中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

團隊合作獎

050411

旋轉三角形跑射線

學校名稱：國立新竹高級中學

作者：	指導老師：
高二 張彧頵 高二 李晧羽 高二 林琮詠	蔡信忠

關鍵詞：旋轉、收斂、射線

摘要

本作品延伸前年數學科展作品《公園跑切線》，研究兩個同內心不同大小的正三角形，中間小三角形旋轉 θ，由大三角形的其中一邊上取一出發點，對小三角形的頂點沿射線到下一個邊上，接著重複此動作，最後路徑會收斂成三角形，研究收斂點的位置和出發點、旋轉角度、邊長比與收斂可能的關係。之後我們分離小三角形與大三角形之內心，並研究其性質與收斂可能性。最後，我們加入了共內心、相似且方向相同之兩一般三角形的情形，同樣研究其性質與收斂可能性。

壹、前言

在看到第 60 屆中小學科展作品《公園跑切線》中，兩方向相同、中心重疊的大小兩正三角形，自大三角形邊上一點開始對小三角形頂點做射線，路徑竟能形成一封閉三角形。不禁開始疑惑，若中間三角形旋轉、甚至移動，還會有如此漂亮的結果嗎?對此充滿好奇的我們用 GeoGebra 嘗試旋轉、移動，發現其路徑還是會收成一三角形。於是我們開始研究旋轉小三角形的路徑性質，大正三角形邊長設為 1，小正三角形設為 λ，旋轉 θ，之後研究到小三角形內心與大三角形內心分離，並慢慢整理出一個能包含所有旋轉移動的一般式。我們定義射線路徑可形成封閉三角形(多邊形)為「射線收斂」。我們的研究目的包含尋找下列各組三角形(多邊形)之收斂三角形(多邊形)性質及收斂可能：

(一) 共內心之兩正三角形邊長比 1: λ，中間三角形旋轉 θ

(二) 共內心之兩正 n 邊形邊長比 1: λ，中間 n 邊形旋轉 θ

(三) 兩正三角形邊長比 1: λ，中間三角形向上移動 r

(四) 兩正三角形邊長比 1: λ，中間三角形向 α 移動 r

(五) 兩正三角形邊長比 1: λ，中間三角形向 α 移動 r 並旋轉 β

(六) 共內心、相似且方向相同之兩一般三角形邊長比 1: λ

貳、研究設備及器材

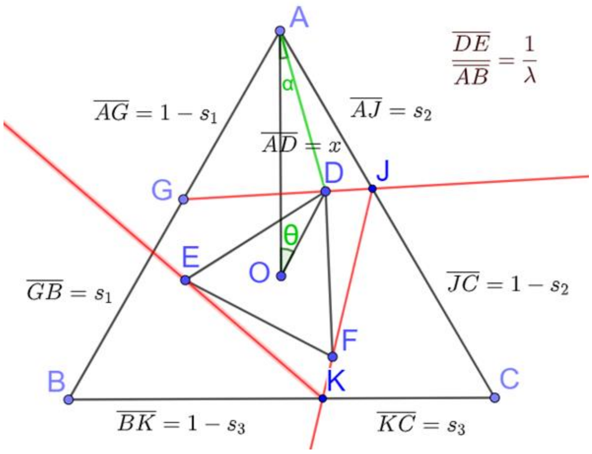
GeoGebra、Excel、矩陣計算器

參、研究過程及方法

一、兩正三角形內心重疊，小正三角形向右旋轉 θ 度 $(0^{\circ} \le \theta \le 60^{\circ})$

由正弦定理與三角形面積公式 $S_{三角形} = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ ，

可得 $S_{n+1} = \dfrac{(1-S_n)(1-\lambda\cos\theta+\sqrt{3}\lambda\sin\theta)}{3(1-S_n)-(1-\lambda\cos\theta)+\sqrt{3}\lambda\sin\theta}$



接著我們以特徵方程尋找不動點，

可解出遞迴式之一般項，

並得到 λ、 $\cos\theta$ 與收斂情形的關係。

(詳細證明見參考資料 4)

(一) $\cos\theta$ 為已知，λ 為變數 $(0^{\circ} \le \theta \le 60^{\circ})$

當 $\lambda < \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\cos\theta}$ 時必不收斂，且 $\lambda < \dfrac{1}{4}$ 時必不收斂。

λ=0.22	θ=15度			
λ	θ			
0.22	15	S1	0.5	0.25
0.22	15	S2	0.546227	0.425712
0.22	15	S3	0.597963	0.492159
0.22	15	S4	0.688759	0.539157
0.22	15	S5	1.126393	0.58871
0.22	15	S6	0.104863	0.668723
0.22	15	S7	0.397287	0.962597
0.22	15	S8	0.477166	-0.05747

以 $\theta = 15^{\circ}$ 為例：

θ 為 15 度時，$\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\cos\theta}$ ≈0.2543 故當 λ=0.22 時必發散

(二) $\cos\theta$ 為變數，λ 為已知 $(0^{\circ} \le \theta \le 60^{\circ})$

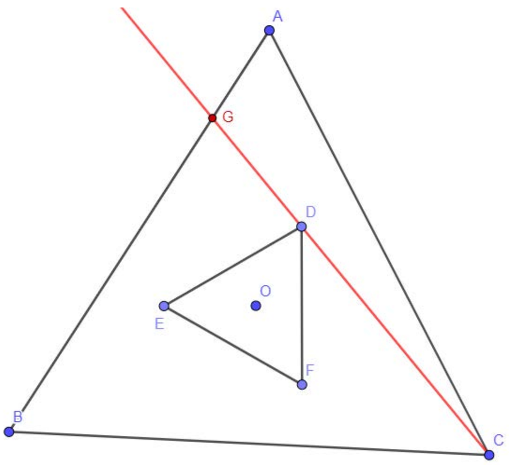
當 $\cos\theta < \dfrac{\frac{1}{2}-\lambda}{\lambda}$ 時必不收斂

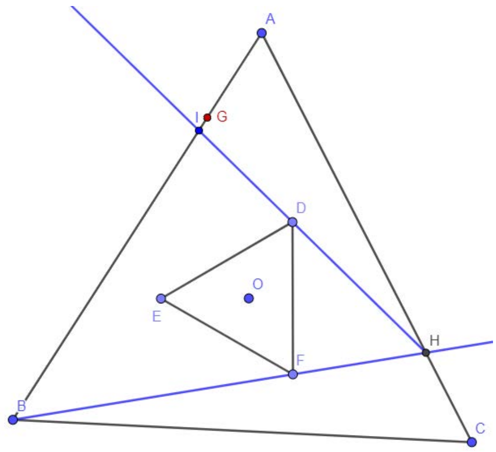
λ=7/24	θ=45度			
λ	θ			
0.29	45.00	S1	0.50000	0.25000
0.29	45.00	S70	0.71639	0.68043
0.29	45.00	S71	0.78792	0.70440
0.29	45.00	S72	1.222289	0.75565
0.29	45.00	S73	0.23187	0.94849
0.29	45.00	S74	0.47333	-0.210222

以 λ=0.29 為例：

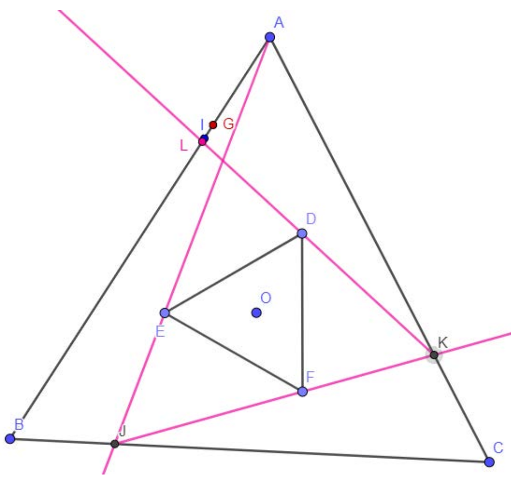
λ 為 0.29 時，$\dfrac{\frac{1}{2}-\lambda}{\lambda}$ ≈0.71428 故當 $\cos\theta = 0.70710(\theta = 45°)$ 時必發散

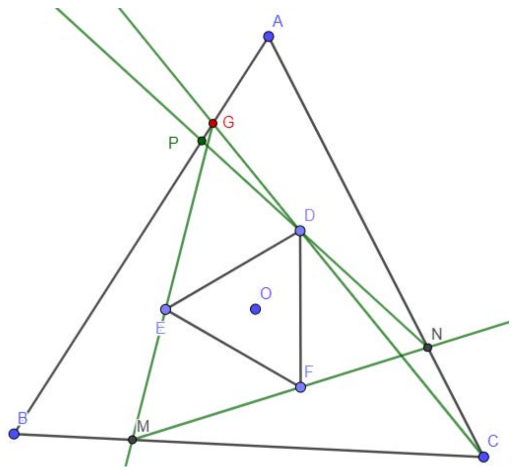
(三)接著我們試著用圖形討論出發點能收斂的範圍，以三角形為例，我們若從 $\overline{AB}$ 上取一點作為出發點，如下圖，從 C 做過 D 一射線交 $\overline{AB}$ 於 G，可以發現當點位於 G 上方時，在第一次射線便會不收斂。以此類推我們推得在 I 點上方則前兩次射線便會發散。



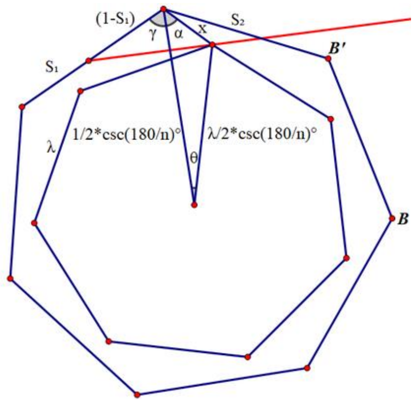


以此類推，L 上方前三次射線便會發散，P 點上方前四次會發散。我們可以看到 P 也是從 C 出發並比 G 多繞一圈。可推得：從 C 點出發逆時針做收斂三角形，在 $\overline{AB}$ 上的收斂點下方即為使順時針做收斂三角形可以收斂的出發點範圍。也就是說，逆時針收斂三角形的收斂點即為順時針收斂三角形的出發點範圍。





二、兩正 n 邊形內心重疊，小正 n 邊形向右旋轉 θ 度



由正弦定理與三角形面積公式 $S_{三角形}=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ ，

可得

$$S_2=\frac{(1-S_1)[(1-\lambda\cos\theta)\cot(\frac{180^\circ}{n})+\lambda\sin\theta]}{2(1-S_1)\sin(\frac{360^\circ}{n})-(1-\lambda\cos\theta)\cot(\frac{180^\circ}{n})+\lambda\sin\theta}$$

以此類推，可得 S_{n+1} 與 S_n 之關係式

接著我們以特徵方程尋找不動點，可解出遞迴式之一般項，並得到λ、 $\cos\theta$ 與收斂情形的關係。(詳細證明見參考資料 4)

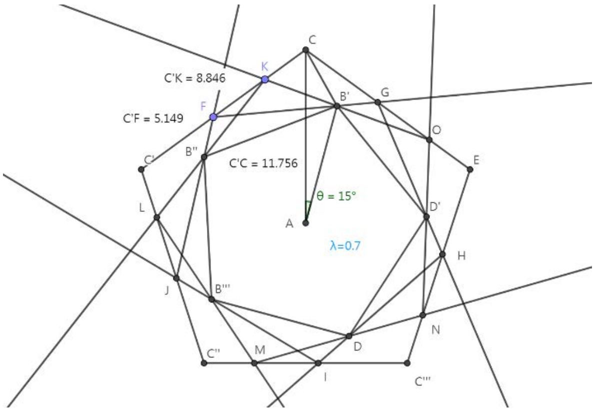
(一) $\cos\theta$ 為已知，λ 為變數 $(0^\circ\le\theta\le\dfrac{180(n-2)^\circ}{n})$

當 $\lambda<\dfrac{1+\cos\frac{360^\circ}{n}}{1+\cos\theta}$ 時必不收斂，且 $\lambda<\dfrac{1+\cos\frac{360^\circ}{n}}{2}$ 時必不收斂。

(二) $\cos\theta$ 為變數，λ 為已知 $(0^\circ\le\theta\le\dfrac{180(n-2)^\circ}{n})$

當 $\cos\theta<\dfrac{1+\cos\frac{360^\circ}{n}-\lambda}{\lambda}$ 時必不收斂

以 θ=15°向右旋轉，λ=0.7 之正五邊形為例：



圖形收斂結果之線段比符合上述結論

因接下來討論的情況如果繼續用特徵方程式計算的話方程式過於複雜，我們改用矩陣探討射線路徑之收斂情形。

定理一:A，B 為兩二階方陣，則 AB、BA 之特徵值相同。

證明:

設$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$，

$BA=\begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}$，矩陣之特徵值為$t$。

若有一矩陣$\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$，則其特徵值$t$必滿足$\begin{vmatrix} k-t & l \\ m & n-t \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow t^2-(k+n)t+kn-lm=0$

以二次方程公式解求矩陣 AB、矩陣 BA 之特徵值

AB 之特徵值：$t^2-(ap+br+cq+ds)t+(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)=0$

BA 之特徵值：$t^2-(ap+cq+br+ds)t+(ap+cq)(br+ds)-(bp+dq)(ar+cs)=0$

又$ap+br+cq+ds=ap+cq+br+ds$，$(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)=$

$apds+brcq-aqdr-bscp=(ap+cq)(br+ds)-(bp+dq)(ar+cs)$

$\therefore$可發現矩陣 AB、矩陣 BA 之解具同步性且完全相同，故得證。

接著我們利用矩陣表示遞迴式，求出其收斂情形並證明定理(二)

令$A_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，$A_{n+1}=\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\dfrac{aA_n+b}{cA_n+d}=\dfrac{aP_n+bQ_n}{cP_n+dQ_n}$ ，$\begin{pmatrix}P_{n+1}\\Q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}$ ，

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$之兩特徵值分別為$t_1$、$t_2$。

若$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$可對角化，即$(\mathrm{a}-d)^2+4bc\neq 0$。

則我們可將$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$對角化得出

$$\begin{pmatrix}P_{n+1}\\Q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&g\\f&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1&0\\0&t_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&g\\f&h\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}P_n\\Q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&g\\f&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1{}^n&0\\0&t_2{}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&g\\f&h\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}P_1\\Q_1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}P_{n+1}\\Q_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{eh-gf}\begin{pmatrix}eht_1{}^n-gft_2{}^n&-egt_1{}^n+egt_2{}^n\\fht_1{}^n-fht_2{}^n&-fgt_1{}^n+eht_2{}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\Q_1\end{pmatrix}$$

令$|t_1|\geq|t_2|\ (t_1,t_2\in R)\Rightarrow A_{n+1}=\dfrac{P_1(eh-gf(\frac{t_2}{t_1})^n)-Q_1(eg-eg(\frac{t_2}{t_1})^n)}{P_1(fh-fh(\frac{t_2}{t_1})^n)-Q_1(fg-eh(\frac{t_2}{t_1})^n)}$

由此可得出定理二(詳細證明見參考資料 4)：

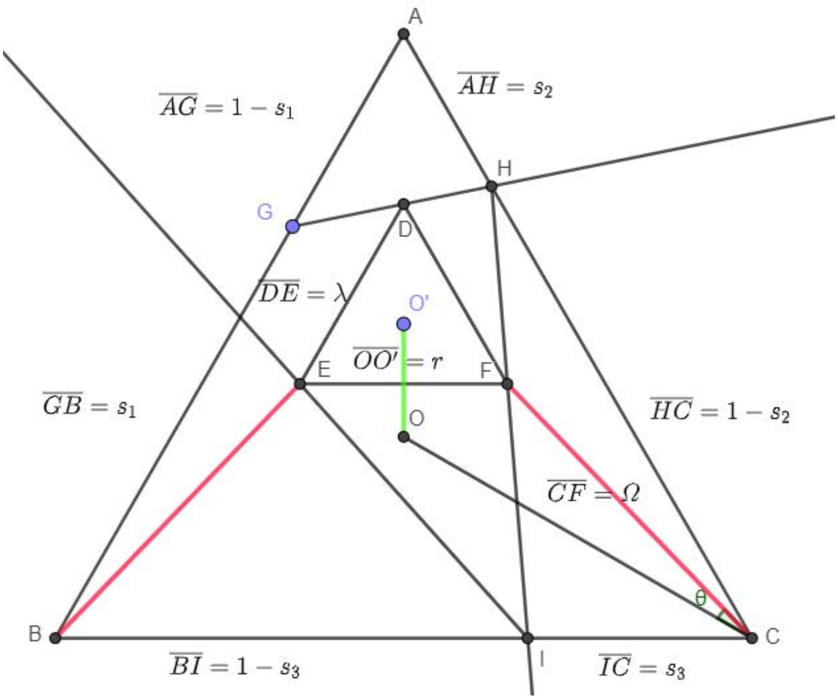
(一)若$|t_1|>|t_2|>0$， $\lim\limits_{n\to\infty}A_{n+1}=\dfrac{P_1eh-Q_1eg}{P_1fh-Q_1fg}=\dfrac{e}{f}$

(二)若$t_2=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_{n+1}=\dfrac{P_1eht_1{}^n-Q_1egt_1{}^n}{P_1fht_1{}^n-Q_1gft_1{}^n}=\dfrac{e}{f}$ ，結果同(一)。

(三) 若$t_1=-t_2$，A_{n+1}發散。

(四) 若$t_1=t_2$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_{n+1}=t_1$。

三、兩三角形內心重疊後，將中間三角形垂直上移 r



由正弦定理及三角形面積公式，可得 S_1 與 S_2 、 S_2 與 S_3 、 S_3 與 S_4 之關係式(詳細證明見參考資料 4)

$$1-S_2=\frac{(1-S_1)(3-(1-\lambda)+\sqrt{3}r)+\sqrt{3}r-(1-\lambda)}{3(1-S_1)+\sqrt{3}r-(1-\lambda)}$$

$$1-S_3=\frac{(1-S_2)(3+\sqrt{3}r-(1-\lambda))-2\sqrt{3}r-(1-\lambda)}{3(1-S_2)-2\sqrt{3}r-(1-\lambda)}$$

$$1-S_4=\frac{(1-S_3)(3-2\sqrt{3}r-(1-\lambda)+\sqrt{3}r-(1-\lambda)}{3(1-S_3)+\sqrt{3}r-(1-\lambda)}$$

令 $A=\sqrt{3}r-(1-\lambda)$ ， $B=-2\sqrt{3}r-(1-\lambda)$

$$\Rightarrow (1-S_2)=\frac{(1-S_1)(3+A)+A}{3(1-S_1)+A} \quad , \quad (1-S_3)=\frac{(1-S_2)(3+A)+B}{3(1-S_2)+B} \quad ,$$

$$(1-S_4)=\frac{(1-S_3)(3+B)+A}{3(1-S_3)+A}$$

令$1-S_n=a_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，$C=\begin{pmatrix}3+A & A\\ 3 & A\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3+A & B\\ 3 & B\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}3+B & A\\ 3 & A\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=EDC\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow\begin{pmatrix}P_{3n+5}\\ Q_{3n+5}\end{pmatrix}=CED\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}P_{3n+6}\\ Q_{3n+6}\end{pmatrix}=DCE\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}$$

$\because$依據定理一，矩陣$(ED)C$與矩陣$C(ED)$之兩個特徵值完全相同，而矩陣$(DC)E$與矩陣$E(DC)$、矩陣$(CE)D$與矩陣$D(CE)$同理

$\therefore$由定理一可知，上面三式會同時收斂或發散。

r=0.25	λ=0.25				
1-s1	0.25	1-s2	0.816987	1-s3	0.689827
1-s4	0.36389	1-s5	0.851102	1-s6	0.712158
1-s7	0.367478	1-s8	0.851695	1-s9	0.712503
1-s10	0.367531	1-s11	0.851703	1-s12	0.712508
1-s13	0.367532	1-s14	0.851704	1-s15	0.712508
1-s16	0.367532	1-s17	0.851704	1-s18	0.712508
1-s19	0.367532	1-s20	0.851704	1-s21	0.712508
1-s22	0.367532	1-s23	0.851704	1-s24	0.712508
1-s1	0.5	1-s2	0.866025	1-s3	0.720463
1-s4	0.368746	1-s5	0.8519	1-s6	0.712622
1-s7	0.36755	1-s8	0.851706	1-s9	0.71251
1-s10	0.367532	1-s11	0.851704	1-s12	0.712508
1-s13	0.367532	1-s14	0.851704	1-s15	0.712508
1-s16	0.367532	1-s17	0.851704	1-s18	0.712508
1-s19	0.367532	1-s20	0.851704	1-s21	0.712508
1-s22	0.367532	1-s23	0.851704	1-s24	0.712508

上表為利用遞迴式之收斂過程

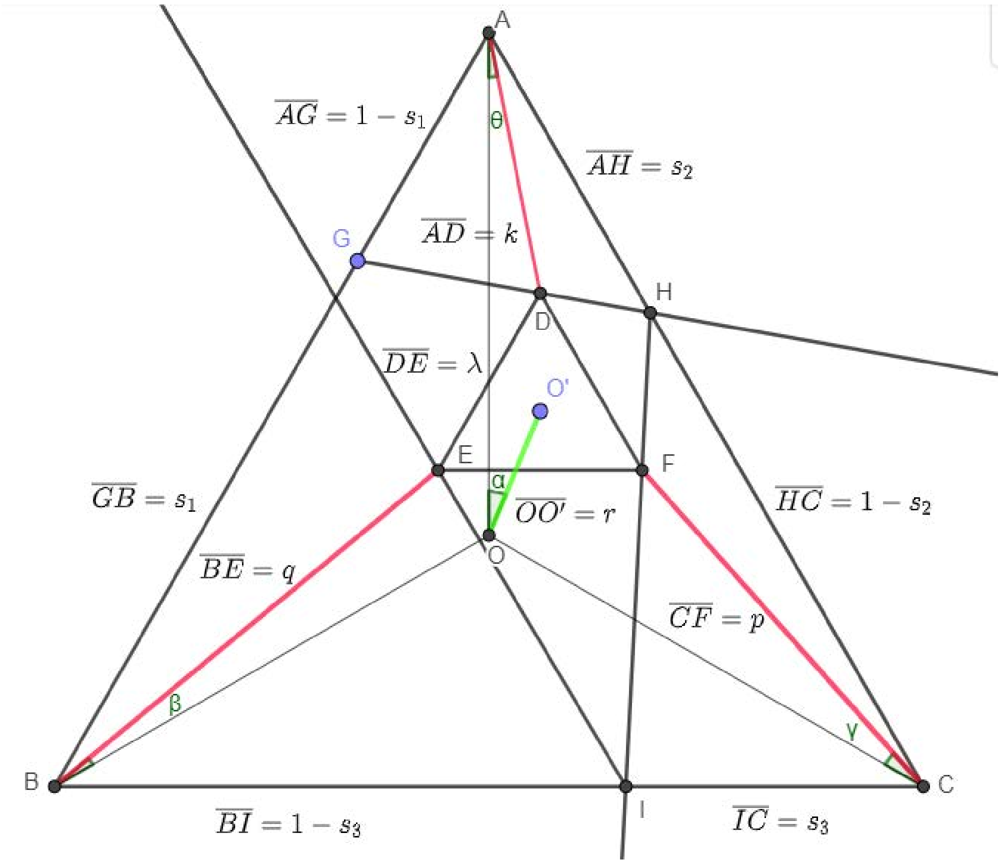
下面則以矩陣對角化之方式，以 S_2 所在邊為例

$$\begin{pmatrix}5.16117740 & -3.25186251\\ 6.03677858 & -3.79843692\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63246785 & 0.85170358\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.01963146 & 0\\ 0 & 1.34310902\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4.56130030 & 3.88487580\\ 4.56130030 & -2.88487580\end{pmatrix}$$

上圖為矩陣 CED 之對角化結果，並利用定理二即可求出收斂值:0.85170358

我們可以發現三式會同時收斂且兩方法所得結果相同，符合上述之結果

四、兩正三角形內心重疊後，小三角形朝與水平夾角∝度方向移動 r



(一)三邊之關係式

由正弦定理及三角形面積公式，可得 S_1 與 S_2 、 S_2 與 S_3 、 S_3 與 S_4 之關係式(詳細證明見參考資料 4)

$$1-S_2=\frac{(1-S_1)(3-(1-\lambda)+\sqrt{3}r\cos\alpha-3r\sin\alpha)+\sqrt{3}r(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)-(1-\lambda)}{3(1-S_1)+\sqrt{3}r(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)-(1-\lambda)}$$

$$1-S_3=\frac{(1-S_2)(3-(1-\lambda)-r\sqrt{3}\cos(60^\circ+\alpha)+3r\sin(60^\circ+\alpha))-(1-\lambda)-r\sqrt{3}(\cos(60^\circ+\alpha)+\sqrt{3}\sin(60^\circ+\alpha))}{3(1-S_2)-r\sqrt{3}(\cos(60^\circ+\alpha)+\sqrt{3}\sin(60^\circ+\alpha))-(1-\lambda)}$$

$$1-S_4=\frac{(1-S_3)(3-(1-\lambda)-r\sqrt{3}\cos(60^\circ-\alpha)-3r\sin(60^\circ-\alpha))-(1-\lambda)-r\sqrt{3}\cos(60^\circ-\alpha)+3r\sin(60^\circ-\alpha)}{3(1-S_3)-r\sqrt{3}\cos(60^\circ-\alpha)+3r\sin(60^\circ-\alpha)-(1-\lambda)}$$

(二)推導出最終遞迴式

令$1-S_n=a_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，

$A=\sqrt{3}r\cos\alpha-3r\sin\alpha-(1-\lambda)$、$B=\sqrt{3}r\cos\alpha+3r\sin\alpha-(1-\lambda)$、$C=-2\sqrt{3}r\cos\alpha-(1-\lambda)$

令 $D=\begin{pmatrix}3+\mathrm{A} & B\\ 3 & B\end{pmatrix}$、$E=\begin{pmatrix}3+B & C\\ 3 & C\end{pmatrix}$、$F=\begin{pmatrix}3+C & A\\ 3 & A\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=FED\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}\quad \Rightarrow\begin{pmatrix}P_{3n+5}\\ Q_{3n+5}\end{pmatrix}=DFE\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}P_{3n+6}\\ Q_{3n+6}\end{pmatrix}=EDF\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}$$

由定理一可知，上面三式會同時收斂或發散

λ=0.25	r=0.125	α=30度			
1-S1	0.5	1-S2	0.666667	1-S3	0.714286
1-S4	0.423077	1-S5	0.645161	1-S6	0.701493
1-S7	0.417355	1-S8	0.64311	1-S9	0.700165
1-S10	0.416743	1-S11	0.642885	1-S12	0.700018
1-S13	0.416675	1-S14	0.64286	1-S15	0.700002
1-S16	0.416668	1-S17	0.642857	1-S18	0.700000
1-S19	0.416667	1-S20	0.642857	1-S21	0.700000
1-S22	0.416667	1-S23	0.642857	1-S24	0.700000
1-S1	0.7	1-S2	0.695652	1-S3	0.728814
1-S4	0.429204	1-S5	0.647273	1-S6	0.702838
1-S7	0.417972	1-S8	0.643335	1-S9	0.700311
1-S10	0.416811	1-S11	0.64291	1-S12	0.700035
1-S13	0.416683	1-S14	0.642863	1-S15	0.700004
1-S16	0.416668	1-S17	0.642858	1-S18	0.700000
1-S19	0.416667	1-S20	0.642857	1-S21	0.700000
1-S22	0.416667	1-S23	0.642857	1-S24	0.700000

上表為利用遞迴式之收斂過程

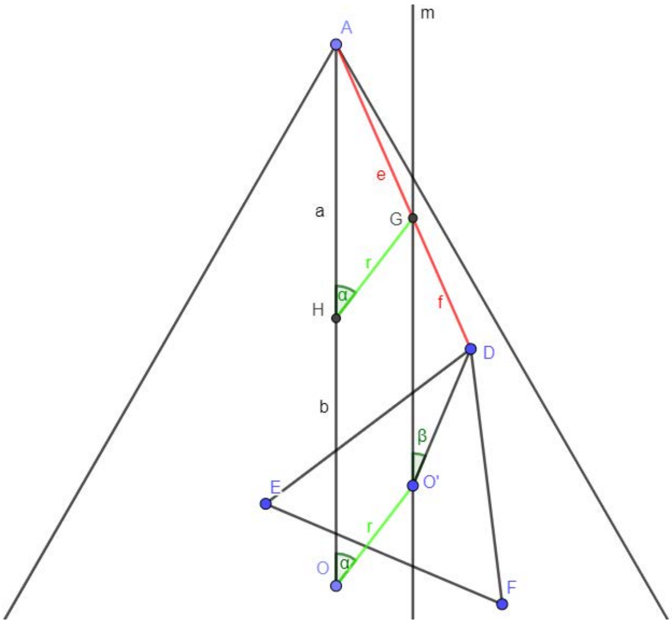
下面則以矩陣對角化之方式，以 S_2 所在邊為例

$$\begin{pmatrix} 3.902344 & -1.898438 \\ 5.90625 & -2.847656 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.642857 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.105469 & 0 \\ 0 & 0.949219 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 4.5 \\ 7 & -3.5 \end{pmatrix}$$

上圖為矩陣 DFE 之對角化結果，並利用定理二即可求出收斂值:0.642857

我們可以發現三式會同時收斂且兩方法所得結果相同，符合上述之結果

五、兩正三角形內心重疊後，小三角形朝水平夾角∝度方向移動 r 並旋轉 β 度



(一) S_1、S_2 之關係

由正弦定理可知 $\dfrac{r}{\sin\theta}=\dfrac{e}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin(\alpha+\theta)}\Rightarrow\sin\alpha\cot\theta=\dfrac{a}{r}-\cos\alpha$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda}{\sin\theta}=\frac{f}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin(\beta+\theta)}\quad\Rightarrow\sin\beta\cot\theta=\frac{\sqrt{3}b}{\lambda}-\cos\beta$$

$$\Rightarrow e=\frac{r\sin\alpha}{\sin\theta}\text{ ，}f=\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\frac{\sin\beta}{\sin\theta}$$

又由三角形面積公式，可得

$$\sqrt{3}S_2(1-S_1)=(1-S_1)(e+f)(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+S_2(e+f)(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)$$

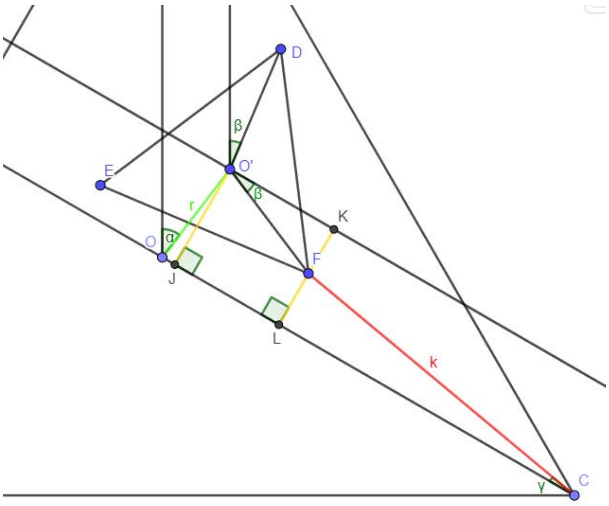
$$=(1-S_1)(a-r\cos\alpha+\sqrt{3}r\sin\alpha+b-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta+\lambda\sin\beta)$$

$$+S_2(a-r\cos\alpha-\sqrt{3}r\sin\alpha+b-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta-\lambda\sin\beta)$$

$$\Rightarrow S_2=\frac{(1-S_1)(a-r\cos\alpha+r\sqrt{3}\sin\alpha+b-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta+\lambda\sin\beta)}{\sqrt{3}(1-S_1)-a+r\cos\alpha+r\sqrt{3}\sin\alpha-b+\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta+\lambda\sin\beta}$$

$$1-S_2=\frac{(1-S_1)(\sqrt{3}r\cos\alpha-3r\sin\alpha+\lambda\cos\beta-\sqrt{3}\lambda\sin\beta+2)-1+r\sqrt{3}\cos\alpha+3r\sin\alpha+\lambda\cos\beta+\lambda\sqrt{3}\sin\beta}{3(1-S_1)+3r\sin\alpha+r\sqrt{3}\cos\alpha+\sqrt{3}\lambda\sin\beta+\lambda\cos\beta-1}$$

(二) S_2、S_3 之關係



由正弦定理可知

$$k\sin\gamma=r\sin(60^\circ+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\sin\beta \text{ ， } k\cos\gamma+\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta-r\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

又由三角形面積公式，可得

$$\sqrt{3}S_3(1-S_2)=(1-S_2)k(\cos\gamma-\sqrt{3}\sin\gamma)+S_3k(\cos\gamma+\sqrt{3}\sin\gamma)$$

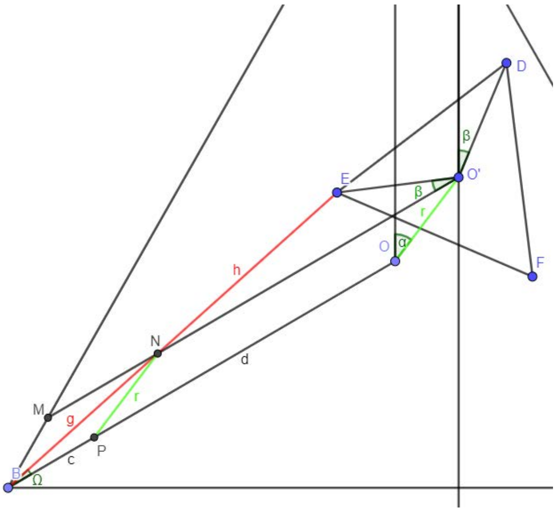
$$=(1-S_2)(\frac{\sqrt{3}}{3}+r\cos(60^\circ+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta-r\sqrt{3}\sin(60^\circ+\alpha)+\lambda\sin\beta)$$

$$+S_3(\frac{\sqrt{3}}{3}+r\cos(60^\circ+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta+r\sqrt{3}\sin(60^\circ+\alpha)-\lambda\sin\beta)$$

$$\Rightarrow S_3=\frac{(1-S_2)(1+r\sqrt{3}\cos(60^\circ+\alpha)-\lambda\cos\beta-3r\sin(60^\circ+\alpha)+\sqrt{3}\lambda\sin\beta)}{3(1-S_2)-1-r\sqrt{3}\cos(60^\circ+\alpha)+\lambda\cos\beta-3r\sin(60^\circ+\alpha)+\sqrt{3}\lambda\sin\beta}$$

$$1-S_3=\frac{(1-S_2)(2+r\sqrt{3}\cos\alpha+\lambda\cos\beta+3r\sin\alpha-\sqrt{3}\lambda\sin\beta)-1-2\sqrt{3}r\cos\alpha+\lambda\cos\beta+\sqrt{3}\lambda\sin\beta}{3(1-S_2)-1-2\sqrt{3}r\cos\alpha+\lambda\cos\beta+\sqrt{3}\lambda\sin\beta}$$

(三) S_3、S_4之關係



由正弦定理可知

$$g=\frac{r\sin(120^\circ+\alpha)}{\sin\Omega}=\frac{c\sin(120^\circ+\alpha)}{\sin(60^\circ-\alpha-\Omega)}\quad，\quad h=\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\frac{\sin\beta}{\sin\Omega}=\frac{d\sin\beta}{\sin(\beta+\Omega)}\quad，$$

$$\frac{\sin(60^\circ-\alpha-\Omega)}{\sin\Omega}=\frac{c}{r}$$

$$\Rightarrow \sin\beta\cot\Omega=\frac{\sqrt{3}d}{\lambda}-\cos\beta\quad，\quad \sin(60^\circ-\alpha)\cot\Omega=\frac{c}{r}+\cos(60^\circ-\alpha)$$

又由三角形面積公式，可得

$$\sqrt{3}S_4(1-S_3)=(1-S_3)(g+h)(\cos\Omega+\sqrt{3}\sin\Omega)+S_4(g+h)(\cos\Omega-\sqrt{3}\sin\Omega)$$

$$=(1-S_3)(r\sqrt{3}\sin(60^\circ-\alpha)+c+r\cos(60^\circ-\alpha)+\lambda\sin\beta+d-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta)$$

$$+S_4(c+r\cos(60^\circ-\alpha)-r\sqrt{3}\sin(60^\circ-\alpha)-\lambda\sin\beta+d-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda\cos\beta)$$

$$\Rightarrow 1-S_4=\frac{(1-S_3)(-\sqrt{3}r\cos(60^\circ-\alpha)-3r\sin(60^\circ-\alpha)+r\cos(60^\circ-\alpha)+\lambda\cos\beta-\sqrt{3}\lambda\sin\beta+2)}{3(1-S_3)+3r\sin(60^\circ-\alpha)-r\sqrt{3}\cos(60^\circ-\alpha)+\sqrt{3}\lambda\sin\beta+\lambda\cos\beta-1}$$

$$+\frac{-1-r\sqrt{3}\cos(60^\circ-\alpha)+3r\sin(60^\circ-\alpha)+\lambda\cos\beta+\lambda\sqrt{3}\sin\beta}{3(1-S_3)+3r\sin(60^\circ-\alpha)-r\sqrt{3}\cos(60^\circ-\alpha)+\sqrt{3}\lambda\sin\beta+\lambda\cos\beta-1}$$

(四)推導出最終遞迴式

令$1-S_n=a_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，

$$A=\sqrt{3}r\cos\alpha-3r\sin\alpha+\lambda\cos\beta-\sqrt{3}\lambda\sin\beta+2$$

$$B=\sqrt{3}r\cos\alpha+3r\sin\alpha+\lambda\cos\beta+\sqrt{3}\lambda\sin\beta-1$$

$$C=\sqrt{3}r\cos\alpha+3r\sin\alpha+\lambda\cos\beta-\sqrt{3}\lambda\sin\beta+2$$

$$D=-2\sqrt{3}r\cos\alpha+\lambda\cos\beta+\lambda\sqrt{3}\sin\beta-1$$

$$E=-2\sqrt{3}r\cos\alpha+\lambda\cos\beta-\lambda\sqrt{3}\sin\beta+2$$

$$F=\sqrt{3}r\cos\alpha-3r\sin\alpha+\lambda\cos\beta+\sqrt{3}\lambda\sin\beta-1$$

$J=\begin{pmatrix}\mathrm{A} & B\\ 3 & B\end{pmatrix}$、$K=\begin{pmatrix}C & D\\ 3 & D\end{pmatrix}$、$L=\begin{pmatrix}E & F\\ 3 & F\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix} && \begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=LKJ\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix}\\
\Rightarrow&\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow && \begin{pmatrix}P_{3n+5}\\ Q_{3n+5}\end{pmatrix}=JLK\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}\\
&\begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix} && \begin{pmatrix}P_{3n+6}\\ Q_{3n+6}\end{pmatrix}=KJL\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由定理一可知，上面三式會同時收斂或發散

λ=0.25	r=0.125	α=30度	β=15度		
1-S1	0.500000	1-S2	0.645685	1-S3	0.650511
1-S4	0.379144	1-S5	0.618840	1-S6	0.632737
1-S7	0.370384	1-S8	0.615993	1-S9	0.630649
1-S10	0.369306	1-S11	0.615630	1-S12	0.630380
1-S13	0.369166	1-S14	0.615583	1-S15	0.630345
1-S16	0.369147	1-S17	0.615577	1-S18	0.630340
1-S19	0.369145	1-S20	0.615576	1-S21	0.630340
1-S22	0.369145	1-S23	0.615576	1-S24	0.630340
1-S1	0.700000	1-S2	0.666724	1-S3	0.662395
1-S4	0.384613	1-S5	0.620531	1-S6	0.633958
1-S7	0.371009	1-S8	0.616202	1-S9	0.630804
1-S10	0.369386	1-S11	0.615657	1-S12	0.630400
1-S13	0.369176	1-S14	0.615586	1-S15	0.630348
1-S16	0.369149	1-S17	0.615577	1-S18	0.630341
1-S19	0.369145	1-S20	0.615576	1-S21	0.630340
1-S22	0.369145	1-S23	0.615576	1-S24	0.630340

上表為利用遞迴式之收斂過程

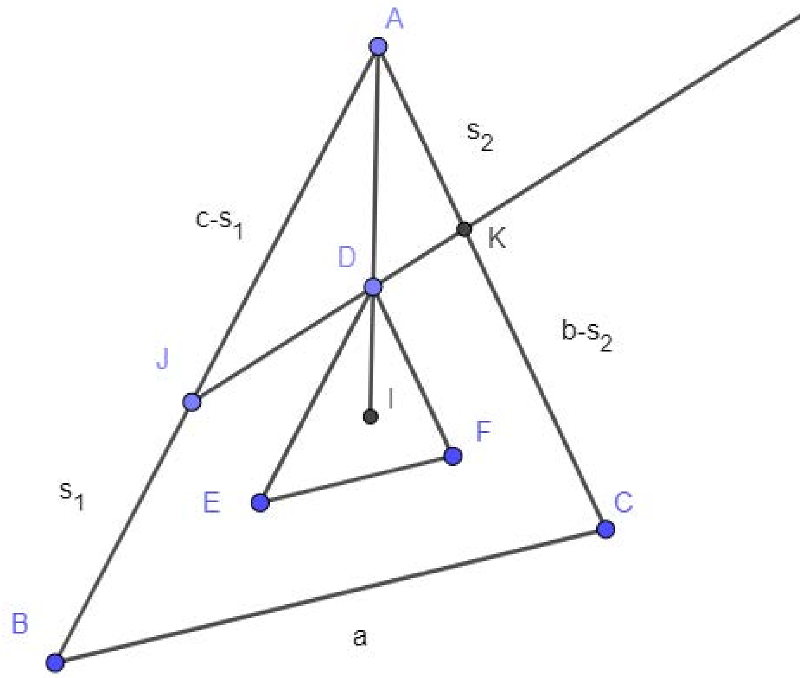
下面則以矩陣對角化之方式，以 S_2 所在邊為例

$$\begin{pmatrix} 3.713420 & -1.757333 \\ 5.850206 & -2.742602 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.487981 & 0.615573 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.112188 & 0 \\ 0 & 0.858629 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7.837470 & 4.824538 \\ 7.837470 & -3.824538 \end{pmatrix}$$

上圖為矩陣 JLK 之對角化結果，並利用定理二即可求出收斂值:0.615573

我們可以發現三式會同時收斂且兩方法所得結果相同，符合上述之結果

六、共內心、相似且方向相同之兩一般三角形邊長比 1:λ



我們發現在討論不規則三角形的情形時，因為內角不再固定為 60°，先前使用面積求關係式的方法將不再可行。所以在接下來的推導我們則是改用向量的方式解決。

$$\overrightarrow{AD}=(1-\lambda)\overrightarrow{AI}=\frac{(1-\lambda)b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{(1-\lambda)c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{(1-\lambda)bc}{(c-S_1)(a+b+c)}\overrightarrow{AJ}+\frac{(1-\lambda)bc}{S_2(a+b+c)}\overrightarrow{AK}$$

又 J，D，K 共線⇒ $\frac{(1-\lambda)cb}{a+b+c}(\frac{1}{c-S_1}+\frac{1}{S_2})=1$

同理 $\frac{(1-\lambda)ba}{a+b+c}(\frac{1}{b-S_2}+\frac{1}{S_3})=1$ ， $\frac{(1-\lambda)ac}{a+b+c}(\frac{1}{a-S_3}+\frac{1}{S_4})=1$

接著我們令 $m_0=\frac{1-\lambda}{a+b+c},m=\frac{(1-\lambda)abc}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_2}=\frac{1}{m_0bc}-\frac{1}{c-S_1}=\frac{c-S_1-m_0bc}{m_0bc(c-S_1)} \quad \Rightarrow S_2=\frac{m_0bc(c-S_1)}{c-S_1-m_0bc}=\frac{m(c-S_1)}{a(c-S_1)-m}$$

同理 $S_3=\frac{m_0ab(b-S_2)}{b-S_2-m_0ab}=\frac{m(b-S_2)}{c(b-S_2)-m}$ ， $S_4=\frac{m_0ca(a-S_3)}{a-S_3-m_0ca}=\frac{m(a-S_3)}{b(a-S_3)-m}$

令 $S_n = \dfrac{p_n}{q_n}$

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & mb \\ -b & cb-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & ma \\ -c & ba-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{3n+3} \\ q_{3n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{3n} \\ q_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_{3n+4} \\ q_{3n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{3n+1} \\ q_{3n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{3n+5} \\ q_{3n+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{3n+2} \\ q_{3n+2} \end{pmatrix}$$

由定理一可知，上面三式會同時收斂或發散

a=2	b=2	c=3	λ=0.25		
S1	1.000000	S2	0.947368	S3	0.722892
S4	1.294437	S5	1.031737	S6	0.768902
S7	1.345402	S8	1.051327	S9	0.781720
S10	1.361052	S11	1.057744	S12	0.786132
S13	1.366601	S14	1.060068	S15	0.787758
S16	1.368667	S17	1.060940	S18	0.788371
S19	1.369450	S20	1.061272	S21	0.788605
S22	1.369748	S23	1.061398	S24	0.788694
S25	1.369863	S26	1.061447	S27	0.788728
S28	1.369906	S29	1.061465	S30	0.788741
S31	1.369923	S32	1.061472	S33	0.788746
S34	1.369930	S35	1.061475	S36	0.788748
S37	1.369932	S38	1.061476	S39	0.788749
S40	1.369933	S41	1.061477	S42	0.788749
S43	1.369933	S44	1.061477	S45	0.788750
S46	1.369933	S47	1.061477	S48	0.788750

上表為利用遞迴式之收斂過程

下面則以矩陣對角化之方式，以 S_1 所在邊為例

$$\begin{pmatrix} -9.839655 & 18.183681 \\ -8.142859 & 14.588923 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.630065 & 1.369935 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.315531 & 0 \\ 0 & 3.433737 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.844224 & -5.266336 \\ -3.844224 & 6.266336 \end{pmatrix}$$

上圖為矩陣 $\begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix}$之對角化結果，並利用定理二即可求出收斂值:1.369935

我們可以發現三式會同時收斂且兩方法所得結果相同，符合上述之結果

接著我們嘗試求出小三角形邊長 λ 的範圍：

由定理一可知三個不同順序矩陣的特徵值 t 相同，

故取 $\begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix}$ 之對角化結果，

得特徵方程式 $t^2-[(a^2b^2c^2-2m^3+m^2(a+b+c)^2-2abcm(a+b+c)]t+m^6=0$ ，

化簡為 $t^2-(a^2b^2c^2\lambda^2-2m^3)t+m^6=0$

後由二次方程判別式，尋找使特徵值 t 為實數之 λ 範圍

$\Rightarrow D=(abc\lambda)^4-4a^2b^2c^2\lambda^2m^3\geq 0$

又 $m=\dfrac{(1-\lambda)abc}{a+b+c}$ ，且 a,b,c, λ 皆為正值，可將不等式化簡為

$(a+b+c)^3\lambda^2-4abc(1-\lambda)^3\geq 0$ ，

展開得 $4abc\lambda^3+[(a+b+c)^3-12abc]\lambda^2+12abc\lambda-4abc\geq 0$

$\Rightarrow$解使不等式$=0$之 λ

令 $\mu=\dfrac{(a+b+c)^3}{24abc}$

$\because\ \Delta=\{[1-\dfrac{(a+b+c)}{12abc}]^3+\dfrac{1}{2}+\dfrac{-12abc+(a+b+c)^3}{8abc}\}^2+\{1-[\dfrac{(a+b+c)^3}{12abc}-1]^2\}^3$

$=[(1-2\mu)^3-1+3\mu]^2+[-(2\mu-1)^2+1]^3=-8\mu^3+9\mu^2$ 在 $\mu\in[\dfrac{9}{8},\infty)$ 恆≤ 0

$\therefore$ 由三次方程之三角函數解，並令 $\alpha=(1-2\mu)^3-1+3\mu$ 、 $\beta=-(2\mu-1)^2+1$ ，可將 λ 之三根表示為：

$$\lambda_1=1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left[\frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}}{3}\right]$$

$$\lambda_2=1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left[\frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}+2\pi}{3}\right]$$

$$\lambda_3=1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left[\frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}-2\pi}{3}\right]$$

接下來我們要求出 λ_1、λ_2、λ_3 的範圍，首先求出 $\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}$ 的範圍：

$\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{(1-2\mu)^3-1+3\mu}{[(2\mu-1)^2-1]^{\frac{3}{2}}}$ ，在 $\mu=\dfrac{9}{8}$ 時，得 $\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}=1$ 。

又 $\left(\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}\right)'=\dfrac{\alpha'(-\beta)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}\alpha(-\beta)^{\frac{1}{2}}(-\beta)'}{(-\beta)^3}=\dfrac{\alpha'(-\beta)-\dfrac{3}{2}\alpha(-\beta)'}{(-\beta)^{\frac{5}{2}}}$

$$=\frac{[3(1-2\mu)^2\cdot(-2)+3](-\beta)-6(2\mu-1)\alpha}{(-\beta)^{\frac{5}{2}}}$$

$=\dfrac{-36\mu+9-3+12\mu-6+18\mu}{[(2\mu-1)^2-1]^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{-6\mu}{[(2\mu-1)^2-1]^{\frac{5}{2}}}<0$ ， $\forall\mu\in[\dfrac{9}{8},\infty)$ 。

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}$$ 在 $\mu \in [\frac{9}{8}, \infty)$ 遞減。

而 $\lim_{\mu\to\infty} \frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{(1-2\mu)^3 - 1 + 3\mu}{[(2\mu-1)^2 - 1]^{\frac{3}{2}}} = -1$

$$\therefore -1 < \frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} < \pi \quad \Rightarrow 0 \le \frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}}{3} < \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} \le \frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} + 2\pi}{3} < \pi \text{，} \frac{-2\pi}{3} \le \frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} - 2\pi}{3} < \frac{-\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \cos\left[\frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}}{3}\right] \le 1 \text{，} -1 < \cos\left[\frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} + 2\pi}{3}\right] \le -\frac{1}{2} \text{，}$$

$$-\frac{1}{2} \le \cos\left[\frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} - 2\pi}{3}\right] < \frac{1}{2} \text{。}$$

完成前備證明後，我們要完成證明的最後一步：λ_1 恆正，而 λ_2、λ_3 恆負

首先證明 λ_2 恆負：

$$\lambda_2 = 1 - 2\mu + 2\sqrt{-\beta}\cos\left[\frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} + 2\pi}{3}\right]$$ ，而 $1-2\mu$ 與 $\cos\left[\frac{\arccos\frac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}} + 2\pi}{3}\right]$

皆為負值$\Rightarrow \lambda_2$ 必為負值。

接著證明 λ_3 恆負：

$$\lambda_3 = 1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left\lfloor \frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}-2\pi}{3} \right\rfloor < 1-2\mu+2\cdot\sqrt{(2\mu-1)^2-1}\cdot\frac{1}{2} < 1-2\mu+(2\mu-1)=0$$

$\Rightarrow \lambda_3$ 必為負值。

最後證明 λ_1 恆正：

$$\lambda_1 = 1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left\lfloor \frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}}{3} \right\rfloor ,$$

令 $y=1-2\mu$ ，$k=2\sqrt{-\beta}\cos\left\lfloor \frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}}{3} \right\rfloor$

Q k 在 $\mu\in[\frac{9}{8},\infty)$ 遞減 $\Rightarrow \lambda_1$ 在 $\mu\in[\frac{9}{8},\infty)$ 遞減。

又 $\lim\limits_{\mu\to\infty}\lambda_1 = \lim\limits_{y\to-\infty}\lambda_1 = \lim\limits_{y\to-\infty}(y+k\sqrt{y^2-1}) = \lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{(k\sqrt{y^2-1}+y)(k\sqrt{y^2-1}-y)}{k\sqrt{y^2-1}-y}$

$$= \lim_{y\to-\infty}\frac{k^2(y^2-1)-y^2}{k\sqrt{y^2-1}-y} = \lim_{y\to-\infty}\frac{(k^2-1)y^2-k^2}{k\sqrt{y^2-1}-y} = \lim_{y\to-\infty}\frac{(k^2-1)-\dfrac{k^2}{y^2}}{\dfrac{k\sqrt{y^2-1}-y}{y^2}}$$

Q $k>1$，且 k 所含之 y 最高次項為零次項

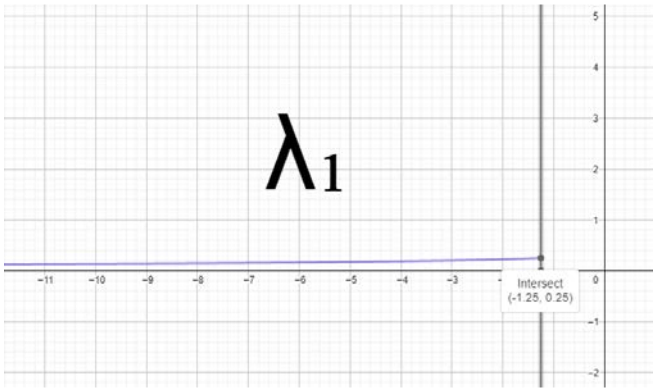
$\Rightarrow k^2-1>0$ ，$\dfrac{k^2}{y^2}\to 0$ ，$k\sqrt{y^2-1}-y>0$

$$\Rightarrow \lim_{\mu\to\infty}\lambda_1 = \lim_{y\to-\infty}\frac{(k^2-1)-\frac{k^2}{y^2}}{\frac{k\sqrt{y^2-1}-y}{y^2}} > 0$$

$\therefore \lambda_1$ 恆為正值。

故證得 λ_1 恆正，λ_2、λ_3 恆負。

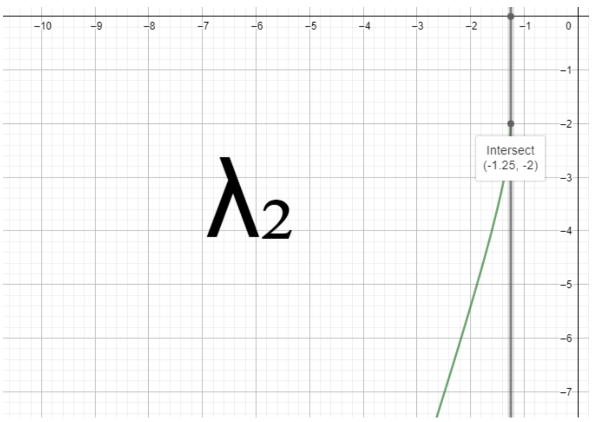
因此，對於每一個邊長為 (a,b,c) 之三角形，都可對應到一個 $\mu\in[\frac{9}{8},\infty)$ ，而每一個 $\mu\in[\frac{9}{8},\infty)$ 又可對應到唯一的 $\lambda_1>0$，其中 λ_1 即為使射線路徑收斂的最小小三角形邊長與大三角形邊長之比值。

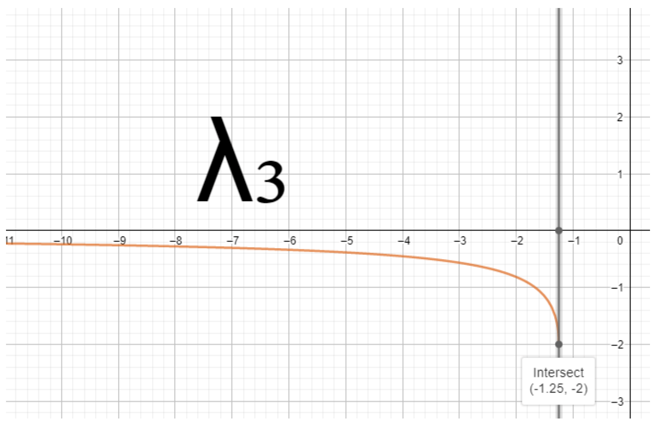


我們也利用了 GeoGebra 繪出其圖形，

如右圖及下圖所示，

可以發現 λ_1 的圖形中， $x=-1.25$，也就是邊長比是正三角形時， $y=0.25$，這也與我們目的 1 中的 $\lambda<\frac{1}{4}$ 時必不會收斂相呼應。





肆、研究結果

一、兩正三角形同心，邊長比$1:\lambda(0<\lambda<1)$ ，中心三角形旋轉θ

設 $A=\sqrt{3}\lambda\sin\theta+1-\lambda\cos\theta$，

$$B=\frac{3+2\sqrt{3}\lambda\sin\theta+\sqrt{9+12\sqrt{3}\sin\theta+12\lambda^2\sin^2\theta-12A}}{6}$$ ，

$$C=\frac{3+2\sqrt{3}\lambda\sin\theta-\sqrt{9+12\sqrt{3}\sin\theta+12\lambda^2\sin^2\theta-12A}}{6}$$ ，

若遞迴式可以收斂，當 $-1<\dfrac{3C-A}{3B-A}\le 1$ 時，收斂於 C。或是 $S_1=S_2\ldots=B$，收斂於 B。

且當 $\lambda<\dfrac{1}{4}$ 時必不收斂；固定 θ 時 $(0^{\circ}\le\theta\le 60^{\circ})$，有 $\lambda<\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\cos\theta}$ 必不收斂；固定 λ 時，有 $\cos\theta<\dfrac{\frac{1}{2}-\lambda}{\lambda}$ 必不收斂。

二、兩個不同大小正 n 邊形同心，邊長比 $1:\lambda(0<\lambda<1)$，中心正 n 邊形旋轉 θ

結果二與結果一同樣能找出 A 以及特徵方程之兩根 B、C，

且若遞迴式可以收斂，當 $-1<\dfrac{2C\sin\frac{360^{\circ}}{n}-A}{2B\sin\frac{360^{\circ}}{n}-A}\le 1$ 時，收斂於 C。或是

$S_1=S_2\ldots=B$，收斂於 B。

並有 $\lambda<\dfrac{1+\cos\frac{360^{\circ}}{n}}{2}$ 時必不收斂；固定 θ 時 $(0^{\circ}\le\theta\le\dfrac{180(n-2)^{\circ}}{n})$，有 $\lambda<\dfrac{1+\cos\frac{360^{\circ}}{n}}{1+\cos\theta}$ 必不收斂；固定 λ 時，有 $\cos\theta<\dfrac{1+\cos\frac{360^{\circ}}{n}-\lambda}{\lambda}$ 必不收斂。

三、A_n 為一遞迴式

令 $A_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$，$A_{n+1}=\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\dfrac{aA_n+b}{cA_n+d}=\dfrac{aP_n+bQ_n}{cP_n+dQ_n}$，$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 對角化可得

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}^{-1}$，其中 t_1、t_2 為 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 之兩特徵值。

令 $|t_1| \geq |t_2| \quad (t_1, t_2 \in R) \Rightarrow A_{n+1} = \dfrac{P_1(eh - gf(\frac{t_2}{t_1})^n) - Q_1(eg - eg(\frac{t_2}{t_1})^n)}{P_1(fh - fh(\frac{t_2}{t_1})^n) - Q_1(fg - eh(\frac{t_2}{t_1})^n)}$

$\Rightarrow$ 若 $|t_1| > |t_2|$，$\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} = \dfrac{e}{f}$；若 $t_1 = t_2$，$\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} = t_1$；若 $t_1 = -t_2$，A_{n+1} 發散。

四、兩個正三角形同心，邊長比 $1:\lambda(0<\lambda<1)$，之後將中心三角形往上移動 r

令 $A = \sqrt{3}r - (1-\lambda)$，$B = -2\sqrt{3}r - (1-\lambda)$

接著令 $C = \begin{pmatrix} 3+A & A \\ 3 & A \end{pmatrix}$、$D = \begin{pmatrix} 3+A & B \\ 3 & B \end{pmatrix}$、$E = \begin{pmatrix} 3+B & A \\ 3 & A \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} P_{3n+2} \\ Q_{3n+2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} P_{3n+1} \\ Q_{3n+1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} P_{3n+4} \\ Q_{3n+4} \end{pmatrix} = EDC \begin{pmatrix} P_{3n+1} \\ Q_{3n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P_{3n+3} \\ Q_{3n+3} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} P_{3n+2} \\ Q_{3n+2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} P_{3n+5} \\ Q_{3n+5} \end{pmatrix} = CED \begin{pmatrix} P_{3n+2} \\ Q_{3n+2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{3n+4} \\ Q_{3n+4} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} P_{3n+3} \\ Q_{3n+3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} P_{3n+6} \\ Q_{3n+6} \end{pmatrix} = DCE \begin{pmatrix} P_{3n+3} \\ Q_{3n+3} \end{pmatrix}$$

又由定理一可知，A、B 為二個矩陣，AB 和 BA 的特徵值相同，則上面三式會同時收斂或發散 ⇒ 在上移小三角形條件下的射線存在可收斂的情形。

五、兩個正三角形同心，邊長比 $1:\lambda(0<\lambda<1)$，之後將中心三角形往水平夾角 α 方向移動 r

結果五與結果四同樣可表示出三邊之矩陣遞迴，且由定理一可知，三式會同時收斂或發散 ⇒ 在斜上移動小三角形條件下的射線存在可收斂的情形。

六、兩個正三角形同心，邊長比 $1:\lambda(0<\lambda<1)$，之後將中心三角形往水平夾角 α 方向移動 r 並旋轉 β

結果六與結果四同樣可表示出三邊之矩陣遞迴，且由定理一可知，三式會同時收斂或發散 ⇒ 在斜上移動並旋轉小三角形條件下的射線存在可收斂的情形。

七、共內心、相似且方向相同之兩一般三角形，邊長比$1:\lambda(0<\lambda<1)$，大三角形之三邊長(a,b,c)

結果七與結果四同樣可表示出三邊之矩陣遞迴，且由定理一可知，三式會同時收斂或發散 ⇒ 在相似兩不規則共內心之三角形條件下的射線存在可收斂的情形。

且由三次方程之三角函數解，證得對於每一個邊長為(a,b,c)之三角形，都可對應到唯一的$\lambda_1>0$，其中λ_1即為使射線路徑收斂的、最小的小三角形與大三角形邊長之比值。

伍、討論

前作《公園跑切線》的內容吸引了我們想繼續延伸類似的主題下去，但與前作主要以三角形形狀變化相比，我們則是致力在旋轉、移動，且我們除了研究能確實收斂的大小三角形比例及旋轉角度，讓小三角形在大三角形中平移及旋轉使之討論，也延伸到多邊形的旋轉。此外，我們也以各種方法來做出旋轉三角形、多邊形的收斂點的位置，以及收斂範圍與變數的關係。

陸、結論

此處將重要結論統整如下：

一、同內心旋轉之正三角形(正多邊形)存在射線可收斂之情形，且對於正 n 邊形，在$\lambda<\frac{1+\cos\frac{360^\circ}{n}}{2}$時必不收斂；固定$\theta$時$(0^\circ\le\theta\le\frac{180(n-2)^\circ}{n})$，在

$\lambda < \dfrac{1+\cos\dfrac{360°}{n}}{1+\cos\theta}$ 必不收斂；固定 λ 時，在 $\cos\theta < \dfrac{1+\cos\dfrac{360°}{n}-\lambda}{\lambda}$ 必不收斂。

二、有一遞迴數列 $A_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ ， $A_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \dfrac{aA_n + b}{cA_n + d} = \dfrac{aP_n + bQ_n}{cP_n + dQ_n}$ ， t_1 、 $t_2 \in R$ 為

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 之兩特徵值， $|t_1| \ge |t_2|$ ， (e, f) 為 t_1 之特徵向量，則有下列三種情形：

1. $|t_1| > |t_2|$ ， $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} = \dfrac{e}{f}$ 2. $t_1 = t_2$ ， $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} = t_1$

3. $t_1 = -t_2$ ， A_{n+1} 發散。

三、小三角形上移、小三角形斜向移動、小三角形斜向移動並旋轉、兩一般三角形共內心、相似且方向相同此四種條件，以特徵方程尋求不動點之方式會導致方程式過於龐雜，故我們以矩陣的方式證明此四種情形之射線皆存在可收斂之情形。但也因為如此，我們難以簡潔的表示出小三角形與大三角形邊長之比值 λ 與其他變數(∝方向移動 r、旋轉 β，或是一般三角形的三邊長等)的關係式。

四、共內心、相似且方向相同之兩一般三角形下，對於每一個邊長為 (a,b,c) 之三角形，都可對應到唯一的 $\lambda_1 > 0$，其中 λ_1 即為使射線路徑收斂的、最小的小三角形與大三角形邊長之比值。

柒、參考資料

1. 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會《公園跑切線》https://reurl.cc/vexAYa

2. 關於分式型遞迴數列的不動點算法 https://reurl.cc/vexAZ1

3. 三次方程式- 維基百科，自由的百科全書 https://reurl.cc/pWR2da

4. 旋轉多邊形跑切線 https://reurl.cc/j1QpQ2

【評語】050411

本作品是前作〈公園跑切線〉以及先前國際科展作品的延伸。作者們研究同內心且不同大小的三角形，且內部三角形做旋轉與移動。研究收斂點的位置與出發點、旋轉角度、邊長比與收斂等關係。該文章內容實屬有趣，例如：矩陣中之特徵值的應用。本篇作品敘述算清晰，但數學論述不夠完整且編排不夠工整。

作品簡報

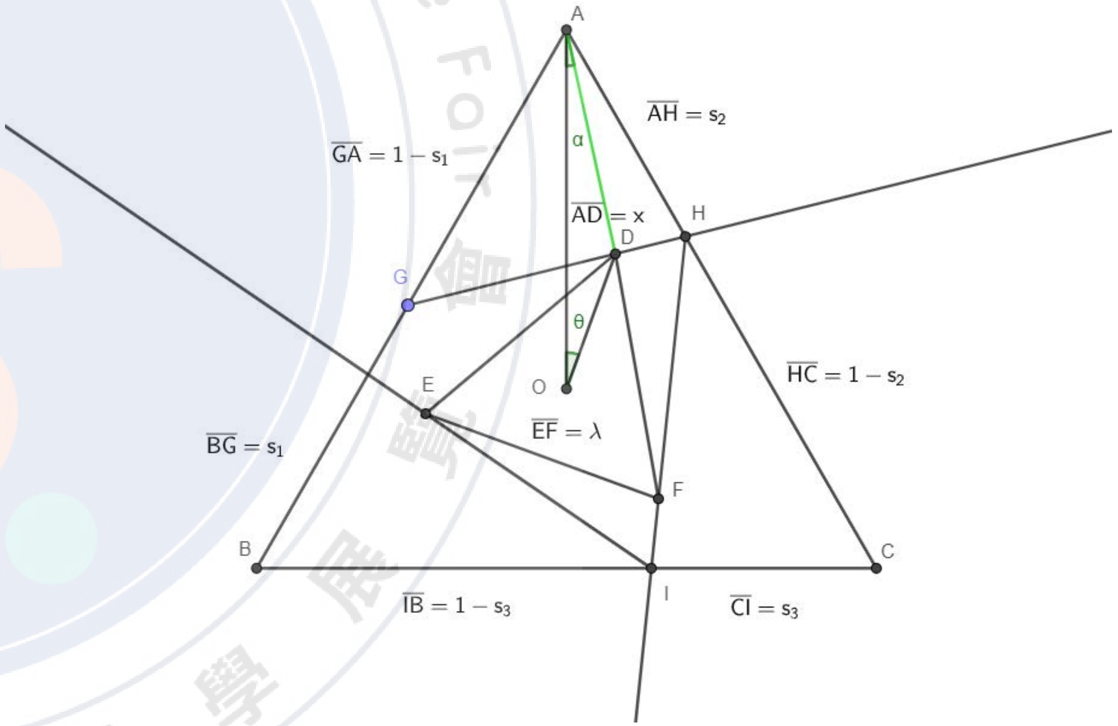
旋轉三角形跑射線

組別：高中組

科別：數學科

前言

- 此作品延伸自中華民國第60屆中小學科學展覽會作品《公園跑切線》
- 初始條件：兩大小三角形邊長比1: λ共內心
- 射線：大三角形邊上一點 → 小三角形頂點 → 大三角形另一邊
- 旋轉小三角形、移動小三角形內心等不同條件下探討射線路徑收斂與否與其性質
- 先前研究：至「中間小三角形向斜上移動」

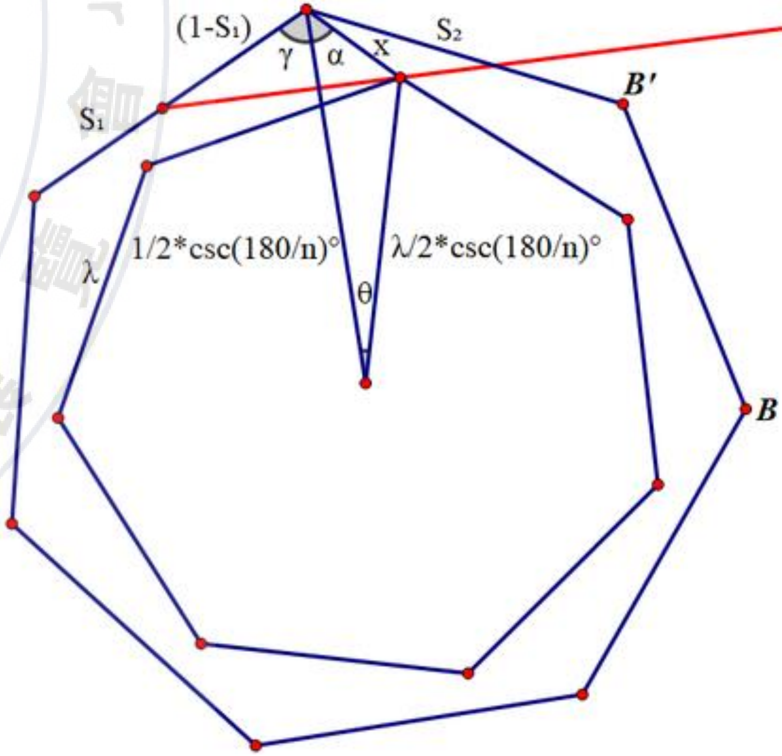


研究方法(一)、(二)

- 小正n邊形(正三角形)旋轉 $\theta\ (0^\circ \le \theta \le \dfrac{180(n-2)^\circ}{n})$
- 由正弦定理與面積公式，可求出 S_n之遞迴式： $S_{n+1}=\dfrac{(1-S_n)[(1-\lambda\cos\theta)\cot(\dfrac{180^\circ}{n})+\lambda\sin\theta]}{2(1-S_n)\sin(\dfrac{360^\circ}{n})-(1-\lambda\cos\theta)\cot(\dfrac{180^\circ}{n})+\lambda\sin\theta}$
- 特徵方程解遞迴式一般項，並得到 λ 、$\cos\theta$ 與

  收斂情形的關係 $(0^\circ \le \theta \le \dfrac{180(n-2)^\circ}{n})$ ：

- $\lambda < \dfrac{1+\cos\dfrac{360^\circ}{n}}{1+\cos\theta}$ 時必不收斂，$\lambda < \dfrac{1+\cos\dfrac{360^\circ}{n}}{2}$ 時必不收斂($\cos\theta$ 為已知)
- $\cos\theta < \dfrac{1+\cos\dfrac{360^\circ}{n}-\lambda}{\lambda}$ 時必不收斂(λ 為已知)



兩個與矩陣遞迴有關的定理

- 特徵方程進行研究方法(三)~(六)遞迴式推導太複雜 $\Rightarrow$ 矩陣
- 定理一：A，B為兩二階方陣，則AB、BA之特徵值相同。
- 定理二：有一遞迴式 $A_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，$A_{n+1}=\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\dfrac{aA_n+b}{cA_n+d}=\dfrac{aP_n+bQ_n}{cP_n+dQ_n}$ ，t_1、$t_2\in R$ 為$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$之兩特徵值，

  $|t_1|\geq|t_2|$ ，(e,f)為 t_1之特徵向量，則有下列三種情形：
- 1. $|t_1|>|t_2|$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}A_{n+1}=\dfrac{e}{f}$　　2. $t_1=t_2$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}A_{n+1}=t_1$
- 3. $t_1=-t_2$ ，A_{n+1} 發散

研究方法(三)

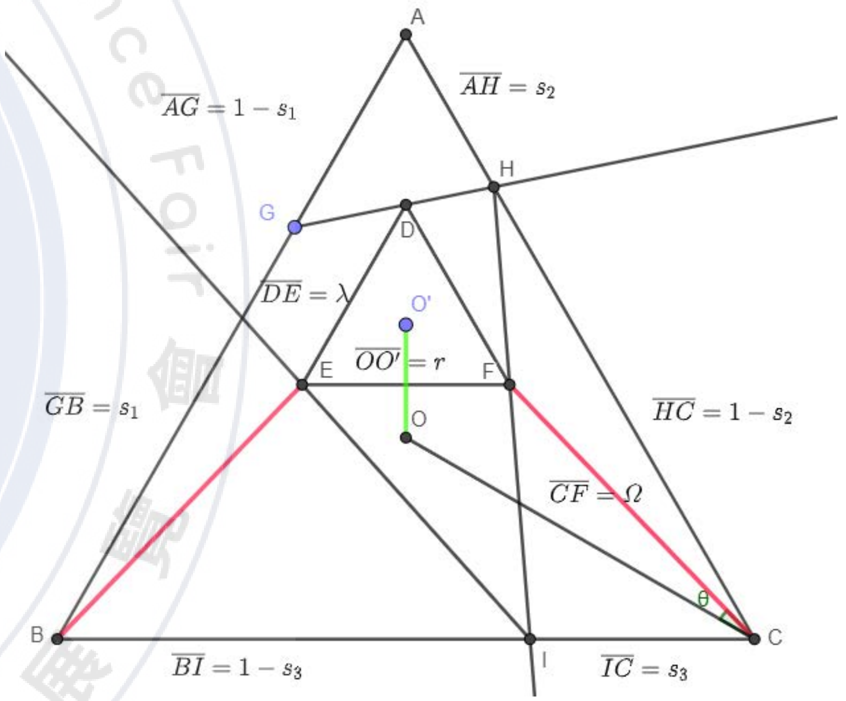
- 小三角形的內心向正上方移動r
- 由正弦定理與面積公式，可得 S_1 與 S_2、S_2 與 S_3 、S_3 與 S_4 之關係式
- 關係式中重複的部分用A、B代替，可得

令 $1-S_n=a_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，$C=\begin{pmatrix}3+A & A\\ 3 & A\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3+A & B\\ 3 & B\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}3+B & A\\ 3 & A\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=EDC\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\ Q_{3n+1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix}P_{3n+5}\\ Q_{3n+5}\end{pmatrix}=CED\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\ Q_{3n+2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P_{3n+4}\\ Q_{3n+4}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}P_{3n+6}\\ Q_{3n+6}\end{pmatrix}=DCE\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\ Q_{3n+3}\end{pmatrix}$$



- 依據定理一，矩陣 $(ED)C$ 與矩陣 $C(ED)$ 之兩個特徵值完全相同，其餘同理，最終可知上面三式會同時收斂或發散。

研究方法(三)

r=0.25	λ=0.25				
1-s1	0.25	1-s2	0.816987	1-s3	0.689827
1-s4	0.36389	1-s5	0.851102	1-s6	0.712158
1-s7	0.367478	1-s8	0.851695	1-s9	0.712503
1-s10	0.367531	1-s11	0.851703	1-s12	0.712508
1-s13	0.367532	1-s14	0.851704	1-s15	0.712508
1-s16	0.367532	1-s17	0.851704	1-s18	0.712508
1-s19	0.367532	1-s20	0.851704	1-s21	0.712508
1-s22	0.367532	1-s23	0.851704	1-s24	0.712508
1-s1	0.5	1-s2	0.866025	1-s3	0.720463
1-s4	0.368746	1-s5	0.8519	1-s6	0.712622
1-s7	0.36755	1-s8	0.851706	1-s9	0.71251
1-s10	0.367532	1-s11	0.851704	1-s12	0.712508
1-s13	0.367532	1-s14	0.851704	1-s15	0.712508
1-s16	0.367532	1-s17	0.851704	1-s18	0.712508
1-s19	0.367532	1-s20	0.851704	1-s21	0.712508
1-s22	0.367532	1-s23	0.851704	1-s24	0.712508

左表為利用遞迴式之收斂過程，下面則以矩陣對角化之方式，以S2所在邊為例

$$\begin{pmatrix} 5.16117740 & -3.25186251 \\ 6.03677858 & -3.79843692 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.63246785 & 0.85170358 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.01963146 & 0 \\ 0 & 1.34310902 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4.56130030 & 3.88487580 \\ 4.56130030 & -2.88487580 \end{pmatrix}$$

上圖為矩陣CED之對角化結果，並利用定理(二)即可求出收斂值:0.85170358

我們可以發現三式會同時收斂且兩方法所得結果相同，符合上述之結果

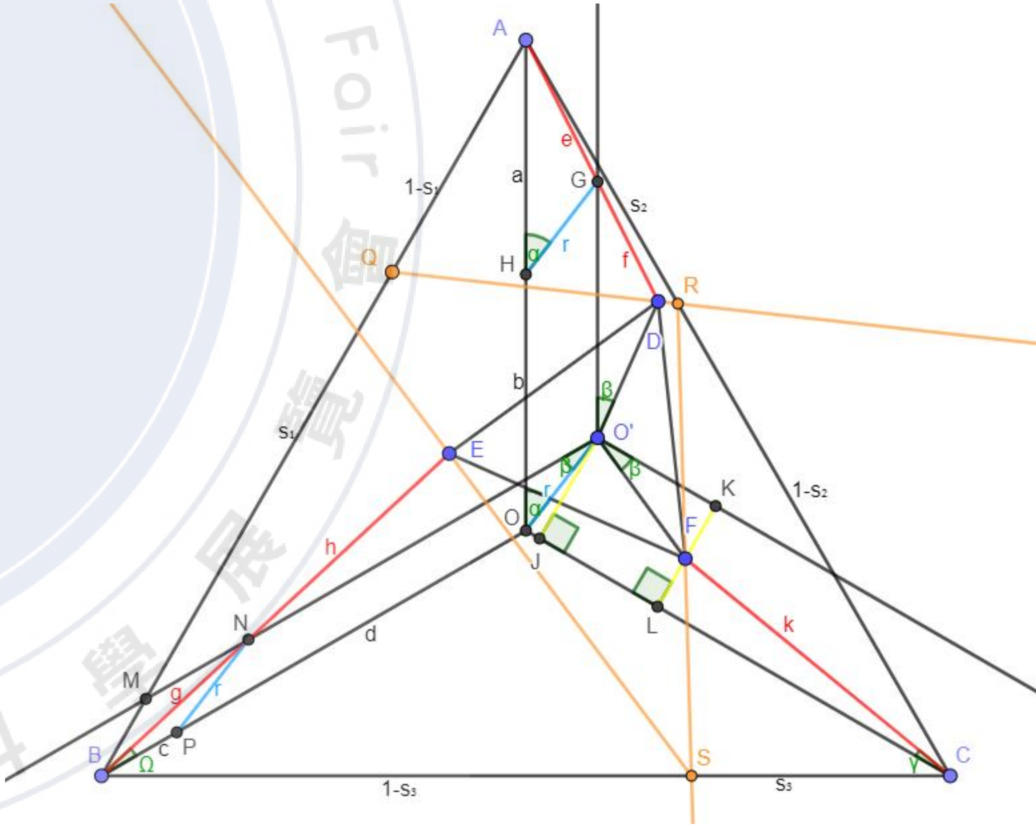
研究方法(四)、(五)

- 小三角形的內心朝與 $\overline{OA}$ 夾α方向移動r(四)、朝與 $\overline{OA}$ 夾α方向移動r並旋轉β(五)
- 由正弦定理與面積公式，可得兩兩邊之間 S_n與 S_{n+1} 之關係式
- 同方法(三)，令 $1-S_n=a_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，P、Q數列表示成以下形式

$$\begin{pmatrix}P_{3n+4}\\Q_{3n+4}\end{pmatrix}=FED\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\Q_{3n+1}\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}P_{3n+4}\\Q_{3n+4}\end{pmatrix}=LKJ\begin{pmatrix}P_{3n+1}\\Q_{3n+1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P_{3n+5}\\Q_{3n+5}\end{pmatrix}=DFE\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\Q_{3n+2}\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}P_{3n+5}\\Q_{3n+5}\end{pmatrix}=JLK\begin{pmatrix}P_{3n+2}\\Q_{3n+2}\end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix}P_{3n+6}\\Q_{3n+6}\end{pmatrix}=EDF\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\Q_{3n+3}\end{pmatrix}$ (四) $\begin{pmatrix}P_{3n+6}\\Q_{3n+6}\end{pmatrix}=KJL\begin{pmatrix}P_{3n+3}\\Q_{3n+3}\end{pmatrix}$ (五)
- 由定理一可知，上面三式會同時收斂或發散。



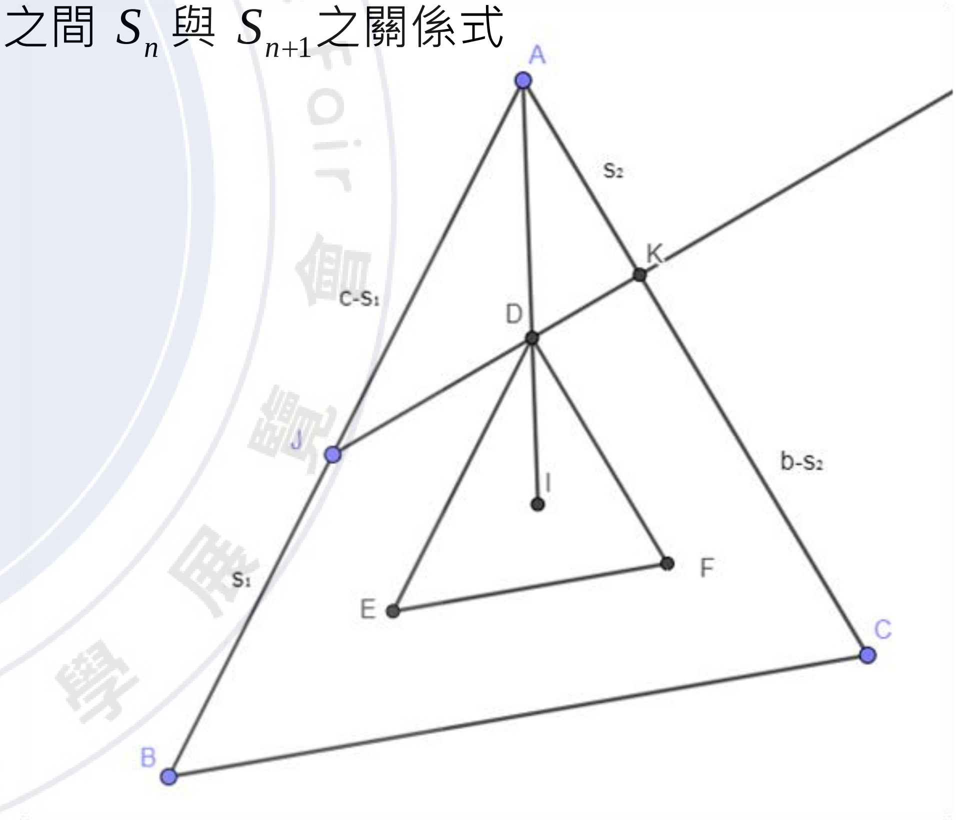
研究方法(六)

- 共內心、相似且方向相同之兩一般三角形，大三角形邊長 (a,b,c)
- 內角非60° → 正弦定理與面積公式不可行 → 以向量推導兩兩邊之間 S_n 與 S_{n+1} 之關係式
- 同方法(三)，令 $1-S_n=a_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ ，P、Q數列表示成以下形式

$$\begin{pmatrix} p_{3n+3} \\ q_{3n+3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{3n} \\ q_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{3n+4} \\ q_{3n+4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{3n+1} \\ q_{3n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{3n+5} \\ q_{3n+5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -m & mc \\ -a & ac-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & ma \\ -b & ba-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & mb \\ -c & cb-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{3n+2} \\ q_{3n+2} \end{pmatrix}$$



- 由定理一可知，上面三式會同時收斂或發散。

研究方法(六)

- 接著我們嘗試求出小三角形邊長 λ 的範圍：

  經化簡，可得 λ 必滿足 $4abc\lambda^3+[(a+b+c)^3-12abc]\lambda^2+12abc\lambda-4abc\geq 0$

  以三次方程之三角函數解使不等式 $=0$ 的 λ：

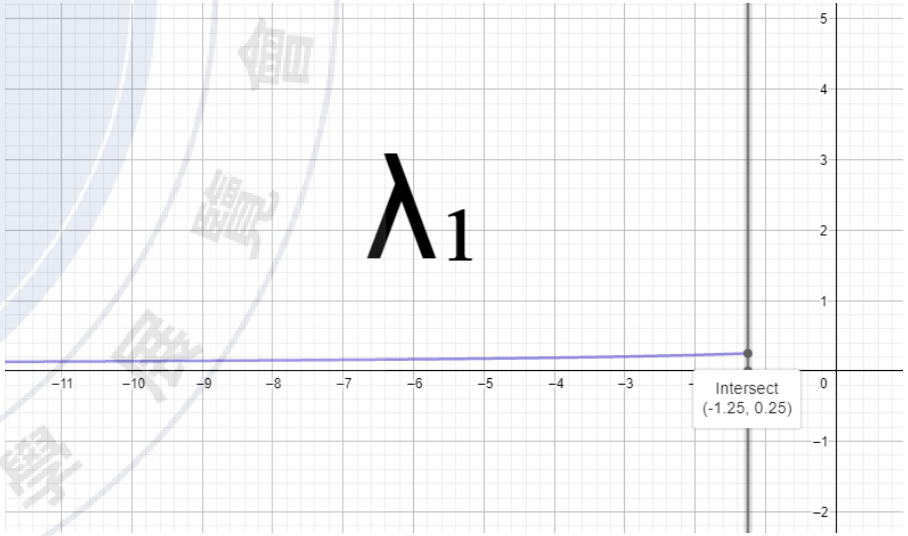
- 令 $\mu=\dfrac{(a+b+c)^3}{24abc}$，$\alpha=(1-2\mu)^3-1+3\mu$ ，$\beta=-(2\mu-1)^2+1$

$$\Rightarrow \lambda_1=1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left[\frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}}{3}\right]，\lambda_2=1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left[\frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}+2\pi}{3}\right]，\lambda_3=1-2\mu+2\sqrt{-\beta}\cos\left[\frac{\arccos\dfrac{\alpha}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}-2\pi}{3}\right]$$

- λ_1 恆正，而 λ_2、λ_3 恆負

研究方法(六)

- 因此，對於每一個邊長為 (a,b,c) 之三角形，都可對應到一個 $\mu \in [\frac{9}{8},\infty)$ ，而每一個 $\mu \in [\frac{9}{8},\infty)$ 又可對應到唯一的 λ_1 ，其中 λ_1即為使射線路徑收斂的最小小三角形邊長與大三角形邊長之比值。
- Geogebra 繪圖 ，如右圖所示
- $x=-1.25$，即邊長比為正三角形時， $y=0.25$ ，與研究方法(一)中 $\lambda<\frac{1}{4}$ 時必不會收斂相呼應。



研究結果&結論

	正三角形旋轉	正多邊形旋轉	正三角形上移	正三角形斜向移動	正三角形斜向移動並旋轉	一般共內心相似三角形同向
是否存在收斂情形	是	是	是	是	是	是
遞迴式收斂推導方法	特徵方程	特徵方程	矩陣	矩陣	矩陣	矩陣

參考資料

1. 中華民國第60屆中小學科學展覽會《公園跑切線》

2. 關於分式型遞迴數列的不動點算法

3. 三次方程式- 維基百科，自由的百科全書

4. 旋轉多邊形跑切線