

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

第三名

050413

Lill Path 之立體圖形應用

學校名稱：臺中市立臺中女子高級中等學校

作者： 高二 王郁淇 高二 周羿辰	指導老師： 賴信志
-------------------------	--------------

關鍵詞：Lill Path、立體圖形、直角坐標系

摘要

本文主要在探討如何將二維 Lill Path 的性質推廣至三維。首先，我們證明有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 進行反射，且此射線通過其終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。除此之外，我們還證明了射線通過三維 ϕ -Lill Path 終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)$ 。接著，我們證明了三維 Lill Path 圖形封閉時之充要條件為此多項式有一因式為 $(x^3 + 1)$ ；同時，我們也證明了三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉時之充要條件為多項式有一因式為 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。最後，我們將三維 Lill Path 繼續推廣至 n 維 Lill Path。我們證明了射線通過圖形終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ ，以及圖形是封閉時的充要條件為 $f(x)$ 有一因式 $(x^n + 1)$ 。

壹、前言

一、研究動機

Lill 定理是由奧地利工程師愛德華·里爾 (Eduard Lill) 在 1867 年發現的。其主要在於敘述解多項式方程式的實根，等價於在 Lill Path 圖形中找到一條經過反射後可以射向終點的射線。在 Lill 定理及所有相關資料 (包括參考資料[1]、[2]、[3]、[4]) 中，我們發現學者們討論的 Lill Path 皆是在二維空間中加深加廣。基於此，我們思考 Lill 定理是否能在三維空間中成立，並找出其特性。且進一步探討當三維 Lill Path 的行進路線夾角不為 $\frac{\pi}{2}$ 時 (三維 ϕ -Lill Path)，此多項式與其三維 ϕ -Lill Path 圖形的關係。除此之外，我們還希望將 Lill 定理推廣至 n 維中運用。

二、研究目的

(一) 將二維 Lill Path 圖形延伸至三維，定義出多項式在三維空間中的 Lill Path 圖形。

- (二) 證明有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之三維 Lill Path 進行反射（依三維 Lill Path 反射規則），此射線通過三維 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
- (三) 證明一實係數多項式函數之三維 Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^3 + 1)$ 。
- (四) 找到一矩陣 R ，並使用其定義三維 ϕ -Lill Path 圖形（路線夾角不為 90 度的 Lill Path 圖形）的路線行走規則。
- (五) 證明有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 進行反射，此射線通過三維 ϕ -Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)$ 。
- (六) 證明一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。
- (七) 證明一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path 的終點為 (α, β, γ) 時的充要條件為 $\left[f(x) - \left(\alpha - \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi}\right)x^n - \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi}x^{n-1} - \frac{\gamma}{\sin \phi}x^{n-2}\right]$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。
- (八) 證明自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的 n 維 Lill Path 進行反射，則此射線通過 n 維 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
- (九) 證明一實係數多項式函數的 n 維 Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^n + 1)$ 。

三、文獻回顧

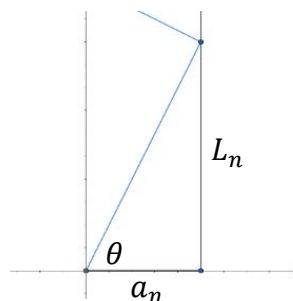
(一) Lill Path 圖形之定義

由參考資料[1]得知，假設有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 。由原點 O 作為起點，依序以 $\vec{i}, \vec{j}, -\vec{i}, -\vec{j}, \vec{i}, \vec{j}, -\vec{i}, -\vec{j}, \dots$ 的方向，分別畫出 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，即為此多項式 $f(x)$ 的 Lill Path 圖形，且 a_0 長度線段之末端為圖形終點。其中 \vec{i}, \vec{j} 分別為 x 軸和 y 軸正向上的單位向量。

(二) Lill Path 圖形之射線

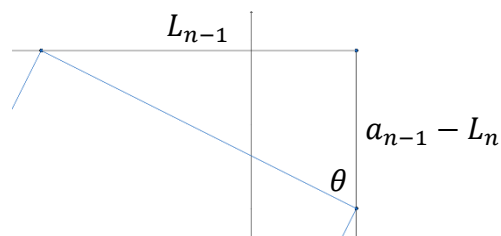
由參考資料[1]得知，在二維 Lill Path 中，有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的 Lill Path 各邊反射，反射規則如下：首先與第一段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角 ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 畫出射線，並在碰到第二段 Lill Path 所在之直線後反射；反射後的射線與第二段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第三段 Lill Path 所在之直線後反射；.....，以此類推。此射線通過 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ ，證明方式如下：

若已知反射後的射線會與 Lill Path 的終點相交，假設 L_n, L_{n-1}, \dots, L_1 為角 θ 的對邊長度且令 $x = -\tan \theta$ 。



圖一 有射線之 Lill Path 圖形第一、二段路徑局部放大

如圖一所示，我們可得出： $L_n = (\tan \theta)a_n = -xa_n$ 。



圖二 有射線之 Lill Path 圖形第二、三段路徑局部放大

又如圖二可知： $L_{n-1} = (\tan \theta)(a_{n-1} - (-xa_n)) = -x(a_{n-1} + xa_n)$ 。

以此類推： $L_{n-2} = (\tan \theta)(a_{n-2} - (-x(a_{n-1} + xa_n)))$

$$= -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))$$

⋮

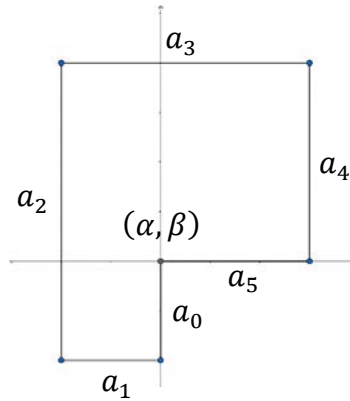
$$L_1 = -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots))$$

又因 $L_1 = a_0$ ，故得 $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ，並得證 $(-\tan \theta)$ 為 $f(x) = 0$ 之一根。

(三) 封閉 Lill Path 圖形

由參考資料[2]得知，一多項式函數的 Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數有因式 $(x^2 + 1)$ 。舉例而言， $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 2$ ，如圖三所示，因其圖形為封閉的，故 Lill Path 之 x 、 y 方向向量和皆為 0 。令終點座標為 (α, β) ，其中（註： $[]$ 符號為高斯符號。）：

$$\begin{cases} \alpha = a_n - a_{n-2} + a_{n-4} - a_{n-6} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n-2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 0 \\ \beta = a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-5} - a_{n-7} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n-(2 \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)} = 0 \end{cases}$$



圖三 $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 2$ 之封閉 Lill Path 圖形

因 $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ ，故利用餘式定理計算封閉圖形的 $f(i)$ ，檢驗其餘式是否為 0 ： $f(i) = a_n i^n + \cdots + a_3 i^3 + a_2 i^2 + a_1 i + a_0$

$$= i^n (a_n + a_{n-1} i^{-1} + a_{n-2} i^{-2} + \cdots + a_0 i^{-n})$$

$$\text{因為 } i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1 \Rightarrow i^{-k} = \begin{cases} 1, & k = 4q \\ -i, & k = 4q + 1 \\ -1, & k = 4q + 2 \\ i, & k = 4q + 3 \end{cases}, q \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(i) &= i^n \left(a_n - a_{n-1} i - a_{n-2} + a_{n-3} i + \cdots (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n-2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n-(2 \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)} i + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n-2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \\ &= i^n (\alpha - \beta i) = 0 \end{aligned}$$

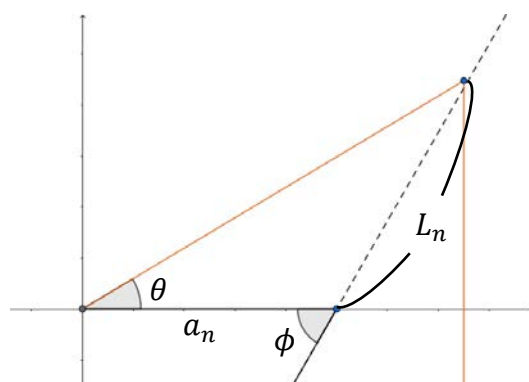
再利用複數的共軛性質得出 $f(-i) = 0$ ，故封閉 Lill Path 圖形之 $f(x)$ 有一因式為 $(x + i)(x - i) = x^2 + 1$ （此證法為我們另外想出，非文獻原本證法）。

(四) ϕ -Lill Path 圖形之定義與其射線

由參考資料[2]得知，將上述文獻回顧(一)中之 Lill Path 稍作修改，使其路線夾角不一定為 90 度，並稱之為 ϕ -Lill Path 圖形，其中 $0 < \phi < \pi$ 。也就等同於如有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ，其對應之 ϕ -Lill Path 圖形以原點 O 作為起點，依序以 $\vec{i}, \vec{iR}, \vec{iR}^2, \dots, \vec{iR}^{n-1}, \vec{iR}^n$ 的方向，分別畫出 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，其中 $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ 、 a_0 長度線段之末端為圖形終點、 $0 < \phi < \pi$ 、 \vec{i} 為 x 軸正向的單位向量。且在這樣的定義下，顯然 ϕ 等於 90 度時，即為 Lill Path 圖形。

有一從原點出發之射線在多項式函數 $f(x)$ 的 ϕ -Lill Path 進行反射 (同樣依循文獻回顧(二)之反射規則，且 $0 < \theta < \phi$)，此射線通過 ϕ -Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}\right)$ ，證明方式如下：

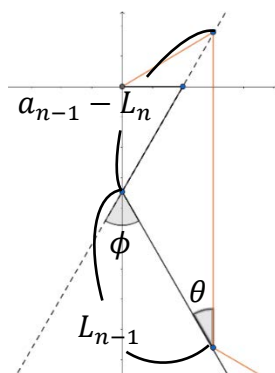
假設 L_n, L_{n-1}, \dots, L_1 為角 θ 的對邊長度且令 $x = \frac{-\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}$ ，發現 θ 之對邊長度為射線與 Lill Path 所截的邊 L_k ， $(\phi - \theta)$ 之對邊長度為前一段 Lill Path 扣掉射線與前一段 Lill Path 所截的邊長度，即為 $(a_k - L_{k+1})$ ，其中 k 為正整數，且 $k < n$ 。



圖四 有射線之 ϕ -Lill Path 圖形第一、二段路徑局部放大

如圖四所示，利用正弦定理及射線與 Lill Path 所截的邊與 θ 角的關係得出：

$$L_n = \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)} \right) a_n = -x a_n$$



圖五 有射線之 ϕ -Lill Path 圖形第二、三段路徑局部放大

又如圖五可知： $L_{n-1} = \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right) (a_{n-1} - (-xa_n)) = -x(a_{n-1} + xa_n)$

以此類推： $L_{n-2} = \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right) (a_{n-2} - (-x(a_{n-1} + xa_n)))$

$$= -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))$$

⋮

$$L_1 = -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots))$$

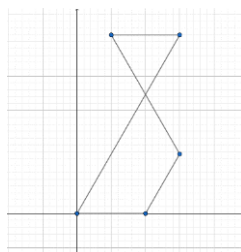
又因 $L_1 = a_0$ ，故得 $a_0 = -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots))$

$$\Rightarrow a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

得證 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)$ 為 $f(x) = 0$ 之一根。

(五) 封閉的 ϕ -Lill Path

由參考資料[2]得知，一多項式函數的 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數有因式 $[x^2 - 2(\cos \phi)x + 1]$ 。舉例而言， $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3$ ，如圖六所示。



圖六 $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3$ 之 ϕ -Lill Path

因其圖形為封閉的，故 ϕ -Lill Path 所有路徑之向量和為 $\vec{0}$ 。在證明封閉時之充要條件之前，先定義若有一函數 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，則 $\text{rev } f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ 。接著證明一實係數多項式函數 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $[x^2 - 2(\cos \phi)x + 1]$ 。先將 $f(x)$ 的 ϕ -Lill Path 圖形以向量方式表示，可得出其路線向量分別為 $a_n \vec{i}, a_{n-1} \vec{i}R, a_{n-2} \vec{i}R^2, \dots, a_1 \vec{i}R^{n-1}, a_0 \vec{i}R^n$ 。所以此圖形為封閉的充要條件為所有向量和為 $\vec{0}$ 。即 $a_n \vec{i} + a_{n-1} \vec{i}R + a_{n-2} \vec{i}R^2 + \dots + a_1 \vec{i}R^{n-1} + a_0 \vec{i}R^n = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{i} \text{rev } f(R) = \vec{0}$$

又因為 R 顯然為可逆方陣，故 $\Leftrightarrow \vec{i} \text{rev } f(R)R = \vec{i}R \text{rev } f(R) = \vec{0}$ 。因為 ϕ 不為 π 的整數倍，所以易檢查出 $\vec{i}, \vec{i}R$ 為二個線性獨立的向量，即二向量所構成之矩陣 $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i}R \end{pmatrix}$ 可逆。又由上述二個等價條件可知 $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i}R \end{pmatrix} \text{rev } f(R) = \vec{0} \Leftrightarrow \text{rev } f(R) = \vec{0}$ 。

由 Cayley-Hamilton 定理：

$$\text{若 } p(x) = \det(xI - R) = \det \begin{bmatrix} x - \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & x - \cos \phi \end{bmatrix} = x^2 - 2(\cos \phi)x + 1, \text{ 則}$$

$p(R) = 0$ 。所以 $f(x)$ 的 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為 $[x^2 - 2(\cos \phi)x + 1]$ 是 $\text{rev } f(x)$ 之因式。並推得 $\text{rev } f(x)$ 的 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的 $\Leftrightarrow f(x)$ 的 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的，故得證。且在 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 時，亦符合封閉 Lill Path 圖形之特性。

貳、研究設備及器材

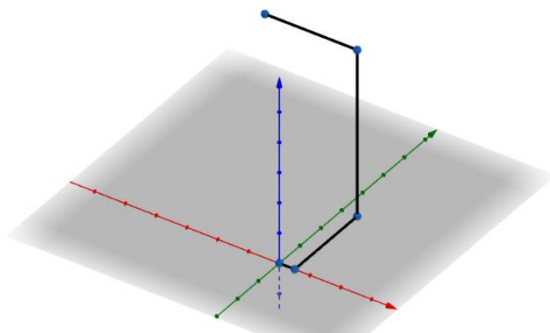
紙、筆、筆記型電腦、Microsoft Word、Geogebra 2D、Geogebra 3D、MathType、網際網路。

參、研究過程或方法

一、三維 Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 。由原點 O 作為起點，依序以

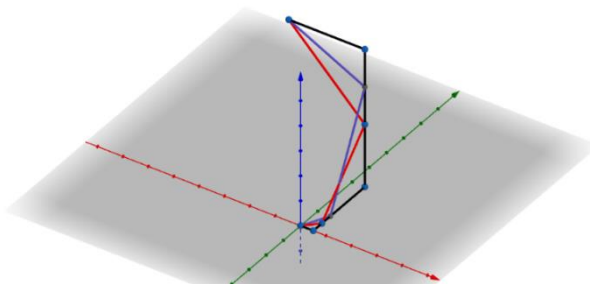
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}, \dots$ 的方向，分別畫出 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，即為此多項式 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形，且定義 a_0 長度線段之末端為此 Lill Path 的終點。其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分別為 x 軸、 y 軸、 z 軸正向上的單位向量。舉例而言，如圖七所示， $n = 3, f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ，圖中長度 $a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6$ 。



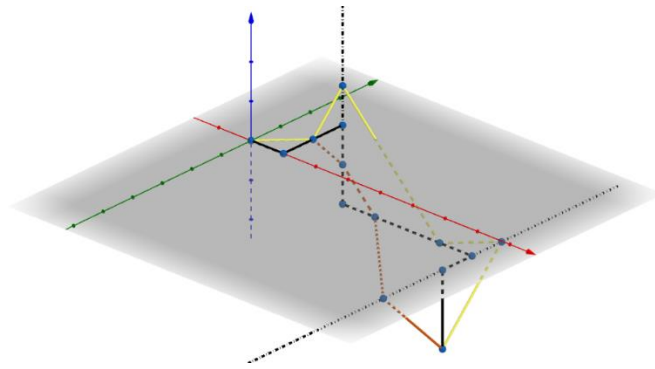
圖七 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 之 Lill Path 立體圖形

三維 Lill Path 圖形之射線

從原點作一射線，依下列規則在三維 Lill Path 各邊反射：首先在第一、二段 Lill Path 所在平面與第一段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角 ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 畫出射線，並在碰到第二段 Lill Path 所在之直線後反射；反射後的射線在第二、三段 Lill Path 所在平面與第二段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第三段 Lill Path 所在之直線後反射；反射後的射線在第三、四段 Lill Path 所在平面與第三段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第四段 Lill Path 所在之直線後反射；.....，以此類推。如圖八及圖九所示，其分別為 $n = 3, f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 和 $n = 5, p(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$ 加上射線的三維 Lill Path 圖形。



圖八 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 加上射線之三維 Lill Path 圖形

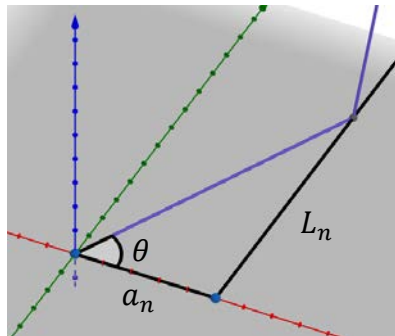


圖九 $p(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$ 加上射線之三維 Lill Path 圖形

定理 1 自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之三維 Lill Path 進行反射，則此射線通過三維 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。

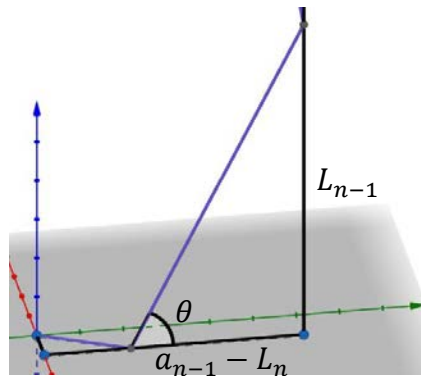
〈證明〉

若已知反射後的射線會與三維 Lill Path 的終點相交，我們想證明 $(-\tan \theta)$ 是 $f(x)$ 的一實根。假設 L_n, L_{n-1}, \dots, L_1 為角 θ 的對邊長度且令 $x = -\tan \theta$ 。



圖十 有射線之三維 Lill Path 圖形第一、二段路徑局部放大

如圖十所示，我們可得出： $L_n = (\tan \theta)a_n = -xa_n$



圖十一 有射線之三維 Lill Path 圖形第二、三段路徑局部放大

又如圖十一可知： $L_{n-1} = (\tan \theta)(a_{n-1} - (-xa_n)) = -x(a_{n-1} + xa_n)$

$$\text{以此類推：} L_{n-2} = (\tan \theta) (a_{n-2} - (-x(a_{n-1} + xa_n)))$$

$$= -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))$$

⋮

$$L_1 = -x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots))$$

$$\text{又因} L_1 = a_0, \text{故得} a_0 = -x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots))$$

$$\Rightarrow a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

得證 $(-\tan \theta)$ 為 $f(x) = 0$ 之一根。

相反地，若已知 $f(x) = 0$ 有一有實根 $(-\tan \theta) = -x_1$ 且令

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_{n-1})(x + x_n)$$

其中 x_1 為實數， x_2, x_3, \dots, x_n 為複數。則我們可知：

$$\begin{cases} a_0 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n \\ a_1 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \cdots + x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n \\ a_2 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-2} + x_1 x_2 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \cdots + x_3 \dots x_{n-1} x_n) a_n \dots \dots (*) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) a_n \\ a_n &= a_n \end{cases}$$

若我們由原點作一條與 $f(x)$ 三維 Lill Path 長 a_n 邊夾 θ 角的射線，則依前述的規則作反射

及 $(*)$ 可得：

$$L_n = a_n \tan \theta = a_n x_1$$

$$L_{n-1} = (a_{n-2} - L_{n-1}) \tan \theta = (x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) a_n x_1$$

$$L_{n-2} = (a_{n-2} - L_{n-1}) \tan \theta$$

$$= [x_2(x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n) + x_3(x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n) + \cdots + x_{n-1} x_n] a_n x_1$$

⋮

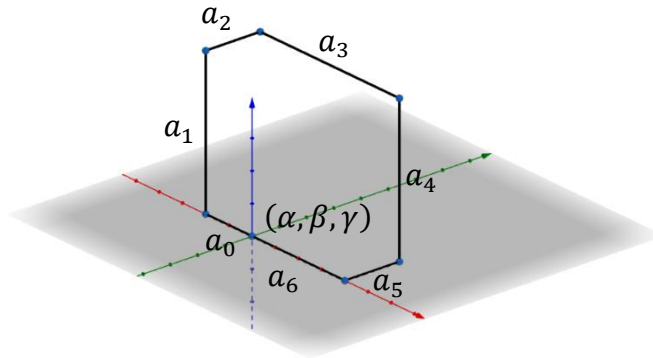
$$L_1 = (a_1 - L_2) \tan \theta = (x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n x_1 = a_0$$

由此可知若 $x = -\tan \theta$ 為 $f(x) = 0$ 之一實根時，由 θ 角度畫出的射線經過反射後會射到三維 Lill Path 圖形的終點。 ■

二、封閉的三維 Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形之起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的三維 Lill Path 圖形。舉例而言，此圖為 $n = 6$,

$f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 2$ 的封閉的三維 Lill Path 圖形，如圖十二所示，圖中長度 $a_6 = 4, a_5 = 2, a_4 = 5, a_3 = 6, a_2 = 2, a_1 = 5, a_0 = 2$ ，並令 (α, β, γ) 為終點座標。



圖十二 $f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 2$

之封閉三維 Lill Path 圖形

在上述封閉的三維 Lill Path 的例子中，它所對應的多項式函數有 $(x^3 + 1)$ 的因式。

以 $f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 2$ 為例，

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 2 \\ &= (x^3 + 1)(4x^3 + 2x^2 + 5x + 2) \end{aligned}$$

實際上這個性質對所有封閉的三維 Lill Path 都成立，所以我們作了以下定理的證明。

定理 2 一實係數多項式函數之三維 Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^3 + 1)$ 。

〈證明〉

由三維 Lill Path 的定義我們可以得知：多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 所對應的三維 Lill Path 的終點座標為 (α, β, γ) ，其向量和為

$$a_n \vec{i} + a_{n-1} \vec{j} + a_{n-2} \vec{k} - a_{n-3} \vec{i} - a_{n-4} \vec{j} - a_{n-5} \vec{k} + \dots = \vec{0}, \text{ 其中:}$$

$$\begin{cases} \alpha = a_n - a_{n-3} + a_{n-6} - a_{n-9} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} a_{n-3 \cdot \lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \\ \beta = a_{n-1} - a_{n-4} + a_{n-7} - a_{n-10} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} a_{n-(3 \cdot \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1)} \\ \gamma = a_{n-2} - a_{n-5} + a_{n-8} - a_{n-11} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} a_{n-(3 \cdot \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2)} \end{cases}$$

因此如果此多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為 $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ 。若

已知多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形為封閉的，欲證明 $(x^3 + 1)$ 整除 $f(x)$ ，因為

$$(x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)，我們只需證明 \begin{cases} (x + 1) | f(x) \\ (x^2 - x + 1) | f(x) \end{cases}。$$

因為 $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^n (a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0) \\ &= (-1)^n (\alpha - \beta + \gamma) = 0 \end{aligned}$$

接著令 ω 為 $x^2 - x + 1 = 0$ 之一虛根 $\Rightarrow \omega^3 = -1$ ，則

$$\begin{aligned} f(\omega) &= a_0 + a_1 \omega + a_2 \omega^2 + a_3 \omega^3 + \cdots + a_n \omega^n \\ &= \omega^n (a_n + a_{n-1} \omega^{-1} + a_{n-2} \omega^{-2} + \cdots + a_0 \omega^{-n}) \end{aligned}$$

$$\text{因為 } \omega^3 = -1 \Rightarrow \omega^6 = 1 \Rightarrow \omega^{-k} = \begin{cases} 1 & , k = 6q \\ -\omega^2 & , k = 6q + 1 \\ -\omega & , k = 6q + 2 \\ -1 & , k = 6q + 3 \\ \omega^2 & , k = 6q + 4 \\ \omega & , k = 6q + 5 \end{cases}, q \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(\omega) &= \omega^n (a_n - a_{n-1} \omega^2 - a_{n-2} \omega - a_{n-3} + a_{n-4} \omega^2 \\ &\quad + a_{n-5} \omega + a_{n-6} - a_{n-7} \omega^2 - a_{n-8} \omega - \cdots) \\ &= \omega^n (\alpha - \beta \omega^2 - \gamma \omega) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x^2 - x + 1) | f(x)$$

故得證 $f(x)$ 有一因式為 $(x^3 + 1)$ 。

若此多項式函數 $f(x)$ 有一因式為 $(x^3 + 1)$ ，則 $\begin{cases} f(-1) = \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ f(\omega) = \omega^n (\alpha - \beta \omega^2 - \gamma \omega) = 0 \end{cases}$ 。

因為 $\omega^2 = \omega - 1$ ，所以 $f(\omega) = \omega^n [(-\beta - \gamma)\omega + (\alpha + \beta)] = 0$ ，又因 α, β, γ 皆為實數，

故 $\begin{cases} -\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ 。將 α, β, γ 聯立求解，亦得 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ 。因此得證多項式函數 $f(x)$

的三維 Lill Path 圖形為封閉的。 ■

三、三維 ϕ -Lill Path

定義：我們將上述三維 Lill Path 稍作修改，使其路線夾角不一定為 90 度。我們找到一

矩陣 $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$ ，並定義三維 ϕ -Lill Path 之路線規則如下：假設有一多項

式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ，由原點 O 作為起點，依序以 $\vec{i}, \vec{i}R, \vec{i}R^2, \dots, \vec{i}R^{n-1}$,

$\vec{i}R^n$ 的方向，分別畫出 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，即為 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖

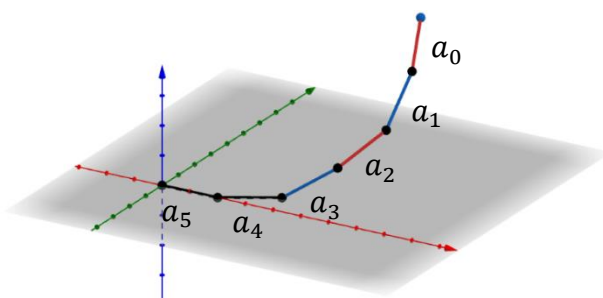
形，且 a_0 長度線段之末端為圖形終點。其中 $0 < \phi < \pi$ 、 \vec{i} 為 x 軸正向的單位向量，且在

這樣的定義下，顯然 ϕ 等於 90 度時，即為三維 Lill Path 圖形。舉例而言，如圖十三、圖

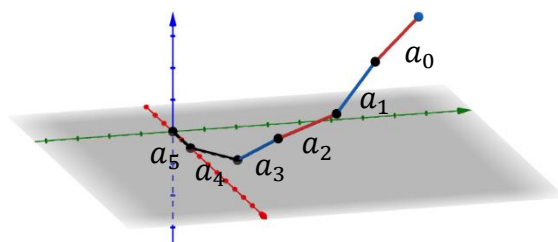
十四所示，此二圖為從不同角度觀看之 $n = 5, f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 的三維

$\frac{\pi}{6}$ -Lill Path 圖形，圖中長度 $a_5 = a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 1$ 。因其立體感較難觀察，故

放二個視角的圖像以便檢視。



圖十三 $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 之三維 $\frac{\pi}{6}$ -Lill Path 圖形-1



圖十四 $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 之三維 $\frac{\pi}{6}$ -Lill Path 圖形-2

註： R 的求解——我們從三維 Lill Path 的行走規則中觀察出相鄰二段路徑皆夾 90° 、每條路徑皆跟前二段所張之平面夾 90° ，且與前二段行走路徑向量之外積向量方向分別指向平面的同側、異側、同側、異側、……。我們希望三維 ϕ -Lill Path 的行走特性即是將上述特性之 90° 改為 ϕ 。由此特性我們計算出前幾段行走路徑的向量

$$\begin{cases} \vec{i} = (1, 0, 0) \\ \vec{i}R = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \\ \vec{i}R^2 = (\cos^2 \phi, \cos \phi \sin \phi, \sin \phi) \\ \vec{i}R^3 = (\cos^3 \phi - \sin^2 \phi, \cos^2 \phi \sin \phi + \cos \phi \sin \phi, \cos \phi \sin \phi) \end{cases}$$

將上述聯立式中的第二、三、四式寫成矩陣乘法的型式：

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i}R \\ \vec{i}R^2 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & \sin \phi \end{pmatrix} R$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & \sin \phi \\ \cos^3 \phi - \sin^2 \phi & \cos^2 \phi \sin \phi + \cos \phi \sin \phi & \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix}$$

故得出 $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$ 。

接著我們在下面的引理中證明 $\vec{i}R^k$ 與 $\vec{i}R^{k-1}$ 夾角為 ϕ 且 $\vec{i}R^k$ 與 $\vec{i}R^{k-2}$ 、 $\vec{i}R^{k-1}$ 所張的平面夾角亦為 ϕ 。若 k 為偶數， $\vec{i}R^k$ 與 $(\vec{i}R^{k-2} \times \vec{i}R^{k-1})$ 指向平面同側；若 k 為奇數， $\vec{i}R^k$ 與 $(\vec{i}R^{k-2} \times \vec{i}R^{k-1})$ 指向平面異側，其中 $2 \leq k \leq n$ ，且 k 為整數。

引理 1 若矩陣 $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$ ，且 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 為空間中三任意向量，則

(1) \vec{a} 經 R 變換後長度不變，即 $|\vec{a}| = |\vec{a}R|$ 。

(2) \vec{a} 、 \vec{b} 經 R 變換後其內積之值不變，即 $(\vec{a}R) \cdot (\vec{b}R) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ 。

(3) \vec{a}, \vec{b} 經 R 變換後之外積向量會與原本二向量外積經 R 變換後的向量反向，即

$$(\vec{a}R) \times (\vec{b}R) = -(\vec{a} \times \vec{b})R。$$

(4) 利用(1)、(2)、(3)可得知 $[(\vec{a}R) \times (\vec{b}R)] \cdot (\vec{c}R) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}。$

〈證明〉

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

(1) 我們先試著求出經 R 變換後的向量：

$$\begin{aligned} \vec{a}R &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 \cos \phi - a_3 \sin \phi, a_1 \sin \phi + a_3 \cos \phi, a_2) \end{aligned}$$

接著再求出經 R 變換後的向量長度：

$$\begin{aligned} |\vec{a}R| &= \sqrt{(a_1 \cos \phi - a_3 \sin \phi)^2 + (a_1 \sin \phi + a_3 \cos \phi)^2 + a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\vec{a}| \end{aligned}$$

可得證一任意向量經 R 變換後長度不變。

(2) 我們利用(1)得到的經 R 變換後的向量及內積運算，計算出二向量經 R 變換後內積之值：

$$\begin{aligned} (\vec{a}R) \cdot (\vec{b}R) &= (a_1 \cos \phi - a_3 \sin \phi)(b_1 \cos \phi - b_3 \sin \phi) + \\ &= (a_1 \sin \phi + a_3 \cos \phi)(b_1 \sin \phi + b_3 \cos \phi) + a_2 b_2 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

可得證二任意向量經 R 變換後其內積之值不變。

(3) 我們利用(1)得到的經 R 變換後的向量及外積運算，先計算出二向量經 R 變換後之外積向量：

$$\begin{aligned} (\vec{a}R) \times (\vec{b}R) &= ((a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin \phi + (a_3 b_2 - a_2 b_3) \cos \phi, \\ & (a_3 b_2 - a_2 b_3) \sin \phi + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cos \phi, a_1 b_3 - a_3 b_1) \end{aligned}$$

接著，再算出原本外積向量經 R 變換後的向量：

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b})R &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \\
&= ((a_2b_1 - a_1b_2) \sin \phi + (a_2b_3 - a_3b_2) \cos \phi, \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2) \sin \phi + (a_1b_2 - a_2b_1) \cos \phi, a_3b_1 - a_1b_3) \\
&= -(\vec{a}R) \times (\vec{b}R)
\end{aligned}$$

可得證二任意向量經 R 變換後之外積方向會與原本外積向量經 R 變換後的方向相反。

$$(4) [(\vec{a}R) \times (\vec{b}R)] \cdot (\vec{c}R) = -(\vec{a} \times \vec{b})R \cdot (\vec{c}R) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \blacksquare$$

引理 2 若 \vec{i} 為 x 軸正向的單位向量，則

- (1) 每一段 Lill Path 皆會與前一段 Lill Path 夾 ϕ 角，即 $(\vec{i}R^k)$ 與 $(\vec{i}R^{k-1})$ 夾角為 ϕ ，其中 k 為正整數。
- (2) 每一段 Lill Path 皆會與前二段 Lill Path 所張之平面夾 ϕ 角，且每一段 Lill Path 皆會與前二段 Lill Path 外積向量方向分別指向平面同側、異側、同側、異側、.....，即 $(\vec{i}R^k)$ 與 $(\vec{i}R^{k-2})$ 、 $(\vec{i}R^{k-1})$ 所張之平面夾角為 ϕ ，其中 k 為大於等於 2 的正整數，且當 k 為偶數時， $\vec{i}R^k$ 與 $(\vec{i}R^{k-2}) \times (\vec{i}R^{k-1})$ 指向平面同側；當 k 為奇數時， $\vec{i}R^k$ 與 $(\vec{i}R^{k-2}) \times (\vec{i}R^{k-1})$ 指向平面異側。

〈證明〉

(1) 由引理 1(1)、(2)知：

$$\begin{aligned}
|\vec{i}R^k| &= |\vec{i}| = 1 \text{ 且 } (\vec{i}R^k) \cdot (\vec{i}R^{k-1}) = (\vec{i}R^{k-1}) \cdot (\vec{i}R^{k-2}), \text{ 所以} \\
\frac{(\vec{i}R^k) \cdot (\vec{i}R^{k-1})}{|\vec{i}R^k| |\vec{i}R^{k-1}|} &= \frac{(\vec{i}R^{k-1}) \cdot (\vec{i}R^{k-2})}{|\vec{i}R^{k-1}| |\vec{i}R^{k-2}|} = \dots = \frac{(\vec{i}R) \cdot \vec{i}}{|\vec{i}R| |\vec{i}|} = \frac{(\cos \phi, \sin \phi, 0) \cdot (1, 0, 0)}{1 \cdot 1} = \cos \phi
\end{aligned}$$

故 $(\vec{i}R^k)$ 與 $(\vec{i}R^{k-1})$ 的夾角皆為 ϕ ，即每段 Lill Path 皆會與前一段 Lill Path 夾 ϕ 角，其中 k 為正整數。

(2) 接著我們利用數學歸納法來證明：

$k = 2$ 時

$$\frac{(\vec{iR}^2) \cdot [\vec{i} \times (\vec{iR})]}{|\vec{iR}^2| |\vec{i} \times (\vec{iR})|} = \frac{(\cos^2 \phi, \sin \phi \cos \phi, \sin \phi) \cdot (0, 0, \sin \phi)}{1 \cdot |\vec{i}| \cdot |\vec{iR}| \cdot \sin \phi} = \frac{\sin^2 \phi}{1 \cdot 1 \cdot \sin \phi} = \sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

故 (\vec{iR}^2) 與 $\vec{i}, (\vec{iR})$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 (\vec{iR}^2) 與 $\vec{i} \times (\vec{iR})$ 指向平面的同側。

$k = 3$ 時

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{iR}^3) \cdot [(\vec{iR}) \times (\vec{iR}^2)]}{|\vec{iR}^3| |(\vec{iR}) \times (\vec{iR}^2)|} &= \frac{(\cos^3 \phi - \sin^2 \phi, \sin \phi \cos^2 \phi + \sin \phi \cos \phi, \sin \phi \cos \phi) \cdot (\sin^2 \phi, -\sin \phi \cos \phi, 0)}{1 \cdot |\vec{iR}| \cdot |\vec{iR}^2| \cdot \sin \phi} \\ &= \frac{-\sin^2 \phi}{1 \cdot 1 \cdot \sin \phi} = -\sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \end{aligned}$$

所以 (\vec{iR}^3) 與 $(\vec{iR}), (\vec{iR}^2)$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 (\vec{iR}^3) 與 $(\vec{iR}) \times (\vec{iR}^2)$ 指向平面的異側。

設 $k = n$ 時， (\vec{iR}^n) 與 $(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})$ 指向平面的同側，其中 n 為偶數，即

$$\frac{(\vec{iR}^n) \cdot [(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})]}{|\vec{iR}^n| |(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})|} = \sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$k = n + 1$ 時，由引理 1 可知

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{iR}^{n+1}) \cdot [(\vec{iR}^{n-1}) \times (\vec{iR}^n)]}{|\vec{iR}^{n+1}| |(\vec{iR}^{n-1}) \times (\vec{iR}^n)|} &= \frac{[(\vec{iR}^n)_R] \cdot \{[(\vec{iR}^{n-2})_R] \times [(\vec{iR}^{n-1})_R]\}}{|\vec{iR}^{n+1}| \cdot |\vec{iR}^{n-1}| \cdot |\vec{iR}^n| \cdot \sin \phi} \\ &= \frac{-(\vec{iR}^n) \cdot [(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})]}{|\vec{iR}^n| |(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})|} = -\sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \end{aligned}$$

所以 (\vec{iR}^{n+1}) 與 $(\vec{iR}^{n-1}), (\vec{iR}^n)$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 (\vec{iR}^{n+1}) 與 $(\vec{iR}^{n-1}) \times (\vec{iR}^n)$ 指向

平面的異側。同理，設 $k = n$ 時， \vec{iR}^n 與 $\vec{iR}^{n-2}, \vec{iR}^{n-1}$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 \vec{iR}^n 與

$(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})$ 指向平面的異側，其中 n 為奇數，即

$$\frac{(\vec{iR}^n) \cdot [(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})]}{|\vec{iR}^n| |(\vec{iR}^{n-2}) \times (\vec{iR}^{n-1})|} = -\sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$$

$k = n + 1$ 時，

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{i}R^{n+1}) \cdot [(\vec{i}R^{n-1}) \times (\vec{i}R^n)]}{|\vec{i}R^{n+1}| |(\vec{i}R^{n-1}) \times (\vec{i}R^n)|} &= \frac{[(\vec{i}R^n)_R] \cdot \{[(\vec{i}R^{n-2})_R] \times [(\vec{i}R^{n-1})_R]\}}{|\vec{i}R^{n+1}| \cdot |\vec{i}R^{n-1}| \cdot |\vec{i}R^n| \cdot \sin \phi} \\ &= \frac{-(\vec{i}R^n) \cdot [(\vec{i}R^{n-2}) \times (\vec{i}R^{n-1})]}{|\vec{i}R^n| |(\vec{i}R^{n-2}) \times (\vec{i}R^{n-1})|} = \sin \phi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \end{aligned}$$

故 $(\vec{i}R^{n+1})$ 與 $(\vec{i}R^{n-1}), (\vec{i}R^n)$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 $(\vec{i}R^{n+1})$ 與 $[(\vec{i}R^{n-1}) \times (\vec{i}R^n)]$ 指向平面的同側。

綜合上述，我們可以得知每一段 Lill Path 的行走向量皆會與前二段 Lill Path 所張之平面夾 ϕ 角，且每一段 Lill Path 的行走向量皆會與前二段 Lill Path 的行走向量之外積向量方向分別指向平面同側、異側、同側、異側、.....。 ■

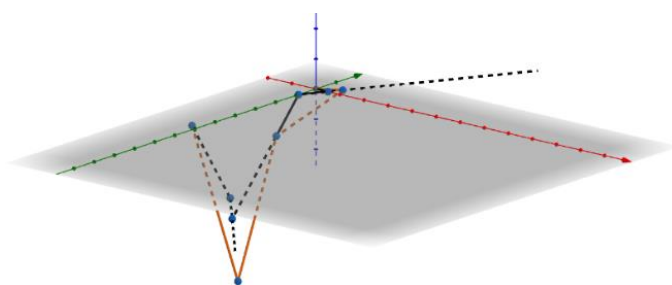
由上面的引理，可知三維 ϕ -Lill Path 的行走方式有一固定的規則。反之，顯然按照這個行走規則所構成的連續線段也會是三維 ϕ -Lill Path，且在 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 時，亦符合三維 Lill Path 圖形之行走規則。

三維 ϕ -Lill Path 圖形之射線

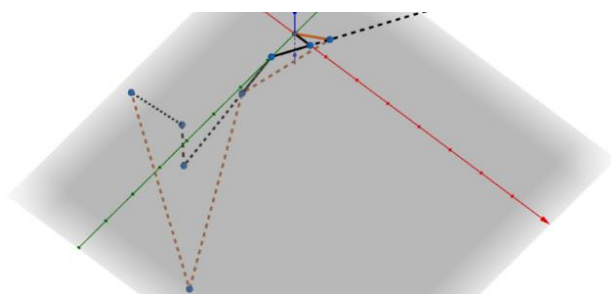
從原點作一射線，依下列規則在三維 ϕ -Lill Path 各邊反射：首先在第一、二段 Lill Path 所在平面與第一段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角($0 < \theta < \phi$)畫出射線並在碰到第二段 Lill Path 所在之直線後反射；反射後的射線在第二、三段 Lill Path 所在平面與第二段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第三段 Lill Path 所在之直線後反射；反射後的射線在第三、四段 Lill Path 所在平面與第三段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第四段 Lill Path 所在之直線後反射；.....，以此類推。舉例而言，如圖十五及圖十六所示，此二圖為從不同角度觀看之 $n = 4$ 之多項函數

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$ 加上射線的三維 $\frac{\pi}{3}$ -Lill Path 圖形。因其立體感較難觀察，

故放二個視角的圖像以便檢視。



圖十五 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$ 加上射線之三維 $\frac{\pi}{3}$ -Lill Path 圖形-1

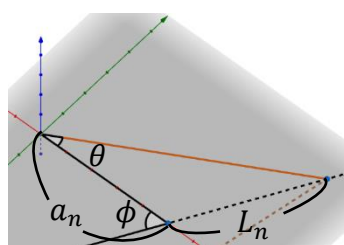


圖十六 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$ 加上射線之三維 $\frac{\pi}{3}$ -Lill Path 圖形-2

定理 3 由原點出發的射線依上述規則在多項函數 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 進行反射，則此射線可以通過三維 ϕ -Lill Path 終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}\right)$ 。

〈證明〉

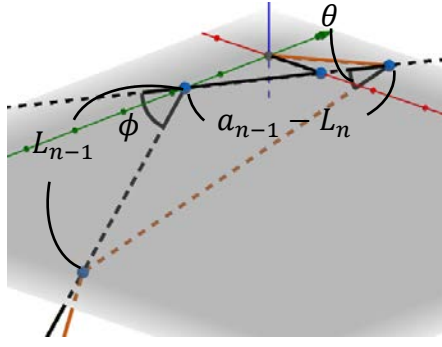
若已知反射後的射線會與三維 Lill Path 的終點相交，我們想證明 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}\right)$ 是 $f(x)$ 的一實根。假設 L_n, L_{n-1}, \dots, L_1 為角 θ 的對邊長度且令 $x = \frac{-\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}$ 。我們發現 θ 之對邊長度為射線與 Lill Path 所截的邊 L_k ， $(\phi - \theta)$ 之對邊長度為前一段 Lill Path 扣掉射線與前一段 Lill Path 所截的邊長度，即為 $(a_k - L_{k+1})$ ，其中 k 為正整數，且 $k < n$ 。



圖十七 有射線之三維 Lill Path 圖形第一、二段路徑局部放大

如圖十七所示，利用正弦定理及射線與 Lill Path 所截的邊與 θ 角的關係得出：

$$L_n = \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}\right) a_n = -x a_n$$



圖十八 有射線之三維 Lill Path 圖形第二、三段路徑局部放大

又如圖十八可知： $L_{n-1} = \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)(a_{n-1} - (-xa_n)) = -x(a_{n-1} + xa_n)$

以此類推： $L_{n-2} = \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)(a_{n-2} - (-x(a_{n-1} + xa_n)))$
 $= -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))$

⋮

$L_1 = -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots))$

又因 $L_1 = a_0$ ，故得

$$a_0 = -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots))$$

$$\Rightarrow a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

得證 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)$ 為 $f(x) = 0$ 之一根。

相反地，若已知 $f(x) = 0$ 有一有實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right) = -x_1$ 且令

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n(x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_{n-1})(x + x_n)$$

其中 x_1 為實數， x_2, x_3, \dots, x_n 為複數。則我們可知：

$$\begin{cases} a_0 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n \\ a_1 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n \\ a_2 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-2} + x_1 x_2 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_3 \dots x_{n-1} x_n) a_n \dots \dots (*) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) a_n \\ a_n &= a_n \end{cases}$$

若我們由原點作一條與 $f(x)$ 三維 Lill Path 長 a_n 邊夾 θ 角的射線，則依前述的規則作反射

及(*)可得：

$$L_n = a_n \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)} \right) = a_n x_1$$

$$L_{n-1} = (a_{n-2} - L_{n-1}) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)} \right) = (x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) a_n x_1$$

$$L_{n-2} = (a_{n-2} - L_{n-1}) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)} \right)$$

$$= [x_2(x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n) + x_3(x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n] a_n x_1$$

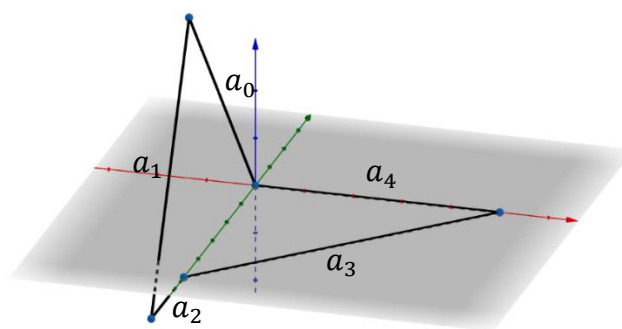
⋮

$$L_1 = (a_1 - L_2) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)} \right) = (x_2 \cdots x_{n-1} x_n) a_n x_1 = a_0$$

由此可知若 $x = \frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}$ 為 $f(x) = 0$ 之一實根時，由 θ 角度畫出的射線經過反射後會射到三維 Lill Path 圖形的終點。 ■

四、封閉的三維 ϕ -Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的三維 ϕ -Lill Path 圖形。舉例而言，如圖十九所示，此圖為 $n = 4$ ， $f(x) = x^4 - \sqrt{2}x^3 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的封閉的三維 $\frac{\pi}{4}$ -Lill Path 圖形，圖中 $a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 為相對應的係數。



圖十九 $f(x) = x^4 - \sqrt{2}x^3 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 之封閉三維 $\frac{\pi}{4}$ -Lill Path 圖形

在證明定理 4 之前，我們先定義若有一函數 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，則 $\text{rev } f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 。

引理 3 實係數多項式函數 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的之充要條件為 $\text{rev } f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的。

〈證明〉

從 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 的終點出發，依 $(-a_0 \vec{i} R^n), (-a_1 \vec{i} R^{n-1}), \dots, (-a_n \vec{i})$ 之路徑行走，走回起點，我們檢驗此路徑是否符合三維 ϕ -Lill Path 的行走規則：連續二段三維 ϕ -Lill Path 行走路徑的向量夾角為 ϕ ，且每一段三維 ϕ -Lill Path 行走路徑的向量皆與前二段 Lill Path 所張之平面夾 ϕ 角，並且方向滿足與前二段 Lill Path 行走向量的外積向量指向平面之同側、異側、同側、異側、.....。

$$\frac{(-\vec{i} R^k) \cdot (-\vec{i} R^{k-1})}{|-\vec{i} R^k| |-\vec{i} R^{k-1}|} = \frac{(\vec{i} R) \cdot \vec{i}}{1 \cdot 1} = \cos \phi$$

所以 $(-\vec{i} R^k)$ 與 $(-\vec{i} R^{k-1})$ 夾 ϕ 角，其中 $k \in \mathbb{N}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{(-\vec{i} R^{k-2}) \cdot [(-\vec{i} R^k) \times (-\vec{i} R^{k-1})]}{|-\vec{i} R^{k-2}| \cdot |-\vec{i} R^k| \cdot |-\vec{i} R^{k-1}| \cdot \sin \phi} &= \frac{(-1) \cdot (\vec{i} R^{k-3}) \cdot [(\vec{i} R^{k-1}) \times (\vec{i} R^{k-2})]}{\sin \phi} \\ &= \frac{(-1)^{k-1} \cdot \vec{i} \cdot [(\vec{i} R^2) \times (\vec{i} R)]}{\sin \phi} = \frac{(-1)^k \sin^2 \phi}{\sin \phi} = (-1)^k \sin \phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right), k \text{ 為偶數} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right), k \text{ 為奇數} \end{cases}, \text{ 其中 } 2 \leq k \leq n。$$

當 k 為偶數時， $(-\vec{i} R^{k-2})$ 與 $(-\vec{i} R^k), (-\vec{i} R^{k-1})$ 所張之平面夾角為 ϕ ，且 $(-\vec{i} R^{k-2})$ 與 $[(-\vec{i} R^k) \times (-\vec{i} R^{k-1})]$ 指向平面的同側；當 k 為奇數時， $(-\vec{i} R^{k-2})$ 與 $(-\vec{i} R^k), (-\vec{i} R^{k-1})$ 所張之平面夾角為 ϕ ，且 $(-\vec{i} R^{k-2})$ 與 $[(-\vec{i} R^k) \times (-\vec{i} R^{k-1})]$ 指向平面的異側。接著我們將 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形的終點移到原點，且讓旋轉或翻轉後的 $(-a_0 \vec{i} R^n)$ 與 $(a_0 \vec{i})$ 同向，旋轉或翻轉後的 $(-a_1 \vec{i} R^{n-1})$ 與 $(a_1 \vec{i} R)$ 同向。若 n 為偶數，則畫出的圖形符合三維 ϕ -Lill Path 為之行走規則，即 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path；若 n 為奇數，則畫出的圖形與 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 對稱 xy 平面。由上述可知 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形可由

$f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形旋轉、翻轉或作對稱得到，故得證 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的之充要條件為 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的。 ■

定理 4 一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。

〈證明〉

我們將 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形以向量方式表示，可得出其路線向量分別為 $a_n \vec{i}, a_{n-1} \vec{i}R, a_{n-2} \vec{i}R^2, \dots, a_1 \vec{i}R^{n-1}, a_0 \vec{i}R^n$ 。所以此圖形為封閉的充要條件為所有向量和為 $\vec{0}$ 。即 $a_n \vec{i} + a_{n-1} \vec{i}R + a_{n-2} \vec{i}R^2 + \dots + a_1 \vec{i}R^{n-1} + a_0 \vec{i}R^n = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{i} \text{rev } f(R) = \vec{0}$ 。

又因為 R 顯然為可逆方陣，故 $\Leftrightarrow \vec{i} \text{rev } f(R)R = \vec{i}R \text{rev } f(R) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{i} \text{rev } f(R)R^2 = \vec{i}R^2 \text{rev } f(R) = \vec{0}$$

因為 ϕ 不為 π 的整數倍，所以易檢查出 $\vec{i}, \vec{i}R, \vec{i}R^2$ 為三個線性獨立的向量，即三向量所構

成之矩陣 $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i}R \\ \vec{i}R^2 \end{pmatrix}$ 可逆。又由上述三個等價條件可知 $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i}R \\ \vec{i}R^2 \end{pmatrix} \text{rev } f(R) = \vec{0} \Leftrightarrow \text{rev } f(R) = \vec{0}$ 。

接著我們令方陣 R 的最小多項式為 $m(x)$ ，即 $m(x)$ 為使得 $m(R) = \mathbf{0}$ （零方陣）且首項係數為 1 的最低次數的多項式。

若 $m(x) = x + a \Rightarrow R + aI = \mathbf{0}, R = -aI$

顯然不成立，故 $\deg m(x) \neq 1$ 。

若 $m(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow R^2 + aR + bI_3 = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi & -\sin^2 \phi & \cos \phi \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \phi = 0 \\ \cos \phi = 1 \\ a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

但因為 ϕ 不為 π 的整數倍，顯然不成立，所以 $\deg m(x) \neq 2$ 。

上述的討論可知 $\deg m(x) \geq 3$ ，由 Cayley-Hamilton 定理：

$$\text{若 } p(x) = \det(xI - R) = \det \begin{bmatrix} x - \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & x & -1 \\ \sin \phi & -\cos \phi & x \end{bmatrix} = x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1$$

則 $p(R) = 0$ 。又 $\deg p(x) = 3$ ，因此 $m(x) = p(x) = \det(xI - R) = x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1$ 。又因為 $\text{rev } f(R) = 0 \Leftrightarrow m(x) | \text{rev } f(x)$ ，所以 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 是 $\text{rev } f(x)$ 之因式。

同理， $\text{rev } f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的 $\Leftrightarrow m(x) | f(x)$ ，又由引理 3 得知： $\text{rev } f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的 $\Leftrightarrow f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的，故得證。且在 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 時，亦符合封閉三維 Lill Path 圖形之特性。 ■

五、終點在特定位置之三維 ϕ -Lill Path

在定理 4 中我們可得知終點在原點時的的充要條件為 $f(x)$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。我們想由此推廣至終點在特定位置時的狀況及其性質，故作了以下定理的證明。

定理 5 一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path 的終點為 (α, β, γ) 時的充要條件為

$$\left[f(x) - \left(\alpha - \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi} \right) x^n - \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi} x^{n-1} - \frac{\gamma}{\sin \phi} x^{n-2} \right] \text{有因式}$$

$$[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]。$$

〈證明〉

令多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 所對應的三維 Lill Path 的終點座標為 (α, β, γ) ，

其向量和為 $a_n \vec{i} + a_{n-1} \vec{i}R + a_{n-2} \vec{i}R^2 + \dots + a_0 \vec{i}R^n = (\alpha, \beta, \gamma)$ 。

$$\text{又} \begin{cases} \vec{i} = (1, 0, 0) \\ \vec{i}R = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \\ \vec{i}R^2 = (\cos^2 \phi, \cos \phi \sin \phi, \sin \phi) \end{cases}$$

因為 $\vec{i}, \vec{i}R, \vec{i}R^2$ 為線性獨立的三個向量，所以 (α, β, γ) 必可寫成這三個向量的線性組合，

$$\text{令 } x\vec{i} + y\vec{i}R + z\vec{i}R^2 = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \cos \phi y + \cos^2 \phi z = \alpha \\ \sin \phi y + \cos \phi \sin \phi z = \beta \\ \sin \phi z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha - \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi} \\ y = \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi} \\ z = \frac{\gamma}{\sin \phi} \end{cases}$$

$$\text{由上述可知向量和可表示為：} (\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma}{\sin \phi} \vec{i}R^2 + \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi} \vec{i}R + \left(\alpha - \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi} \right) \vec{i}$$

因此我們可推得

$$\left(a_n - \alpha + \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi} \right) \vec{i} + \left(a_{n-1} - \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi} \right) \vec{i}R + \left(a_{n-2} - \frac{\gamma}{\sin \phi} \right) \vec{i}R^2 + \dots + a_0 R^n = \vec{0}$$

故可知 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 的終點為 (α, β, γ) 時的充要條件為

$$\left[\left(a_n - \alpha + \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi} \right) x^n + \left(a_{n-1} - \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi} \right) x^{n-1} + \left(a_{n-2} - \frac{\gamma}{\sin \phi} \right) x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 x + a_0 \right]$$

的三維 ϕ -Lill Path 是封閉的，再由定理 4 可知，其充要條件為此多項式有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。 ■

六、 n 維 Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ 。由原點 O 作為起點，依序以 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, -\vec{e}_1, -\vec{e}_2, \dots, -\vec{e}_n, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, -\vec{e}_1, -\vec{e}_2, \dots, -\vec{e}_n, \dots$ 的方向，分別畫出 $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，即為此多項式 $f(x)$ 的 n 維 Lill Path 圖形，且定義 a_0 長度線段之末端為此 n 維 Lill Path 的終點。其中 \vec{e}_i 為第 i 軸的單位向量，且 i 為正整數。

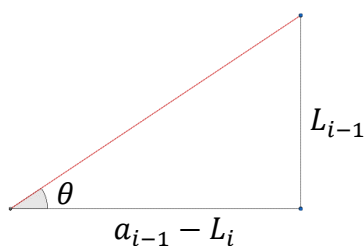
n 維 Lill Path 圖形之射線

定義：從原點作一射線，同樣依循三維 Lill Path 之反射規則在 n 維 Lill Path 各邊反射。

定理 6 自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之 n 維 Lill Path 進行反射，則此射線通過 n 維 Lill Path 終點，則其充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。

〈證明〉

若已知反射後的射線會與 n 維 Lill Path 的終點相交，我們想證明 $(-\tan \theta)$ 是 $f(x)$ 的一實根。假設 L_k, L_{k-1}, \dots, L_1 為角 θ 的對邊長度且令 $x = -\tan \theta$ 。我們發現將 Lill Path 與射線構成的圖形皆可表示為圖二十，其中 i 為大於 1 之正整數：



圖二十 有射線之 n 維 Lill Path 圖形局部放大

故能利用定理 1 之證明方法得證自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的 n 維 Lill Path 進行反射，則此射線通過 n 維 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。



七、封閉的 n 維 Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x)$ 的 n 維 Lill Path 圖形之起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的 n 維 Lill Path 圖形。

定理 7 一實係數多項式函數之 n 維 Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^n + 1)$ 。

〈證明〉

由 n 維 Lill Path 的定義我們可以得知：若令多項式函數 $f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ 所對應的 n 維 Lill Path 的終點座標為 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ ，則

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor} a_{k-i} e^{-i \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \lfloor \frac{i}{n} \rfloor} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n), \text{ 其中}$$

$$\alpha_i = a_{k-i+1} - a_{k-n-i+1} + a_{k-2n-i+1} - a_{k-3n-i+1} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{k-i+1}{n} \rfloor} a_{k-(n \cdot \lfloor \frac{k-i+1}{n} \rfloor + i-1)}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

因此如果此多項式函數 $f(x)$ 的 n 維 Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ 。若已知多項式函數 $f(x)$ 的 n 維 Lill Path 圖形為封閉的，即
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ ，欲證明 $(x^n + 1)$ 整除 $f(x)$ ，於是令 μ 為 $x^n + 1 = 0$ 之一根，
顯然 $\mu^n = -1$ ，則

$$\begin{aligned} f(\mu) &= a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + \cdots + a_k\mu^k \\ &= \mu^k(a_k + a_{k-1}\mu^{-1} + a_{k-2}\mu^{-2} + \cdots + a_0\mu^{-k}) \end{aligned}$$

因為 $\mu^n = -1 \Rightarrow \mu^{2n} = 1$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(\mu) &= \mu^k[(a_k - a_{k-n} + a_{k-2n} - \cdots) + (a_{k-1} - a_{k-n-1} + a_{k-2n-1} - \cdots)\mu^{-1} + \cdots + \\ &\quad (a_{k-n-1} - a_{k-2n-1} + \cdots)\mu^{-n+1}] \\ &= \mu^k(\alpha_1 - \alpha_2\mu^{-1} - \dots - \alpha_n\mu^{-n+1}) \end{aligned}$$

故若 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow f(\mu) = 0$

因此 $(x^n + 1) | f(x)$ ，故得證 $f(x)$ 有一因式為 $(x^n + 1)$ 。

若已知 $(x^n + 1) | f(x)$ ，令 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 為 $x^n + 1 = 0$ 之 n 個根。

由棣美弗定理可知： $x^n = -1 \Rightarrow x = \cos \frac{(2j+1)\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{(2j+1)\pi}{n}$ ， $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$

故 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 為相異根。

$$f(\mu_1) = \mu_1^k(\alpha_1 - \alpha_2\mu_1^{n-1} - \dots - \alpha_n\mu_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2\mu_1^{n-1} - \dots - \alpha_n\mu_1 = 0$$

同理： $f(\mu_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2\mu_2^{n-1} - \dots - \alpha_n\mu_2 = 0$

⋮

$$f(\mu_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2\mu_n^{n-1} - \dots - \alpha_n\mu_n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2\mu_1^{n-1} - \dots - \alpha_n\mu_1 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2\mu_2^{n-1} - \dots - \alpha_n\mu_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 - \alpha_2\mu_n^{n-1} - \dots - \alpha_n\mu_n = 0 \end{cases}$$

因為 $-\mu_i^{n-t} = \frac{1}{\mu_i^t} = \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^t$ ，其中 $t = 1, 2, \dots, n-1$ ，

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\mu_1^{n-1} & \dots & -\mu_1 \\ 1 & -\mu_2^{n-1} & \dots & -\mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\mu_n^{n-1} & \dots & -\mu_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\mu_1} & \dots & \left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{n-1} \\ 1 & \frac{1}{\mu_2} & \dots & \left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{\mu_n} & \dots & \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^{n-1} \end{vmatrix} \text{ 為 Vandermonde } n \text{ 階行列式，故}$$

$$\Delta = \prod_{1 \leq j < i \leq n} \left(\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_j} \right)。$$

又因 $\mu_i \neq \mu_j$ ，故 $\Delta \neq 0$ 。

由克拉瑪公式得證： $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = (0, 0, 0, \dots, 0)$ ■

肆、研究結果

- 一、定理 1 自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之三維 Lill Path 進行反射，則此射線通過三維 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
- 二、定理 2 一實係數多項式函數之三維 Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^3 + 1)$ 。
- 三、定理 3 由原點出發的射線依上述規則在多項函數 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 進行反射，則此射線通過三維 ϕ -Lill Path 終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}\right)$ 。
- 四、定理 4 一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。
- 五、定理 5 一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path 的終點為 (α, β, γ) 時的充要條件為 $\left[f(x) - \left(\alpha - \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi}\right)x^n - \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi}x^{n-1} - \frac{\gamma}{\sin \phi}x^{n-2}\right]$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。
- 六、定理 6 自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之 n 維 Lill Path 進行反射，則此射線通過 n 維 Lill Path 終點之其充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
- 七、定理 7 一實係數多項式函數之 n 維 Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^n + 1)$ 。

伍、討論

此篇研究在 n 維的發展中僅探討一般 Lill Path 之應用，但我們希望也能將 ϕ -Lill Path 的性質同樣推廣至 n 維空間中運用。除此之外，我們還希望可以找到在 Lill Path 上作可以通過終點射線的方法，作為解多項方程式實根的另一種方式。

陸、結論

本篇研究以 Lill 定理為發想核心，再做進一步的延伸。首先，我們將二維的 Lill 定理推廣至三維，利用代數的運算及圖形的觀察，將路徑長度配合其與射線的交點，使用 $(\tan \theta)$ 的形式表述出。最後發現其特性「自原點發射的射線在多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 進行反射，此射線通過三維 Lill Path 終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 」和原 Lill 定理如出一轍。接著，我們先推想出一三維 Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為此三維 Lill Path 所對應之多項式函數有因式 $(x^3 + 1)$ ，再檢驗是否正確。先利用封閉的 Lill Path 圖形其「原點與終點為同一點」的性質，觀察出終點座標與路徑長度的關係。並將 $(x^3 + 1)$ 因式分解，分別經代數計算之後，驗證了此推想為正確的。接下來，我們繼續將三維 Lill Path 圖形延伸至路徑

夾角不為 90 度的三維 ϕ -Lill Path 圖形。我們找到一矩陣 $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$ ，並使用矩

陣 R 定義三維 ϕ -Lill Path 的路線行走規則。接著，我們利用代數的運算及圖形的觀察，將路徑長度配合其與射線的交點，得出由原點發射的射線依上述規則在多項函數 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 進行反射，則此射線可以通過三維 ϕ -Lill Path 終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根

$\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)$ 。再來，我們想找出封閉的三維 ϕ -Lill Path 圖形之充要條件。因其為封閉之圖形，故我們可知所有路徑向量和等於 $\vec{0}$ ，藉由列出向量關係式的方式後得知矩陣 R 的特徵方程式為三維 ϕ -Lill Path 圖形所對應之多項式的因式。接著，我們將終點在原點(封閉的三維 ϕ -Lill Path)推廣至終點在特定位置時的狀況及其性質。利用向量和與終點座標的關係，經由帶換得出終點在特定位置時的充要條件。最後，我們將 Lill 定理推廣至 n 維，利用代數的運算及圖形的推論，使用 $(\tan \theta)$ 的形式表述出路徑長度。最後發現射線通過 n 維 Lill Path 終點的充要條件為

$f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。接著，我們證明出 n 維 Lill Path 圖形為封閉時的充要條件為 $f(x)$ 有因式 $(x^n + 1)$ 。同三維 Lill Path 的證明方法，我們同樣利用封閉的 Lill Path 圖形「起點與終點為同一點」的性質，觀察出終點座標與路徑長度的關係，經代數計算之後驗證了此推想為正確的。

柒、參考資料及其他

- 一、 Thomas C Hull , Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill, *The American Mathematical Monthly* **118(4)**(2011), 307-315
- 二、 Dan Kalman & Mark Verdi, Polynomials with Closed Lill Paths, *Math Mag.* **88** (2015), 3-10
- 三、 Moti Ben-Ari, *The Mathematics of Origami*, Version 4 (2020),
<http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/sites/sci-tea.benari/files/uploads/softwareAndLearningMaterials/origami-math-en.pdf>
- 四、 Lill's method, https://en.wikipedia.org/wiki/Lill%27s_method
- 五、 特殊矩陣(8)：Vandermonde 矩陣（2009 年 12 月 22 日）。線代啟示錄。取自
<https://ccjou.wordpress.com/2009/12/22/%E7%89%B9%E6%AE%8A%E7%9F%A9%E9%99%A3-%E5%85%AB%EF%BC%9Avandermonde-%E7%9F%A9%E9%99%A3/>

【評語】 050413

Lill Path 這件作品係為今年國際科展參賽的作品加以增加結果而得。就數學工作來說，本作品最大的亮點，是能夠證明一實係數多項式之三維 ϕ -Lill Path 為封閉的充分必要條件，為具有 $(x^3 - \cos(\phi)x^2 - \cos(\phi)x + 1)$ 的因式。也給出，並證明，一實係數多項式函之三維 ϕ -Lill Path 的終點為任意位置 (α, β, γ) 時的充分必要條件。因此，這件作品本身的確具有一定的完整性與數學內涵。雖然整個證明的架構，基本上根植於二維 Lill-path 想法的推廣，但是推廣到空間後，由於圖像觀察不再如二維明顯，因此得要靠矩陣運算來描述這些 Lill-path 的轉折變化，再套用 Cayley-Hamilton 的特徵多項式會被其極小多項式整除的性質來完成證明。這樣的證明推廣，雖稱不上重大結果，但就高中生來說，仍是相當不容易的一件事。

作品簡報



全國中小學科學展覽會

LiH Path之立體圖形應用

高級中等學校組 數學科

研究動機

Lill定理是由奧地利工程師愛德華·里爾 (Eduard Lill) 在1867年發現的。其主要在敘述解多項式方程式的實根，等價於在Lill Path圖形中找到一條經過反射後可以射向終點的射線。在Lill定理及所有相關資料 (包括參考資料[1]、[2]、[3]、[4]) 中，我們發現學者們討論的Lill Path皆是在二維空間中加深加廣。基於此，我們思考Lill定理是否能在三維空間中成立，並找出其特性。且進一步探討當三維Lill Path的行進路線夾角不為 $\frac{\pi}{2}$ 時 (三維 ϕ -Lill Path)，此多項式與其三維 ϕ -Lill Path圖形的關係。除此之外，我們還希望將Lill定理推廣至 n 維中運用。

研究目的

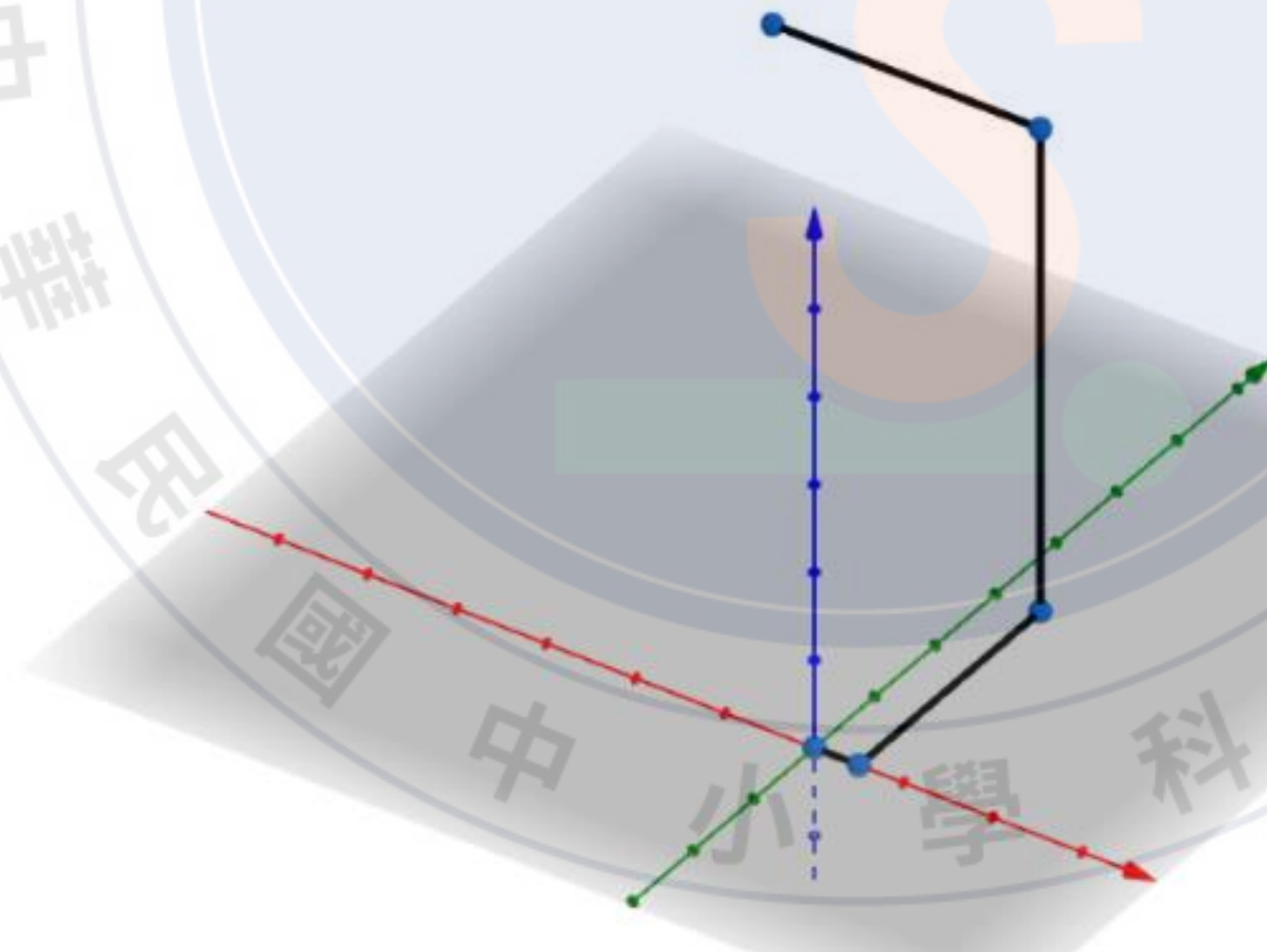
1. 將二維Lill Path圖形延伸至三維，定義出多項式在三維空間中的Lill Path圖形。
2. 證明有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之三維Lill Path進行反射（依三維Lill Path反射規則），此射線通過三維Lill Path終點之充要條件為 $f(x)=0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
3. 證明一實係數多項式函數之三維Lill Path圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^3 + 1)$ 。
4. 找到一矩陣 R ，並使用其定義三維 ϕ -Lill Path圖形（路線夾角不為90度的Lill Path圖形）的路線行走規則。
5. 證明有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path進行反射，此射線通過三維 ϕ -Lill Path終點之充要條件為 $f(x)=0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)$ 。

研究目的

6. 證明一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。
7. 證明一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path的終點為 (α, β, γ) 時的充要條件為
$$\left[f(x) - \left(\alpha - \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi} \right) x^n - \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi} x^{n-1} - \frac{\gamma}{\sin \phi} x^{n-2} \right]$$
有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。
8. 證明自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的 n 維Lill Path進行反射，則此射線通過 n 維Lill Path終點之充要條件為 $f(x)=0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
9. 證明一實係數多項式函數的 n 維Lill Path圖形為封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^n + 1)$ 。

三維Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 。由原點 O 作為起點，依序以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}, \dots$ 的方向，分別畫出 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，即為此多項式 $f(x)$ 的三維Lill Path圖形，且定義 a_0 長度線段之末端為此Lill Path的終點。其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分別為 x 軸、 y 軸、 z 軸正向上的單位向量。

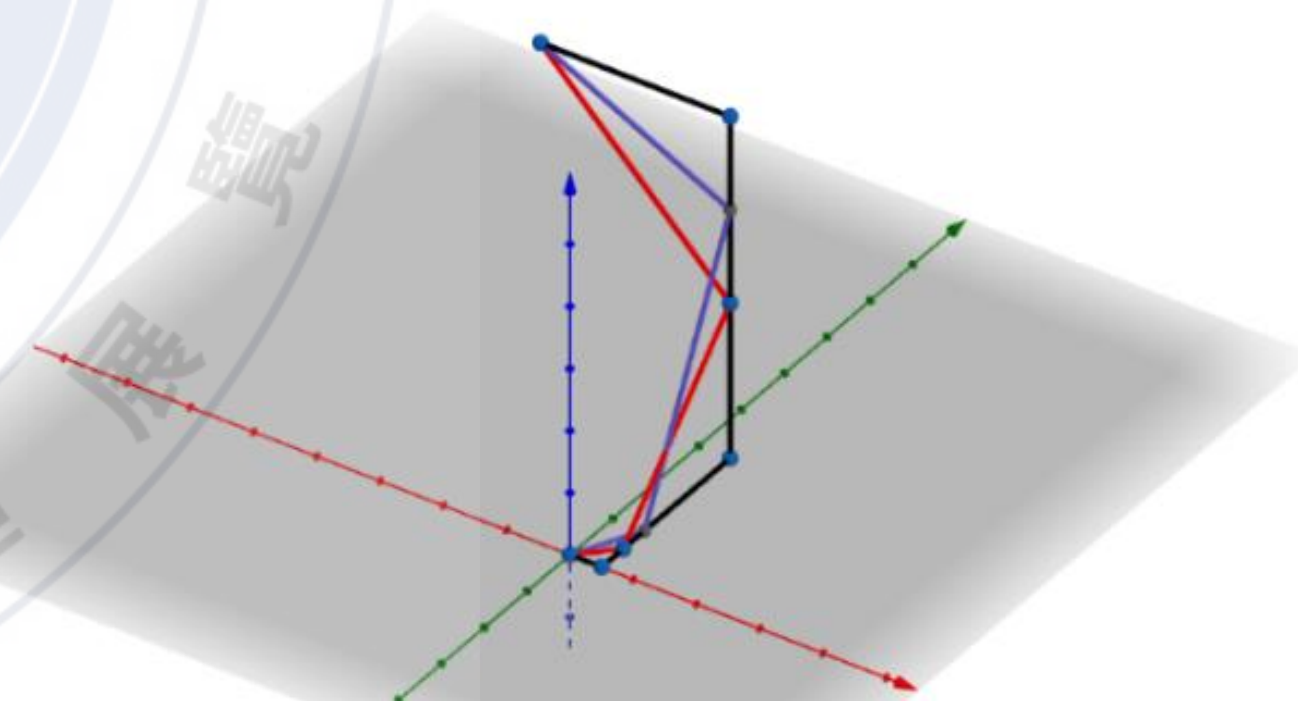


三維Lill Path圖形之射線

從原點作一射線，依下列規則在三維Lill Path各邊反射：首先在第一、二段Lill Path所在平面與第一段Lill Path行走之向量夾 θ 角($0^\circ < \theta < 90^\circ$)畫出射線，並在碰到第二段Lill Path所在之直線後反射；反射後的射線在第二、三段Lill Path所在平面與第二段Lill Path行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第三段Lill Path所在之直線後反射；反射後的射線在第三、四段Lill Path所在平面與第三段Lill Path行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第四段Lill Path所在之直線後反射；.....，以此類推。

定理1

自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之三維Lill Path進行反射，則此射線通過三維Lill Path終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$



封閉的三維Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x)$ 的三維Lill Path圖形之起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的三維Lill Path圖形。

定理2

一實係數多項式函數之三維Lill Path圖形為封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^3 + 1)$

三維 ϕ -Lill Path

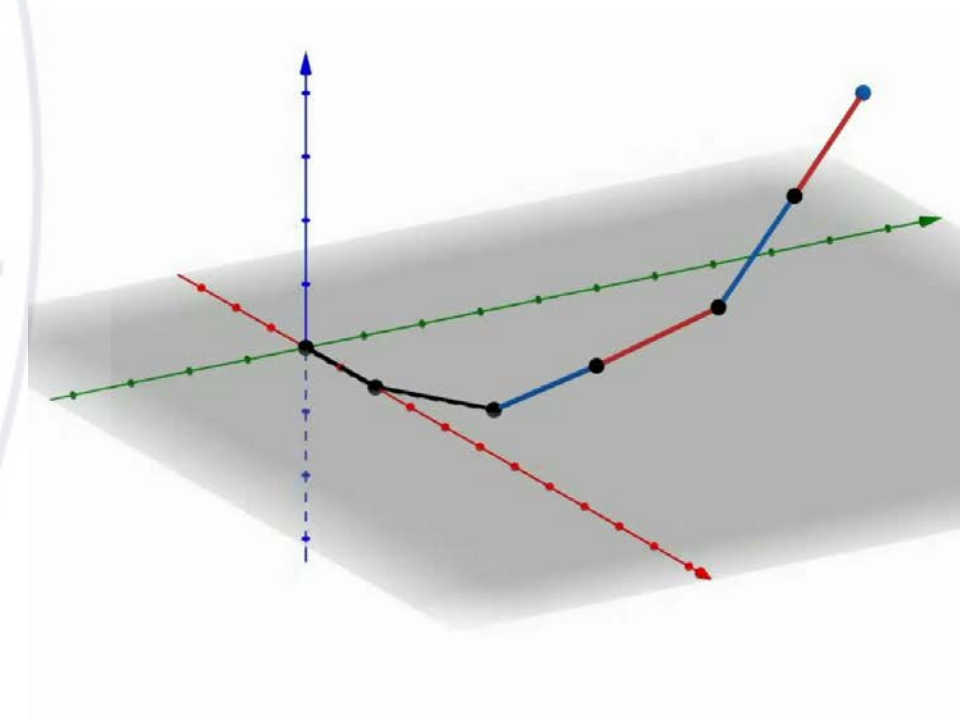
定義：我們將上述三維Lill Path稍作修改，使其路線夾角不一定為90度。我們找到一矩陣

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$
，並定義三維 ϕ -Lill Path之路線規則如下：假設有一多項式函數

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ，由原點 O 作為起點，依序以 $\vec{i}, \vec{i}R, \vec{i}R^2, \dots, \vec{i}R^{n-1}, \vec{i}R^n$ 的方向，分別畫 $a_n, a_{n-1},$

\dots, a_1, a_0 長度的連續線段，即為 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path圖形，且 a_0 長度線段之末端為圖形終點。其中 $0 < \phi < \pi$

、 \vec{i} 為 x 軸正向的單位向量，且在這樣的定義下，顯然 ϕ 等於90度時，即為三維Lill Path圖形。



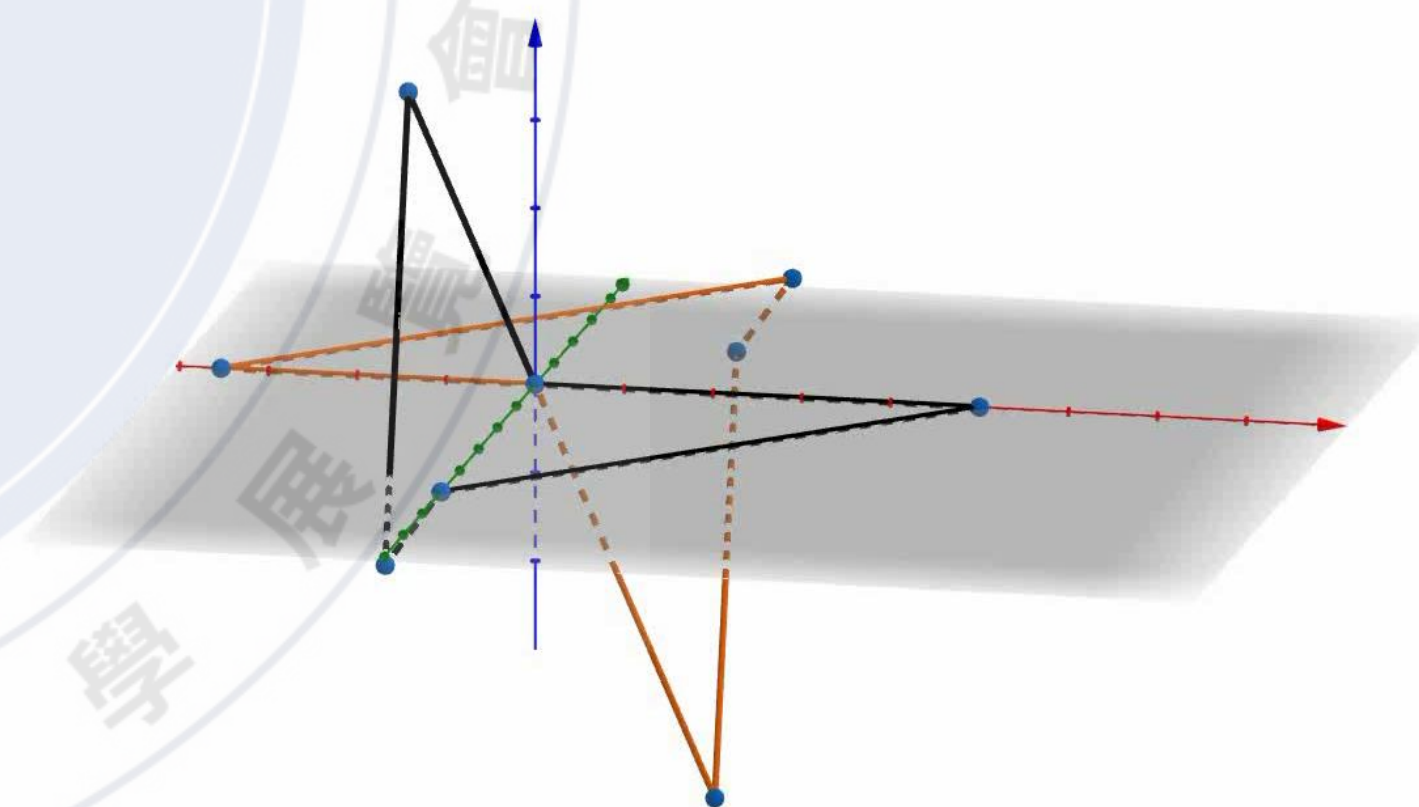
三維 ϕ -Lill Path圖形之射線

從原點作一射線，依下列規則在三維 ϕ -Lill Path各邊反射：首先在第一、二段Lill Path所在平面與第一段Lill Path行走之向量夾 θ 角($0 < \theta < \phi$)畫出射線並在碰到第二段Lill Path所在之直線後反射；反射後的射線在第二、三段Lill Path所在平面與第二段Lill Path行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第三段Lill Path所在之直線後反射；反射後的射線在第三、四段Lill Path所在平面與第三段Lill Path行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第四段Lill Path所在之直線後反射；.....，以此類推。

定理3

由原點出發的射線依上述規則在多項函數 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path進行反射，則此射線可以通過三維 ϕ -Lill Path終點的充要

條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi - \theta)}\right)$



封閉的三維 ϕ -Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 的三維 ϕ -Lill Path圖形起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的三維 ϕ -Lill Path圖形。

定理4

一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path圖形是封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$

終點在特定位置之三維 ϕ -Lill Path

在定理4中我們可得知終點在原點時的的充要條件為 $f(x)$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。我們想由此推廣至終點在特定位置時的狀況及其性質，故作了以下定理的證明。

定理5

一實係數多項式函數之三維 ϕ -Lill Path的終點為 (α, β, γ) 時的充要條件為

$[f(x) - \left(\alpha - \frac{\beta \cos \phi}{\sin \phi}\right) x^n - \frac{\beta - \gamma \cos \phi}{\sin \phi} x^{n-1} - \frac{\gamma}{\sin \phi} x^{n-2}]$ 有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$

n 維Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ 。由原點 O 作為起點，依序以 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, -\vec{e}_1, -\vec{e}_2, \dots, -\vec{e}_n, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, -\vec{e}_1, -\vec{e}_2, \dots, -\vec{e}_n, \dots$ 的方向，分別畫出 $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，即為此多項式 $f(x)$ 的 n 維Lill Path圖形，且定義 a_0 長度線段之末端為此 n 維Lill Path的終點。其中 \vec{e}_i 為第 i 軸的單位向量，且 i 為正整數。

n 維Lill Path圖形之射線

定義：從原點作一射線，同樣依循三維Lill Path之反射規則在 n 維Lill Path各邊反射。

定理6

自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 之 n 維Lill Path進行反射，則此射線通過 n 維Lill Path終點，則其充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$

封閉的 n 維Lill Path

定義：假設有一多項式函數 $f(x)$ 的 n 維Lill Path圖形之起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的 n 維Lill Path圖形。

定理7

一實係數多項式函數之 n 維Lill Path圖形為封閉的，其充要條件為此多項式函數 $f(x)$ 有因式 $(x^n + 1)$

討論

此篇研究在 n 維的發展中僅探討一般Lill Path之應用，但我們希望也能將 ϕ -Lill Path的性質同樣推廣至 n 維空間中運用。除此之外，我們還希望可以找到在Lill Path上作可以通過終點射線的方法，作為解多項方程式實根的另一種方式。

參考資料及其他

- Thomas C Hull , Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill, The American Mathematical Monthly 118(4)(2011), 307-315
- Dan Kalman & Mark Verdi, Polynomials with Closed Lill Paths, Math Mag. 88 (2015), 3-10
- Moti Ben-Ari, The Mathematics of Origami, Version 4 (2020), <http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/sites/sci-tea.benari/files/uploads/softwareAndLearningMaterials/origami-math-en.pdf>
- Lill's method, https://en.wikipedia.org/wiki/Lill%27s_method
- 特殊矩陣(8)：Vandermonde矩陣（2009年12月22日）。線代啟示錄。