中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第二名

050409

2、3、4、5 進位 Kaprekar 變換的性質

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 鍾亞書 高二 洪芷璿 高一 洪旖昕	洪士薰

關鍵詞：Kaprekar、2、3、4、5 進位、n 循環

摘要

非負整數的各位數字重新排列後，由大到小減去由小到大的運算稱為Kaprekar運算。若原數和結果相等，則此數為Kaprekar常數。在此條件下，Kaprekar變換最終定會進入循環(包含循環節為1的情形)。本研究探討Kaprekar常數與循環的結構。

結果如下:

(1)二進位分為五類，得到二進位常數的形式和規律。

(2)我們定義了$g(x)$來討論三進位的變換形式，得到能判斷其結構和循環節及數量的規則。

(3)$g(x)$在任何有理數區間中必有任意的n-循環點，其中n是任意正整數。

(4)關於四進位，我們發現將任意非負整數運算四次後必符合某一形式，且其結果可類比於部份三進位的情形，進一步可得到所有四進位數的結果。

壹、前言

一、研究動機

將非負整數的各位數字重新排列後，由大到小排列減去由小到大排列的運算稱為Kaprekar變換。像數字213，各位數字由大而小與由小而大分別是321與123，兩數相減得198。如此計算下去$213 \to 198 \to 792 \to 693 \to 594 \to 495$。對於所有的非負整數，經過Kaprekar變換後會有兩種結果:得到Kaprekar常數或是進入Kaprekar循環。

因此，我們想要探討二、三、四、五進位Kaprekar變換的結果。例如：求進位數z經Kaprekar變換後的一般式、討論二、三、四、五進位的Kaprekar變換形式，並找出其性質。

二、研究目的

（一）探討二進位數z經Kaprekar運算後的一般式，並求出其$d(z)$、$K(z)$、$\ell(z)$。

（二）探討三進位數z經Kaprekar運算後的一般式，並求出其$d(z)$、$K(z)$、$\ell(z)$。

（三）探討$g(x)$函數的軌跡及性質並找出其與三進位數在Kaprekar變換仍為正規數的充要件。

（四）探討四進位數z經Kaprekar運算後的一般式，並求出其$d(z)$、$K(z)$、$\ell(z)$。

（五）探討五進位數z經Kaprekar運算後的一般式。

貳、研究設備與器材

一、筆、紙、excel。

參、研究過程

一、定義、數學符號及已知研究成果

B進位數z，$z = a_1 \times B^{n-1} + a_2 \times B^{n-2} + \ldots + a_n$，其中$a_i$是小於B的非負整數，且 $1 \leq i \leq n$。為了表示的方便，又將上式記為 $z = (a_1 a_2 \cdots a_n)_B$。

【定義1-1】：集合 $Z(B,n) = \{z \mid z = (a_1 a_2 \ldots a_n)_B, 0 \leq a_i \leq B-1, 1 \leq i \leq n\}$。

$\bar{z} = (c_1 c_2 \cdots c_n)_B$，數字$c_1, c_2, \cdots, c_n$是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$的重新排列，且$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$，

$\underline{z} = (c_n c_{n-1} \cdots c_1)_B$

【定義1-2】：集合 $\bar{Z}(B,n) = \{\bar{z} \mid z \in Z(B,n)\}$。

【定義1-3】：Kaprekar循環、Kaprekar軌跡

（1）$T_{(B,n)}(z) = \bar{z} - \underline{z}$，稱為Kaprekar變換。

$$T^k_{(B,n)}(z) = T_{(B,n)}(T^{k-1}_{(B,n)}(z)) = (\overbrace{T_{(B,n)} \circ T_{(B,n)} \circ \cdots \circ T_{(B,n)}}^{k})(z)，k > 1。$$

（2）若$T_{(B,n)}(z) = z$，則稱z為Kaprekar常數。

（3）若$z \in Z(B,n)$，非負整數d和正整數ℓ使得

$$z \to T_{(B,n)}(z) \to T^2_{(B,n)}(z) \to \cdots \to T^d_{(B,n)}(z) \to \cdots \to T^{d+\ell}_{(B,n)}(z)，$$

當$T^d_{(B,n)}(z) = T^{d+\ell}_{(B,n)}(z)$，則稱為Kaprekar循環。

（4）集合$\{T^k_{(B,n)}(z)\}_{k \in N}$ 稱為z的 Kaprekar軌跡。

例如：（1）$T_{(10,3)}(123) = 321 - 123 = 198$，$T^2_{(10,3)}(123) = T_{(10,3)}(198) = 792$

（2）$T_{(10,4)}(6174) = 7641 - 1467 = 6174$

（3）$81 \to 63 \to 27 \to 45 \to 09 \to 81$，$T_{(10,2)}(81) = T^{1+5}_{(10,2)}(81) = 63$

因為$Z(B,n)$只有有限個元素，所以任何$z \in Z(B,n)$必滿足上面（2）、（3）情形之一。

為了更進一步探討Kaprekar變換之結構，我們關心下面兩個問題：

（1）哪些數是Kaprekar常數，哪些不是？

（2）若z不是Kaprekar常數，則使得$T^d_{(B,n)}(z)$是Kaprekar循環數的最小非負整數d為何？此時

的循環長度是什麼？

因此我們定義：

【定義1-4】：

$d(z) := min\{d \geq 0 \mid$ 存在 $\ell > 1$ 使得 $T_{(B,n)}^{d}(z) = T_{(B,n)}^{d+\ell}(z)\}$

$K(z) := T_{(B,n)}^{d(z)}(z)$

$\ell(z) := min\{\ell \geq 1 \mid T_{(B,n)}^{\ell}(K(z)) = K(z)\}$

【定義1-5】：

(1) 若 $\ell(z) = 1$，$T_{(B,n)}(K(z)) = K(z)$，則 $K(z)$ 為Kaprekar常數。

(2) 若 $z = (aa\cdots a)_B$，$0 \leq a \leq B-1$，$T_{(B,n)}(z) = 0$ 且 $d(z) = 1$，$K(z) = 0$，$\ell(z) = 1$，為無聊情形。

(3) 定義 $N(B,n)$ 為 $Z(B,n)$ 中所有非無聊情形下出現的Kaprekar循環的數量（含 $\ell(z) = 1$ 的情形）；定義 $\ell(B,n) = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{N(B,n)})$，其中 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{N(B,n)}$ 表示所有非無聊情形的循環長 $\ell(z)$。

(4) 若 $\ell(z) = 1$ 且 $N(B,n) = 1$ 時稱此時的 $K(z)$ 為嚴格的Kaprekar常數，且此時的 (B,n) 是嚴格的數對。（註：此處定義我們參考延用[4]中的定義方式。）

例如：(1) $6174 \to 6174$，$d(6174) = 0$，$K(6174) = 6174$，$\ell(6174) = 1$。

(2) $222 \to 0 \to 0$，$d(222) = 1$，$K(222) = 0$，$\ell(222) = 1$。

(3) 若 $B = 4$，$n = 4$，則參考[4]中的資料有，$(3021)_4 \to (3021)_4$，

$d((3021)_4) = 1$，$K((3021)_4) = (3021)_4$，$\ell((3021)_4) = 1$。

$(1332)_4 \to (2022)_4 \to (1332)_4$，

$d((1332)_4) = 0$，$K((1332)_4) = (1332)_4$，$\ell((1332)_4) = 2$。

兩個循環，且 $\ell(z)$ 分別為1和2，則 $N(4,4) = 2$，$\ell(4,4) = (1,2)$。

(4) 若 $B = 10$，$n = 3$，則參考[4]中的資料有

$495 \to 495$，$d(495) = 0$，$K(495) = 495$，$\ell(495) = 1$。

一個循環，且 $\ell(z)$ 為1，

則 $N(10,3) = 1$，$\ell(10,3) = 1$，$(10,3)$ 為嚴格的數對。

【定義1-6】：

若$z=(a_1a_2\cdots a_n)_B$，對任一$j\in\{0,...,B-1\}$都有$a_i=j$，$1\le i\le n$，稱z為正規數，否則為非正規數。即z表示成B進位數時數字$0,\cdots,B-1$都會出現。

若不存在任意正整數m使$T_{(b,n)}^m(z)$為非正規數，則稱z為嚴格正規數。

【定義1-7】：

(1) $Z_B=\{[t_1,\ldots,t_B]\mid t_i$為非負整數，$1\le i\le B\}$，$Z_B^+=\{[t_1,\ldots t_B]\mid t_i>0,1\le i\le B\}$

(Z_B^+是Z_B的子集，其中$t_i>0$，$1\le i\le B$)。

(2) 投影$P_B:Z(B,n)\longrightarrow Z_B$，$z=(a_1a_2\ldots a_n)_B\in Z(B,n)$

$P_B(z)=[n_1,\ldots,n_B]$，其中n_i是$a_1,\ldots,a_n$中值為$B-i$的個數。

例如：$z_1=(1739412)_{10}$，$z_2=(12011)_3$，$P_{10}(z_1)=[1,0,1,0,0,1,1,1,2,0]$，$P_3(z_2)=[1,3,1]$。

【定義1-8】：

$\widetilde{T}:Z_n^+\longrightarrow Z_n$，$\widetilde{T}(P(z))=P(T(z))$，($Z_n^+,Z_n$的定義如定義1-7)

例如$T((1023)_3)=(1221)_3$，以$\widetilde{T}$表示可寫成$\widetilde{T}([1,2,1])=[2,2,0]$。

【定義1-9】：

若$w\in Z_3^+$，則有 $z\in\overline{Z}(3,n)$，使得 $P_3(z)=w$，令

$\widetilde{d}=min\{d>0\,|\,$存在$\ell>1$使得$\widetilde{T}^d(w)=\widetilde{T}^{d+\ell}(w)\}$

$\widetilde{K}=\widetilde{T}^{d_F}(w)$

$\widetilde{\ell}=min\{\ell\ge 1\mid\widetilde{T}^{d+\ell}(w)=\widetilde{T}^d(w)\}$

若$d(z)=\widetilde{d}$，$P_3(K(z))=\widetilde{K}$，$\ell(z)=\widetilde{\ell}$。

【性質1】：

(1) $P_B:\overline{Z}(B,n)\longrightarrow Z_B$為一對一映成。

(2) $z\in Z(B,n)$，z是正規數的充要條件為$P_B(z)\in Z_B^+$。

例如：$z=(12011)_3$則$P_3(z)=[1,3,1]$，z是正規數。

【定義1-10】：

(1) $\overline{T}_{(B,n)}(z)=\overline{T_{(B,n)}(z)}$。

(2) $\overline{T}_{(B,n)}^k(z)=\overline{T}_{(B,n)}(\overline{T}_{(B,n)}^{k-1}(z))$，$k>1$，顯然$\overline{T}_{(B,n)}^k(z)=\overline{T_{(B,n)}^k(z)}=\overline{T_{(B,n)}^k(\overline{z})}$，$k>1$。

【性質2】：

(1) $z\in Z(B,n)$則$T_{(B,n)}^k(z)=T_{(B,n)}^k(\overline{z})$，$k>0$。

（2）$\overline{T}^{k}_{(B,n)}(z)=\overline{T}^{k}_{(B,n)}(\bar{z})$。

（3）若$1\le k_1<k_2$，$T^{k_1}_{(B,n)}(z)=T^{k_2}_{(B,n)}(z)$則$\overline{T}^{k_1}_{(B,n)}(z)=\overline{T}^{k_2}_{(B,n)}(z)$，反之亦然。

證明：（1）、（2）是明顯的，（3）是因為

$$\begin{cases} T^{k-1}_{(B,n)}(\overline{T}_{(B,n)}(z))=T^{k-1}_{(B,n)}(T_{(B,n)}(z)) & k>1 \\ T_{(B,n)}(\overline{T}^{\ell}_{(B,n)}(z))=T_{(B,n)}(T^{\ell}_{(B,n)}(z)) & \ell\ge 0 \end{cases}$$
，故（3）成立。

例如：$T^2_{(3,4)}((2021)_3)=T^2_{(3,4)}((2210)_3)=(1221)_3$，$\overline{T}^2_{(3,4)}((2021)_3)=\overline{T^2_{(3,4)}((2021)_3)}=(2211)_3$

$T^2_{(3,4)}((1221)_3)=((2021)_3)=T^4_{(3,4)}((2021)_3)\Leftrightarrow\overline{T}^2_{(3,4)}((2021)_3)=(2211)_3=\overline{T}^4_{(3,4)}((2021)_3)$

目前查閱已知文獻的結果如下（[4] Atsushi Yamagami）（下表中b為進位，n為位數）

b	n=2		n=3		n=4	
	N(b,2)	l(b,2)	N(b,3)	l(b,3)	N(b,4)	l(b,4)
2	1	(1)	1	(1)	2	(1,1)
3	1	(1)	1	(2)	1	(2)
4	1	(2)	1	(1)	2	(1,2)
5	2	(1,1)	1	(2)	1	(1)
6	1	(3)	1	(1)	1	(6)
7	1	(1)	1	(2)	1	(3)
8	2	(1,3)	1	(1)	2	(3,5)
9	2	(1,2)	1	(2)	2	(3,3)
10	1	(5)	1	(1)	1	(1)
11	2	(1,1)	1	(2)	2	(5,5)
12	1	(6)	1	(1)	2	(3,6)
13	2	(1,3)	1	(2)	3	(3,6,6)
14	3	(1,2,4)	1	(1)	1	(3)
15	1	(1)	1	(2)	7	(1,2,2,4,4,4,4)

b	n=5		n=6		n=7	
	N(b,5)	l(b,5)	N(b,6)	l(b,6)	N(b,7)	l(b,7)
2	2	(1,1)	3	(1,1,1)	3	(1,1,1)
3	1	(1)	1	(3)	2	(1,2)
4	1	(2)	3	(1,1,1)	1	(1)
5	1	(4)	1	(5)	1	(4)
6	2	(1,2)	4	(1,1,1,3)	1	(2)
7	1	(5)	1	(6)	1	(6)
8	2	(2,4)	3	(1,1,3)	3	(1,4,7)
9	2	(1,5)	1	(14)	1	(2)
10	3	(2,4,4)	3	(1,1,7)	1	(8)
11	1	(4)	1	(4)	2	(4,14)
12	2	(1,2)	2	(1,10)	2	(1,9)
13	1	(4)	1	(1)	3	(2,2, 12)
14	2	(2,4)	4	(1,2,2,12)	1	(8)
15	1	(1)	2	(3,9)	2	(8,10)

b	n=8		n=9		n=10	
	N(b,8)	l(b,8)	N(b,9)	l(b,9)	N(b,10)	l(b,10)
2	4	(1,1,1,1)	4	(1,1,1,1)	5	(1,1,1,1,1)
3	1	(1)	3	(1,2,3)	2	(1,4)
4	4	(1,1,1,3)	3	(1,1,1)	5	(1,1,1,1,1)
5	1	(6)	1	(1)	1	(4)
6	5	(1,1,2,2,7)	2	(1,2)	7	(1,1,1,1,2,2,2)
7	1	(6)	1	(11)	3	(2,2,2)
8	3	(1,3,3)	4	(1,4,5,5)	5	(1,3,3,3,3)

b	n=11		n=12		n=13	
	N(b,11)	l(b,11)	N(b,12)	l(b,12)	N(b,13)	l(b,13)
2	5	(1,1,1,1,1)	6	(1,1,1,1,1,1)	6	(1,1,1,1,1,1)
3	5	(1,1,2,3,3)	2	(1,2)	6	(1,1,2,3,3,5)
4	4	(1,1,1,3)	8	(1,1,1,1,1,1,1,1)	5	(1,1,1,1,1)
5	2	(1,3)	1	(8)	3	(1,3,5)

b	n=14		n=15	
	N(b,14)	l(b,14)	N(b,15)	l(b,15)
2	7	(1,1,1,1,1,1,1)	7	(1,1,1,1,1,1,1)
3	3	(1,1,2)	7	(1,1,2,3,3,5,6)
4	10	(1,1,1,1,1,1,1,1,1,3)	8	(1,1,1,1,1,1,1,1)

二、2進位的Kaprekar變換的情形

在2進位的情形我們得到與[4]相同的結果，當然[4]中也討論了一 些2進位以外的內容，但方法上我們與[4]是完全不同的。

考慮正規二位數$z \in Z(2,n)$，$P_2(z)=[a,b]$，其中$n=a+b$。

可以分成（1）～（5）的情形。

（1）若$a>b$且$b>1$，則$T_{(2,n)}(z)=T_{(2,n)}(\bar{z})=(\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{1\cdots1}_{a-b}\underbrace{0\cdots0}_{b-1}1)_2$

（2）若$a>b$且$b=1$，則$T_{(2,n)}(z)=T_{(2,n)}(\bar{z})=(0\underbrace{1\cdots1}_{a})_2$

（3）若$a=b=\dfrac{n}{2}$（n為偶數），則$T_{(2,n)}(z)=T_{(2,n)}(\bar{z})=(\underbrace{1\cdots1}_{a-1}\underbrace{0\cdots0}_{a}1)_2$

（4）若$a<b$且$a>1$，則$T_{(2,n)}(z)=T_{(2,n)}(\bar{z})=(\underbrace{1\cdots1}_{a-1}0\underbrace{1\cdots1}_{b-a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_2$

（5）若$a<b$且$a=1$，則$T_{(2,n)}(z)=T_{(2,n)}(\bar{z})=(0\underbrace{1\cdots1}_{b})_2$

上述（1）、（2）、（3）皆滿足$\overline{T}_{(2,n)}(\bar{z})=\bar{z}=(\underbrace{1\cdots1}_{a}\underbrace{0\cdots0}_{b})_2$

（4）、（5）皆符合$\overline{T}_{(2,n)}(\bar{z})=(\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{a})_2$，且將（4）、（5）運算後

$$z \to T_{(2,n)}(z) \to T^2_{(2,n)}(z)\text{符合}\overline{T}_{(2,n)}(z)=\overline{T^2}_{(2,n)}(z)=\overline{T^3}_{(2,n)}(z)=\cdots$$

【引理2-1】：當$z \in Z(2,n)$，$\bar{z}=(\underbrace{1\cdots1}_{a}\underbrace{0\cdots0}_{b})_2=(2^a-1)2^b$是正規數

（1）若$b>1$，$a>b$，則$T_{(2,n)}(z)=(\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{1\cdots1}_{a-b}\underbrace{0\cdots0}_{b-1}1)_2=(2^a-1)(2^{n-a}-1)$

（2）若$a=n-1$，$n>2$，則$T_{(2,n)}(z)=(0\underbrace{1\cdots1}_{a})_2=2^{n-1}-1$

（3）若$a=\dfrac{n}{2}$，n為偶數，則$T_{(2,n)}(z)=(\underbrace{1\cdots1}_{a-1}\underbrace{0\cdots0}_{a}1)_2=(2^a-1)(2^a-1)$

（4）若$a<\dfrac{n}{2}$，$a>1$，則$T_{(2,n)}(z)=(\underbrace{1\cdots1}_{a-1}0\underbrace{1\cdots1}_{b-a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_2=(2^{n-a}-1)(2^a-1)$

(5) 若$a=1$，$a<\frac{n}{2}$，則$T_{(2,n)}(z)=(0\underbrace{1\cdots1}_{a})_2=2^{n-1}-1$

【定理2-1】：2進位數$z\in Z(2,n)$，$\bar{z}=(2^a-1)2^b$，正整數a,b，$a+b=n$，則

$$d(z)=1，\ell(z)=1，K(z)=T_{(2,n)}(z)=\begin{cases}(\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{1\cdots1}_{a-b}\underbrace{0\cdots0}_{b-1}1)_2 & a>b\\ (\underbrace{1\cdots1}_{a-1}0\underbrace{1\cdots1}_{b-a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_2 & b>a\\ (\underbrace{1\cdots1}_{a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_2 & a=b=\frac{n}{2}\\ (0\underbrace{1\cdots1}_{n-1})_2 & a=1\ or\ b=1\end{cases}$$

三、3進位及函數$g(x)$

本節我們定義名詞及介紹一些後面使用的3進位的Kaprekar變換性質。

考慮3進位的Kaprekar變換。當$B=3$，且$z\in Z(3,n)$是正規數時，

$\bar{z}=(\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c})_3$，$P_3(z)=[a,b,c]$，其中$a,b,c$為正整數且$n=a+b+c$。

經由直接計算，可得以下性質：

【引理3-1】：

當$z\in Z(3,n)$，$\bar{z}=(\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c})_3$是正規數。

(1) 若$a\geq b+c$，則$T_{(3,n)}(z)=(\underbrace{2\cdots2}_{c}\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{2\cdots2}_{a-b-c}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_3$

(2) 若$c<a<b+c$，則$T_{(3,n)}(z)=(\underbrace{2\cdots2}_{c}\underbrace{1\cdots1}_{a-c-1}0\underbrace{2\cdots2}_{c+b-a}\underbrace{1\cdots1}_{a-c}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_3$

(3) 若$c=a$，則$T_{(3,n)}(z)=(\underbrace{2\cdots2}_{c-1}1\underbrace{2\cdots2}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_3$

(4) 若$a<c<a+b$，則$T_{(3,n)}(z)=(\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{c-a-1}0\underbrace{2\cdots2}_{a+b-c}\underbrace{1\cdots1}_{c-a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_3$

(5) 若$c\geq a+b$，則$T_{(3,n)}(z)=(\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{2\cdots2}_{c-b-a}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_3$

將引理3-1以變換$\widetilde{T}$表示，可以寫成下列引理3-2

【引理3-2】：

$$\widetilde{T}[a,b,c]=\begin{cases}[a-b,2b,c] & a\geq b+c\\ [b+2c-a,2(a-c),c] & c<a<b+c\\ [a+b-1,2,a-1] & a=c\\ [b+2a-c,2(c-a),a] & a<c<a+b\\ [c-b,2b,a] & a+b\leq c\end{cases}$$

由引理3-2，直接可得

【引理3-3】：若$[a,b,c]\in Z_3^+$，$a+b+c=n$且$\widetilde{T}[a,b,c]=[a',b',c']$，則有

（1）$a'+b'+c'=n$ 且 $a'\geq c'$。

（2）若 $a\neq c$ 則 $a',b',c'>0$。

（3）$\widetilde{T}[a,b,c]=\widetilde{T}[c,b,a]$。

3進位的Kaprekar變換的情形，最後的結果有兩個部份：一個是得到3進位Kaprekar常數的形式、正規的3進位Kaprekar數x 的$d(z)$, $K(z)$, $l(z)$的形式。為了分析上的便利我們引進了並定義在正有理數上的函數$g(x)$，利用此函數可以計算3進位的Kaprekar變換，並且在不能使用連續性及中間質性質的情形下，我們也得到了函數$g(x)$的一些結果。事實上，$g(x)$也用於分析4進位Kaprekar變換的情形。

【定義3-1】：

（1）若x為正有理數，定義 $g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x\geq 1\\ \frac{1-x}{2x} & 0<x<1\end{cases}$。

（2）若x為實數，定義 $\bar{g}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x\geq 1\\ \frac{1-x}{2x} & 0<x<1\end{cases}$，我們也稱$\bar{g}$是函數g的延拓。

（3）若x為實數，定義 $\varphi(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-1}{2}$，$\phi(x)=\dfrac{x-1}{2}$

【定義3-2】：

（1） 數列$<\alpha_n>$，滿足$\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$，$\alpha_{2n+1}=2\alpha_{2n}+1$，$\alpha_{2n}=2\alpha_{2n-1}-1$，$n\geq 1$。

（2）數列$<\beta_n>$，滿足$\beta_k=\dfrac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$,$k\geq 1$。

（3）區間列$\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$，$J_1=(0,\dfrac{1}{3})$, $J_2=(\beta_3,1)$, $\cdots$,

$J_{2m-1}=(\beta_{2m-2},\beta_{2m})$, $J_{2m}=(\beta_{2m+1},\beta_{2m-1})$, $m>1$。

（4）區間列$\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$，$I_k=(2^k-1,2^{k+1}-1)$，$k\geq 1$。

實際計算便可得$\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$，$\alpha_3=3$，$\alpha_4=5$，$\alpha_5=11$，$\alpha_6=21$，$\cdots$，

因此 $\beta_1 = 1$，$\beta_2 = \frac{1}{3}$，$\beta_3 = \frac{3}{5}$，$\beta_4 = \frac{5}{11}$，⋯，

$J_1 = (0,\frac{1}{3})$，$J_2 = (\frac{3}{5},1)$，$J_3 = (\frac{1}{3},\frac{5}{11})$，⋯，

$I_1 = (1,3)$，$I_1 = (3,7)$，$I_1 = (7,15)$，⋯

【定義3-3】：集合$\{g^k(x)\}_{k\in N}$ 稱為x的 g-軌跡

【引理3-4】：z是正規數且$P(z) = [a,b,c]$

(1) 若$\frac{|a-c|}{b} \neq 0$則$T(z)$是正規數。

(2) 若$\frac{|a-c|}{b}$ 屬於$\{2^k - 1 \mid k \geq 1\} \cup \{\beta_k \mid k \in N\}$，則必有正整數m，使得$T^m(z)$ 不為嚴格正規數。

【定義3-5】：x為正有理數，則

$d_g(x) := \min\{d \geq 0 \mid$ 存在$l > 1$使得$g^d(x) = g^{d+\ell}(x)\}$

$K_g(x) := g^{d(x)}(x)$

$\ell_g(x) := min\{\ell \geq 1 \mid g^\ell(K_g(x)) = K_g(x)\}$，$x$是正有理數且若$\ell(x) = k$，即稱$x$是$g(x)$的$k$-循環點(數)。若$d_g(x) = 0$，則$x$是$g(x)$的$k$-週期點(數)。

由底下引理，藉由函數$g(x)$的行為，我們可以知道變換$\widetilde{T}$的行為，再求得$d(z)$、$K(z)$及$\ell(z)$的值。

【引理3-4】：若$[a',b',c'] = \widetilde{T}[a,b,c]$，$a \neq c$，$a,b,c \in N$

(1) 若$\frac{|a-c|}{b} \neq 1$則 $a' > c'$

(2) $\frac{a'-c'}{b'} = g(\frac{|a-c|}{b})$

(3) $a' = \frac{g(\frac{|a-c|}{b})}{1+g(\frac{|a-c|}{b})}(|a-c|+b)$，$b' = \frac{1}{1+g(\frac{|a-c|}{b})}(|a-c|+b)$，$c' = \min\{a,c\}$

証明：(1) 直接由$\widetilde{T}[a,b,c]$的定義可得。

(2) 令$x = \frac{|a-c|}{b}, x' = \frac{a'-c'}{b'}$。將分成 (1) $x > 1$及 (2) $x < 1$討論。

若$x > 1$即$a - c > b$，由$\widetilde{T}$的定義知

$$x' = \frac{a'-c'}{b'} = \frac{a-b-c}{2b} = \frac{a-c-b}{2b} = \frac{\frac{a-c}{b}-1}{2} = \frac{x-1}{2} = g(x)$$

若$x<1$即$a<b+c$，同樣由$\widetilde{T}$的定義知

$$x' = \frac{a'-c'}{b'} = \frac{b+2c-a-c}{2(a-c)} = \frac{b-(a-c)}{2(a-c)} = \frac{\frac{b}{a-c}-1}{2} = \frac{\frac{1}{x}-1}{2} = g(x)$$

(3) 因$a \neq c$ 故必為 $a > c$ 或 $a < c$，由引理3-3知，$a > c$時與$a < c$結果一致。

故僅需要考慮的 $a > c$ 情形。由$\widetilde{T}$的定義，$c' = c$，再由

$a+b+c = a'+b'+c'$， 得$a-c+b = a'-c'+b'$，

令$x = \dfrac{|a-c|}{b}, x' = \dfrac{a'-c'}{b'}$，則 $(a'-c'):b' = x':1$

因此$(a'-c') = \dfrac{x'}{1+x'}(a-c+b)$，$b' = \dfrac{1}{1+x'}(a-c+b)$，得証。

註：$x = \dfrac{|a-c|}{b} \neq 1$，則 $g(x) \neq 0$ ，故 $a' > c'$，因此$[a',b',c'] \in Z_3^+$。

接下來我們討論函數$g(x)$的性質。

【引理3-5】：

(1) 若x是不為1的正實數，則$\bar{g}(x) = \bar{g}(\dfrac{1}{x})$。

(2) $\bar{g}(\beta_{i+1}) = \beta_i$ ，$i = 1,2,\cdots$，$\bar{g}(\beta_1) = 0$。

(3) $\bar{g}(2^{k+1}-1) = 2^k - 1$，$k$為非負整數。

(4) $\bar{g}: I_{k+1} \to I_k$，為一對一映成。

(5) $\bar{g}: J_{k+1} \to J_k$，為一對一映成。

由引理3-2，函數g(x)的映射滿足$\cdots \to 2^k-1 \to (2^{k-1}-1) \to \cdots \to 3 \to 1 \to 0$，

$\cdots \to \beta_k \to \beta_{k-1} \cdots \to \beta_1 = \dfrac{1}{3} \to 1 \to 0$，因此可得

若正有理數$x = \dfrac{p}{q}$，p,q是正整數進一步考慮$g(x)$如下：

$$g(\frac{p}{q}) = \begin{cases} \frac{p-q}{2q} & p > q \\ \frac{q-p}{2p} & p < q \end{cases}$$

再以$\frac{p_1}{q_1}$表示$g(\frac{p}{q})$則有以下結果。

【引理3-6】：p, q是互質的正整數，若$\frac{p_1}{q_1} = g(\frac{p}{q})$，則

(1) $(p_1 + q_1)$ 整除 $(p + q)$。

(2) 若令$P = p + q$，$p_1 \equiv 2p \, mod P$，$q_1 \equiv 2q \, mod P$

或者 $p_1 \equiv -2p \, mod P$，$q_1 \equiv -2q \, mod P$。

【定義3-6】：若$p + q = 2^s P$，P為奇數，s為非負整數

(1) $or2^+(P) = min\{r$為正整數 $| \; 2^r \equiv 1 \, mod P\}$

(2) $or2^-(P) = min\{r$為正整數 $| \; 2^r \equiv -1 \, mod P\}$

(3) $or2(P) = min\{or2^-(P), or2^+(P)\}$

由引理3-6，我們可求得$d_g(x)$和$\ell_g(x)$，再由$g(x)$與變換$\widetilde{T}$的關係，將可得$d(z)$、$K(z)$及$\ell(z)$的值。

【定理3-1】：

$x = \frac{p}{q}$，p, q是互質的正整數，若$p + q = 2^s P$，P為奇數，s為非負整數，則$d_g(x) \leq s + 1$ 且 $\ell_g(x) = or2(P)$。

證明：証明過程中我們會用到下列事實：

(1) a, b, c, d 是正整數，$a + b = c + d$，$a \equiv c \; mod\,(a + b)$ 且 $b \equiv d \; mod\,(a + b)$，則$a = c, b = d$。

(2) 令 $\frac{p_k}{q_k} = g^k(\frac{p}{q}), k \geq 1$，因為$(p_k + q_k)$ 整除$(p + q)$為了方便我們選取 $(p_k + q_k) = (p + q), k \geq 1$。

由引理 5-5，(1) $p_k \equiv 2^k p \, mod(p + q)$，$q_k \equiv 2^k q \, mod(p + q)$

或者 (2) $p_k \equiv -2^k p \, mod(p + q)$，$q_k \equiv -2^k q \, mod(p + q)$。

若 (1) 成立 $p_s \equiv 2^s p \, mod(p + q)$，$q_s \equiv 2^s q \, mod(p + q)$，$r$ 為正整數，$2^r \equiv 1 \, mod P$，則$p_{s+r} \equiv 2^{s+r} p \; mod(p + q)$，$q_{s+r} \equiv 2^{r+s} q \, mod(p + q)$ 或 $p_{s+r} \equiv -2^{s+r} p \; mod(p + q)$，$q_{s+r} \equiv -2^{r+s} q \, mod(p + q)$

前者可得 $p_{s+r} \equiv 2^s p \equiv p_s \; mod(p + q)$，$q_{s+r} \equiv 2^s q \equiv q_s \; mod(p + q)$；後者可得$p_{s+r} \equiv -2^s p \equiv -p_s \; mod(p + q)$，$q_{s+r} \equiv -2^s q \equiv -q_s \; mod(p + q)$。

因為 $(p_k+q_k)=(p+q), k\geq 1$，因此，$\dfrac{p_{s+r}}{q_{s+r}}=\dfrac{p_s}{q_s}$。

類似地若(1) 成立，且 r 為正整數$2^r\equiv -1\ mod P$，一樣會得到 $\dfrac{p_{s+r}}{q_{s+r}}=\dfrac{p_s}{q_s}$。

若(2)成立，與(1)類似的推論可得 $\dfrac{p_{s+r}}{q_{s+r}}=\dfrac{p_s}{q_s}$。

【引理3-7】：

(1) $\bar{g}^k(x)$必為 $\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ 的形式，其中A,B,C,D為整數。

(2) $\bar{g}^k(-1)=-1$。

證明：(1) 因為(a) 當$0<x<1$時，$\bar{g}(x)=\varphi(x)$，(b) 當$x>1$時，$\bar{g}(x)=\phi(x)$。

直接計算可知 $\varphi^k(x),\phi^l(x)$與 $\varphi^k(x)(\phi^l(x))$ 和 $\phi^l(x)(\varphi^k(x))$皆為$\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ 的形式，

由數學歸納法可推得：$\bar{g}^k(x)$必為 $\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ 的形式。

(2) 因 $\varphi(-1)=\phi(-1)=-1$，由數學歸納法可推得 。

【引理3-8】：

x是正實數，且x是$\bar{g}$的週期點，則x是正有理數。

證明：由引理3-7，不妨令 $\bar{g}^k(x)=\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$，其中$A,B,C,D$為整數。

若$x>0$是$\bar{g}$ 的k-週期點，$\bar{g}^k(x)=x$ 的解即為$Cx^2+(D-A)x-B=0$的解。

又-1是$Cx^2+(D-A)x-B=0$之一根，因此$\bar{g}^k(x)=x$ 的解必為有理數。

【引理3-9】：若正實數x是$\bar{g}$的k週期點，$k>1$，(即 $\bar{g}^k(x)=x$)的充要條件為數列 $\{x,\bar{g}(x),\cdots,\bar{g}^{k-1}(x)\}$中必有一數在0與1之間，且必有一數大於1。

接下來我們介紹如何利用$g(x)$的性質，將n週期點，構造出更多n-循環點。

若x為正有理數，將$g(x)$分成$x>1$與$0<x<1$情形討論：

$x>1$時，$g(x)=\phi(x)$，$\phi: I_{k+1}\to I_k\to\cdots\to(0,1)$；

$0<x<1$時，$g(x)=\varphi(x)$，$\varphi: J_{k+1}\to J_k\to\cdots\to(\beta_3,1)\to(0,\dfrac{1}{3})$

底下引理中我們構造$g(x)$的 n-週期點。

【引理3-10】：$\alpha_k, \beta_k, k \geq 1$如定義3-2

(1) $x = \dfrac{1}{2^n}$ 是 $g(x)$ 的 n-週期點。

(2) $x = 2^d - 1 + \dfrac{2^d}{2^\ell}$，$d(x) = \begin{cases} d - \ell + 1 & d > \ell - 1 \\ 0 & d \leq \ell - 1 \end{cases}$，$\ell(x) = \ell$。$x$是$g(x)$ 的 n-循環點。

(3) $x = \beta_k - \dfrac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}$，是 $g(x)$ 的 $(m+k\text{-}1)$-週期點。

證明：(1) 若$x < 1$，$g(x), g^2(x), \cdots, g^{n-1}(x) > 1$，且$g^n(x) = x$時，

$$x \to \frac{1-x}{2x} \to \cdots \to \frac{1-(2^n-1)x}{2^n x} = x\text{，則}g^n(x) = \frac{1-(2^n-1)x}{2^n x} = x\text{，}$$

$$2^n x^2 + (2^n - 1)x - 1 = 0\text{，}x = \frac{1}{2^n}\text{。}$$

(2) 若$x > 1$，$g^d(x) < 1$，$x, g(x), g^2(x), \cdots, g^{d-1}(x) > 1$，且$g^{d+\ell}(x) = g^d(x)$時，

$$x \to \frac{x-1}{2} \to \cdots \to \frac{x+1-2^d}{2^d} = g^d(x) = \frac{1}{2^\ell}\text{，}x = 2^d - 1 + \frac{2^d}{2^\ell}\text{。}$$

(3) 若$x > 1$，$x, g(x), g^2(x), \cdots, g^{m-1}(x) > 1$，$g(x)^m, g^{m+1}(x), \cdots, g^{m+k-1}(x) > 1$，

且$g^{m+k}(x) = x$時，

$$x \to \frac{1-x}{2x} \to \frac{3x-1}{2(1-x)} \to \frac{3-5x}{2(3x-1)} \to \frac{5-11x}{2(5x-3)} \to \cdots \to \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}x}{2(\alpha_k x - \alpha_{k-1})} \to \cdots \to \frac{1}{2^m}\left(\frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}x}{2(\alpha_k x - \alpha_{k-1})} + 1\right) - 1 = x$$

$$(2^{m+1}\alpha_k)x^2 + (2^{m+2}\alpha_{k-2} + \alpha_{k+1} - 2\alpha_k)x - ((2^{m+1}-2)\alpha_{k-1} + \alpha_k) = 0$$

$$(x+1)((2^{m+1}\alpha_k)x - ((2^{m+1}-2)\alpha_{k-1} + \alpha_k)) = 0\text{，}x = \beta_k - \frac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}\text{。}$$

【定義3-7】：

(1) 令 $S_1 = \{s\text{正數} \mid s \in S\text{或有正整數}k\text{使}s \in \varphi^{-k}(S)\}$，

$S_{11} = \{s\text{正數} \mid s \in S\text{或有正整數}k\text{使}s \in \varphi^{-k}(S_1)\}$。

(2) 令 $S_2 = \{s\text{正數} \mid s \in S\text{或有正整數}k\text{使}s \in \varphi^{-k}(S_{11})\}$，

$S_{21} = \{s\text{正數} \mid s \in S\text{或有正整數}k\text{使}s \in \varphi^{-k}(S_2)\}$。

(3) 依(1)(2)可以定義集合 $S_1, S_{11}, S_2, S_{21}, \ldots$，

令 $\widetilde{S} = \{s\text{正數} \mid \text{有正整數}k\text{滿足}s \in S_k\text{或}s \in S_{k1}\}$。

(4) 對於任何正有理數的子集合S，我們定義集合 $\mathfrak{I}(S) = \widetilde{S}$，並定義

① $\mathfrak{I}_0 = \widetilde{S}$，當S為所有$2^k-1, \beta_k$形成的集合時。

② $\mathfrak{I}_1 = \widetilde{S}$，當S為所有$\dfrac{1}{2^n}$形成的集合時。（$\mathfrak{I}(2^d-1+\dfrac{2^d}{2^\ell}) \subseteq \mathfrak{I}_1$）

③ $\mathfrak{I}_2 = \widetilde{S}$，當S為所有$\beta_k - \dfrac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}$形成的集合時。

由引理3-10中的 n-週期點，透過定義3-7，我們可以在區間列I_k及J_k，$k \in N$中構造密密麻麻的 n-循環點。

【引理3-7】：區間J_k定義如定義3-2

（1）任意正整數n 存在數列$\{x_n^k\}_{k\in N}, \{y_n^m\}_{m\in N}$，滿足 $x_n^k \in J_k$，$y_n^m \in (2^m-1, 2^{m+1}-1)$，且 $\ell(x_n^k)=n$，$\ell(y_n^m)=n$。

（2）任意正整數n，存在$\{s_n^k\}_{n=1}^{\infty}$，$\{t_n^m\}_{n=1}^{\infty}$，使得$\ell(s_n^k)=n$，$\ell(t_n^m)=n$ 且 $\lim_{n\to\infty} s_n^k = \beta_k$，$\lim_{n\to\infty} t_n^m = 2^m-1$。

證明：（1） 令 S為所有$\dfrac{1}{2^n}$形成的集合，考慮定義3-7中取 $x_n^k = \varphi^{-k}(\{\dfrac{1}{2^n}\})$，$y_n^k = \phi^{-k}(\{\dfrac{1}{2^n}\})$， 即為所求。

（2） 令 S為所有$\dfrac{1}{2^n}$形成的集合，考慮定義3-7中S_1及S_{11}，以及下列事實(i)(ii)

(i) $0 \le y \le \dfrac{1}{3}$時，$\dfrac{18}{25} \le |D(\varphi^{-1})(y)| \le 2$，因此若數列$\{x_n\} \subseteq S$且 $|x_n - x_m| \to 0$則對任何給定的正整數k，$|\varphi^{-k}(x_n) - \varphi^{-k}(x_m)| \to 0$

(ii) $y > 1$時，$D(\phi^{-1})(y) = 2$，因此若數列$\{x_n\} \subseteq S$且 $|x_n - x_m| \to 0$，對任何給定的正整數k，$|\varphi^{-k}(x_n) - \varphi^{-k}(x_m)| \to 0$

可得証。

因為$g(x)$：$\cdots \to 1 \to 0 \to \infty$，所以有些數最後是無法以 g 繼續運算下去，對應於Kaprekar變換T，就是T 的非正規數。所以我們須要區別哪些數z，使所有正整數m，都滿足$T^m(z)$為正規數。哪些數z，存在正整數m，使得$T^m(z)$不為正規數。我們有下列相關的結果。

【引理3-8】：

z是正規數且$P(z)=[a,b,c]$，則對任何正整數m，$T^m(z)$是嚴格正規數的充要條件為：$\frac{|a-c|}{b}$不屬於$\mathfrak{I}_0$。

證明：由$\mathfrak{I}$的定義，若$x\in\mathfrak{I}(x_0)$，則存在正整數列$k_1,k_2,k_3,\cdots,k_l$使得$x=h(x_0)$，其中h是由$\varphi^{-k_1},\phi^{-k_2},\cdots,\phi^{-k_l}$的合，故$g^{k_1+k_2+\cdots+k_l}(x)=x_0$。因此，若$\frac{|a-c|}{b}\in\mathfrak{I}_0$，則存在正整數$m$使得$g\left(\frac{|a-c|}{b}\right)\in\{\beta_k\}\cup\{2^k-1\}$，故$z$的Kaprekar軌跡包含有非正規數。

反之，若z是正規數且z的Kaprekar軌跡包含有非正規數，則存在最小的正整數m，使得$T^{m-1}(z)$是正規數，但$T^m(z)$不是正規數(若$m=1$，規定$T^{m-1}(z)=z$)。設$P\left(T^{m-1}(z)\right)=[A,B,C]$，則有$\frac{|A-C|}{B}=1$，因此$\frac{|a-c|}{b}\in\mathfrak{I}(\{1\})\subseteq\mathfrak{I}_0$

根據$g(x)$的性質及其變換T的關係，得$d(z)$、$K(z)$及$\ell(z)$的結果如下列定理3-2。

【定理3-2】：$z\in Z(3,n)$且$P(z)=[a,b,c]$，

(1) 若p_k是$g(x)$的k-循環點 $\frac{|a-c|}{b}\in\mathfrak{I}(\{p_k\})$，則 $\ell(z)=k$。

(2) $\ell(z)=1$，的充要條件是$\frac{|a-c|}{b}\in\mathfrak{I}(\{\frac{1}{2}\})$，

因此$K(z)=(\underbrace{2\ldots2}_{c}\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{2\ldots2}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{c-1}1)_3$，$k>1$，$c>1$，

或$K(z)=(2\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{2\ldots2}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{k}1)_3$，$k>1$， 或$K(z)=(\underbrace{2\ldots2}_{c}0210\underbrace{0\ldots0}_{c-1}1)_3$，$c>1$，

或$K(z)=(20211)_3$。

(3) 若$\frac{|a-c|}{b}$不屬於$\mathfrak{I}_0$且$|a-c|+b=2^sP$，其中s為非負整數P為正奇數 ，則 $\ell(z)=or2(P)$

証明：(1) 因為$\ell_g(p_k)=k$ ，設$d_g(p_k)=s$，若$x\in\mathfrak{I}(\{p_k\})$，由引理3-8的証明過程，存在正整數$m$，使得$g^m(x)=p_k$，$d_g(x)=s+m$，$\ell_g(x)=k$，又由$\ell(z)=\ell_g\left(\frac{|a-c|}{b}\right)$，可得$\ell(z)=k$。

(2) 由$g(x)=x$只有唯一解$x=\frac{1}{2}$，模仿引理3-8的証明可得。

(3) 由定理3-1及模仿引理3-8的証明可得。

例如：(1) $z=(2111112111111120111111)_3, P(z)=[3,17,1], Or2(19)=9$，

$\ell(z)=9$，$P(z)$的 Kaprekar軌跡如下

$[3,17,1]\to[16,4,1]\to[12,8,1]\to[4,16,1]\to[14,6,1]\to[8,12,1]\to[6,14,1]\to$

$[10,10,1]\to[2,18,1]\to[18,2,1]\to[16,4,1]\to\cdots$

(2) $P(z)=[14,27,3], Or2(19)=9$，$\ell(z)=9$

$P(z)$的 Kaprekar軌跡如下

$[14,27,3]\to[1922,3]\to[9,32,3]\to[29,12,3]\to[17,24,3]\to[13,28,3]\to$

$[21,20,3]\to[5,36,3]\to[37,4,3]\to[33,8,3]\to[25,16,3]\to[9,32,3]\to\cdots$

多的示例我們以excel做了一個演算法進行測試各值為

$P(z)=[a,b,c], p=a-c, q=b, p+q=2\times19, 2^2\times19, 2^3\times19$

定理3-2基本上已回答了3進位的正規Kaprekar數的循環長度$\ell(z)$，也可以計算$d(z)$，及Kaprekar常數，對於非正規的3進位Kaprekar數，在[1]的文章中有仔細的計算。因此3進位的Kaprekar數不論正規與否都是可解決的。接下來我們關心$g(x)$的行為。

首先，因為Kaprekar數必定是Kaprekar常數或循環，而每一個正有理數數x對應Kaprekar數，若正有理數數x不屬於$\mathfrak{I}_0$，則x必是$g(x)$的k-循環點(數)。

【引理3-9】：

任何$\frac{1}{2^{n_1}}$，$\frac{1}{2^{n_2}}$（n_1,n_2-週期點）間必存在$x\in(\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})$（不妨設 $n_2<n_1$）滿足

$f^{n_1+1}(x)=x_0$，$x_0\in(2^{n_2}-1,\infty)$，因此，對於任何正整數n，必有n-循環點$x_n\in(\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})$。

由引理3-10中的 n-週期點，我們可以進一步把3-2的結果推屏至區間列區間列I_k及J_k，$k\in N$各處構造密密麻麻的 n-循環點。即任意正整數 n，任一正有理數的區間內必有 n-循環點。

【定理3-3】：若y_1,y_2是正有理數，$y_1<y_2$

(1) 若有$x\in\{\beta_k\}_{k\in N}\cup\{2^k-1\}_{k\in N}$，使得$y_1<x<y_2$，則區間$(y_1,y_2)$中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

(2) 若有$x\in\mathfrak{I}_0$，使得$y_1<x<y_2$，則區間(y_1,y_2)中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

(3) $y_1, y_2 \in (0,\frac{1}{3})$，若存在某一正整數$m$使得$g^m(y_1) < 1 < g^m(y_2)$或$g^m(y_2) < 1 < g^m(y_1)$成立，則區間$(y_1, y_2)$中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

(4) 若存在某一正整數m使得$g^m(y_1) < 1 < g^m(y_2)$或$g^m(y_2) < 1 < g^m(y_1)$成立，則區間(y_1, y_2)中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

(3) (4) 中條件 $g^m(y_1) < 1 < g^m(y_2)$ $(g^m(y_2) < 1 < g^m(y_1))$可換成 $g^m(y_1) < x < g^m(y_2)$ ($(g^m(y_2) < x < g^m(y_1))$，其中 $x \in \mathfrak{I}_0$。

四、4進位

$z \in Z(4,n)$，$\bar{z} = (3\cdots32\cdots21\cdots10\cdots0)$，令$T(z) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，根據[1]，將$a_1, a_2, \cdots, a_n$配對得到一組和為2（(2,0)(1,1)），許多組和為3（(3,0)(2,1)），一組和為4（(2,2)(3,1)），剩餘一些數字3（可能為0個）。設其中(3,0)有A組、(2,1)有B組、(2,0)和(1,1)選其中一組、(3,1)和(2,2)選其中一組，另外還有x個不成對的3($x \geq 0$)。

配對方式			種類	3的數量	2的數量	1的數量	0的數量
和為4	和為3	和為2					
(2,2)	(3,0) (2,1)	(1,1)	(1)	A + x	B + 2	B + 2	A
(3,1)	(3,0) (2,1)	(2,0)	(1)	A + x +1	B + 1	B + 1	A +1
(3,1)	(3,0) (2,1)	(1,1)	(2)	A + x +1	B + 3	B	A
(2,2)	(3,0) (2,1)	(2,0)	(3)	A + x	B	B + 3	A +1

可將上表中的4類重新表示，可知$P_4(T_{(4,n)}(z))$必為以下3種形式之一

$$P_4(T_{(4,n)}(z)) = \begin{cases} I & [a,b,b,c] & a \geq c \\ II & [a,b,b+3,c] & a > c \\ III & [a,b+3,b,c] & a \geq c-1 \end{cases}$$

因此，我們定義

【定義4-1】：

若$z \in Z(4,n)$，若有非負整數a, b, c使得，$P_4(z) = [a,b,b,c]$或$[a,b,b+3,c]$或$[a,b+3,b,c]$，

即依序稱z為第I,II,III類數分別針對

（1）$P_4(z)=[a,b,b,c]$，$a\geq c$

（2）$P_4(z)=[a,b,b+3,c]$，$a>c$

（3）$P_4(z)=[a,b+3,b,c]$，$a\geq c-1$

直接計算可得下列結果，證明置於附錄1

【定理4-1】：令$z_1=P_4(T_{(4,n)}(z))$且z,z_1皆為正規數，則計算$\widetilde{T}(z_1)$可得一般式如下

$$\widetilde{T}_4[a,b,b,c]=\begin{cases}[a,b,b,c] & a-c<b\\ [a,b-1,b+2,c-1] & a-c=b\\ [2b+2c-a,a-c,a-c,c] & b<a-c\leq 2b\\ [a-2b,2b,2b,c] & a-c\geq 2b\end{cases}$$

$$\widetilde{T}_4[a,b,b+3,c]=\begin{cases}[a-2b-3,2b+3,2b+3,c] & 2b+3\leq a-c\\ [2b+2c+3-a,a-c,a-c,c] & b+3<a-c\leq 2b+3\\ [b+c,b+2,b+5,c-1] & a-c=b+3\\ [a-3,b+3,b+3,c] & b<a-c<b+3,3\leq a-c\\ [2c+3-a,b+a-c,b+a-c,c] & b<a-c<b+3,a-c<3\\ [a-3,b+3,b+3,c] & b=a-c,b\geq 3\\ [c+3-b,2b,2b,c] & b=a-c\leq 3\\ [a-3,b+3,b+3,c] & 3\leq a-c<b\\ [2c+3-a,b+a-c,b+a-c,c] & 0<a-c\leq 3,a-c<b\end{cases}$$

$$\widetilde{T}_4[a,b+3,b,c]=\begin{cases}[a-2b-3,2b+3,2b+3,c] & 2b+3\leq a-c\\ [2b+2c+3-a,a-c,a-c,c] & b+3\leq a-c\leq 2b+3\\ [2b+2c+3-a,a-c,a-c,c] & b<a-c\leq b+3\\ [a+3,b-1,b+2,c-1] & b=a-c\\ [a+3,b,b,c] & 0\leq a-c<b\\ [a+2,b+1,b+1,a] & a-c=-1\end{cases}$$

我們將每種情況由上到下依序編號，計算其結果的類型，得到的流程圖置於附錄2。

【性質4-1】：

令$z_1=P_4(T_{(4,n)}(z))$且z,z_1皆為正規數則有

（1）若z為第I類且$a-c\neq b$，則z_1為第I類（若$a-c=b$，則z_1為第II類）

（2）若z為第II類且$a-c\neq b+3$，則z_1為第I類（若$a-c=b+3$，則z_1為第II類）

（3）若z為第III類且$a-c\neq b$，則z_1為第I類（若$a-c=b$，則z_1為第II類）

因此若考慮 $z\to T_{(4,n)}(z)\to T^2_{(4,n)}(z)\to T^3_{(4,n)}(z)$，並令$z_i=T^i_{(4,n)}(z)$屬於正規數，i=1,2,3，則$z_1$為第I,II,III類。在$z_2$不為第I類的$a-c=b$的情況下，則$z_3$必為第I類。

【引理4-1】：若$z\in Z_3^4$，$z=[a,b,b,c]$且滿足$a-c\neq b$

$$\widetilde{T}_4[a,b,b,c]=\begin{cases}[a,b,b,c] & a-c<b\\ [2b+2c-a,a-c,a-c,c] & b<a-c\leq 2b\\ [a-2b,2b,2b,c] & a-c\geq 2b\end{cases}$$

若$z=[a,b,b,c]$且$a-c\neq b$，令$w=[a,2b,c]$，則$Z_3^4=\{[a,b,b,c]\,|\,a,b,c$為正整數$\}$與$\{[a,b,c]\,|\,a,b,c$為正整數$\}$間必有一對一映成的對應關係$\psi$，滿足$\psi(z)=w$，且$\psi(F_4(z))=F_3(w)$。

下一引理我們將$[a,b,b,c]$與$[a,b',c]$互相對應，其中$b'=2b$，因此$\widetilde{T}_4[a,b,b,c]$的行為就可以用$\widetilde{T}_3[a,b',c]$來描述，進一步即可解決4進位的問題。

【引理4-2】：$z=[a,b,b,c]$且滿足$a-c\neq b$，令$x=\dfrac{a-c}{2b}$，分成三種情形考慮

（1）$0\leq x<\dfrac{1}{2}$，可知$\widetilde{T}(z)=z$。

（2）$\dfrac{1}{2}<x\leq 1$，則$0\leq g(x)<\dfrac{1}{2}$，即$\widetilde{T}^2(z)=\widetilde{T}(z)$。

（3）$x\in(2^k-1,2^{k+1}-1)$且$k\geq 1$，則$g^k(x)<1$，即$\widetilde{T}^{k+1}(z)=\widetilde{T}^k(z)$或$\widetilde{T}^{k+2}(z)=\widetilde{T}^{k+1}(z)$。

證明：（1）、（2）可由引理4-1得知。

（3）因$g^k(x)<1(g^{k-1}(x)>1)$，故令$x_k=g^k(x)\Rightarrow x_k$必滿足（2），

若令$z_i=\widetilde{T}^i(z)=[a_i,b_i,b_i,c_i]\Rightarrow x_k=\dfrac{a_i-c_i}{2b_i}$

x_k必為情形（1）或（2），因此$\widetilde{T}^{k+1}(z)=\widetilde{T}^k(z)$或$\widetilde{T}^{k+2}(z)=\widetilde{T}^{k+1}(z)$。

【引理4-3】：

令$z\in Z_3^4$，滿足$\dfrac{a-c}{2b}\neq\dfrac{1}{2}$，則$\ell(z)=1$，且$\dfrac{a-c}{2b}$依下列情形，可得$d(z)$、$K(z)$如下：

(1) $\dfrac{a-c}{2b} < \dfrac{1}{2}$時，$d(\bar{z}) = 1$ 。

(2) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{a-c}{2b} < 1$時，$d(\bar{z}) = 2$ 。

(3) $2^k - 1 \le \dfrac{a-c}{2b} < 3 \cdot 2^{k-1} - 1$，$k$為正整數，$d(\bar{z}) = k$ 。

(4) $3 \cdot 2^{k-1} - 1 < \dfrac{a-c}{2b} \le 2^{k+1} - 1$，$k$為正整數，$d(\bar{z}) = k+1$ 。

上述(1)~(4)中皆可得$K(z)$為 $(\underbrace{3\cdots3}_{c}\underbrace{2\cdots2}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c-1}0\,\underbrace{3\cdots3}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1\,)_4$ 的形式。

【引理4-4】：

令$z \in Z_3^4$，滿足$\dfrac{a-c}{2b} = \dfrac{1}{2}$時，$F^2(z) \in Z_3^4$，且$d(z) = 2$，$\ell(z) = 1$，$K(z) = F^2(z)$。

證明：$\widetilde{T}[a,b,b,c] = [a,b-1,b+2,c-1]$，此時$[a,b-1,b+2,c-1]$為第II類，

令$[a,b-1,b+2,c-1] = [a_1,b_1,b_1+3,c_1]$，則$b_1 < a_1 - c_1 < b_1 + 3, 3 \le a_1 - c_1$，

因此$\widetilde{T}^2(z) \in Z_3^4$，且$\widetilde{T}^3(z) = \widetilde{T}^2(z)$。

當$z \in Z_3^4$，存在m使得$\widetilde{T}^m(z)$為非正規數時的情況置於附錄3。

【定理4-2】：

令$z_1 = P_4(T_{(4,n)}(z))$且z, z_1皆為正規數時，必存在m使得$T_{(4,n)}^m(z)$為下列2種情況之一。

(1) $(\underbrace{3\cdots3}_{c}\underbrace{2\cdots2}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c-1}0\,\underbrace{3\cdots3}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1\,)_4$，為Kaprekar常數。

(2) 進入下列循環之一種：

(i)$[3,1,1,0] \to [1,3,0,1]$

(ii)$[2,7,4,1] \to [5,4,4,1] \to [5,3,6,0]$

(iii)$[1,6,3,1] \to [4,3,3,1] \to [4,2,5,0]$

(iv)$[2,4,1,1] \to [5,0,3,0] \to [2,3,3,0]$

(v)$[b+1,b,b,1] \to [b+1,b-1,b+2,0] \to [b-2,b+3,b,1]$，此時$b > 2$，$c = 1$。

五、5進位

$z \in Z(5,n)$，$\bar{z} = (4\cdots43\cdots32\cdots21\cdots10\cdots0)$，將$z$經過卡布里卡運算後，得到$T(z) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。根據[1]，將$a_1, a_2, \cdots, a_n$配對得到一組和為3（$(3,0)(2,1)$），許多組和為4（$(3,1)(2,2)$），一組和為5（$(3,2)(4,1)$），剩餘一些數字4（可能為0個）。設其中$(3,1)$有A組、$(2,2)$有B組、$(3,0)$和$(2,1)$選其中一組、$(3,2)$和$(4,1)$選其中一組，另外還有$x$個不成對的4 $(x \geq 0)$。

配對方式			種類	4的數量	3的數量	2的數量	1的數量	0的數量
和為5	和為4	和為3						
(3,2)	(3,1) (2,2)	(2,1)	(1)	A+x	B+1	2C+2	B+1	A
(4,1)	(3,1) (2,2)	(3,0)	(1)	A+x+1	B+1	2C	B+1	A+1
(4,1)	(3,1) (2,2)	(2,1)	(2)	A+x+1	B	2C	B+2	A
(3,2)	(3,1) (2,2)	(3,0)	(3)	A+x	B+2	2C+1	B	A+1

可將上表中的4類重新表示，可知$P_5(T_{(5,n)}(z))$必為以下3種形式之一

$$P_5(T_{(5,n)}(z)) = \begin{cases} I & [a, b, 2d, b, c] & a \geq c \\ II & [a, b, 2d, b+2, c] & a > c \\ III & [a, b+2, 2d+1, b, c] & a \geq c-1 \end{cases}$$

因此我們定義

【定義7-1】：若$z \in Z(5,n)$，若有非負整數a, b, c, d使得

$P_5(z) = [a, b, 2d, b, c]$或$[a, b, 2d, b+2, c]$或$[a, b+2, 2d+1, b, c]$

即依序稱z為第I,II,III類數分別針對

（1）$P_5(z) = [a, b, 2d, b, c]$，$a \geq c$

（2）$P_5(z) = [a, b, 2d, b+2, c]$，$a > c$

（3）$P_5(z) = [a, b+2, 2d+1, b, c]$，$a \geq c-1$

我們將每種情況由上到下依序編號，計算其結果的類型，得到的流程圖置於附錄4。

【定理5-1】：

令$z_1 = P_5(T_{(5,n)}(z))$且z, z_1皆為正規數則有

計算$P_5(T_{(5,n)}(z))$可得一般式如下

$$P_5(T_{(5,n)}(z)) = \begin{cases} I & [a, b, 2d, b, c] & a \geq c \\ II & [a, b, 2d, b+2, c] & a > c \\ III & [a, b+2, 2d+1, b, c] & a \geq c-1 \end{cases}$$

$$\widetilde{T}_5[a,b,2d,b,c] = \begin{cases} [a-2b-2d, 2d, 4d, 2b, c] & 2b+2d \leq a-3 \\ [2c+2b+2d-a, a-c-2d, 4d, a-c-2d, c] & b+2d < a-c \leq 2b+2d \\ [b+c, b, 4d-1, b+2, c-1] & a-c = b+2d \\ [a-2d, 2b+2d+c-a, 2a-2c-2b, 2b+2d+c-a, c] & b < a-c \leq b+2d, 2d-a+c \leq 0 \\ [2c+2d-a, 2b, 2a-2c-2b, 2b, c] & b < a-c < b+2d, 2d-a+c \geq 0 \\ [a-2d, b+2d, 0, b+2d, c] & a-c = b \geq 2d \\ [c+2d-b, 2b, 0, 2b, c] & a-c = b \leq 2d \\ [2c+2d-a, 2a-2c, 2b-2a+2c, 2a-2c, c] & a-c < b, a-c \leq 2d \\ [a-2d, a-c+2d, 2b-2a+2c, a-c+2d, c] & a-c < b, a-c \geq 2d \end{cases}$$

$$\widetilde{T}_5[a,b,2d,b+2,c] = \begin{cases} [a-2b-2d-2, 2b+2, 4d, 2b+2, c] & 2b+2d+2 \leq a-c \\ [2b+2c+2d-a+2, a-c-2d, 4d, a-c-2d, c] & b+2d+2 < a-c < 2b+2d+2 \\ [c+b, b+2, 4d-1, b+4, c-1] & a-c = b+2d+2 \\ [a-2d-2, 2b+2d+c+4-a, 2a-2c-2b-4, 2b+2d+c+4, c] & b+2 \leq a-c < b+2d+2,, 2d-a+c+2 \leq 0, \\ [2c+2d+2-a, 2b+2, 2a-2c-2b-4, 2b+2, c] & b+2 \leq a-c < b+2d+2, 2d-a+c \geq 0 \\ [2d+2c-a+2, 2a-2c-2, 2b-2a+2c+4, 2a-2c-2, c] & 2 < a-c < b+2, a-c \leq 2d+2 \\ [a-2-2d, 2d+a-c, 2b-2a+2c+4, 2d+a-c, c] & 2d+2 < a-c < b+2 \\ [c+2d, 2, 2b-1, 4, c-1] & a-c = 2 \\ [2d+c-1, 2, 2b, 2, c] & a-c = 1 \end{cases}$$

$$\widetilde{T}_5[a,b+2,2d+1,b,c] = \begin{cases} [a-2b-2d-3, 2b+2, 4d+2, 2b+2, c] & 2b+2d+3 \leq a-c \\ [2b+2c+2d+1-a+2, a-c-2d-1, 4d+2, a-c-2d-1, c] & b+2d+1 < a-c \leq 2b+2d+3 \\ [c+b+2, b, 4d+1, b+2, c-1] & a-c = b+2d+2 \\ [a-2d+1, 2b+2d+c+1-a, 2a-2c-2b, 2b+2d+c-a+1, c] & b \leq a-c < b+2d+1, 2d-a+c-1 \leq 0 \\ [2c+2d-a-1, 2b+2, 2a-2c-2b, 2b+2, c] & b \leq a-c < b+2d+1, 2d-a+c \geq 0 \\ [2c-a+2d-1, 2a-2c+2, 2b-2a+2c, 2a-2c+2, c] & 0 \leq a-c \leq b, a-c \leq 2d+1 \\ [a-2d+1, a-c+2d+1, 2b-2a+2c, a-c+2d+1, c] & 0 \leq a-c \leq b, a-c \geq 2d+1 \\ [a+2d, 2, 2b, 2, a] & 0 \leq a-c \leq b, a-c \leq 2d+1 \end{cases}$$

肆、結論

（一）關於2進位的Kaprekar變換最後的結果為定理2-1，此結果與[4]中的主要定理0.1是一致的。定理2-1中$\bar{z} = (2^a - 1)2^b$，b, a為[4]中定理0.1的k_1, k_2，而$2^a - 1$即Mersenne數。[4]的定理0.1也計算了N(2,n)，事實上由定理2-1也很容易得到，因為在2進位的情形複雜度不高所以我們沒有去探究N(2,n)。另外[4]也有另一個主要結果是任何進位的2位

數Kaprekar變換，而本文研究的重心則放在任何位數的情形上。

（二）關於3進位的Kaprekar變換，最終結果是定理3-2。我們得到了所有正規數z的$d(z)$及循環長度$\ell(z)$的公式。另外也求得了3進位的Kaprekar常數以及z的Kaprekar軌跡皆為正規數的充要條件。若是把$g(x)$自然地延拓至 $\bar{g}(x)$第一步當然是先考慮週期點會不會在$\bar{g}(x)$上，所以定理3-1得到了$\bar{g}(x)$上的週期點就是$g(x)$上的那一些。接下來通過引理3-10、定義3-7構造方法我們可以在每個小區間$J_k, (2^k-1, 2^{k+1}-1)$甚至$\mathfrak{I}_0$任兩點間都可以找到任何n-循環點。最後則得到任何兩正有理數，若存在一個m使得此兩有理數在T^m映射的值之間包含有$\mathfrak{I}_0$的任一點，則此兩有理數間都可以找到任何n-循環點。當然在這裡最完整的性質是希望任何兩正有理數間都有。

（三）對於4進位的情形，我們發現任何正規4進位數經過數次運算皆會變換為$[a,b,b,c]$，且當$F_4[a,b,b,c]$不為Kaprekar常數時本質上可以化約成$F_3[a,b,c]$的情形，除了附錄3中幾種會進入循環的非正規情況，所有的正規4進位數經數次Kaprekar運算後最終皆會成為Kaprekar常數。

（四）對於5進位的情形，我們得到正規數5進位的運算一般式以及流程圖，對於其是否也有類似3、4進位的結果，則留到日後完成。

伍、參考文獻

[1] G. D. Prichett, A. L. Ludington, & J. F. Lapenta. "The Determination of All Decadic. Kaprekar Constants." Fibonacci Quarterly 19.1 (1981):45-52. 11. Lucio Saffara.

[2] STAN DOLAN, A classification of Kaprekar constants, The Mathematical Gazette. Vol. 95, No. 534 (November 2011), pp. 437-443.

[3] Manuel R. F. Moreira, “Dihedral Symmetry in Kaprekar's Problem.”. Mathematics Magazine, Volume 90, 2017 - Issue 1 pp. 38-47.

[4] Atsushi Yamagami "On 2-adic Kaprekar constants and 2-digit Kaprekar distences" Journal of Number Theory, 185, October 2017

附錄1

第I類：$z_4:[A,B,B,C]$，其中$A\geq C$，且令$x=\dfrac{A-C}{2B}$：

$I_{(1)}$：若$B>A-C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A,B,B,C]$，此為Kaprekar常數，且$0<x<\dfrac{1}{2}$。

$I_{(2)}$：若$B=A-C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A,B-1,B+2,C-1]$，且$x=\dfrac{1}{2}$。

$I_{(3)}$：若$B<A-C\leq 2B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[2B+2C-A,A-C,A-C,C]$，且$\dfrac{1}{2}<x\leq 1$。

$I_{(4)}$：若$A-C\geq 2B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A-2B,2B,2B,C]$，且$x\geq 1$。

第II類：$z_4:[A,B,B+3,C]$，其中$A>C$：

$II_{(1)}$：若$2B+3\leq A-C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A-2B-3,2B+3,2B+3,C]$。

$II_{(2)}$：若$B+3<A-C\leq 2B+3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[2B+2C+3-A,A-C,A-C,C]$。

$II_{(3)}$：若$A-C=B+3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[B+C,B+2,B+5,C-1]$。

$II_{(4)}$：若$B<A-C<B+3$，$3\leq A-C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A-3,B+3,B+3,C]$。

$II_{(5)}$：若$B<A-C<B+3$，$A-C<3$（此時$B=1$，$A-C=2$），

則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[2C+3-A,B+A-C,B+A-C,C]$，代入$B=1$，$A-C=2$，

即$[C+2,1,1,C]\to[C+1,3,3,C]$。

$II_{(6)}$：若$B=A-C$，$B\geq 3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A-3,B+3,B+3,C]$。

$II_{(7)}$：若$B=A-C\leq 3$，則 $P_4(T_{(4,n)}(z))=[C+3-B,2B,2B,C]$。

$II_{(8)}$：若$3\leq A-C<B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A-3,B+3,B+3,C]$。

$II_{(9)}$：若$0<A-C\leq 3$，$B>A-C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[2C+3-A,B+A-C,B+A-C,C]$

第III類：$z_4=[A,B+3,B,C]$，其中$A\geq C-1$：

$III_{(1)}$：若$2B+3\leq A-C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A-2B-3,2B+3,2B+3,C]$。

$III_{(2)}$：若$B+3\leq A-C\leq 2B+3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[2B+2C+3-A,A-C,A-C,C]$。

$III_{(3)}$：若$B<A-C\leq B+3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[2B+2C+3-A,A-C,A-C,C]$。

$III_{(4)}$：若$B=A-C$，則，$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A+3,B-1,B+2,C-1]$。

$III_{(5)}$：若$0\leq A-C<B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A+3,B,B,C]$。

$III_{(6)}$：若$A-C=-1$，則$P_4(T_{(4,n)}(z))=[A+2,B+1,B+1,A]$。

附録2

Ⅰ①

Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①

Ⅰ③ → Ⅰ①

Ⅰ④
- → Ⅰ①
- → Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①
- → Ⅰ③ → Ⅰ①
- → Ⅰ④ → ------ → Ⅰ①

Ⅱ①
- → Ⅰ①
- → Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①
- → Ⅰ③ → Ⅰ①
- → Ⅰ④ → ------ → Ⅰ①

Ⅱ② → Ⅰ①

Ⅱ③
- → Ⅱ⑧ → Ⅰ①
- → Ⅱ⑨ → Ⅰ①

Ⅱ④ → Ⅰ①

Ⅱ⑤ → Ⅰ①

Ⅱ⑥ → Ⅰ①

Ⅱ⑦
- → Ⅰ①
- → Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①

Ⅱ⑧ → Ⅰ①

Ⅱ⑨ → Ⅰ①

Ⅲ①
- → Ⅰ①
- → Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①
- → Ⅰ③ → Ⅰ①
- → Ⅰ④ → ------ → Ⅰ①

Ⅲ② → Ⅰ①

Ⅲ③
- → Ⅰ①
- → Ⅰ③ → Ⅰ①

Ⅲ④
- → Ⅱ①
  - → Ⅰ①
  - → Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①
  - → Ⅰ③ → Ⅰ①
  - → Ⅰ④ → ------ → Ⅰ①
- → Ⅱ② → Ⅰ①

Ⅲ⑤
- → Ⅰ①
- → Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①
- → Ⅰ③ → Ⅰ①
- → Ⅰ④ → Ⅰ①

Ⅲ⑥
- → Ⅰ② → Ⅱ④ → Ⅰ①
- → Ⅰ①

附錄3

$I_b(a-c=b)$

（1）$b=2$，$c=1$

$[3,2,2,1]\to[3,1,4,0]\to[0,5,2,1]\to[2,4,1,0]\to[3,3,0,1]\to[2,2,2,1]$

（2）$b>2$，$c=1$

$[b+1,b,b,1]\to[b+1,b-1,b+2,0]\to[b-2,b+3,b,1]$

（3）$b=1$，$c=2$

$[3,1,1,2]\to[3,0,3,1]\to[2,1,4,0]\to[1,4,1,1]\to[4,1,1,1]\to[2,2,2,1]$

（4）$b=1$，$c>2$

$[c+1,1,1,c]\to[c+1,0,3,c-1]\to[c,1,4,c-2]\to[c-1,3,3,c-2]$

（5）$b=1$，$c=1$

$[2,1,1,1]\to[2,0,3,0]\to[1,3,1,0]\to[3,1,1,0]\to[1,3,0,1]$

$II_c(a-c=b+3)$

（1）$c=1$，$b>2$

$[b+4,b,b+3,1]\to[b+1,b+2,b+5,0]\to[b-2,b+6,b+3,1]\to[b+1,b+3,b+3,1]$

（2）$c=1$，$b=2$

$[6,2,5,1]\to[3,4,7,0]\to[0,8,5,1]\to[2,7,4,1]\to[5,4,4,1]\to[5,3,6,0]$

（3）$c=1$，$b=1$

$[5,1,4,1]\to[2,3,6,0]\to[1,6,3,1]\to[4,3,3,1]\to[4,2,5,0]$

（4）$c>1$，$b\geq 2$

$[a,b,b+3,c]\to[b+c,b+2,b+5,c-1]\to[b+c-3,b+5,b+5,c-1]$

(5) $c > 1$，$b = 1$

$[c+4,1,4,c] \to [c+1,3,6c-1] \to [c,5,5,c-1]$

$III_d(a-c=b)$

(1) $b = 1$，$c = 1$

$[2,4,1,1] \to [5,0,3,0] \to [2,3,3,0]$

(2) $b = 1$，$c = 2$

$[3,4,1,2] \to [6,0,3,1] \to [3,2,5,0] \to [0,6,3,1] \to [2,5,2,1] \to [5,2,2,1] \to [1,4,4,1]$

(3) $b = 1$，$c > 2$

$[c+1,4,1,c] \to [c+4,0,3,c-1] \to [c+1,2,5,c-2] \to [c-2,5,5,c-2]$

(4) $b = 2$，$c > 1$

$[c+2,5,2,c] \to [c+5,1,4,c-1] \to [c,5,5,c-1]$

(5) $b = 2$，$c = 1$

$[3,5,2,1] \to [6,1,4,0] \to [1,6,3,1] \to [4,3,3,1] \to [4,2,5,0]$

(6) $b \geq 3$，$c > 1$

$[b+c, b+3, b, c] \to [b+c+3, b-1, b+2, c-1] \to [b+c-4, b+4, b+4, c-1]$

(7) $b \geq 3$，$c = 1$

$[b+1, b+3, b, 1] \to [b+4, b-1, b+2, 0] \to [b-3, b+5, b+2, 1] \to [b, b+2, b+2, 1]$

附録4

Ⅰ① → Ⅰ	Ⅱ① → Ⅰ	Ⅲ① → Ⅰ
Ⅰ② → Ⅰ	Ⅱ② → Ⅰ	Ⅲ② → Ⅰ
Ⅰ③ → Ⅱ	Ⅱ③ → Ⅰ	Ⅲ③ → Ⅱ
Ⅰ④ → Ⅰ	Ⅱ④ → Ⅰ	Ⅲ④ → Ⅰ
Ⅰ⑤ → Ⅰ	Ⅱ⑤ → Ⅰ	Ⅲ⑤ → Ⅰ
Ⅰ⑥ → Ⅰ	Ⅱ⑥ → Ⅰ	Ⅲ⑥ → Ⅰ
Ⅰ⑦ → Ⅲ	Ⅱ⑦ → Ⅱ	Ⅲ⑦ → Ⅰ
Ⅰ⑧ → Ⅰ	Ⅰ⑧ → Ⅰ	Ⅲ⑧ → Ⅰ
Ⅰ⑨ → Ⅰ		
Ⅰ⑩ → Ⅰ		
Ⅰ⑪ → Ⅱ		

【評語】050409

本作品承續 2022 國際科展的作品，繼續推廣 Kaprekar transformation 的性質。作者們的最新結果在 5 進位上，但是新增的 5 進位結果，只有 Theorem 5-1，計算並歸納出一般的 5 進位 n 位數，在經過一次 Kaprekar transformation，並投影後，各個數字(4,3,2,1,0)出現的次數公式。此部份需要硬算並細心歸納。本作品真正的數學工作在 3 進位上。作者引進一個 g 函數，利用其性質分析 n 週期點，並加以構造出 n-循環點。若無法以 g 函數加以運算到最後的，都是非正規數。因此作者主要的結果均聚焦在正規數上，意即 0~4 所有數字均有出現的狀況。接下來的 Lemma 3-8，Theorem 3-2，Theorem 3-3 都是相當重要的主要結果。得到 3 進位 Kaprekar 常數的形式，以及正規的 3 進位 Kaprekar 數 x 的 d(z) (起始循環位置),K(z) (Kaprekar 循環數),l(z) (循環節長度) 的公式。而這個重要的 g 函數技巧，也拿來分析一些 4 進位 Kaprekar 的特殊結果。 本作品在 2 進位上的結果，能夠以不同的思路做出和 Yamagami 2018 Journal of Number Theory 上的一個主要結果相當，算是相當不錯。三進位的技巧，開創性很高，對高中生來說，應該有相當的難度。本作品盡管就數學結果來看不錯，但是在呈現部分相當凌亂，部分定義與符號不清，特別在重要的 \tilde T 函數的定義上，沒有寫好，是需要改進加強之處。

作品簡報

數學科

2、3、4、5進位Kaprekar變換的性質

問題介紹

Kaprekar變換

將非負整數的各位數字重新排列後，由大到小排列減去由小到大排列的運算稱為Kaprekar變換

例如：

1

$$\underbrace{79 \longrightarrow 18 \longrightarrow}_{d(79)=2} \overbrace{\boxed{63 \longrightarrow 27 \longrightarrow 45 \longrightarrow 09 \longrightarrow 81}}^{\ell(79)=5} \longrightarrow \boxed{63 \longrightarrow \ldots}$$

K(79)=63

2

$$6174 \longrightarrow 6174 \longrightarrow \ldots$$

d(6174)=0
K(6174)=6174
ℓ(6174)=1

【定義1-3】：（1）$d(z) := min\{d \geq 0 \mid \text{存在}\ell > 1\text{使得}T^{d}_{(B,n)}(z) = T^{d+\ell}_{(B,n)}(z)\}$

（2）$K(z) := T^{d(z)}_{(B,n)}(z)$ （3）$\ell(z) := min\{\ell \geq 1 \mid T^{\ell}_{(B,n)}(K(z)) = K(z)\}$

研究目的

：研究及探討2、3、4、5進位數經卡布里卡運後的一般式，並求出其d(z) 、K(z)、 l(z)

研究方法

Kaprekar變換

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{一數z的 Kaprekar變換T}} \arrow[r, "\text{投影P}"] & \boxed{\text{P(z)的變換}\tilde{T}\text{ 及其一般式}} \arrow[r, "x=(a-c)/b"] & \boxed{\text{x的變換g、性質及d、K、l}}
\end{tikzcd}
$$

(2進位) (3、4、5進位) (3、4進位)

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P"'] & T(z) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & d(z) \arrow[d, phantom, "\nparallel"] & K(z) \arrow[d, phantom, "\nparallel"] & \ell(z) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
{[a,b,c]} \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d, "\frac{|a-c|}{b}"'] & \tilde{T}[a,b,c] \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & \, & \, & \, \\
x \arrow[r, "g"] & g(x) \arrow[r] & \cdots & d_g(x) & K_g(x) & \ell_g(x)
\end{tikzcd}
$$

二進位

當 $z \in Z(2,n)$，$\bar{z} = (2^a - 1)2^b$，a, b 是正整數，$a + b = n$，則

$$d(\bar{z}) = 1,\ \ell(z) = 1,\ K(z) = T_{(2,n)}(z) = \begin{cases} (\underline{1\cdots1}0\underline{1\cdots1}\underline{0\cdots0}1)_2 & a > b \\ (\underline{1\cdots1}0\underline{1\cdots1}\underline{0\cdots0}1)_2 & b > a \\ (\underline{1\cdots1}\underline{0\cdots0}1)_2 & a = b = \frac{n}{2} \\ (0\underline{1\cdots1})_2 & a = 1 \text{ or } b = 1 \end{cases}$$

三進位

$$\tilde{T}[a,b,c] = \begin{cases} [a-b, 2b, c] & a \ge b + c \\ [b + 2c - a, 2(a-c), c] & c < a < b + c \\ [a + b - c, 2(c-a), a] & a = c \\ [b + 2a - c, 2(c-a), a] & a < c < a + b \\ [c - b, 2b, a] & a + b \le c \end{cases}$$

【引理 3-3】若 $[a,b,c] \in Z_3^+$，$a + b + c = n$ 且 $\tilde{T}[a,b,c] = [a',b',c']$，則有

（1）$a' + b' + c' = n$ 且 $a' > c'$。

（2）若 $a \neq c$ 則 $a', b', c' > 0$。

（3）$\tilde{T}[a,b,c] = \tilde{T}[c,b,a]$。

研究過程

三進位

【定義3-1】：

(1) 若x為正有理數，定義 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2} & x\geq 1\\ \dfrac{1-x}{2x} & 0<x<1\end{cases}$。

(2) 若x為實數，定義 $\bar{g}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2} & x\geq 1\\ \dfrac{1-x}{2x} & 0<x<1\end{cases}$，我們也稱$\bar{g}$是函數g的延拓。

(3) 若x為實數，定義 $\varphi(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-1}{2}$，$\phi(x)=\dfrac{x-1}{2}$

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P"'] & T(z) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & d(z) & K(z) & (z) \\
{[a,b,c]} \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d, "\frac{|a-c|}{b}"'] & {\tilde{T}[a,b,c]} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & \nparallel & \nparallel & \parallel \\
x \arrow[r, "g"] & g(x) \arrow[r] & \cdots & d_g(x) & K_g(x) & g(x)
\end{tikzcd}$$

三進位

$$g(\frac{p}{q}) = \begin{cases} p > q & \frac{p-q}{2q}(=\frac{p_1}{q_1})\begin{cases} p_1 \equiv 2p & mod(p+q) \\ q_1 \equiv 2q & mod(p+q) \end{cases} \\ p < q & \frac{q-p}{2p}(=\frac{p_1}{q_1})\begin{cases} p_1 \equiv -2p & mod(p+q) \\ q_1 \equiv -2q & mod(p+q) \end{cases} \end{cases}$$

【定義3-6】：若$p+q=2^sP$，P為奇數，s為非負整數

(1) $or2^+(P) = min\{r\text{為正整數} \mid 2^r \equiv 1 \; modP\}$

(2) $or2^-(P) = min\{r\text{為正整數} \mid 2^r \equiv -1 \; modP\}$

(3) $or2(P) = min\{or2^-(P), or2^+(P)\}$

$x=\frac{p}{q}$，p,q是互質的正整數，若$p+q=2^sP$，P為奇數，s為非負整數，則$d_g(x) \le s+1$ 且 $\ell_g(x) = or2(P)$。

週期點與循環點的製造

定義

(1) $g^n(x) = x$ ($n-$週期點)

(2) 存在正整數k，使$g^n(x)$是$n-$週期點，稱x為$n-$循環點。

例如：

(1) $x = \dfrac{1}{2^n}$是$n-$週期點。

(2) $x = 2^d - 1 + \dfrac{2^d}{2^\ell}$是$(m+k-1)-$週期點。

(3) $x = \beta_k - \dfrac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}$是$\ell-$循環點。

(1) 令 $S_1 = \{s正數 \mid s \in S或有正整數k使s \in \varphi^{-k}(S)\}$，

$S_{11} = \{s正數 \mid s \in S或有正整數k使s \in \varphi^{-k}(S_1)\}$。

(2) 令 $S_2 = \{s正數 \mid s \in S或有正整數k使s \in \varphi^{-k}(S_{11})\}$，

$S_{21} = \{s正數 \mid s \in S或有正整數k使s \in \varphi^{-k}(S_2)\}$。

(3) 依 (1) (2) 可以定義集合 $S_1, S_{11}, S_2, S_{21}, \dots$，

令 $\widetilde{S} = \{s正數 \mid 有正整數k滿足s \in S_k或s \in S_{k1}\}$。

② $\mathfrak{F}_1 = \widetilde{S}$，當S為所有$\dfrac{1}{2^n}$形成的集合時。 ($\mathfrak{F}(2^d - 1 + \dfrac{2^d}{2^\ell}) \subseteq \mathfrak{F}_1$)

③ $\mathfrak{F}_2 = \widetilde{S}$，當S為所有$\beta_k - \dfrac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}$形成的集合時。

三進位

【定理3-2】：$z \in Z(3,n)$且$P(z)=[a,b,c]$，

(1) 若p_k是$g(x)$的k-循環點$\frac{|a-c|}{b} \in \mathfrak{I}(\{p_k\})$，則$\ell(z)=k$。

(2) $\ell(z)=1$，的充要條件是$\frac{|a-c|}{b} \in \mathfrak{I}(\{\frac{1}{2}\})$，因此$K(z)=(\underbrace{2\ldots2}_{c}\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{2\ldots2}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{c-1}1)_3$，$k>1$，$c>1$

或$K(z)=(2\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{2\ldots2}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{k}1)_3$，$k>1$，或$K(z)=(\underbrace{2\ldots2}_{c}021\underbrace{0\ldots0}_{c-1}1)_3$，$c>1$，或$K(z)=(20211)_3$。

(3) 若$\frac{|a-c|}{b}$不屬於$\mathfrak{I}_0$且$|a-c|+b=2^sP$，其中s為非負整數P為正奇數，則$\ell(z)=or2(P)$。

【定理3-3】：若y_1, y_2是正有理數，$y_1<y_2$

(1) 若有$x \in \{\beta_k\}_{k\in N} \cup \{2^k-1\}_{k\in N}$，使得$y_1<x<y_2$，則區間$(y_1,y_2)$中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

(2) 若有$x \in \mathfrak{I}_0$，使得$y_1<x<y_2$，則區間(y_1,y_2)中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

(3) $y_1, y_2 \in (0,\frac{1}{3})$，若存在某一正整數$m$使得$g^m(y_1)<1<g^m(y_2)$或$g^m(y_2)<1<g^m(y_1)$成 立，則區間$(y_1,y_2)$中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

(4) 若存在某一正整數m使得$g^m(y_1)<1<g^m(y_2)$或$g^m(y_2)<1<g^m(y_1)$成立，則區間(y_1,y_2)中必有任意的 n-循環點，其中n是任意正整數。

研究過程

四進位

配對方式			種類	3的數量	2的數量	1的數量	0的數量
和為4	和為3	和為2					
(2,2)	(3,0) (2,1)	(1,1)	(1)	A + x	B + 2	B + 2	A
(3,1)	(3,0) (2,1)	(2,0)	(1)	A + x +1	B + 1	B + 1	A +1
(3,1)	(3,0) (2,1)	(1,1)	(2)	A + x +1	B + 3	B	A
(2,2)	(3,0) (2,1)	(2,0)	(3)	A + x	B	B + 3	A +1

可將上表中的4類重新表示，可知$P_4(T_{(4,n)}(z))$必為以下3種形式之一

$$\begin{cases} I & [a,b,b,c] & a \geq c \\ II & [a,b,b+3,c] & a > c \\ III & [a,b+3,b,c] & a \geq c-1 \end{cases}$$

研究過程

四進位

令$z\in Z_3^4$，滿足$\dfrac{a-c}{2b}=\dfrac{1}{2}$時，$\tilde{T}^2(z)\in Z_3^4$，且$d(z)=2$，$\ell(z)=1$，$K(z)=\tilde{T}^2(z)$。

【定理4-2】：

令$z_1=P_4(T_{(4,n)}(z))$且z,z_1皆為正規數時，必存在m使得$T^m_{(4,n)}(z)$為下列2種情況之一。

（1）$(\underbrace{3\cdots3}_{c}\underbrace{2\cdots2}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c-1}0\underbrace{3\cdots3}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_4$，為Kaprekar常數。

（2）進入下列循環之一種：

(i)$[3,1,1,0]\rightarrow[1,3,0,1]$

(ii)$[2,7,4,1]\rightarrow[5,4,4,1]\rightarrow[5,3,6,0]$

(iii)$[1,6,3,1]\rightarrow[4,3,3,1]\rightarrow[4,2,5,0]$

(iv)$[2,4,1,1]\rightarrow[5,0,3,0]\rightarrow[2,3,3,0]$

(v)$[b+1,b,b,1]\rightarrow[b+1,b-1,b+2,0]\rightarrow[b-2,b+3,b,1]$，此時$b>2$，$c=1$。

研究過程

五進位

配對方式			種類	4的數量	3的數量	2的數量	1的數量	0的數量
和為5	和為4	和為3						
(3,2)	(4,0) (3,1) (2,2)	(2,1)	(1)	A+x	B+1	2C+2	B+1	A
(4,1)	(4,0) (3,1) (2,2)	(3,0)	(1)	A+x+1	B+1	2C	B+1	A+1
(4,1)	(4,0) (3,1) (2,2)	(2,1)	(2)	A+x+1	B	2C	B+2	A
(3,2)	(4,0) (3,1) (2,2)	(3,0)	(3)	A+x	B+2	2C+1	B	A+1

可將上表中的4類重新表示，可知$P_5(T_{(5,n)}(z))$必為以下3種形式之一

$$P_5(T_{(5,n)}(z)) = \begin{cases} I & [a, b, 2d, b, c] & a \geq c \\ II & [a, b, 2d, b+2, c] & a > c \\ III & [a, b+2, 2d+1, b, c] & a \geq c-1 \end{cases}$$

結論

- 我們找到二、三、四進位Kaprekar變換的一般式，也找到他們的T(z) 、K(z) 及I(z) 。
- 對於三進位數，我們發現g(x)函數的軌跡和性質。
- 四進位部分，我們研究出它的運算架構，也找出其和三進位數x的關聯性。
- 最後，五進位數我們找到它的一般式，並且將其分類。其餘結果將留到日後完成。