 6)	(9, 7)
第(57)至(63)式之分子	(2, 9)	(3, 9)	(4, 9)	(5, 9)	(6, 9)	(7, 9)	(8, 9)		(2, 9)	(3, 9)	(4, 9)	(5, 9)	(6, 9)	(7, 9)	(8, 9)
第(57)至(63)式之分母	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)		(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
為了方便起見，								上述表格以n=9為例							
將$(A_3XA_1)\bullet P$視為(3, 1)								紅色兩欄會一對一相消							
將$(A_iXA_j)\bullet P$視為(i, j)								綠色兩欄會一對一相消							
								藍色兩欄會一對一相消							
								黑色那一欄上半部與下半部會一對一相消							

(vi).

(vii-1)　若共點 P 在球面 n 邊形內部，則利用步驟(v-1)之結果可得

$$
\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_{n-2}}}{\sin \overrightarrow{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{2(n-2)}A_3}}\right)
$$

$$
\times\cdots\times\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times
$$

$$
\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times
$$

$$
\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{n(n-2)}A_1}}\right)
$$

$$
=(-1)^{n(n-3)}\times\left(\frac{\sin \overline{A_1P_1}}{\sin \overline{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overline{A_1P_2}}{\sin \overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_1P_{n-2}}}{\sin \overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\sin \overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\sin \overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin \overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)
$$

$$
\times\cdots\times\left(\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times
$$

$$
\left(\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times
$$

$$
\left(\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin \overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1
$$

$$
=1\times\left(\frac{\sin A_1P_1}{\sin P_1A_2}\times\frac{\sin A_1P_2}{\sin P_2A_2}\times\cdots\times\frac{\sin A_1P_{n-2}}{\sin P_{n-2}A_2}\right)\times\left(\frac{\sin A_2P_{(n-2)+1}}{\sin P_{(n-2)+1}A_3}\times\frac{\sin A_2P_{(n-2)+2}}{\sin P_{(n-2)+2}A_3}\times\cdots\times\frac{\sin A_2P_{2(n-2)}}{\sin P_{2(n-2)}A_3}\right)
$$

$$
\times\cdots\times\left(\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times
$$

$$
\left(\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times
$$

$$
\left(\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin \overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1
$$

$$
=1\times1
$$

$$
=1
$$

(vii-2)　若共點 P 在球面 n 邊形外部，則利用步驟(v-2)之結果可得

$$\left(\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_{n-2}}}{\sin \overset{\frown}{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin \overset{\frown}{P_{2(n-2)}A_3}}\right)$$

$$\times\cdots\times\left(\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin \overset{\frown}{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times$$

$$\left(\frac{\sin \overset{\frown}{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\sin \overset{\frown}{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin \overset{\frown}{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin \overset{\frown}{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin \overset{\frown}{P_{n(n-2)}A_1}}\right)$$

$$=(-1)^{(n-1)(n-2)}\times\left(\frac{\sin \overline{A_1P_1}}{\sin \overline{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overline{A_1P_2}}{\sin \overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_1P_{n-2}}}{\sin \overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\sin \overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\sin \overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin \overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)$$

$$\times\cdots\times\left(\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times$$

$$\left(\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin \overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin \overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin \overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin \overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

$=1\times1$

$=1$，故得證原命題成立。 □

伍、 研究成果

1. **(球面上線段的內分點公式**，詳見文稿中『**公式 1**』之結論)

設點 X 為單位球面 S^2 上的線段 AB 的內分點， $AB=\alpha$ ， $AX=tAB=t\alpha$ ， $XB=(1-t)AB=(1-t)\alpha$ ， $t>0$ ，其中 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑為 1，則

$$X=\frac{(\sin(1-t)\alpha)\times A+(\sin t\alpha)\times B}{\sin\alpha}\text{。}$$

2. **(球面上線段的外分點公式**，詳見文稿中『**公式 2**』之結論)

設點 X 為單位球面 S^2 上的線段 AB 的外分點， $AB=\alpha$ ， $AX=tAB=t\alpha$ ， $XB=(1+t)AB=(1+t)\alpha$ ， $t>0$ ，其中 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑為 1，則

$$X=\frac{(\sin(1-(-t))\alpha)\times A+(\sin(-t\alpha))\times B}{\sin\alpha}\text{。}$$

3. **(球面上線段的外分點公式的第二種觀點**，詳見文稿中『**Remark 1**』之結論)

設點 X 為單位球面 S^2 上的線段 AB 的外分點， $AB=\alpha$ ， $AX=tAB=t\alpha$ ，

$XB=(1+t)AB=(1+t)\alpha$ ，$t>0$，其中 S^2 的球心為 $O(0,0,0)$ 且半徑為 1，則

$X=\dfrac{\left(\sin(1-(-t))\alpha\right)\times A+\left(\sin(-t\alpha)\right)\times B}{\sin\alpha}$ ；若我們令 $u=-t$ ，則

$X=\dfrac{\left(\sin(1-u)\alpha\right)\times A+\left(\sin(u\alpha)\right)\times B}{\sin\alpha}$ ，其中 $u=-t<0$，此時我們發現該調整後的寫法與公式 1 的形式一致，唯此處的 $u<0$ 。

4. (球面三角形的 Menelaus 共線定理，詳見文稿中『**引理 1**』之結論)

設 D 、E 、F 分別為單位球面 S^2 上之球面三角形 ABC 三邊弧 BC 、弧 CA 、弧 AB 或其延長線上的相異三點，且 D 、E 、F 異於球面三角形 ABC 的三頂點與三頂點之對徑點，如下圖 L1-1 所示，則 D 、E 、F 三點共線的充要條件為 $\dfrac{\sin \overrightarrow{AF}}{\sin \overrightarrow{FB}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{BD}}{\sin \overrightarrow{DC}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{CE}}{\sin \overrightarrow{EA}}=-1$ 。

5. (球面四邊形的 Menelaus 共線定理，詳見文稿中『**定理 1**』之結論)

設 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 分別為單位球面 S^2 上之球面四邊形面 $A_1A_2A_3A_4$ 的四邊弧 A_1A_2 、弧 A_2A_3 、弧 A_3A_4 、弧 A_4A_1 或其延長線上的相異四點，且 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 異於球面四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四頂點與四頂點之對徑點，如下圖 T1-1 所示，若 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 四點共線，則 $\dfrac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{A_2P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_3}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{A_3P_3}}{\sin \overrightarrow{P_3A_4}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{A_4P_4}}{\sin \overrightarrow{P_4A_1}}=1$ 。

6. (球面五邊形的 Menelaus 共線定理，詳見文稿中『**定理 2**』之結論)

設 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 分別為單位球面 S^2 上之球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的五邊弧 A_1A_2 、弧 A_2A_3 、弧 A_3A_4 、弧 A_4A_5 、弧 A_5A_1 或其延長線上的相異五點，且 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 異於球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的五頂點與五頂點之對徑點，如下圖 T2-1 所示，若 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 五點共線，則 $\dfrac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{A_2P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_3}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{A_3P_3}}{\sin \overrightarrow{P_3A_4}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{A_4P_4}}{\sin \overrightarrow{P_4A_5}}\times\dfrac{\sin \overrightarrow{A_5P_5}}{\sin \overrightarrow{P_5A_1}}=-1$ 。

7. (球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理，詳見文稿中『**定理 3**』之結論)

設 P_1 、P_2 、$\cdots$ 、P_n 分別為單位球面 S^2 上之球面 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 邊弧 A_1A_2 、弧 A_2A_3 、弧 A_3A_4 、$\cdots$ 、弧 $A_{n-1}A_n$ 、弧 A_nA_1 或其延長線上的相異 n 點，且 P_1 、P_2 、$\cdots$ 、P_n 異於球面 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 個頂點與 n 個頂點之對徑點，如下圖 T3-1 與 T3-2 所示，若 P_1 、P_2 、$\cdots$ 、P_n 等 n 點共線，則

$$\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_3}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_3P_3}}{\sin \overrightarrow{P_3A_4}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_4P_4}}{\sin \overrightarrow{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin \overrightarrow{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_n}}{\sin \overrightarrow{P_nA_1}}=(-1)^n \text{ 。}$$

8. (球面三角形的 Ceva 共點定理，詳見文稿中『**定理 4**』之結論)

設 D、E、F 分別為單位球面 S^2 上的球面三角形 ABC 的三邊弧 BC 、弧 CA 與弧 AB 或其延長線上的相異三點，且 D 、E 、F 異於球面三角形 ABC 的三頂點與三頂點之對徑點，如下圖 T4-1 所示，則弧 AD 、弧 BE 與弧 CF 三弧共交點 P 的充要條件為

$$\frac{\sin \overrightarrow{AF}}{\sin \overrightarrow{FB}}\times\frac{\sin \overrightarrow{BD}}{\sin \overrightarrow{DC}}\times\frac{\sin \overrightarrow{CE}}{\sin \overrightarrow{EA}}=1 \text{ 。}$$

9. (球面四邊形的 Ceva 共點定理，詳見文稿中『**定理 5**』之結論)

假設單位球面 S^2 上有一球面四邊形 $ABCD$ ，且 P 點為球面 S^2 上一定點， P 點不落在球面四邊形 $ABCD$ 四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線 AC 與 BD 所在的直線上，且

直線 CP 、 DP 與直線 AB 分別交於 P_1 與 P_2，直線 DP 、 AP 與直線 BC 分別交於 P_3 與 P_4，直線 AP 、 BP 與直線 CD 分別交於 P_5 與 P_6，直線 BP 、 CP 與直線 DA 分別交於 P_7 與 P_8， 如下圖 T5-1 所示，則

$$\frac{\sin \overrightarrow{AP_1}}{\sin \overrightarrow{P_1B}}\times\frac{\sin \overrightarrow{AP_2}}{\sin \overrightarrow{P_2B}}\times\frac{\sin \overrightarrow{BP_3}}{\sin \overrightarrow{P_3C}}\times\frac{\sin \overrightarrow{BP_4}}{\sin \overrightarrow{P_4C}}\times\frac{\sin \overrightarrow{CP_5}}{\sin \overrightarrow{P_5D}}\times\frac{\sin \overrightarrow{CP_6}}{\sin \overrightarrow{P_6D}}\times\frac{\sin \overrightarrow{DP_7}}{\sin \overrightarrow{P_7A}}\times\frac{\sin \overrightarrow{DP_8}}{\sin \overrightarrow{P_8A}}=1\text{ 。}$$

10. (球面五邊形的 Ceva 共點定理，詳見文稿中『**定理 6**』之結論)
假設單位球面 S^2 上有一球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，且 P 點為球面 S^2 上一定點， P 點不落在球面五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 五邊所在的直線上，亦不落在其對角線所在的直線上，且直線 A_3P 、 A_4P 、 A_5P 與直線 A_1A_2 分別交於 P_1 、 P_2 與 P_3，直線 A_4P 、 A_5P 、 A_1P 與直線 A_2A_3 分別交於 P_4 、 P_5 與 P_6，直線 A_5P 、 A_1P 、 A_2P 與直線 A_3A_4 分別交於 P_7 、 P_8 與 P_9，直線 A_1P 、 A_2P 、 A_3P 與直線 A_4A_5 分別交於 P_{10} 、 P_{11} 與 P_{12}，直線 A_2P 、 A_3P 、 A_4P 與直線 A_5A_1 分別交於 P_{13} 、 P_{14} 與 P_{15}， 如下圖 T6-1 所示，則

$$\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_2}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_3}}{\sin \overrightarrow{P_3A_2}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_4}}{\sin \overrightarrow{P_4A_3}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_5}}{\sin \overrightarrow{P_5A_3}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_6}}{\sin \overrightarrow{P_6A_3}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_3P_7}}{\sin \overrightarrow{P_7A_4}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_3P_8}}{\sin \overrightarrow{P_8A_4}}\times$$
$$\frac{\sin \overrightarrow{A_3P_9}}{\sin \overrightarrow{P_9A_4}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_4P_{10}}}{\sin \overrightarrow{P_{10}A_5}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_4P_{11}}}{\sin \overrightarrow{P_{11}A_5}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_4P_{12}}}{\sin \overrightarrow{P_{12}A_5}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_5P_{13}}}{\sin \overrightarrow{P_{13}A_1}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_5P_{14}}}{\sin \overrightarrow{P_{14}A_1}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_5P_{15}}}{\sin \overrightarrow{P_{15}A_1}}=1\text{ 。}$$

11. (球面 n 邊形的 Ceva 共點定理，詳見文稿中『**定理 7**』之結論)
假設單位球面 S^2 上有一球面 n 邊形 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_n$，且 P 點為球面 S^2 上一定點， P 點不落在球面 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 邊所在直線上，亦不落在其對角線所在的直線上，且直線 A_3P 、 A_4P 、 $\cdots$ 、 A_nP 與直線 A_1A_2 分別交於 P_1 、 P_2 、 $\cdots$ 、 P_{n-2}；直線 A_4P 、 A_5P 、 $\cdots$ 、 A_nP 、 A_1P 與直線 A_2A_3 分別交於 $P_{(n-2)+1}$ 、 $P_{(n-2)+2}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{2(n-2)}$；直線 A_5P 、 A_6P 、 $\cdots$ 、 A_nP 、 A_1P 、 A_2P 與直線 A_3A_4 分別交於 $P_{2(n-2)+1}$ 、 $P_{2(n-2)+2}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{3(n-2)}$，…；直線 $A_{k+3}P$ 、 $A_{k+4}P$ 、 … 、 A_nP 、 A_1P 、 A_2P 、 … 、 A_kP 與直線 $A_{k+1}A_{k+2}$ 分別交於 $P_{k(n-2)+1}$ 、 $P_{k(n-2)+2}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{(k+1)(n-2)}$；…；直線 A_2P 、 A_3P 、 … 、 $A_{n-2}P$ 、 $A_{n-1}P$ 與直線 A_nA_1 分別交於 $P_{(n-1)(n-2)+1}$ 、 $P_{(n-1)(n-2)+2}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{n(n-2)}$，則

$$\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_1}}{\sin \overrightarrow{P_1A_2}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_2}}{\sin \overrightarrow{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_{n-2}}}{\sin \overrightarrow{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots\times$$
$$\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{k+1}P_{(k+1)(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{(k+1)(n-2)}A_{k+2}}}\right)\times\cdots\times$$

$$\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)(n-2)+1}A_n}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-2)(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-2)(n-2)+2}A_n}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_{(n-1)(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)}A_n}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin \overrightarrow{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin \overrightarrow{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

(亦即

$$\prod_{i=1}^{n-2}\frac{\sin \overrightarrow{A_1P_i}}{\sin \overrightarrow{P_iA_2}}\times\prod_{i=(n-2)+1}^{2(n-2)}\frac{\sin \overrightarrow{A_2P_i}}{\sin \overrightarrow{P_iA_3}}\times\cdots\times\prod_{i=k(n-2)+1}^{(k+1)(n-2)}\frac{\sin \overrightarrow{A_{k+1}P_i}}{\sin \overrightarrow{P_iA_{k+2}}}\times\cdots\times\prod_{i=(n-2)(n-2)+1}^{(n-1)(n-2)}\frac{\sin \overrightarrow{A_{n-1}P_i}}{\sin \overrightarrow{P_iA_n}}\times\prod_{i=(n-1)(n-2)+1}^{n(n-2)}\frac{\sin \overrightarrow{A_nP_i}}{\sin \overrightarrow{P_iA_1}}=1)$$

，其中對於 $0\le k\le n-1$，$1\le j\le n-2$，滿足 $P_{k(n-2)+j}$ 落在直線 $A_{k+1}A_{k+2}$ 上，亦即直線 $A_{k+1}A_{k+2}$ 上有 $(n-2)$ 個點 $P_{k(n-2)+1}$、$P_{k(n-2)+2}$、…、$P_{(k+1)(n-2)}$。

陸、 結論與展望

因為高一時接觸了 Geogebra 這套動態幾何軟體，從而重新體驗了一些既有的幾何結果，在嘗試了許多靜態與動態幾何圖形的繪製之後，我們針對平面上三角形的『Menelaus 共線定理』與『Ceva 共點定理』產生興趣，並將之推廣到球面上。

我們先從球面三角形開始著手，接著考慮球面四邊形與球面五邊形的情形，最後成功地找到『球面 n 邊形的 Menelaus 共線定理』與『球面 n 邊形的 Ceva 共點定理』的一般化形式，並且給予嚴謹地證明。證明過程中，耗費了許多心力，因為有一些正規課程內容外的題材必須利用課餘的時間去閱讀與消化，然後才能在證明過程中產生實質的助益，像是球面上線段的內分點與外分點公式，在一開始時，就花去許多時間去探索與理解，因為它必須同時架構在角度的弧度概念與三角函數上，又必須認識球面上兩點間的最短距離與大圓的概念；又如空間中向量的內積與外積的交互運用；此外，為了讓整篇文章寫起來更加地完整且精煉，還定義了『弧向量』的概念，並且去探討兩個弧向量的正弦值的比值求法等，這些陌生的題材與新創的概念，都是在經過一段時間的摸索之後，才比較熟悉，並且成為寫這篇文章的過程中的重要工具，很慶幸最後可以完成一開始時預設的目標，成功地找到並證明自己期待的結果。

展望未來，希望可以去探討更多與球面多邊形有關的幾何性質，衷心企盼可以有令人驚嘆的新發現。

柒、 參考資料

[1]. 許喬婷(民 102)，孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣。中華民國第 53 屆中小學科展作品，國立臺灣科學教育館。
網址:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/53/pdf/040415.pdf

[2]. 左銓如‧季素月編著（1998），初等幾何研究(288 頁、304 頁與 390 頁)。臺北市：九章出版社。

[3]. 高中數學第一冊至第四冊，龍騰出版社，2020 年至 2022 年。

【評語】050415

本作品將平面上三角形的 Menelaus 共線定理與 Ceva 共點定理，並將之推廣到球面上，並推廣到球面ｎ 邊形。作者仔細地討論了球面幾何的基礎，不過這方面是相對古典的題材。此篇作品內容有趣且作者努力將文章寫得完整且精簡，是值得鼓勵的作品。

作品簡報

第62屆全國中小學科展競賽

- 作品名稱：球面n邊形的孟氏共線與西瓦共點定理
- 科　　別：數學科
- 組　　別：高級中等學校組
- 關 鍵 詞： Menelaus' theorem、Ceva's theorem、球面n邊形

摘要

本文主要在探討平面幾何學中的兩個重要結果—三角形中的『Menelaus定理』與『Ceva定理』推廣到任意的『球面n邊形』的相對應結果，對於任意的球面n邊形，我們分別找到了『球面n邊形的Menelaus共線定理』與『球面n邊形的Ceva共點定理』的一般化結果。

研究目的

一、『球面n邊形的Menelaus共線定理』的一般化形式的探尋與證明。

二、『球面n邊形的Ceva共點定理』的一般化形式的探尋與證明。

預備知識：

定義1：(單位球面的定義)

空間中，單位球面S^2是球心為$O(0,0,0)$且半徑為1的球面，其方程式為$S^2: x^2+y^2+z^2=1$。

(註：本篇文章中所提到的球面，除非特別說明，否則均預設為單位球面。)

預備知識：

定義2：(單位球面上的大圓、兩點距離、直線、線段與對徑點的定義)

空間中，已知單位球面$S^2: x^2+y^2+z^2=1$，又$A(a_1,a_2,a_3)$與$B(b_1,b_2,b_3)$為S^2上給定的相異兩點，則

(1) 通過球心$O(0,0,0)$、A與B三點的平面與S^2之交集為一大圓Γ；

(2) A與B兩點的球面距離$\overset{\frown}{AB}$規定為『大圓Γ上的劣弧$\overset{\frown}{AB}$的長度』，則$\overset{\frown}{AB}\in(0,\pi]$。

(3) 球面S^2上通過A與B兩點的直線即指上述(1)中的大圓Γ。

(4) 球面S^2上通過A與B兩點的線段$\overset{\frown}{AB}$即指上述(2)中之『大圓Γ上的劣弧$\overset{\frown}{AB}$』，其長度即定義為『大圓Γ上的劣弧$\overset{\frown}{AB}$的長度』。

(5) 若P與Q為球面S^2上的兩相異點，且$\overline{PQ}$為球面S^2之一直徑的兩端點，則稱『P為Q之對徑點』且『Q為P之對徑點』，亦即『P與Q互為對徑點』。

定義3：(弧向量及兩個弧向量之正弦值之比值求法)

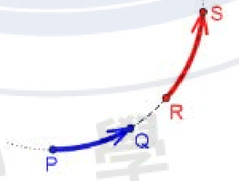
(1) 我們以$\overset{\curvearrowright}{PQ}$表示以$P$點為起始點且$Q$點為終點沿著$\overset{\frown}{PQ}$繞行的弧向量，讀作『弧向量$PQ$』或『$PQ$弧向量』。

(2) 已知$\overset{\curvearrowright}{PQ}$與$\overset{\curvearrowright}{RS}$為落在單位球面$S^2$之同一個大圓上的兩個弧向量，當『$\overset{\curvearrowright}{PQ}$與$\overset{\curvearrowright}{RS}$同為逆時針繞行』或『$\overset{\curvearrowright}{PQ}$與$\overset{\curvearrowright}{RS}$同為順時針繞行』時，則我們稱$\overset{\curvearrowright}{PQ}$與$\overset{\curvearrowright}{RS}$同方向(或說同向)，如下圖D1-1與圖D1-2所示。

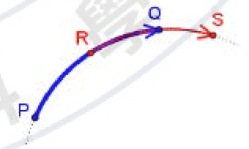
(3) 已知$\overset{\curvearrowright}{PQ}$與$\overset{\curvearrowright}{RS}$為落在單位球面$S^2$之同一個大圓上的兩個弧向量，當『$\overset{\curvearrowright}{PQ}$與$\overset{\curvearrowright}{RS}$有一個是逆時針繞行且另一個是順時針繞行』時，則我們稱$\overset{\curvearrowright}{PQ}$與$\overset{\curvearrowright}{RS}$反方向(或說反向)，如下圖D1-3與圖D1-4所示。

(4) 我們規定

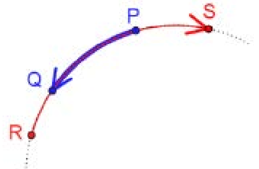
$$\frac{\sin\overset{\curvearrowright}{PQ}}{\sin\overset{\curvearrowright}{RS}}=\begin{cases}\dfrac{\sin\overset{\frown}{PQ}}{\sin\overset{\frown}{RS}}, & \text{當 }\overset{\curvearrowright}{PQ}\text{ 與 }\overset{\curvearrowright}{RS}\text{ 同方向時}\\ -\dfrac{\sin\overset{\frown}{PQ}}{\sin\overset{\frown}{RS}}, & \text{當 }\overset{\curvearrowright}{PQ}\text{ 與 }\overset{\curvearrowright}{RS}\text{ 反方向時}\end{cases}$$



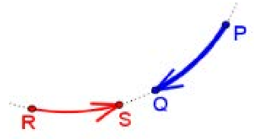
圖D1-1



圖D1-2



圖D1-3

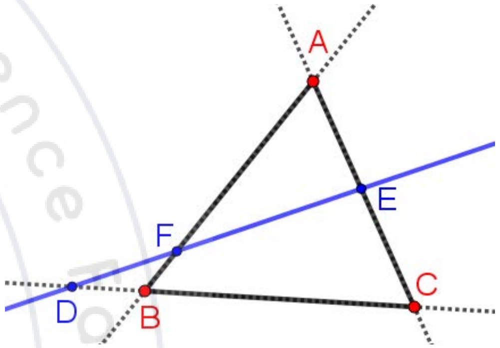


圖D1-4

預備知識：

引理0-1：(平面上三角形的Menelaus共線定理)(如下圖L0-1-1)

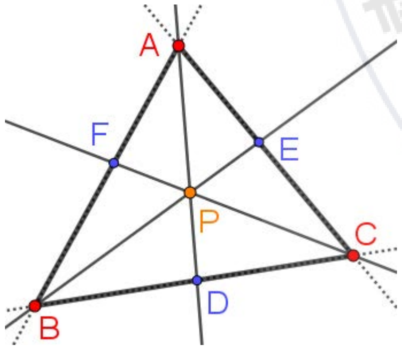
假設平面上有一三角形ABC，又D、E與F分別為$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$上一點，滿足D、E與F三點共線，且D、E與F三點不與三角形ABC三頂點重合，則$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。



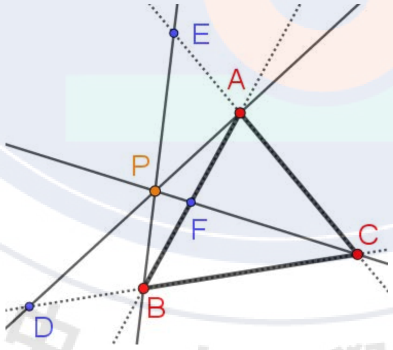
圖L0-1-1

引理0-2：(平面上三角形的Ceva共點定理)(如下圖L0-2-1、L0-2-2、L0-2-3)

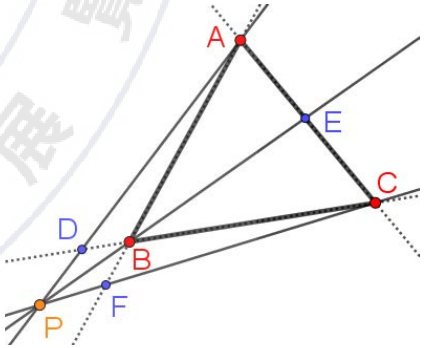
已知平面上有一ΔABC，D、E與F分別為$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$上一點，且D、E與F異於ΔABC三頂點，若$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$與$\overleftrightarrow{CF}$三直線共交點P，則$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。



圖L0-2-1



圖L0-2-2

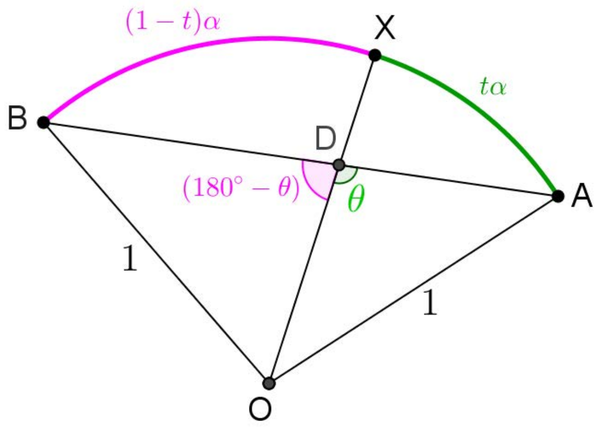


圖L0-2-3

預備知識：

公式1：(球面上線段的內分點公式)(參考資料[2]之第288頁)

設點X為單位球面S^2的線段$\overset{\frown}{AB}$的內分點，$\overset{\frown}{AB}=\alpha$，$\overset{\frown}{AX}=t\,\overset{\frown}{AB}=t\alpha$，$\overset{\frown}{XB}=(1-t)\,\overset{\frown}{AB}=(1-t)\alpha$，$0<t<1$，其中$S^2$的球心為$O(0,0,0)$且半徑為1，如圖F1-1，則$X=\dfrac{(\sin(1-t)\alpha)\times A+(\sin t\alpha)\times B}{\sin\alpha}$。



圖F1-1

引理1：(球面三角形的Menelaus共線定理)

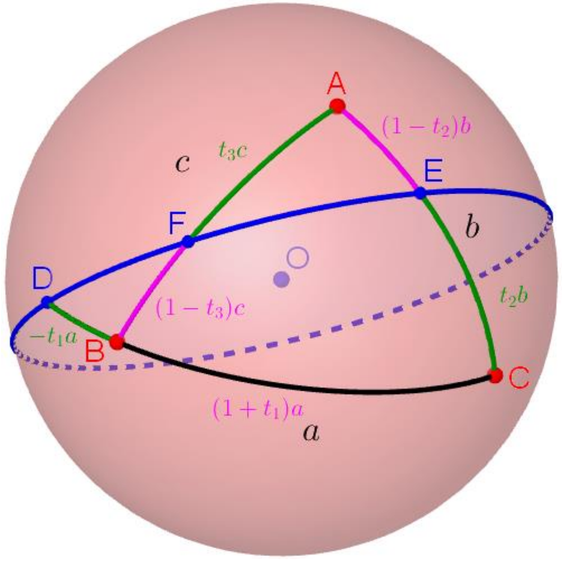
設D、E、F分別為單位球面S^2上之球面三角形ABC三邊弧$\overset{\frown}{BC}$、弧$\overset{\frown}{CA}$、弧$\overset{\frown}{AB}$或其延長線上的相異三點，且D、E、F異於球面三角形ABC的三頂點與三頂點之對徑點，如圖L1-2所示，則D、E、F三點共線的**充要條件**為$\dfrac{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{AF}}}{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{FB}}}\times\dfrac{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{BD}}}{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{DC}}}\times\dfrac{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{CE}}}{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{EA}}}=-1$。

證明：(i).利用球面上線段的內分點與外分點公式寫出D、E、F三點的座標；

(ii).接著利用D、E與F三點共線得知O、D、E與F四點共平面，因此$(\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE})\perp\overrightarrow{OF}$，

所以$(\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE})\bullet\overrightarrow{OF}=0$，亦即$(D\times E)\bullet F=0$，從而可以推導出$\dfrac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\overset{\frown}{FB}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{DC}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}}=1$；

(iii).因為D為$\overset{\frown}{BC}$之外分點，所以$\overrightarrow{BD}$與$\overrightarrow{DC}$反向，因此$\dfrac{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{AF}}}{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{FB}}}\times\dfrac{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{BD}}}{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{DC}}}\times\dfrac{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{CE}}}{\sin\overrightarrow{\overset{\frown}{EA}}}=\left(\dfrac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\overset{\frown}{FB}}\right)\times\left(-\dfrac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{DC}}\right)\times\left(\dfrac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}}\right)=-1$。



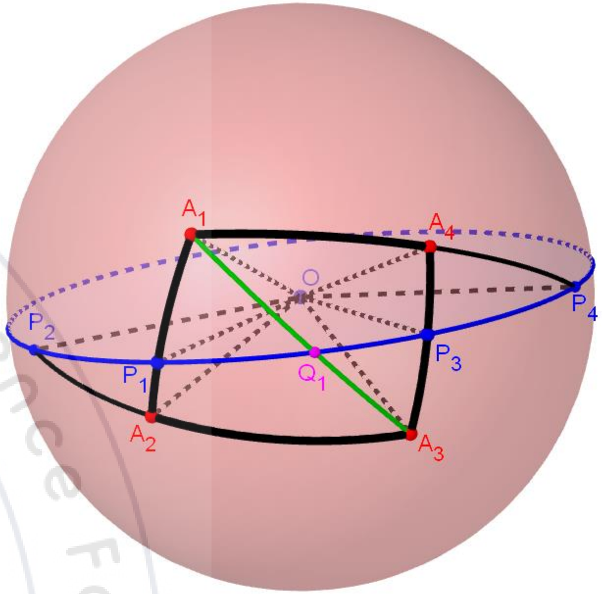
圖L1-2

定理1：（球面四邊形的Menelaus共線定理）

設P_1、P_2、P_3、P_4分別為單位球面S^2上之球面四邊形面$A_1A_2A_3A_4$的四邊弧$\overset{\frown}{A_1A_2}$、弧$\overset{\frown}{A_2A_3}$、弧$\overset{\frown}{A_3A_4}$、弧$\overset{\frown}{A_4A_1}$或其延長線上的相異四點，且P_1、P_2、P_3、P_4異於球面四邊形$A_1A_2A_3A_4$的四頂點與四頂點之對徑點，如圖T1-2所示，若P_1、P_2、P_3、P_4四點共線，

則 $\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_4}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin\overset{\frown}{P_4A_1}}=1$。

證明：(i) 作弧$\overset{\frown}{A_1A_3}$將$A_1A_2A_3A_4$分割成兩個球面三角形$A_1A_2A_3$與$A_1A_3A_4$；
(ii) 再利用『引理1』之結果可得兩個等式，將此兩等式相乘即可得證原命題成立。



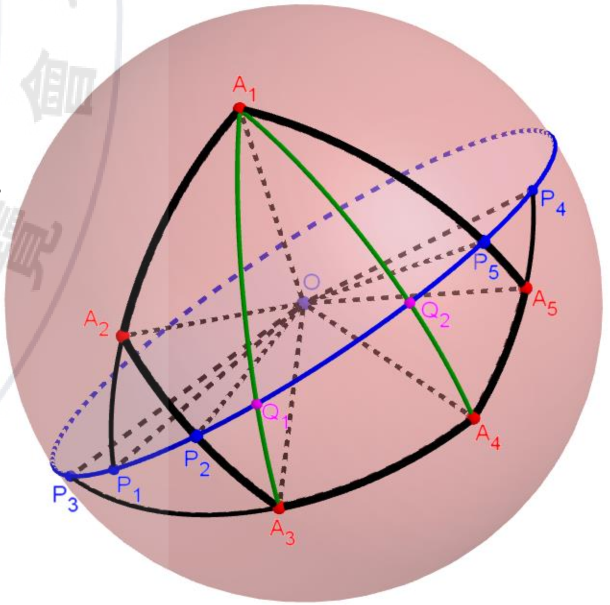
圖T1-2

定理2：（球面五邊形的Menelaus共線定理）

設P_1、P_2、P_3、P_4、P_5分別為單位球面S^2上之球面五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的五邊弧$\overset{\frown}{A_1A_2}$、弧$\overset{\frown}{A_2A_3}$、弧$\overset{\frown}{A_3A_4}$、弧$\overset{\frown}{A_4A_5}$、弧$\overset{\frown}{A_5A_1}$或其延長線上的相異五點，且P_1、P_2、P_3、P_4、P_5異於球面五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的五頂點與五頂點之對徑點，如圖T2-2所示，若P_1、P_2、P_3、P_4、P_5五點共線，

則 $\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_4}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin\overset{\frown}{P_4A_5}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_5P_5}}{\sin\overset{\frown}{P_5A_1}}=-1$。

證明：(i) 作弧$\overset{\frown}{A_1A_3}$與$\overset{\frown}{A_1A_4}$將$A_1A_2A_3A_4A_5$分割成三個球面三角形$A_1A_2A_3$、$A_1A_3A_4$與$A_1A_4A_5$；
(ii) 再利用『引理1』之結果可得三個等式，將此三等式相乘即可得證原命題成立。



圖T2-2

定理3：（球面n邊形的Menelaus共線定理）

設P_1、P_2、⋯、P_n分別為單位球面S^2上之球面n邊形$A_1A_2\cdots A_n$的n邊弧$\overset{\frown}{A_1A_2}$、弧$\overset{\frown}{A_2A_3}$、弧$\overset{\frown}{A_3A_4}$、⋯、弧$\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$、弧$\overset{\frown}{A_nA_1}$或其延長線上的相異$n$點，且$P_1$、$P_2$、⋯、$P_n$異於球面$n$邊形$A_1A_2\cdots A_n$的$n$個頂點與$n$個頂點之對徑點，如圖T3-1與T3-2所示，若$P_1$、$P_2$、⋯、$P_n$等$n$點共線，則

$$\frac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_4}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_4P_4}}{\sin\overset{\frown}{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_{n-1}P_{n-1}}}{\sin\overset{\frown}{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_nP_n}}{\sin\overset{\frown}{P_nA_1}}=(-1)^n。$$

證明：方法(一)：將球面n邊形$A_1A_2\cdots A_n$分割成$(n-2)$個球面三角形，再利用『引理1』之結果可得$(n-2)$個等式，將此$(n-2)$個等式相乘，消去一些項之後即可證得原命題成立。

方法(二)：數學歸納法

(i) 當$n=3$時，由『引理1』得知$\frac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_1}}=-1$，故此時原命題成立。

(ii) 假設$n=k$時，原命題成立，亦即$\frac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin\overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin\overset{\frown}{P_kA_1}}=(-1)^k$

(iii) 當$n=k+1$時，

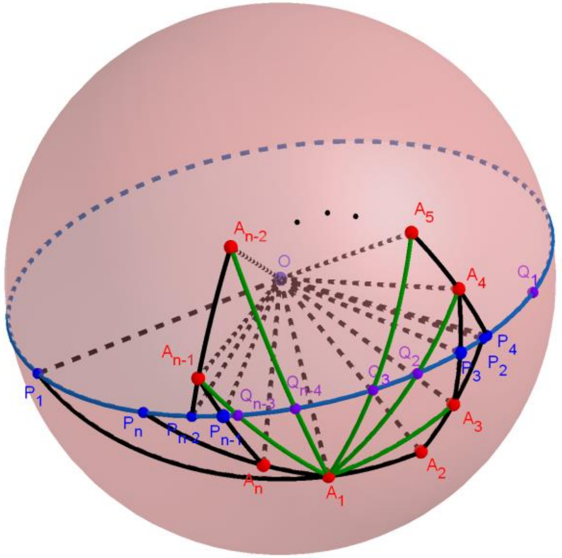
假設P_1、P_2、⋯、P_{k+1}等$k+1$點共直線L（即通過P_1、P_2、⋯、P_{k+1}等$k+1$點的大圓弧），

若L與弧$\overset{\frown}{A_kA_1}$或其延長線相交於一點Q_k，則$\frac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin\overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin\overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}$

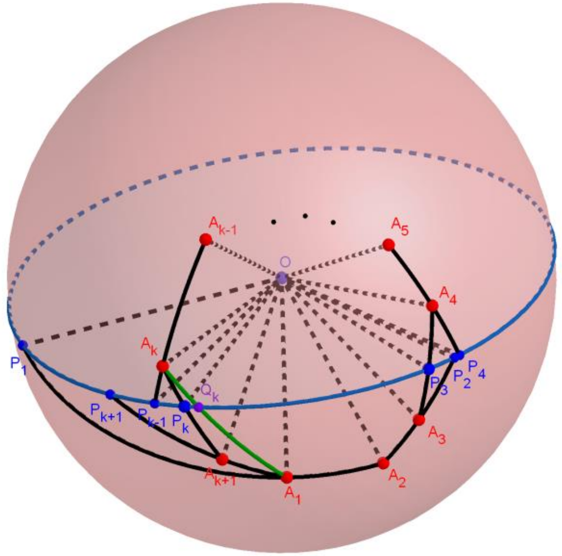
$$=\frac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin\overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_kQ_k}}{\sin\overset{\frown}{Q_kA_1}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_1Q_k}}{\sin\overset{\frown}{Q_kA_k}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin\overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin\overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\left(\frac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_2P_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2A_3}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_3P_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3A_4}}\times\cdots\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_{k-1}P_{k-1}}}{\sin\overset{\frown}{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_kQ_k}}{\sin\overset{\frown}{Q_kA_1}}\right)\times\left(\frac{\sin\overset{\frown}{A_1Q_k}}{\sin\overset{\frown}{Q_kA_k}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_kP_k}}{\sin\overset{\frown}{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin\overset{\frown}{P_{k+1}A_1}}\right)$$

$=(-1)^k\times(-1)=(-1)^{k+1}$，故當$n=k+1$時，原命題亦成立，所以由數學歸納法得證原命題成立。



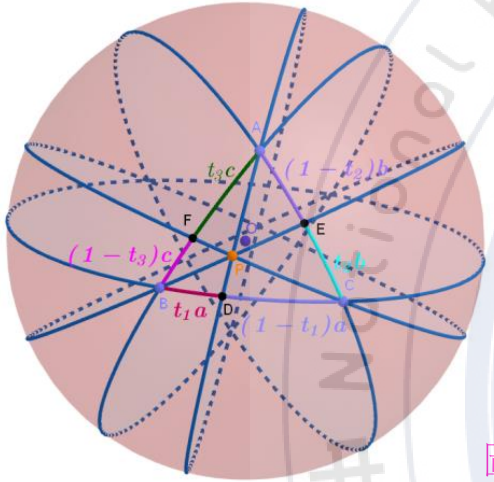
圖T3-1



圖T3-2

定理4：（球面三角形的Ceva共點定理）

設D、E、F分別為單位球面S^2上的球面三角形ABC的三邊弧$\overset{\frown}{BC}$、弧$\overset{\frown}{CA}$與弧$\overset{\frown}{AB}$或其延長線上的相異三點，且D、E、F異於球面三角形ABC的三頂點與三頂點之對徑點，如下圖T4-2所示，則弧$\overset{\frown}{AD}$、弧$\overset{\frown}{BE}$與弧$\overset{\frown}{CF}$三弧共交點P的充要條件為$\dfrac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\overset{\frown}{FB}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{DC}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}}=1$。



圖T4-2

證明：情形(一)：當D、E與F分別為$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$與$\overset{\frown}{AB}$之內分點時，則(i)令$\overset{\frown}{BC}=a$，$\overset{\frown}{CA}=b$，$\overset{\frown}{AB}=c$，$\overset{\frown}{BD}=(t_1a)$，$\overset{\frown}{CE}=(t_2b)$，$\overset{\frown}{AF}=(t_3c)$，其中$0<t_1<1$，$0<t_2<1$，$0<t_3<1$，則可推知$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BD}=(1-t_1)a$，$\overset{\frown}{EA}=\overset{\frown}{CA}-\overset{\frown}{CE}=(1-t_2)b$，$\overset{\frown}{FB}=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AF}=(1-t_3)c$。

(ii)由球面上線段的內分點公式得知，

$$D=\frac{(\sin(1-t_1)a)\times B+(\sin(t_1a))\times C}{\sin a}$$

$$E=\frac{(\sin(1-t_2)b)\times C+(\sin(t_2b))\times A}{\sin b}$$

$$F=\frac{(\sin(1-t_3)c)\times A+(\sin(t_3c))\times B}{\sin c}$$

(iii) $\because O$、C、F、P共平面，$\therefore(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OF})\bullet\overrightarrow{OP}=0$，

$\Rightarrow(C\times F)\bullet P=0$

$\Rightarrow\left(C\times\dfrac{(\sin(1-t_3)c)\times A+(\sin(t_3c))\times B}{\sin c}\right)\bullet P=0$

$\Rightarrow\left(C\times\dfrac{\sin(\overset{\frown}{FB})\times A+\sin(\overset{\frown}{AF})\times B}{\sin c}\right)\bullet P=0$

$\Rightarrow\dfrac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\overset{\frown}{FB}}=\dfrac{(C\times A)\bullet P}{(B\times C)\bullet P}$

(iv) $\because O$、A、D、P共平面，仿照步驟(iii)可得$\dfrac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{DC}}=\dfrac{(A\times B)\bullet P}{(C\times A)\bullet P}$；

(v) $\because O$、B、E、P共平面，仿照步驟(iii)可得$\dfrac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}}=\dfrac{(B\times C)\bullet P}{(A\times B)\bullet P}$；

(vi)綜合步驟(iii)、(iv)與(v)之結果可得$\dfrac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\overset{\frown}{FB}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{DC}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}}$

$=\dfrac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\overset{\frown}{FB}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{DC}}\times\dfrac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}}=\dfrac{(C\times A)\bullet P}{(B\times C)\bullet P}\times\dfrac{(A\times B)\bullet P}{(C\times A)\bullet P}\times\dfrac{(B\times C)\bullet P}{(A\times B)\bullet P}=1$，故得證此時原命題成立。

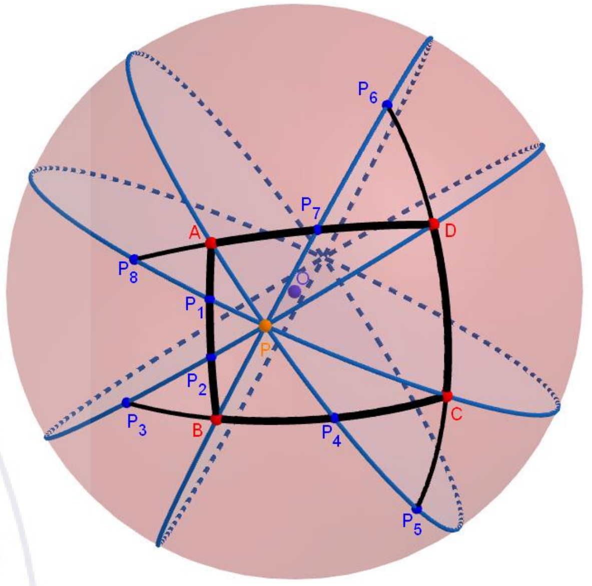
情形(二)：當D為$\overset{\frown}{BC}$之內分點、E與F分別為$\overset{\frown}{CA}$與$\overset{\frown}{AB}$之外分點時，此時同理可證原命題成立。

定理5：(球面四邊形的Ceva共點定理)

假設單位球面S^2上有一球面四邊形$ABCD$，且P點為球面S^2上一定點，P點不落在球面四邊形$ABCD$四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線$\overset{\frown}{AC}$與$\overset{\frown}{BD}$所在的直線上，且直線$\overset{\frown}{CP}$、$\overset{\frown}{DP}$ 與直線$\overset{\frown}{AB}$分別交於P_1與P_2，直線$\overset{\frown}{DP}$、$\overset{\frown}{AP}$ 與直線$\overset{\frown}{BC}$分別交於P_3與P_4，直線$\overset{\frown}{AP}$、$\overset{\frown}{BP}$ 與直線$\overset{\frown}{CD}$分別交於P_5與P_6，直線$\overset{\frown}{BP}$、$\overset{\frown}{CP}$ 與直線$\overset{\frown}{DA}$分別交於P_7與P_8，如圖T5-1所示，

則 $\frac{\sin\overset{\frown}{AP_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1B}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{AP_2}}{\sin\overset{\frown}{P_2B}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{BP_3}}{\sin\overset{\frown}{P_3C}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{BP_4}}{\sin\overset{\frown}{P_4C}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{CP_5}}{\sin\overset{\frown}{P_5D}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{CP_6}}{\sin\overset{\frown}{P_6D}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{DP_7}}{\sin\overset{\frown}{P_7A}}\times\frac{\sin\overset{\frown}{DP_8}}{\sin\overset{\frown}{P_8A}}=1$。

證明：(i)仿照『定理4』之證明方法可得證原命題成立。



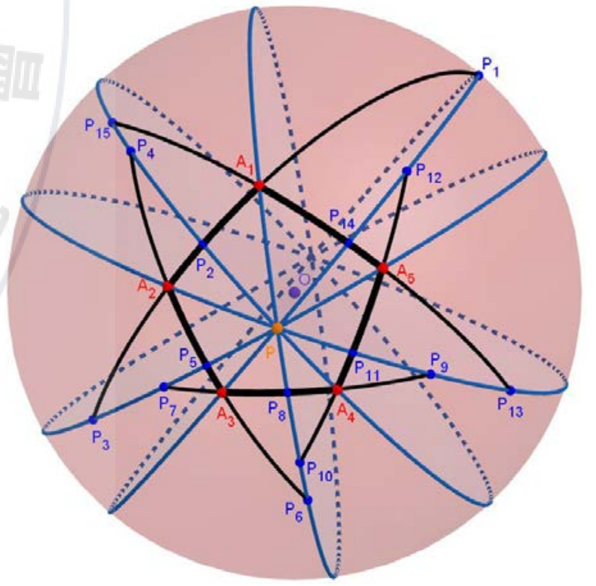
圖T5-1

定理6：(球面五邊形的Ceva共點定理)

假設單位球面S^2上有一球面五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$，且P點為球面S^2上一定點，P點不落在球面五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$五邊所在的直線上，亦不落在其對角線所在的直線上，且直線$\overset{\frown}{A_3P}$、$\overset{\frown}{A_4P}$、$\overset{\frown}{A_5P}$與直線$\overset{\frown}{A_1A_2}$分別交於P_1、P_2與P_3，直線$\overset{\frown}{A_4P}$、$\overset{\frown}{A_5P}$、$\overset{\frown}{A_1P}$與直線$\overset{\frown}{A_2A_3}$分別交於P_4、P_5與P_6，直線$\overset{\frown}{A_5P}$、$\overset{\frown}{A_1P}$、$\overset{\frown}{A_2P}$與直線$\overset{\frown}{A_3A_4}$分別交於P_7、P_8與P_9，直線$\overset{\frown}{A_1P}$、$\overset{\frown}{A_2P}$、$\overset{\frown}{A_3P}$與直線$\overset{\frown}{A_4A_5}$分別交於P_{10}、P_{11}與P_{12}，直線$\overset{\frown}{A_2P}$、$\overset{\frown}{A_3P}$、$\overset{\frown}{A_4P}$與直線$\overset{\frown}{A_5A_1}$分別交於P_{13}、P_{14}與P_{15}， 如圖T6-1所示，

則 $\prod_{i=1}^{3}\frac{\sin\overset{\frown}{A_1P_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_2}}\times\prod_{i=4}^{6}\frac{\sin\overset{\frown}{A_2P_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_3}}\times\prod_{i=7}^{9}\frac{\sin\overset{\frown}{A_3P_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_4}}\times\prod_{i=10}^{12}\frac{\sin\overset{\frown}{A_4P_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_5}}\times\prod_{i=13}^{15}\frac{\sin\overset{\frown}{A_5P_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_1}}=1$。

證明：(i)仿照『定理4』之證明方法可得證原命題成立。



圖T6-1

定理7：(球面n邊形的Ceva共點定理)

假設單位球面S^2上有一球面n邊形$\Gamma: A_1A_2\cdots A_n$，且P點為球面S^2上一定點，P點不落在球面n邊形$A_1A_2\cdots A_n$的n邊所在直線上，亦不落在其對角線所在的直線上，且直線$\overset{\frown}{A_3P}$、$\overset{\frown}{A_4P}$、$\cdots$、$\overset{\frown}{A_nP}$與直線$\overset{\frown}{A_1A_2}$分別交於P_1、P_2、$\cdots$、P_{n-2}；直線$\overset{\frown}{A_4P}$、$\overset{\frown}{A_5P}$、$\cdots$、$\overset{\frown}{A_nP}$、$\overset{\frown}{A_1P}$與直線$\overset{\frown}{A_2A_3}$分別交於$P_{(n-2)+1}$、$P_{(n-2)+2}$、$\cdots$、$P_{2(n-2)}$；直線$\overset{\frown}{A_5P}$、$\overset{\frown}{A_6P}$、$\cdots$、$\overset{\frown}{A_nP}$、$\overset{\frown}{A_1P}$、$\overset{\frown}{A_2P}$與直線$\overset{\frown}{A_3A_4}$分別交於$P_{2(n-2)+1}$、$P_{2(n-2)+2}$、$\cdots$、$P_{3(n-2)}$，$\cdots$；直線$\overset{\frown}{A_{k+3}P}$、$\overset{\frown}{A_{k+4}P}$、$\cdots$、$\overset{\frown}{A_nP}$、$\overset{\frown}{A_1P}$、$\overset{\frown}{A_2P}$、$\cdots$、$\overset{\frown}{A_kP}$與直線$\overset{\frown}{A_{k+1}A_{k+2}}$分別交於$P_{k(n-2)+1}$、$P_{k(n-2)+2}$、$\cdots$、$P_{(k+1)(n-2)}$；$\cdots$；直線$\overset{\frown}{A_2P}$、$\overset{\frown}{A_3P}$、$\cdots$、$\overset{\frown}{A_{n-2}P}$、$\overset{\frown}{A_{n-1}P}$與直線$\overset{\frown}{A_nA_1}$分別交於$P_{(n-1)(n-2)+1}$、$P_{(n-1)(n-2)+2}$、$\cdots$、$P_{n(n-2)}$，則

$$\prod_{i=1}^{n-2}\frac{\sin \overset{\frown}{A_1P_i}}{\sin \overset{\frown}{P_iA_2}}\times\prod_{i=(n-2)+1}^{2(n-2)}\frac{\sin \overset{\frown}{A_2P_i}}{\sin \overset{\frown}{P_iA_3}}\times\cdots\times\prod_{i=k(n-2)+1}^{(k+1)(n-2)}\frac{\sin\overset{\frown}{A_{k+1}P_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_{k+2}}}\times\cdots\times\prod_{i=(n-2)(n-2)+1}^{(n-1)(n-2)}\frac{\sin\overset{\frown}{A_{n-1}P_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_n}}\times\prod_{i=(n-1)(n-2)+1}^{n(n-2)}\frac{\sin\overset{\frown}{A_nP_i}}{\sin\overset{\frown}{P_iA_1}}=1$$

，其中對於$0\le k\le n-1$，$1\le j\le n-2$，滿足$P_{k(n-2)+j}$落在直線$\overset{\frown}{A_{k+1}A_{k+2}}$上，亦即直線$\overset{\frown}{A_{k+1}A_{k+2}}$上有$(n-2)$個點$P_{k(n-2)+1}$、$P_{k(n-2)+2}$、$\cdots$、$P_{(k+1)(n-2)}$。

證明：

(i) 於論證中，我們視$A_{n+j}=A_j$，$\forall j\in\{1,2,\cdots,n-2\}$。

(ii) $\because$ O、A_3、P_1、P共平面，$\therefore$ $(\overrightarrow{OA_3}\times\overrightarrow{OP_1})\bullet\overrightarrow{OP}=0$，又$O$為原點，故上式又可寫作$(A_3\times P_1)\bullet P=0$。

$\Rightarrow\left(A_3\times\dfrac{\sin(\overset{\frown}{P_1A_2})\times A_1+\sin(\overset{\frown}{A_1P_1})\times A_2}{\sin\overset{\frown}{A_1A_2}}\right)\bullet P=0\ \Rightarrow\ \sin\left(\overset{\frown}{P_1A_2}\right)((A_3\times A_1)\bullet P)+\sin\left(\overset{\frown}{A_1P_1}\right)((A_3\times A_2)\bullet P)=0$，由此推知，

$\sin\left(\overset{\frown}{A_1P_1}\right)((A_3\times A_2)\bullet P)=-\sin\left(\overset{\frown}{P_1A_2}\right)((A_3\times A_1)\bullet P)\Rightarrow\dfrac{\sin\overset{\frown}{A_1P_1}}{\sin\overset{\frown}{P_1A_2}}=\dfrac{(A_3\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_3)\bullet P}\qquad\cdots(1)$。

(iii) 同理可得下列等式

(iii-1) $\dfrac{\sin\overparen{A_1P_2}}{\sin\overparen{P_2A_2}}=\dfrac{(A_4\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_4)\bullet P}\quad\cdots(2)$ $\cdots$ $\dfrac{\sin\overparen{A_1P_j}}{\sin\overparen{P_jA_2}}=\dfrac{(A_{j+2}\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_{j+2})\bullet P}\quad\cdots(j)$ $\cdots$ $\dfrac{\sin\overparen{A_1P_{n-2}}}{\sin\overparen{P_{n-2}A_2}}=\dfrac{(A_n\times A_1)\bullet P}{(A_2\times A_n)\bullet P}\quad\cdots(n-2)$	(iii-5) $\dfrac{\sin\overparen{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\sin\overparen{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}=\dfrac{(A_2\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_2)\bullet P}\quad\cdots((n-1)(n-2)+1)$ $\dfrac{\sin\overparen{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\sin\overparen{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}=\dfrac{(A_3\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_3)\bullet P}\quad\cdots((n-1)(n-2)+2)$ $\cdots$ $\dfrac{\sin\overparen{A_nP_{(n-1)(n-2)+j}}}{\sin\overparen{P_{(n-1)(n-2)+j}A_1}}=\dfrac{(A_{j+1}\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_{j+1})\bullet P}\quad\cdots((n-1)(n-2)+\mathrm{j})$ $\cdots$ $\dfrac{\sin\overparen{A_nP_{n(n-2)}}}{\sin\overparen{P_{n(n-2)}A_1}}=\dfrac{(A_{n-1}\times A_n)\bullet P}{(A_1\times A_{n-1})\bullet P}\quad\cdots(n(n-2))$
(iii-2) $\dfrac{\sin\overparen{A_2P_{(n-2)+1}}}{\sin\overparen{P_{(n-2)+1}A_3}}=\dfrac{(A_4\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_4)\bullet P}\quad\cdots((n-2)+1)$ $\dfrac{\sin\overparen{A_2P_{(n-2)+2}}}{\sin\overparen{P_{(n-2)+2}A_3}}=\dfrac{(A_5\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_5)\bullet P}\quad\cdots((n-2)+2)$ $\cdots$ $\dfrac{\sin\overparen{A_2P_{(n-2)+j}}}{\sin\overparen{P_{(n-2)+j}A_3}}=\dfrac{(A_{j+3}\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_{j+3})\bullet P}\quad\cdots((n-2)+j)$ $\cdots$ $\dfrac{\sin\overparen{A_2P_{(n-2)+(n-3)}}}{\sin\overparen{P_{(n-2)+(n-3)}A_3}}=\dfrac{(A_n\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_n)\bullet P}\quad\cdots((n-2)+(n-3))$ $\dfrac{\sin\overparen{A_2P_{2(n-2)}}}{\sin\overparen{P_{2(n-2)}A_3}}=\dfrac{(A_1\times A_2)\bullet P}{(A_3\times A_1)\bullet P}\quad\cdots(2(n-2))$	(iv)在上述步驟(iii)中的$n(n-2)$個等式中，我們發現 (iv-1)以A_1來看，分子與分母均有下述這些項： $(A_3\times A_1)\bullet P$、$(A_4\times A_1)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_1)\bullet P$； (iv-2)以A_2來看，分子與分母均有下述這些項： $(A_4\times A_2)\bullet P$、$(A_5\times A_2)\bullet P$、$\cdots$、$(A_n\times A_2)\bullet P$、$(A_1\times A_2)\bullet P$； $\cdots$ (iv-3)以$A_j(1\le j\le n)$來看，分子與分母均有下述這些項： $(A_{j+2}\times A_j)\bullet P$、$(A_{j+3}\times A_j)\bullet P$、$\cdots$、$(A_{j-1}\times A_j)\bullet P$； $\cdots$ (iv-4)以A_n來看，分子與分母均有下述這些項： $(A_2\times A_n)\bullet P$、$(A_3\times A_n)\bullet P$、$\cdots$、$(A_{n-2}\times A_n)\bullet P$、$(A_{n-1}\times A_n)\bullet P$； (v)將上述步驟(iii)中的$n(n-2)$個等式相乘，消去所有分子分母的項之後即可證得原命題成立。

參考資料

1. 許喬婷(民102)，孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣。中華民國第53屆中小學科展作品，國立臺灣科學教育館。網址:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/53/pdf/040415.pdf
2. 左銓如·季素月編著（1998），初等幾何研究(288頁、304頁與390頁)。臺北市：九章出版社。
3. 高中數學第一冊至第四冊，龍騰出版社，2020年至2022年。

The End.

Thanks for your attention.