# 中華民國第62屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

高級中等學校組　數學科

050407

**找「重」點**

學校名稱：國立基隆女子高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 林佩辰 | 陳欣慧 |
| 高二 蔡昀宸 | |
| 高二 王貞云 | |


關鍵詞：多邊形的重心、複數、相似形

# 摘要

此研究利用複數、向量及三角形的重心公式，去找出多邊形的重心性質與計算公式，並探討以任意三角形三邊作出之各種相似多邊形，連接對應頂點或重心後，所構成之三角形的重心與原三角形重心的關係；再討論以此任意三角形三邊作出之正$n$邊形，連接相近的頂點（異於原三角形）與兩正$n$邊形的邊構成之三角形，其邊上依固定比例作出的點相連後的三角形之重心以及其重心相連三角形之重心，兩者與原三角形重心的關係；最後再用不同的切三塊方式，處理連接各區塊重心所得的三角形，其重心相連三角形之重心與原三角形重心的關係。

# 壹、 前言

一、研究動機

上專題課時，老師讓我們自行閱讀歷屆科展的參賽作品，尋找有興趣的主題，並從中尋找靈感。當閱讀到第 60 屆中小學科學展覽會的「當拿破崙形不『正』作不『直』時」[1] 這篇作品時，我們對他們研究的議題產生了興趣，因此決定了研究的方向。我們先從任意三角形延伸出的正多邊形開始研究，嘗試以不同的連接方式，試著作出新多邊形的重心，觀察其與原三角形重心的關係，發現似乎有一些一致的結果，決定深入研究。

二、研究目的

（一）找出任意多邊形重心的性質。

（二）找出任意多邊形重心的計算公式。

（三）找出以任意三角形三邊作出之各種相似多邊形，連接對應頂點、重心所構成之三角形的重心與原三角形重心的關係。

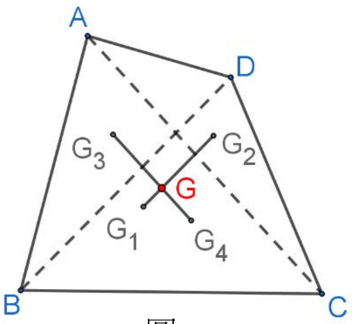
（四）找出以任意三角形三邊作出之正$n$邊形，連接相近的頂點（異於原三角形）與兩正$n$邊形的邊構成之三角形，其邊上依固定比例作出的點相連後的三角形之重心以及其重心相連三角形之重心，兩者與原三角形重心的關係。

（五）找出以任意三角形三邊作出之正$n$邊形，切三塊後，連接各區塊重心所得的三角形，其重心相連三角形之重心與原三角形重心的關係。

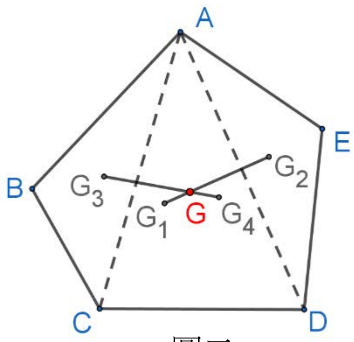
三、文獻回顧

呂昱賢 [1] 作品中提到從正三角形、直角三角形到任意三角形，將其三邊向外或向內作相似三角形，重心連線得到的三角形重心與原三角形相同。我們參考了他的想法，經過基本的作法測試後，進一步深入探討以不同的切割方式所形成的三角形或多邊形的重心相連三角形的重心，是否也與原三角形重心共點？

在王哲麒、翁士傑 [2] 作品中提到尋找多邊形重心的方式，將四邊形切割為兩組三角形跟三角形（如圖一），若 $G_1,G_2,G_3,G_4$ 分別為 $\Delta ABC,\Delta ADC,\Delta ABD,\Delta BCD$ 之重心，則 $\overline{G_1G_2}$ 與 $\overline{G_3G_4}$ 之交點 $G$ 即為此四邊形之重心；將五邊形切割為兩組三角形跟四邊形（如圖二），若 $G_1,G_2,G_3,G_4$ 分別為四邊形 $ABCD,\Delta ADE,\Delta ABC,$ 四邊形 $ACDE$ 之重心，則 $\overline{G_1G_2}$ 與 $\overline{G_3G_4}$ 之交點 $G$ 即為此五邊形之重心。



圖一



圖二

但由於此作品未提到尋找 $n$ 邊形重心的證明方式，因此我們又參考鄭元博 [3] 作品中：將任意 $n$ 邊形切割為兩組三角形跟 $(n-1)$ 邊形，若 $G_1,G_2,G_3,G_4$ 分別為 $\Delta A_1A_2A_3$，$(n-1)$ 邊形 $A_1A_3A_4\cdots A_n,\Delta A_1A_{n-1}A_n,$ $(n-1)$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 之重心，則 $\overline{G_1G_2}$ 與 $\overline{G_3G_4}$ 之交點 $G$ 即為此 $n$ 邊形之重心，確認無論是凹多邊形，還是凸多邊形，皆可用此方法畫出，我們將利用他們的切割方法找出重心。但文中亦提到多邊形的均值點與重心不同，沒辦法用計算多邊形均值點的方式來計算多邊形重心，因此我們需要解決該如何計算多邊形重心。

在林冠柏、顏嘉誼、原凱文 [4] 作品中利用面積交換找出面積平分處及利用槓桿原理來找重心，此方法在凹、凸多邊形中均適用，但判斷式未完全確認。我們從他們的想法延伸，思考重心跟面積的關係，研究多邊形重心具有甚麼性質，再從性質推出該如何計算多邊形的重心，並利用重心的計算方式，去證明我們經過 GGB 測試出來的現象是否真的一定成立。

本文中，**僅討論凹多邊形及凸四邊形，暫時不討論形狀破壞的情形**，沿用「幾何明珠」[5] 內的符號使用，我們以 $S_{\Delta ABC}$ 表示 $\Delta ABC$ 的面積；而自己定義：以 $G_{ki}$ 表示將 $n$ 邊形自頂點 $A_1$ 向 $A_3,\cdots,A_{n-1}$ 開始連接對角線所切割出的第 $i$ 個 $k$ 邊形的重心。

# 貳、 研究設備及器材

白紙數疊、筆、電腦、平板、GGB 繪圖軟件。

# 參、 研究方法或過程

一、研究方法

決定主題→閱讀相關文章→配合 GGB 進行測試→以不同方法進行繪製→分類並猜測結果→搜尋相關資料→推導一般式並證明→歸納整理→推廣並延伸→結論。

二、研究過程

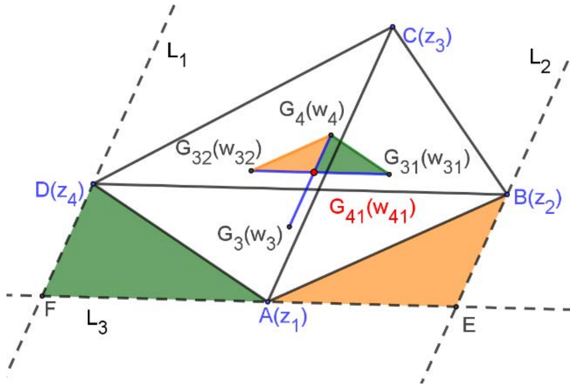
我們由前人的研究 [2][3] 已知 $n$ 邊形的重心如何尋找，且這些多邊形的重心坐標並不一定為頂點的均值點，那麼到底多邊形的重心有甚麼性質？而我們該如何直接利用已知的重心或頂點去計算出來呢？我們先從四邊形著手，有了以下的發現：

| |
|---|
| 引理 1-1：<br>連接四邊形的對角線，將其切割為兩個三角形時，「四邊形的重心到兩三角形重心之距離比值」和「兩三角形面積比值的倒數」相等。 |

證明：

如圖，作任意四邊形 $ABCD$，連接對角線，將其作兩組切割，得到「$\Delta ABC$ 跟 $\Delta ACD$」以及「$\Delta DAB$ 跟 $\Delta DBC$」，其中 $G_{31},G_{32},G_3,G_4,G_{41}$ 分別為 $\Delta ABC,\Delta ACD,\Delta DAB,\Delta DBC,$ 四邊形 $ABCD$ 的重心。

通過點 $D,B$ 作平行 $\overline{AC}$ 的直線 $L_1,L_2$，再通過點 $A$ 作平行 $\overline{BD}$ 的直線 $L_3$，其中 $L_1$ 與 $L_3$ 交於 $F$ 點，$L_2$ 與 $L_3$ 交於 $E$ 點。




(1)令 $A,B,C,D,G_{31},G_{32},G_3,G_4$ 的複數表示法為 $z_1,z_2,z_3,z_4,w_{31},w_{32},w_3,w_4$，

則由三角形的重心公式可知：

$$w_{31}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3},w_{32}=\frac{z_1+z_3+z_4}{3},w_3=\frac{z_1+z_2+z_4}{3},w_4=\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\ ，$$

而由 $w_{32}-w_{31}=\dfrac{z_1+z_3+z_4}{3}-\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}=\dfrac{z_4-z_2}{3}$，可得 $\overrightarrow{G_{31}G_{32}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$，

同理，$\overrightarrow{G_3G_4}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

故 $\overrightarrow{G_{31}G_{32}}\,//\,\overrightarrow{BD}$ 且 $\overrightarrow{G_3G_4}\,//\,\overrightarrow{AC}$，則 $\overrightarrow{G_{31}G_{32}}\,//\,L_3$ 且 $\overrightarrow{G_3G_4}\,//\,L_1//\,L_2$；

又由 $w_{31}-w_4=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}-\frac{z_2+z_3+z_4}{3}=\frac{z_1-z_4}{3}$ ，可得 $\overrightarrow{G_4G_{31}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ ，

同理，$\overrightarrow{G_4G_{32}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ，

故 $\overrightarrow{G_4G_{31}}\,//\,\overrightarrow{DA}$ 且 $\overrightarrow{G_4G_{32}}\,//\,\overrightarrow{BA}$ 。

而向量兩兩平行時，其夾角會相同，因此 $\angle G_4G_{41}G_{31}=\angle DFA$ 且 $\angle G_4G_{31}G_{41}=\angle DAF$ ，

由 $AA$ 相似，可得 $\Delta G_4G_{31}G_{41}\sim\Delta DAF$ ，故 $\frac{\overline{G_{41}G_4}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{FA}}$ ；

同理可得：$\Delta G_4G_{32}G_{41}\sim\Delta BAE$ ，故 $\frac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_4}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}$ ；

又四邊形 $DFEB$ 為平行四邊形，故 $\overline{FD}=\overline{EB}$ ，

因此 $\frac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\frac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_4}}\times\frac{\overline{G_{41}G_4}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{FD}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{FA}}$ 。

(2)因 $L_1$ 平行 $\overline{AC}$ ，$\Delta CDA$ 與 $\Delta CFA$ 的高同為 $L_1$ 到 $\overline{AC}$ 的距離，又底邊同為 $\overline{AC}$ ，

所以 $S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ACF}$ ，

同理，$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AEC}$ ，

而 $\Delta ACF$ 與 $\Delta AEC$ 的高皆為點 $C$ 到 $L_3$ 的距離，因此 $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta ACF}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{FA}}$ 。

由(1)(2)可得，$\frac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}$ 。

即：連接四邊形的對角線，將其切割為兩個三角形時，「四邊形的重心到兩三角形重心之距離比值」和「兩三角形面積比值的倒數」相等。 ■

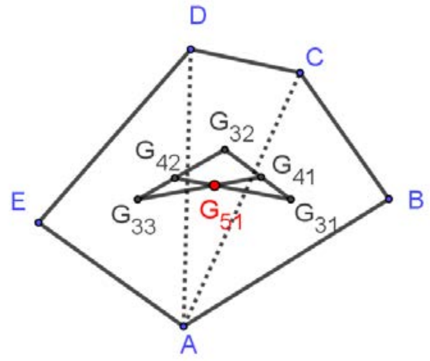
進一步研究五邊形，有了以下的發現：

引理 1-2：

連接五邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個四邊形時，「五邊形重心到三角形重心與五邊形重心到四邊形重心之距離的比值」和「四邊形面積與三角形面積的比值」相等。

證明：

如圖，作任意五邊形 $ABCDE$ ，連接對角線，將其作兩組切割，得到「 $\Delta ABC$ 跟四邊形 $ACDE$ 」以及「 $\Delta ADE$ 跟四邊形 $ABCD$ 」，其中 $G_{31},G_{32},G_{33},G_{41},G_{42},G_{51}$ 分別為 $\Delta ABC, \Delta ACD, \Delta ADE,$ 四邊形 $ABCD, ACDE,$ 五邊形 $ABCDE$ 的重心。




(1)由梅內勞斯定理我們知：

$$\frac{\overline{G_{33}G_{42}}}{\overline{G_{42}G_{32}}}\times\frac{\overline{G_{32}G_{31}}}{\overline{G_{31}G_{41}}}\times\frac{\overline{G_{41}G_{51}}}{\overline{G_{51}G_{33}}}=1 \text{ 。}$$

(2)由引理 1-1 我們知：四邊形 $ABCD$ 中，$\dfrac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}$ ，

$$\text{故 }\frac{\overline{G_{32}G_{31}}}{\overline{G_{31}G_{41}}}=\frac{\overline{G_{32}G_{41}}+\overline{G_{41}G_{31}}}{\overline{G_{31}G_{41}}}=\frac{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ACD}} \text{ ，}$$

$$\text{而四邊形 } ACDE \text{ 中，}\frac{\overline{G_{42}G_{33}}}{\overline{G_{42}G_{32}}}=\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ADE}} \text{ 。}$$

將(2)代入(1)可得：$\dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ADE}}\times\dfrac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ACD}}\times\dfrac{\overline{G_{41}G_{51}}}{\overline{G_{51}G_{33}}}=1$ ，

$$\text{則 }\frac{\overline{G_{51}G_{41}}}{\overline{G_{51}G_{33}}}=\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{ABCD}} \text{ ，}$$

$$\text{即 }\frac{\overline{G_{51}G_{33}}}{\overline{G_{51}G_{41}}}=\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ADE}} \text{ 。}$$

即：連接五邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個四邊形時，「五邊形重心到三角形重心與五邊形重心到四邊形重心之距離的比值」和「四邊形面積與三角形面積的比值」相等。 ■

有了引理 1-1 及引理 1-2 的發現，我們猜測：連接 $n$ 邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個 $(n-1)$ 邊形時，「 $n$ 邊形重心到三角形重心與 $n$ 邊形重心到 $(n-1)$ 邊形重心之距離的比值」和「 $(n-1)$ 邊形面積與三角形面積的比值」相等，並用數學歸納法證明：

定理 1：

對任意正整數$n \geq 4$，連接$n$邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個$(n-1)$邊形時，「$n$邊形重心到三角形重心與$n$邊形重心到$(n-1)$邊形重心之距離的比值」和「$(n-1)$邊形面積與三角形面積的比值」相等。

證明：

(1)當$n=4$時，由引理 1-1 得：連接四邊形的對角線，將其切割為兩個三角形時，「四邊形的重心到兩三角形重心之距離比值」和「兩三角形面積比值的倒數」相等，故原命題成立。

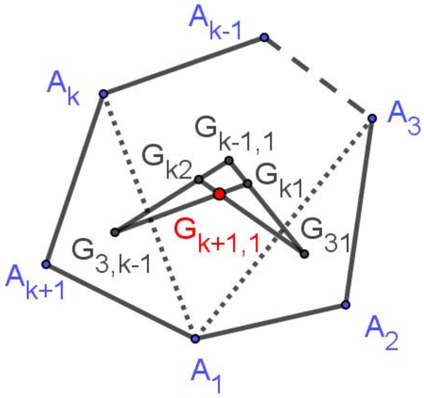
當$n=5$時，由引理 1-2 得：連接五邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個四邊形時，「五邊形重心到三角形重心與五邊形重心到四邊形重心之距離的比值」和「四邊形面積與三角形面積的比值」相等，故原命題亦成立。

(2)設$n=k$時原命題成立（$k \geq 5$），即連接$k$邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個$(k-1)$邊形時，「$k$邊形重心到三角形重心與$k$邊形重心到$(k-1)$邊形重心之距離的比值」和「$(k-1)$邊形面積與三角形面積的比值」相等，

則$n=k+1$時：

如圖，作任意$(k+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_{k+1}$，連接對角線，將其作兩組切割，得到「$\Delta A_1A_2A_3$跟$k$邊形$A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}$」以及「$\Delta A_1A_kA_{k+1}$跟$k$邊形$A_1A_2\cdots A_k$」，

其中$G_{31}, G_{3,k-1}, G_{k-1,1}, G_{k1}, G_{k2}, G_{k+1,1}$為$\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_kA_{k+1}, (k-1)$邊形$A_1A_3A_4\cdots A_k, k$邊形$A_1A_2\cdots A_k, A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}, (k+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_{k+1}$的重心。




(i) 由梅內勞斯定理可知：$\dfrac{\overline{G_{3,k-1}G_{k2}}}{\overline{G_{k2}G_{k-1,1}}} \times \dfrac{\overline{G_{k-1,1}G_{31}}}{\overline{G_{31}G_{k1}}} \times \dfrac{\overline{G_{k1}G_{k+1,1}}}{\overline{G_{k+1,1}G_{3,k-1}}} = 1$。

(ii) 將$(k+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_{k+1}$切割成$\Delta A_1A_2A_3$跟$k$邊形$A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}$時，

「$k$邊形$A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}$的重心$G_{k2}$到三角形$\Delta A_1A_kA_{k+1}$重心$G_{3,k-1}$與$k$邊形$A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}$

的重心 $G_{k2}$ 到 $(k-1)$ 邊形 $A_1A_3A_4\cdots A_k$ 的重心 $G_{k-1,1}$ 之距離的比值」和「$(k-1)$ 邊形 $A_1A_3A_4\cdots A_k$ 與三角形 $\Delta A_1A_kA_{k+1}$ 面積的比值」相等，即 $\dfrac{\overline{G_{k2}G_{3,k-1}}}{\overline{G_{k2}G_{k-1,1}}}=\dfrac{S_{A_1A_3A_4\cdots A_k}}{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}$ 。

(iii) 將 $(k+1)$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$ 切割成 $\Delta A_1A_kA_{k+1}$ 跟 $k$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_k$ 時，

「$k$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的重心 $G_{k1}$ 到三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 重心 $G_{31}$ 與 $k$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的重心 $G_{k1}$ 到 $(k-1)$ 邊形 $A_1A_3A_4\cdots A_k$ 的重心 $G_{k-1,1}$ 之距離的比值」和「$(k-1)$ 邊形 $A_1A_3A_4\cdots A_k$ 面積與三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 面積的比值」相等，即 $\dfrac{\overline{G_{k1}G_{31}}}{\overline{G_{k1}G_{k-1,1}}}=\dfrac{S_{A_1A_3A_4\cdots A_k}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}}$ ，

因此 $\dfrac{\overline{G_{k-1,1}G_{31}}}{\overline{G_{31}G_{k1}}}=\dfrac{\overline{G_{k-1,1}G_{k1}}+\overline{G_{k1}G_{31}}}{\overline{G_{31}G_{k1}}}=\dfrac{S_{\Delta A_1A_2A_3}+S_{A_1A_3A_4\cdots A_k}}{S_{A_1A_3A_4\cdots A_k}}=\dfrac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_3A_4\cdots A_k}}$ 。

由(i)(ii)(iii)可得 $\dfrac{S_{A_1A_3A_4\cdots A_k}}{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}\times\dfrac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_3A_4\cdots A_k}}\times\dfrac{\overline{G_{k1}G_{k+1,1}}}{\overline{G_{k+1,1}G_{3,k-1}}}=1$ ，

則 $\dfrac{\overline{G_{k+1,1}G_{k1}}}{\overline{G_{k+1,1}G_{3,k-1}}}=\dfrac{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}$ ，即 $\dfrac{\overline{G_{k+1,1}G_{3,k-1}}}{\overline{G_{k+1,1}G_{k1}}}=\dfrac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}$ ，

因此，連接 $(k+1)$ 邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個 $k$ 邊形時，「$(k+1)$ 邊形重心到三角形重心與 $(k+1)$ 邊形重心到 $k$ 邊形重心之距離的比值」和「$k$ 邊形面積與三角形面積的比值」相等，故原命題成立。

由(1)(2)及數學歸納法得：

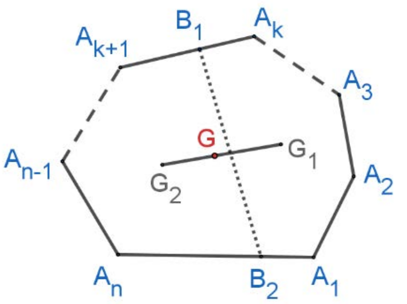
對任意正整數 $n\geq 4$ ，連接 $n$ 邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個 $(n-1)$ 邊形時，「$n$ 邊形重心到三角形重心與 $n$ 邊形重心到 $(n-1)$ 邊形重心之距離的比值」和「$(n-1)$ 邊形面積與三角形面積的比值」相等。 ■

而有了定理 1 的結論，我們甚至可以推廣到任意形狀的切割情形，去驗證多邊形的重心性質與物理所學的槓桿原理相符，如下：

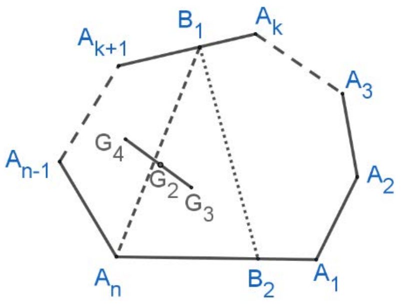
> 定理 2：
> 連接 $n$ 邊形相異邊上的任兩點（頂點亦可），將其切割為兩多邊形，則「$n$ 邊形重心到兩多邊形重心之距離比值」和「兩多邊形面積比值的倒數」相等。

證明：

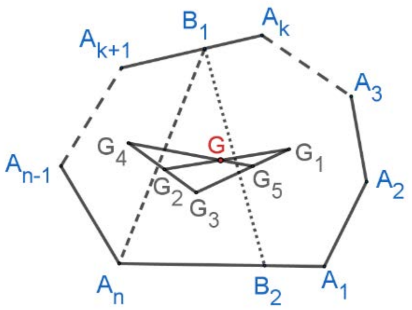
不失一般性，作任意$n$邊形$A_1A_2\cdots A_n$，連接在$\overline{A_kA_{k+1}}$（其中$k=1,2,\cdots,n-1$）及$\overline{A_1A_n}$邊上的任兩點$B_1,B_2$，將$n$邊形$A_1A_2\cdots A_n$切割為多邊形$A_1\cdots A_kB_1B_2$及$A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1$（如圖一），再連接$B_1,A_n$（若$A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1$為三角形，則連接$B_2,A_k$，由於證明方法相同，因此不失一般性可假設$A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1$至少為四邊形），將多邊形$A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1$切割為$\Delta B_2B_1A_n$及多邊形$A_{k+1}\cdots A_nB_1$（如圖二），其中$G,G_1,G_2$分別為多邊形$A_1A_2\cdots A_n,A_1\cdots A_kB_1B_2,A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1$的重心，$G_3,G_4,G_5$分別為$\Delta B_2B_1A_n$,多邊形$A_{k+1}\cdots A_nB_1,A_1\cdots A_kB_1A_nB_2$的重心（如圖三）。



圖一



圖二



圖三

(1)由梅內勞斯定理可知$\dfrac{\overline{G_1G_5}}{\overline{G_5G_3}}\times\dfrac{\overline{G_3G_4}}{\overline{G_4G_2}}\times\dfrac{\overline{G_2G}}{\overline{GG_1}}=1$。

(2)由定理 1 我們可知$\dfrac{\overline{G_5G_3}}{\overline{G_5G_1}}=\dfrac{S_{A_1\cdots A_kB_1B_2}}{S_{\Delta B_2B_1A_n}}$，且$\dfrac{\overline{G_2G_3}}{\overline{G_2G_4}}=\dfrac{S_{A_{k+1}\cdots A_nB_1}}{S_{\Delta B_2B_1A_n}}$，

即$\dfrac{\overline{G_1G_5}}{\overline{G_5G_3}}=\dfrac{S_{\Delta B_2B_1A_n}}{S_{A_1\cdots A_kB_1B_2}}$，且$\dfrac{\overline{G_3G_4}}{\overline{G_4G_2}}=\dfrac{\overline{G_3G_2}+\overline{G_2G_4}}{\overline{G_4G_2}}=\dfrac{S_{A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1}}{S_{\Delta B_2B_1A_n}}$。

將(2)代入(1)可得：$\dfrac{S_{\Delta B_2B_1A_n}}{S_{A_1\cdots A_kB_1B_2}}\times\dfrac{S_{A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1}}{S_{\Delta B_2B_1A_n}}\times\dfrac{\overline{G_2G}}{\overline{GG_1}}=1$，則$\dfrac{\overline{G_2G}}{\overline{GG_1}}=\dfrac{S_{A_1\cdots A_kB_1B_2}}{S_{A_{k+1}\cdots A_nB_2B_1}}$。

即：連接$n$邊形相異邊上的任兩點（頂點亦可），將其切割為兩多邊形，則「$n$邊形重心到兩多邊形重心之距離比值」和「兩多邊形面積比值的倒數」相等。 ■

而有了以上發現，我們開始計算多邊形的重心，先從四邊形的重心開始計算：

引理 3-1：

作任意四邊形$ABCD$，令$G_{41}$為四邊形$ABCD$的重心。

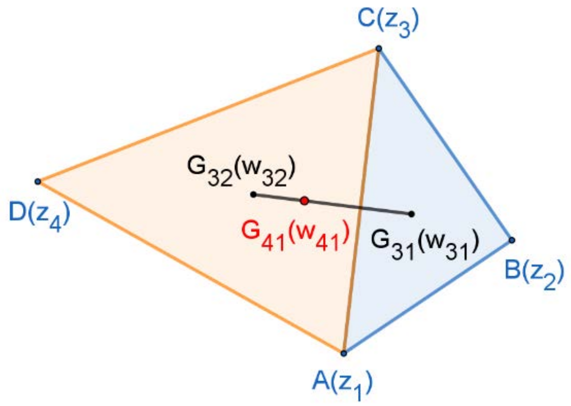
若$A,B,C,D,G_{41}$的複數表示法為$z_1,z_2,z_3,z_4,w_{41}$，則此四邊形重心的複數表示法為

$$w_{41}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{z_1+z_3+z_4}{3}。$$

證明：

如圖，令$G_{31},G_{32}$分別為$\Delta ABC,\Delta ACD$的重心，且其複數表示法為$w_{31},w_{32}$。

已知$w_{31}=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3},w_{32}=\dfrac{z_1+z_3+z_4}{3}$，




由引理 1-1 知$\dfrac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}$，

再以向量的分點公式計算，

$$w_{41}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}}w_{31}+\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}}w_{32}$$

$$=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}w_{31}+\left(1-\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\right)w_{32}$$

$$=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\cdot\frac{z_1+z_2+z_3}{3}+\left(1-\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\right)\cdot\frac{z_1+z_3+z_4}{3}$$

$$=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{z_1+z_3+z_4}{3}\text{。}$$

■

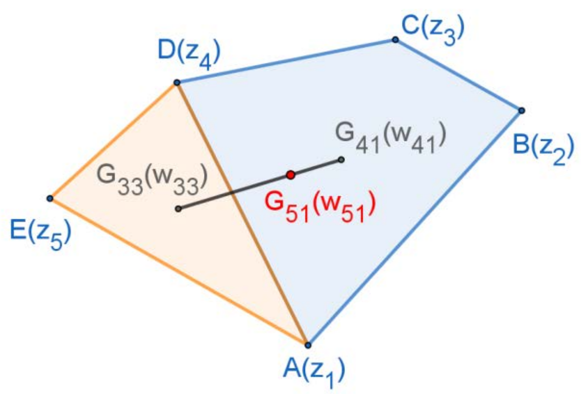
進一步計算五邊形的重心：

> 引理 3-2：
>
> 作任意五邊形$ABCDE$，令$G_{51}$為五邊形$ABCDE$的重心。
>
> 若$A,B,C,D,E,G_{51}$的複數表示法為$z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,w_{51}$，則此五邊形重心的複數表示法為
>
> $$w_{51}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCDE}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCDE}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\frac{z_1+z_4+z_5}{3}\text{。}$$

證明：

如圖，令$G_{33},G_{41}$分別為$\Delta ADE$,四邊形$ABCD$的重心，且其複數表示法為$w_{33},w_{41}$。

已知$w_{33}=\dfrac{z_1+z_4+z_5}{3}$，




由引理 3-1 可知

$$w_{41}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{z_1+z_3+z_4}{3}\text{，}$$

又由定理 1 知$\dfrac{\overline{G_{51}G_{33}}}{\overline{G_{51}G_{41}}}=\dfrac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ADE}}$，

再以向量的分點公式計算，

$$w_{51}=\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCD}+S_{\Delta ADE}}w_{41}+\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{ABCD}+S_{\Delta ADE}}w_{33}$$

$$=\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCDE}}w_{41}+\left(1-\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCDE}}\right)w_{33}$$

$$=\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCDE}}\left(\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right)+\left(1-\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCDE}}\right)\cdot\frac{z_1+z_4+z_5}{3}$$

$$=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCDE}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCDE}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\frac{z_1+z_4+z_5}{3}\text{ 。}\qquad\blacksquare$$

有了引理 3-1 及引理 3-2 的發現，觀察規律後，我們猜測：任意多邊形的重心皆可由頂點及面積比值計算而得，並用數學歸納法證明之，證明如下：

定理 3：

作任意 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，令 $G_{n1}$ 為 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的重心。若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,G_{n1}$ 的複數表示法為 $z_1,z_2,\cdots,z_n,w_{n1}$，則對所有正整數 $n\ge 4$，此 $n$ 邊形重心的複數表示法為

$$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{n-2}-z_n}{3}+\frac{z_1+z_{n-1}+z_n}{3}\text{ 。}$$

證明：

(1)當 $n=4$ 時，由引理 3-1 可得四邊形重心的複數表示法為 $w_{41}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{z_1+z_3+z_4}{3}$，

故原式成立。

(2)設 $n=k$ 時原式成立，

即 $k$ 邊形重心的複數表示法

$$w_{k1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2\cdots A_{k-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}\cdot\frac{z_{k-2}-z_k}{3}+\frac{z_1+z_{k-1}+z_k}{3}\text{ ，}$$

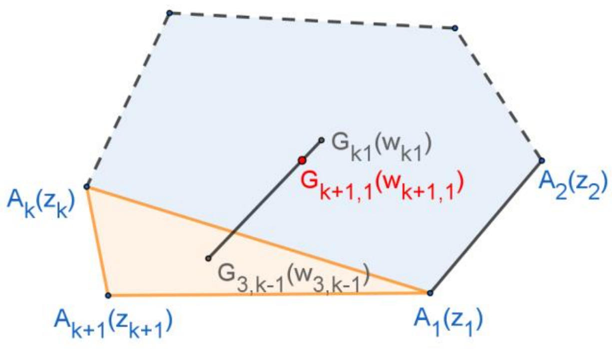
則 $n=k+1$ 時：

已知 $w_{3,k-1}=\frac{z_1+z_k+z_{k+1}}{3}$，

由定理 1 知 $\frac{\overline{G_{k+1,1}G_{3,k-1}}}{\overline{G_{k+1,1}G_{k1}}}=\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}$，

再以向量的分點公式計算，

$(k+1)$ 邊形的重心的複數表示法



$$w_{k+1,1}=\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}+S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}w_{k1}+\frac{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}+S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}w_{3,k-1}$$

$$=\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}w_{k1}+\left(1-\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}\right)w_{3,k-1}$$

$$=\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}\left(\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2\cdots A_{k-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}\cdot\frac{z_{k-2}-z_k}{3}+\frac{z_1+z_{k-1}+z_k}{3}\right)$$

$$+\left(1-\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}\right)\cdot\frac{z_1+z_k+z_{k+1}}{3}$$

$$=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}\cdot\frac{z_{k-1}-z_{k+1}}{3}+\frac{z_1+z_k+z_{k+1}}{3}\ ,$$

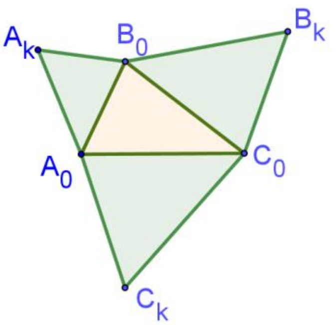
故原式成立。

由(1)(2)及數學歸納法得：

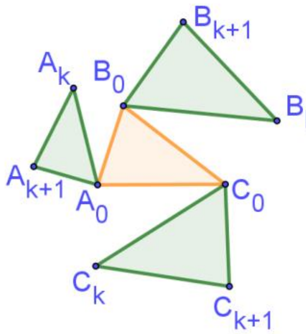
對所有正整數$n\geq 4$，$n$邊形重心的複數表示法為

$$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{n-2}-z_n}{3}+\frac{z_1+z_{n-1}+z_n}{3}\ 。\qquad\blacksquare$$

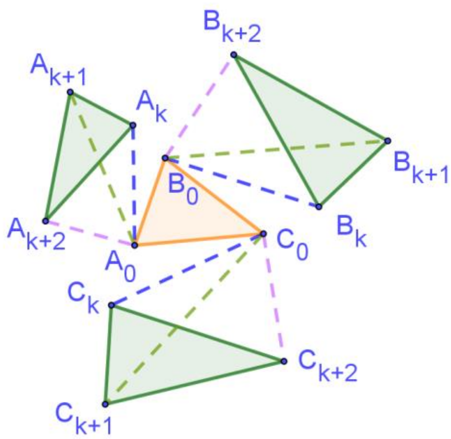
作任意$\Delta A_0B_0C_0$，分別以$A_0,B_0,C_0$為中心，將$B_0,C_0,A_0$伸縮$t_k$倍，並旋轉$\alpha_k$角$(\neq 0°)$，得$A_k$, $B_k,C_k$。



圖一



圖二



圖三

為了後面的證明方便，我們定義：

(1)如圖一，選取「$\overline{A_0B_0},\overline{B_0C_0},\overline{C_0A_0}$」及「分別以$A_0,B_0,C_0$為中心，將$B_0,C_0,A_0$各自伸縮旋轉後的另一點」，分別連接，得$\Delta A_0B_0A_k,\Delta B_0C_0B_k,\Delta C_0A_0C_k$，由於此類三角形與原三角形共用一邊，我們將此三個三角形稱為「同一組的相鄰三角形」。

(2)如圖二，選取「$A_0,B_0,C_0$」及「分別以$A_0,B_0,C_0$為中心，將$B_0,C_0,A_0$各自伸縮旋轉後的另兩點」，分別連接，得$\Delta A_0A_kA_{k+1},\Delta B_0B_kB_{k+1},\Delta C_0C_kC_{k+1}$，由於此類三角形與原三角形共用一點，我們將此三個三角形稱為「同一組的相分三角形」。

(3)如圖三，分別以$A_0,B_0,C_0$為中心，將$B_0,C_0,A_0$各自伸縮旋轉後的另三點分別連接，得$\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2},\Delta B_kB_{k+1}B_{k+2},\Delta C_kC_{k+1}C_{k+2}$，由於此種三角形不直接使用原三角形的邊及頂點，我們將此三個三角形稱為「同一組的相離三角形」。

(4)由三個三角形的重心連接而成的三角形，我們稱為「重心相連三角形」。

(5)由三個相似三角形對應頂點連接而成的三角形，我們稱為「頂點相連三角形」。

關於這些三角形，我們有以下結論：

> 引理 4-1：
>
> (1)同一組的相鄰三角形相似。
>
> (2)同一組的相分三角形相似。
>
> (3)同一組的相離三角形相似。

證明：

作任意$\Delta A_0B_0C_0$，分別以$A_0,B_0,C_0$為中心，將$B_0,C_0,A_0$伸縮$t_k$倍，並旋轉$\alpha_k$角$(\neq 0°)$，得$A_k$, $B_k,C_k$。

(1)同一組的相鄰三角形$\Delta A_0B_0A_k,\Delta B_0C_0B_k,\Delta C_0A_0C_k$中，

由於$\dfrac{\overline{A_0A_k}}{\overline{A_0B_0}}=\dfrac{\overline{B_0B_k}}{\overline{B_0C_0}}=t_k$，因此$\dfrac{\overline{A_0A_k}}{\overline{B_0B_k}}=\dfrac{\overline{A_0B_0}}{\overline{B_0C_0}}$，又$\angle A_kA_0B_0=\angle B_kB_0C_0=\alpha_k$，

故由$SAS$相似，可得$\Delta A_0B_0A_k\sim\Delta B_0C_0B_k$。

同理可證：$\Delta A_0B_0A_k,\Delta B_0C_0B_k,\Delta C_0A_0C_k$相似，即同一組的相鄰三角形相似。

(2)同一組的相分三角形$\Delta A_0A_kA_{k+1},\Delta B_0B_kB_{k+1},\Delta C_0C_kC_{k+1}$中，

由於$\dfrac{\overline{A_0A_k}}{\overline{A_0B_0}}=\dfrac{\overline{B_0B_k}}{\overline{B_0C_0}}=t_k$，且$\dfrac{\overline{A_0A_{k+1}}}{\overline{A_0B_0}}=\dfrac{\overline{B_0B_{k+1}}}{\overline{B_0C_0}}=t_{k+1}$，則$\dfrac{\overline{A_0A_{k+1}}}{\overline{A_0A_k}}=\dfrac{\overline{B_0B_{k+1}}}{\overline{B_0B_k}}=\dfrac{t_{k+1}}{t_k}$，

因此$\dfrac{\overline{A_0A_{k+1}}}{\overline{B_0B_{k+1}}}=\dfrac{\overline{A_0A_k}}{\overline{B_0B_k}}$，又$\angle A_kA_0A_{k+1}=\angle B_kB_0B_{k+1}=\left|\alpha_{k+1}-\alpha_k\right|$，

故由$SAS$相似，可得$\Delta A_0A_kA_{k+1}\sim\Delta B_0B_kB_{k+1}$。

同理可證：$\Delta A_0A_kA_{k+1},\Delta B_0B_kB_{k+1},\Delta C_0C_kC_{k+1}$相似，即同一組的相分三角形相似。

(3)同一組的相離三角形$\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2},\Delta B_kB_{k+1}B_{k+2},\Delta C_kC_{k+1}C_{k+2}$中，

將三個三角形的頂點分別與 $A_0,B_0,C_0$ 連接，可得 $\Delta A_0A_kA_{k+1},\Delta B_0B_kB_{k+1},\Delta C_0C_kC_{k+1}$ 及 $\Delta A_0A_{k+1}A_{k+2}$, $\Delta B_0B_{k+1}B_{k+2},\Delta C_0C_{k+1}C_{k+2}$ 兩組相分三角形，

而由(2)同一組的相分三角形相似可知：

$\dfrac{\overline{A_kA_{k+1}}}{\overline{B_kB_{k+1}}}=\dfrac{\overline{A_0A_{k+1}}}{\overline{B_0B_{k+1}}}$ 及 $\angle A_kA_{k+1}A_0=\angle B_kB_{k+1}B_0=\beta$，

且 $\dfrac{\overline{A_{k+2}A_{k+1}}}{\overline{B_{k+2}B_{k+1}}}=\dfrac{\overline{A_0A_{k+1}}}{\overline{B_0B_{k+1}}}$ 及 $\angle A_{k+2}A_{k+1}A_0=\angle B_{k+2}B_{k+1}B_0=\gamma$，

因此 $\dfrac{\overline{A_kA_{k+1}}}{\overline{B_kB_{k+1}}}=\dfrac{\overline{A_{k+2}A_{k+1}}}{\overline{B_{k+2}B_{k+1}}}$，且 $\angle A_{k+2}A_{k+1}A_k=\angle B_{k+2}B_{k+1}B_k=\beta+\gamma$，

故由 $SAS$ 相似，可得 $\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2}\sim\Delta B_kB_{k+1}B_{k+2}$ 。

同理可證：$\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2},\Delta B_kB_{k+1}B_{k+2},\Delta C_kC_{k+1}C_{k+2}$ 相似，即同一組的相離三角形相似。 ■

引理 4-2：

(1)由同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(2)由同一組相鄰三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(3)由同一組相分三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(4)由同一組相離三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

證明：

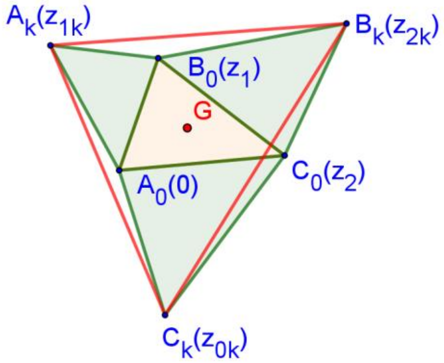
不失一般性，令 $A_0,B_0,C_0,A_k,B_k,C_k$ 的複數表示法為 $0,z_1,z_2,z_{1k},z_{2k},z_{0k}$，

則 $z_{1k}=z_1\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$，

$z_{2k}=(z_2-z_1)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_1$，

$z_{0k}=(0-z_2)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_2$，而 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心之複數表示法為 $\dfrac{z_1+z_2}{3}$ 。

(1) $\Delta A_kB_kC_k$ 的重心之複數表示法為




$$\frac{z_{1k}+z_{2k}+z_{0k}}{3}$$

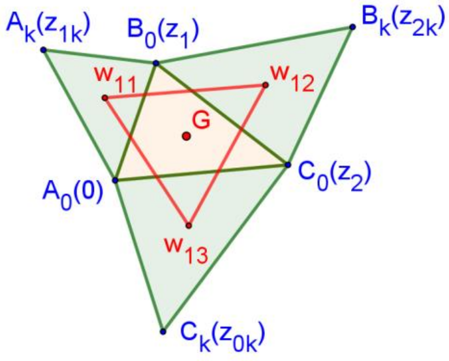
$$=\frac{t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)\big(z_1+(z_2-z_1)+(-z_2)\big)+z_1+z_2}{3}$$

$$=\frac{z_1+z_2}{3}，$$

故 $\Delta A_kB_kC_k$ 的重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心相同。

即由同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(2) $\Delta A_0B_0A_k$ 的重心之複數表示法為




$$w_{11}=\frac{0+z_1+z_{1k}}{3} ,$$

$\Delta B_0C_0B_k$ 的重心之複數表示法為

$$w_{12}=\frac{z_1+z_2+z_{2k}}{3} ,$$

$\Delta C_0A_0C_k$ 的重心之複數表示法為

$$w_{13}=\frac{z_2+0+z_{0k}}{3} ,$$

則此三個相鄰三角形的重心相連三角形的重心之複數表示法為

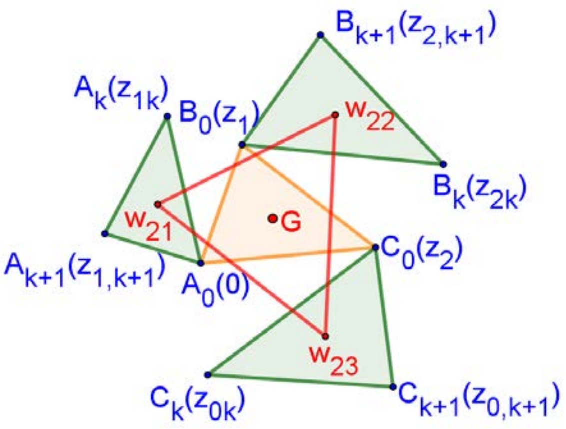
$$\frac{w_{11}+w_{12}+w_{13}}{3}=\frac{2z_1+2z_2+(z_{1k}+z_{2k}+z_{0k})}{9} ,$$

又由(1)知 $\frac{z_{1k}+z_{2k}+z_{0k}}{3}=\frac{z_1+z_2}{3}$，即 $z_{1k}+z_{2k}+z_{0k}=z_1+z_2$，

則 $\frac{w_{11}+w_{12}+w_{13}}{3}=\frac{3z_1+3z_2}{9}=\frac{z_1+z_2}{3}$ 。

故由同一組相鄰三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(3) $\Delta A_0A_kA_{k+1}$ 的重心之複數表示法為




$$w_{21}=\frac{0+z_{1k}+z_{1,k+1}}{3} ,$$

$\Delta B_0B_kB_{k+1}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{22}=\frac{z_1+z_{2k}+z_{2,k+1}}{3} ,$$

$\Delta C_0C_kC_{k+1}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{23}=\frac{z_2+z_{0k}+z_{0,k+1}}{3} ,$$

則此三個相分三角形的重心相連三角形的重心之複數表示法為

$$\frac{w_{21}+w_{22}+w_{23}}{3}=\frac{z_1+z_2+(z_{1k}+z_{2k}+z_{0k})+(z_{1,k+1}+z_{2,k+1}+z_{0,k+1})}{9} ,$$

又由(1)同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心相同，

故 $\frac{z_{1k}+z_{2k}+z_{0k}}{3}=\frac{z_1+z_2}{3}$，即 $z_{1k}+z_{2k}+z_{0k}=z_1+z_2$，

同理：$z_{1,k+1}+z_{2,k+1}+z_{0,k+1}=z_1+z_2$，則 $\frac{w_{21}+w_{22}+w_{23}}{3}=\frac{3z_1+3z_2}{9}=\frac{z_1+z_2}{3}$ 。

故由同一組相分三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(4) $\Delta A_k A_{k+1} A_{k+2}$ 的重心之複數表示法為

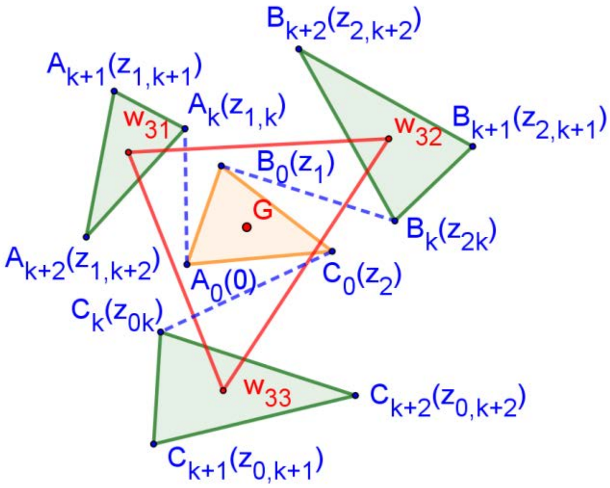
$$w_{31} = \frac{z_{1k} + z_{1,k+1} + z_{1,k+2}}{3}\ ,$$

$\Delta B_k B_{k+1} B_{k+2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{32} = \frac{z_{2k} + z_{2,k+1} + z_{2,k+2}}{3}\ ,$$

$\Delta C_k C_{k+1} C_{k+2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{33} = \frac{z_{0k} + z_{0,k+1} + z_{0,k+2}}{3}\ ,$$




則此三個相離三角形的重心相連三角形的重心之複數表示法為

$$\frac{w_{31} + w_{32} + w_{33}}{3} = \frac{(z_{1k} + z_{2k} + z_{0k}) + (z_{1,k+1} + z_{2,k+1} + z_{0,k+1}) + (z_{1,k+2} + z_{2,k+2} + z_{0,k+2})}{9}\ ,$$

又由(1)同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與原三角形的重心相同，

故 $\dfrac{z_{1k} + z_{2k} + z_{0k}}{3} = \dfrac{z_1 + z_2}{3}$ ，即 $z_{1k} + z_{2k} + z_{0k} = z_1 + z_2$ ，

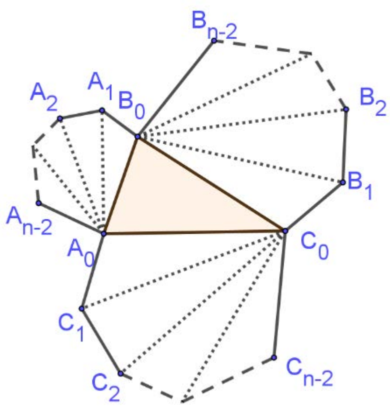
同理： $z_{1,k+1} + z_{2,k+1} + z_{0,k+1} = z_1 + z_2$ ， $z_{1,k+2} + z_{2,k+2} + z_{0,k+2} = z_1 + z_2$ ，

則 $\dfrac{w_{31} + w_{32} + w_{33}}{3} = \dfrac{3z_1 + 3z_2}{9} = \dfrac{z_1 + z_2}{3}$ 。

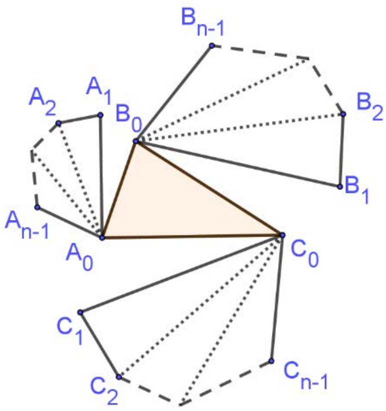
故由同一組相離三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。 ■

有了這些三角形之結論，我們進而討論多邊形的狀況：

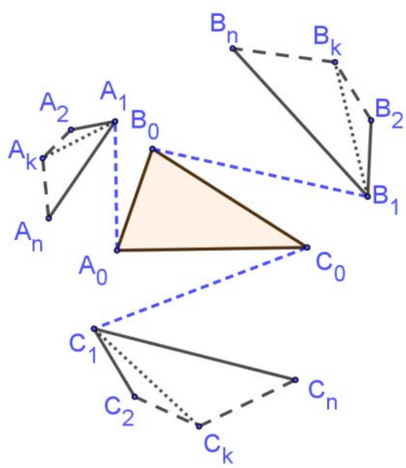
作任意 $\Delta A_0 B_0 C_0$ ，分別以 $A_0, B_0, C_0$ 為中心，將 $B_0, C_0, A_0$ 伸縮 $t_k$ 倍，並旋轉 $\alpha_k$ 角 $(\neq 0°)$ ，得 $A_k$, $B_k, C_k$ 。




圖一




圖二




圖三

與相鄰、相分、相離三角形的定義方式類似，我們定義：

(1)如圖一，選取「$\overline{A_0B_0},\overline{B_0C_0},\overline{C_0A_0}$」及「分別以 $A_0,B_0,C_0$ 為中心，將 $B_0,C_0,A_0$ 各自伸縮旋轉後的另 $(n-2)$ 個點」，分別連接，得 $n$ 邊形 $A_0B_0A_1A_2\cdots A_{n-2},B_0C_0B_1B_2\cdots B_{n-2},C_0A_0C_1C_2\cdots C_{n-2}$，由於此類 $n$ 邊形與原三角形共用一邊，將此三個 $n$ 邊形稱為「同一組的相鄰 $n$ 邊形」。

(2)如圖二，選取「$A_0,B_0,C_0$」及「分別以 $A_0,B_0,C_0$ 為中心，將 $B_0,C_0,A_0$ 各自伸縮旋轉後的另 $(n-1)$ 個點」，分別連接，得 $n$ 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1},B_0B_1B_2\cdots B_{n-1},C_0C_1C_2\cdots C_{n-1}$，由於此類 $n$ 邊形與原三角形共用一點，將此三個 $n$ 邊形稱為「同一組的相分 $n$ 邊形」。

(3)如圖三，分別以 $A_0,B_0,C_0$ 為中心，將 $B_0,C_0,A_0$ 各自伸縮旋轉後的另 $n$ 個點分別連接，得 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n,B_1B_2\cdots B_n,C_1C_2\cdots C_n$，由於此種 $n$ 邊形不直接使用原三角形的邊及頂點，將此三個 $n$ 邊形稱為「同一組的相離 $n$ 邊形」。

有了引理 4-1 及 4-2 的發現，我們猜測：「同一組的相鄰多邊形仍是相似形」且「同一組的相鄰多邊形的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同」，而相分、相離的狀況亦有相同結論，證明如下：

定理 4-1：

(1)同一組的相鄰多邊形相似。

(2)同一組的相分多邊形相似。

(3)同一組的相離多邊形相似。

證明：

作任意 $\Delta A_0B_0C_0$，分別以 $A_0,B_0,C_0$ 為中心，將 $B_0,C_0,A_0$ 伸縮 $t_k$ 倍，並旋轉 $\alpha_k$ 角 $(\neq 0°)$，得 $A_k$, $B_k,C_k$，其中 $k=1,2,\cdots,n-2$。

(1)同一組的相鄰 $n$ 邊形 $A_0B_0A_1A_2\cdots A_{n-2},B_0C_0B_1B_2\cdots B_{n-2},C_0A_0C_1C_2\cdots C_{n-2}$ 中，連接所有經過 $A_0,B_0,C_0$ 的對角線，可得一組相鄰三角形 $\Delta A_0B_0A_1,\Delta B_0C_0B_1,\Delta C_0A_0C_1$，及 $(n-3)$ 組相分三角形 $\Delta A_0A_kA_{k+1},\Delta B_0B_kB_{k+1},\Delta C_0C_kC_{k+1}$，其中 $k=1,2,\cdots,n-3$，

而由引理 4-1：同一組的相鄰三角形相似，而同一組的相分三角形亦相似，

因此由這些三角形組合而成的 $n$ 邊形之對應邊均成比例且對應角相等，

則 $A_0B_0A_1A_2\cdots A_{n-2},B_0C_0B_1B_2\cdots B_{n-2},C_0A_0C_1C_2\cdots C_{n-2}$ 三個 $n$ 邊形相似，即同一組的相鄰多邊形相似。

(2)同一組的相分 $n$ 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1},B_0B_1B_2\cdots B_{n-1},C_0C_1C_2\cdots C_{n-1}$ 中，連接所有經過 $A_0,B_0,C_0$ 的

對角線，可得 $(n-2)$ 組相分三角形 $\Delta A_0A_kA_{k+1},\Delta B_0B_kB_{k+1},\Delta C_0C_kC_{k+1}$，其中 $k=1,2,\cdots,n-2$，

而由引理 4-1：同一組的相分三角形相似，

因此由這些三角形組合而成的 $n$ 邊形之對應邊均成比例且對應角相等，

則 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1},B_0B_1B_2\cdots B_{n-1},C_0C_1C_2\cdots C_{n-1}$ 三個 $n$ 邊形相似，即同一組的相分多邊形相似。

(3)同一組的相離 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n,B_1B_2\cdots B_n,C_1C_2\cdots C_n$ 中，連接過 $A_1,B_1,C_1$ 的對角線，可得

$(n-2)$ 組相離三角形 $\Delta A_1A_{k+1}A_{k+2},\Delta B_1B_{k+1}B_{k+2},\Delta C_1C_{k+1}C_{k+2}$，其中 $k=1,2,\cdots,n-2$，

而由引理 4-1：同一組的相離三角形相似，

因此由這些三角形組合而成的 $n$ 邊形之對應邊均成比例且對應角相等，

則 $A_1A_2\cdots A_n,B_1B_2\cdots B_n,C_1C_2\cdots C_n$ 三個 $n$ 邊形相似，即同一組的相離多邊形相似。 ■

定理 4-2：

(1)由同一組的相鄰多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(2)由同一組的相分多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(3)由同一組的相離多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

證明：

不失一般性，令 $A_0,B_0,C_0,A_k,B_k,C_k$ 的複數表示法為 $0,z_1,z_2,z_{1k},z_{2k},z_{0k}$，

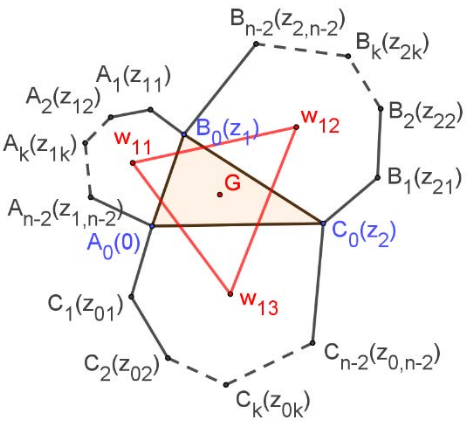
則 $z_{1k}=z_1\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$，

$z_{2k}=(z_2-z_1)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_1$，

$z_{0k}=(0-z_2)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_2$，

而 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心之複數表示法為 $\dfrac{z_1+z_2}{3}$。

(1)由定理 4-1 我們知同一組的相鄰 $n$ 邊形相似，




故 $\dfrac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_k}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}=\dfrac{S_{B_0C_0B_1\cdots B_k}}{S_{B_0C_0B_1\cdots B_{n-2}}}=\dfrac{S_{C_0A_0C_1\cdots C_k}}{S_{C_0A_0C_1\cdots C_{n-2}}}$，

其中 $k=1,2,\cdots n-3$，

而由定理 3：

$n$ 邊形 $A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{11}=\frac{S_{\Delta A_0B_0A_1}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_1-z_{12}}{3}+\cdots$$

$$+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_k}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_{1,k-1}-z_{1,k+1}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-3}}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_{1,n-4}-z_{1,n-2}}{3}+\frac{0+z_{1,n-3}+z_{1,n-2}}{3},$$

$n$ 邊形 $B_0C_0B_1\cdots B_{n-2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{12}=\frac{S_{\Delta A_0B_0A_1}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_2-z_{22}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_k}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_{2,k-1}-z_{2,k+1}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-3}}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_{2,n-4}-z_{2,n-2}}{3}+\frac{z_1+z_{2,n-3}+z_{2,n-2}}{3}\ ,$$

$n$ 邊形 $C_0A_0C_1\cdots C_{n-2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{13}=\frac{S_{\Delta A_0B_0A_1}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{0-z_{02}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_k}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_{0,k-1}-z_{0,k+1}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-3}}}{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}\cdot\frac{z_{0,n-4}-z_{0,n-2}}{3}+\frac{z_2+z_{0,n-3}+z_{0,n-2}}{3}\ ,$$

則此三個相鄰 $n$ 邊形的重心相連三角形之重心其複數表示法為

$$\frac{w_{11}+w_{12}+w_{13}}{3}=\frac{S_{\Delta A_0B_0A_1}\left(z_1+z_2+0-\left(z_{12}+z_{22}+z_{02}\right)\right)}{9\cdot S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_k}\left(z_{1,k-1}+z_{2,k-1}+z_{0,k-1}-\left(z_{1,k+1}+z_{2,k+1}+z_{0,k+1}\right)\right)}{9\cdot S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-3}}\left(z_{1,n-4}+z_{2,n-4}+z_{0,n-4}-\left(z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}\right)\right)}{9\cdot S_{A_0B_0A_1\cdots A_{n-2}}}$$
$$+\frac{\left(0+z_1+z_2\right)+\left(z_{1,n-3}+z_{2,n-3}+z_{0,n-3}\right)+\left(z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}\right)}{9}\ ,$$

又由引理 4-2

由同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心相同，

故 $\dfrac{z_{12}+z_{22}+z_{02}}{3}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$ ，即 $z_{12}+z_{22}+z_{02}=z_1+z_2$ ，

同理： $z_{1,k-1}+z_{2,k-1}+z_{0,k-1}=z_1+z_2$ ， $z_{1,k+1}+z_{2,k+1}+z_{0,k+1}=z_1+z_2$ ，

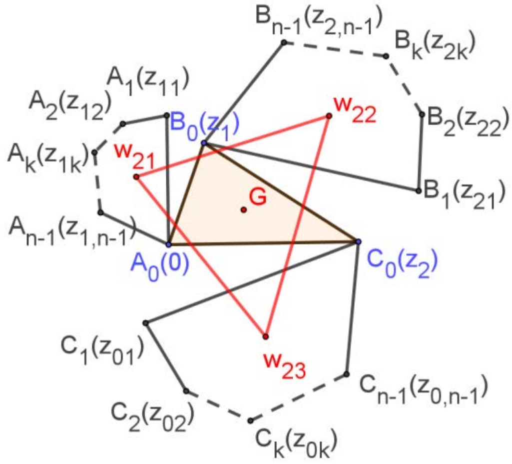
$z_{1,n-4}+z_{2,n-4}+z_{0,n-4}=z_1+z_2$ ， $z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}=z_1+z_2$ ，

$z_{1,n-3}+z_{2,n-3}+z_{0,n-3}=z_1+z_2$

則 $\dfrac{w_{11}+w_{12}+w_{13}}{3}=\dfrac{3z_1+3z_2}{9}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$ 。

故由同一組的相鄰多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(2)由定理 4-1 我們知同一組的相分 $n$ 邊形相似，




故 $\dfrac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{k+1}}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}=\dfrac{S_{B_0B_1B_2\cdots B_{k+1}}}{S_{B_0B_1B_2\cdots B_{n-1}}}=\dfrac{S_{C_0C_1C_2\cdots C_{k+1}}}{S_{C_0C_1C_2\cdots C_{n-1}}}$ ，

其中 $k=1,2,\cdots n-3$ ，

而由定理 3：

$n$ 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{21}=\frac{S_{\Delta A_0A_1A_2}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{11}-z_{13}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{k+1}}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{1k}-z_{1,k+2}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-2}}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{1,n-3}-z_{1,n-1}}{3}+\frac{0+z_{1,n-2}+z_{1,n-1}}{3}\ ,$$

$n$ 邊形 $B_0B_1B_2\cdots B_{n-1}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{22}=\frac{S_{\Delta A_0A_1A_2}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{21}-z_{23}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{k+1}}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{2k}-z_{2,k+2}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-2}}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{2,n-3}-z_{2,n-1}}{3}+\frac{z_1+z_{2,n-2}+z_{2,n-1}}{3}\ ,$$

$n$ 邊形 $C_0C_1C_2\cdots C_{n-1}$ 的重心之複數表示法為

$$w_{23}=\frac{S_{\Delta A_0A_1A_2}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{01}-z_{03}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{k+1}}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{0k}-z_{0,k+2}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-2}}}{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}\cdot\frac{z_{0,n-3}-z_{0,n-1}}{3}+\frac{z_2+z_{0,n-2}+z_{0,n-1}}{3}\ ,$$

則此三個相分 $n$ 邊形的重心相連三角形之重心其複數表示法為

$$\frac{w_{21}+w_{22}+w_{23}}{3}=\frac{S_{\Delta A_0A_1A_2}\left(z_{11}+z_{21}+z_{01}-\left(z_{13}+z_{23}+z_{03}\right)\right)}{9\cdot S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{k+1}}\left(z_{1k}+z_{2k}+z_{0k}-\left(z_{1,k+2}+z_{2,k+2}+z_{0,k+2}\right)\right)}{9\cdot S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-2}}\left(z_{1,n-3}+z_{2,n-3}+z_{0,n-3}-\left(z_{1,n-1}+z_{2,n-1}+z_{0,n-1}\right)\right)}{9\cdot S_{A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}}}$$
$$+\frac{\left(0+z_1+z_2\right)+\left(z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}\right)+\left(z_{1,n-1}+z_{2,n-1}+z_{0,n-1}\right)}{9}\ ,$$

又由引理 4-2

由同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心相同，

故 $\dfrac{z_{11}+z_{21}+z_{01}}{3}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$ ，即 $z_{11}+z_{21}+z_{01}=z_1+z_2$ ，

同理： $z_{13}+z_{23}+z_{03}=z_1+z_2$ ， $z_{1k}+z_{2k}+z_{0k}=z_1+z_2$ ，

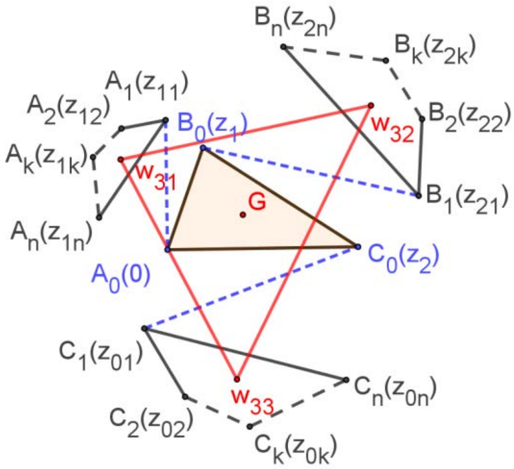
$z_{1,k+2}+z_{2,k+2}+z_{0,k+2}=z_1+z_2$ ， $z_{1,n-3}+z_{2,n-3}+z_{0,n-3}=z_1+z_2$ ，

$z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}=z_1+z_2$ ， $z_{1,n-1}+z_{2,n-1}+z_{0,n-1}=z_1+z_2$ ，

則 $\dfrac{w_{21}+w_{22}+w_{23}}{3}=\dfrac{3z_1+3z_2}{9}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$ 。

故由同一組的相分多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(3)由定理 4-1 我們知同一組的相離 $n$ 邊形相似，




故 $\dfrac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{k+2}}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}=\dfrac{S_{B_1B_2B_3\cdots B_{k+2}}}{S_{B_1B_2B_3\cdots B_n}}=\dfrac{S_{C_1C_2C_3\cdots C_{k+2}}}{S_{C_1C_2C_3\cdots C_n}}$ ，

其中 $k=1,2,\cdots n-3$ ，

而由定理 3：

$n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的重心之複數表示法為

$$w_{31}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{12}-z_{14}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{k+2}}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{1,k+1}-z_{1,k+3}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{1,n-2}-z_{1n}}{3}+\frac{z_{11}+z_{1,n-1}+z_{1n}}{3}\ ,$$

$n$ 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的重心之複數表示法為

$$w_{32}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{22}-z_{24}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{k+2}}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{2,k+1}-z_{2,k+3}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{2,n-2}-z_{2n}}{3}+\frac{z_{21}+z_{2,n-1}+z_{2n}}{3}\ ,$$

$n$ 邊形 $C_1C_2C_3\cdots C_n$ 的重心之複數表示法為

$$w_{33}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{02}-z_{04}}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{k+2}}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{0,k+1}-z_{0,k+3}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}}}{S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{0,n-2}-z_{0n}}{3}+\frac{z_{01}+z_{0,n-1}+z_{0n}}{3}\ ,$$

則此三個相離 $n$ 邊形的重心相連三角形之重心其複數表示法為

$$\frac{w_{31}+w_{32}+w_{33}}{3}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}\left(z_{12}+z_{22}+z_{02}-\left(z_{14}+z_{24}+z_{04}\right)\right)}{9\cdot S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}+\cdots$$

$$+\frac{S_{A_0A_1A_2\cdots A_{k+2}}\left(z_{1,k+1}+z_{2,k+1}+z_{0,k+1}-\left(z_{1,k+3}+z_{2,k+3}+z_{0,k+3}\right)\right)}{9\cdot S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}+\cdots$$

$$+\frac{S_{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}}\left(z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}-\left(z_{1n}+z_{2n}+z_{0n}\right)\right)}{9\cdot S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}}$$

$$+\frac{\left(0+z_1+z_2\right)+\left(z_{1,n-1}+z_{2,n-1}+z_{0,n-1}\right)+\left(z_{1,n}+z_{2,n}+z_{0,n}\right)}{9}\ ,$$

又由引理 4-2

由同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與$\Delta A_0B_0C_0$的重心相同

故 $\frac{z_{12}+z_{22}+z_{02}}{3}=\frac{z_1+z_2}{3}$ ，即 $z_{12}+z_{22}+z_{02}=z_1+z_2$ ，

同理： $z_{14}+z_{24}+z_{04}=z_1+z_2$ ， $z_{1,k+1}+z_{2,k+1}+z_{0,k+1}=z_1+z_2$ ，

$z_{1,k+3}+z_{2,k+3}+z_{0,k+3}=z_1+z_2$ ， $z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}=z_1+z_2$ ，

$z_{1,n-1}+z_{2,n-1}+z_{0,n-1}=z_1+z_2$ ， $z_{1n}+z_{2n}+z_{0n}=z_1+z_2$

則 $\frac{w_{31}+w_{32}+w_{33}}{3}=\frac{3z_1+3z_2}{9}=\frac{z_1+z_2}{3}$ 。

故由同一組的相離多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。 ■

而在後續研究多邊形重心公式的過程中，我們突然發現若代換方式不同，可導出另一個簡化的公式：

> 定理 5：
>
> 作任意$n$邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$，令$G_{n1}$為$n$邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的重心，$G_{3i}$為$\Delta A_1A_{i+1}A_{i+2}$的重心，其中$i=1,2,\cdots,n-2$。若$G_{n1},G_{3i}$的複數表示法為$w_{n1},w_{3i}$，則對所有正整數$n\geq 4$，此$n$邊形重心的複數表示法為
>
> $$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{31}+\frac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{32}+\cdots+\frac{S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{3,n-2}\ 。$$

證明：

(1)當$n=4$時，由引理 1-1 知 $\frac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{\Delta A_1A_3A_4}}$ ，

再以向量的分點公式計算，

四邊形重心的複數表示法為 $w_{41}=\dfrac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}+S_{\Delta A_1A_3A_4}}w_{31}+\dfrac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}+S_{\Delta A_1A_3A_4}}w_{32}$

即 $w_{41}=\dfrac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_4}}w_{31}+\dfrac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_4}}w_{32}$，故原式成立。

(2)設 $n=k$ 時原式成立，

即 $k$ 邊形重心的複數表示法為 $w_{k1}=\dfrac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}w_{31}+\dfrac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}w_{32}+\cdots+\dfrac{S_{\Delta A_1A_{k-1}A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}w_{3,k-2}$，

則 $n=k+1$ 時，

由定理 1 知 $\dfrac{\overline{G_{k+1,1}G_{3,k-1}}}{\overline{G_{k+1,1}G_{k1}}}=\dfrac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}$，

再以向量的分點公式計算，

$(k+1)$ 邊形重心的複數表示法為

$$\begin{aligned}
w_{k+1,1}&=\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}+S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}w_{k1}+\frac{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}+S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}w_{3,k-1}\\
&=\frac{S_{A_1A_2\cdots A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}\left(\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}w_{31}+\frac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}w_{32}+\cdots+\frac{S_{\Delta A_1A_{k-1}A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_k}}w_{3,k-2}\right)+\frac{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}w_{3,k-1}\\
&=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}w_{31}+\frac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}w_{32}+\cdots+\frac{S_{\Delta A_1A_{k-1}A_k}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}w_{3,k-2}+\frac{S_{\Delta A_1A_kA_{k+1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_{k+1}}}w_{3,k-1}
\end{aligned}$$

，故原式成立。

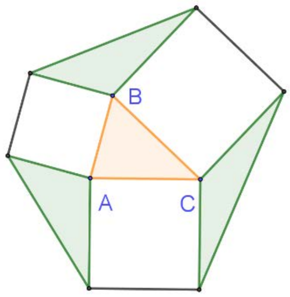
由(1)(2)及數學歸納法得：

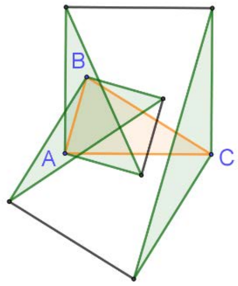
作任意 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，令 $G_{n1}$ 為 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的重心，$G_{3i}$ 為 $\Delta A_1A_{i+1}A_{i+2}$ 的重心，其中 $i=1,2,\cdots,n-2$。若 $G_{n1},G_{3i}$ 的複數表示法為 $w_{n1},w_{3i}$，則對所有正整數 $n\geq 4$，此 $n$ 邊形重心的複數表示法為

$$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{31}+\frac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{32}+\cdots+\frac{S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{3,n-2}\text{。}$$ ■

有了以上的結論，我們終於可以開始證明之前用不同連接方式，得到重心會與原三角形重心相同的狀況：

如圖，自任意三角形的邊同時向外（或向內）作正 $n$ 邊形，並連接相近的頂點（異於原三角形）及原三角形的頂點，我們稱其為同一組的「相接三角形」。




我們先處理相接三角形的狀況：

> 定理 6：
>
> (1)連接同一組相接三角形邊上固定比例所作的點，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。
>
> (2)同一組相接三角形的重心相連三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。

證明：

不失一般性，令 $A_0,B_0,C_0,A_k,B_k,C_k$ 的複數表示法為 $0,z_1,z_2,z_{1k},z_{2k},z_{0k}$ ，

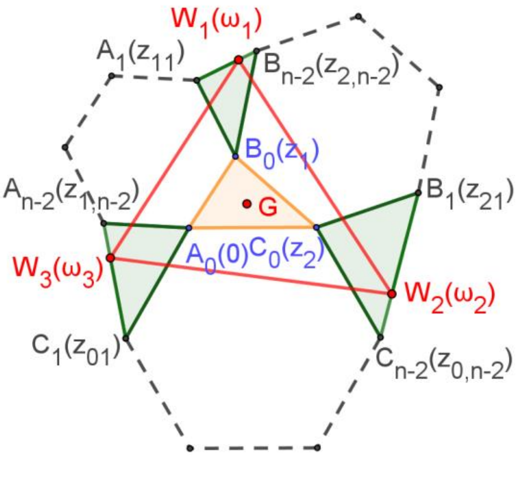
則 $z_{1k}=z_1\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$ ，

$z_{2k}=(z_2-z_1)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_1$ ，

$z_{0k}=(0-z_2)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_2$ ，

而 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心之複數表示法為 $\dfrac{z_1+z_2}{3}$ 。

(1)分別在線段 $\overline{A_1B_{n-2}},\overline{B_1C_{n-2}},\overline{C_1A_{n-2}}$ 上各作一點




$W_1,W_2,W_3$ ，使得 $\dfrac{\overline{A_1W_1}}{\overline{A_1B_{n-2}}}=\dfrac{\overline{B_1W_2}}{\overline{B_1C_{n-2}}}=\dfrac{\overline{C_1W_3}}{\overline{C_1A_{n-2}}}=t$ ，

其中 $0\le t\le 1$ ，

則 $W_1,W_2,W_3$ 的複數表示法分別為

$\omega_1=z_{11}+t(z_{2,n-2}-z_{11})$ ，

$\omega_2=z_{21}+t(z_{0,n-2}-z_{21})$ ，

$\omega_3=z_{01}+t(z_{1,n-2}-z_{01})$

故 $\Delta W_1W_2W_3$ 的重心之複數表示法為

$$\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{3}=\frac{(1-t)(z_{11}+z_{21}+z_{01})+t(z_{2,n-2}+z_{0,n-2}+z_{1,n-2})}{3}\ ,$$

而由引理 4-2

同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心相同，

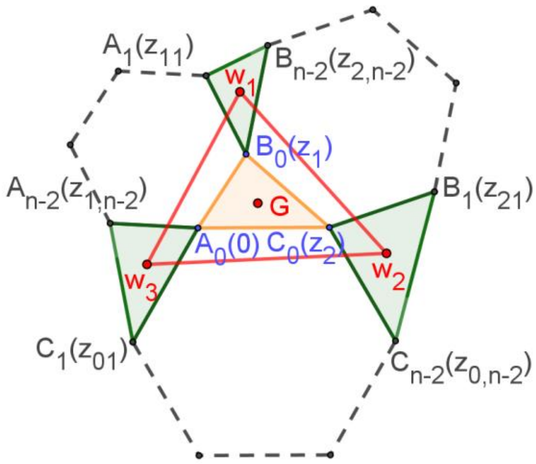
可知 $\frac{z_{11}+z_{21}+z_{01}}{3}=\frac{z_1+z_2}{3}$ ，即 $z_{11}+z_{21}+z_{01}=z_1+z_2$ ，

同理： $z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}=z_1+z_2$ ，則 $\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{3}=\frac{z_1+z_2}{3}$ 。

故連接同一組相接三角形邊上固定比例所作的點，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。

(2) $\Delta B_0B_1A_{n-2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_1=\frac{z_1+z_{21}+z_{1,n-2}}{3} ,$$




$\Delta C_0C_1B_{n-2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_2=\frac{z_2+z_{01}+z_{2,n-2}}{3} ,$$

$\Delta A_0A_1C_{n-2}$ 的重心之複數表示法為

$$w_3=\frac{0+z_{11}+z_{0,n-2}}{3} ,$$

則此三個相接三角形的重心相連三角形的重心之複數表示法為

$$\frac{w_1+w_2+w_3}{3}=\frac{z_1+z_2+(z_{21}+z_{01}+z_{11})+(z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2})}{9} ,$$

由引理 4-2

同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心相同，

可知 $\frac{z_{21}+z_{01}+z_{11}}{3}=\frac{z_1+z_2}{3}$ ，即 $z_{21}+z_{01}+z_{11}=z_1+z_2$ ，

同理： $z_{1,n-2}+z_{2,n-2}+z_{0,n-2}=z_1+z_2$ ，

則 $\frac{w_1+w_2+w_3}{3}=\frac{3z_1+3z_2}{9}=\frac{z_1+z_2}{3}$ 。

故由同一組相接三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。 ■

再來我們處理將正 $n$ 邊形切三塊的狀況，首先討論連接邊上的點切三塊：

定理 7-1：

自任意三角形的三邊，同時向外（或向內）作正 $n$ 邊形，並選定一對應邊上固定比例所作的點，與此三邊上的頂點（或正 $n$ 邊形其他邊上的點）連接後，將每個正 $n$ 邊形都切成三塊，而連接三個區塊的重心相連三角形的重心，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。

證明：

不失一般性，令 $A_0,B_0,C_0,A_k,B_k,C_k$ 的複數表示法為 $0,z_1,z_2,z_{1k},z_{2k},z_{0k}$ ，

則 $z_{1k}=z_1\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$ ， $z_{2k}=(z_2-z_1)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_1$ ，

$z_{0k}=(0-z_2)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_2$ ，而 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心之複數表示法為 $\dfrac{z_1+z_2}{3}$ 。

分別在線段 $\overline{A_kA_{k+1}},\overline{B_kB_{k+1}},\overline{C_kC_{k+1}}$

上各作一點 $W_1,W_2,W_3$ ，使得

$$\frac{\overline{A_kW_1}}{\overline{A_kA_{k+1}}}=\frac{\overline{B_kW_2}}{\overline{B_kB_{k+1}}}=\frac{\overline{C_kW_3}}{\overline{C_kC_{k+1}}}=t$$ ，

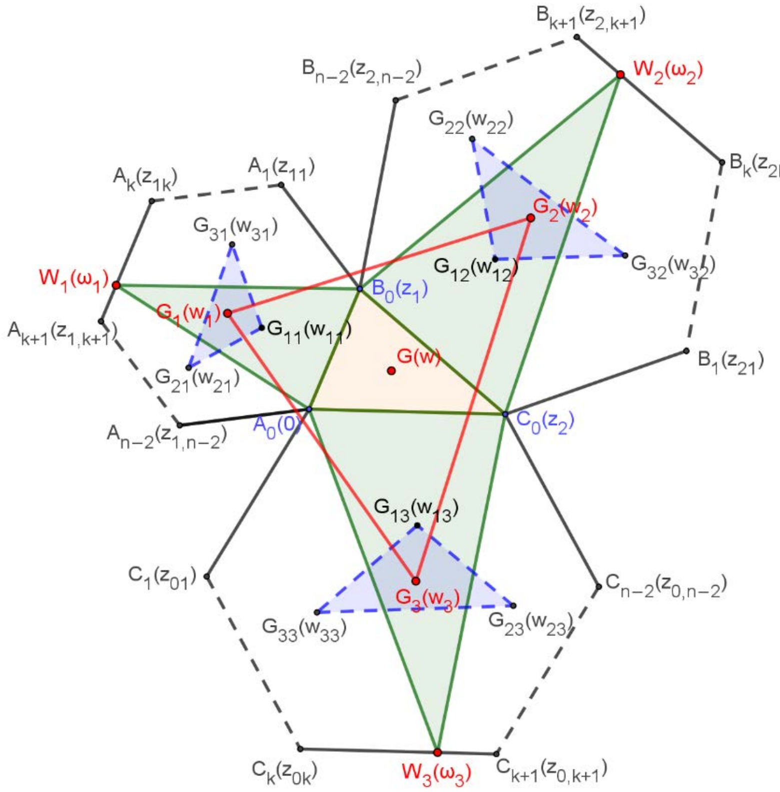
其中 $0\le t\le 1$ ，

則 $W_1,W_2,W_3$ 的複數表示法分別為

$\omega_1=z_{1k}+t(z_{1,k+1}-z_{1k})$ ，

$\omega_2=z_{2k}+t(z_{2,k+1}-z_{2k})$ ，

$\omega_3=z_{0k}+t(z_{0,k+1}-z_{0k})$ 。




而 $\dfrac{\overline{A_kW_1}}{\overline{B_kW_2}}=\dfrac{t\overline{A_kA_{k+1}}}{t\overline{B_kB_{k+1}}}=\dfrac{\overline{A_kA_{k+1}}}{\overline{B_kB_{k+1}}}=\cdots$

$=\dfrac{\overline{A_1B_0}}{\overline{B_1C_0}}=\dfrac{\overline{A_0B_0}}{\overline{B_0C_0}}$

，且夾角皆為正 $n$ 邊形的夾角，

故多邊形 $B_0A_1\cdots A_kW_1\sim C_0B_1\cdots B_kW_2\,(SAS\cdots AS\text{相似})$ ，

同理可得： $B_0A_1\cdots A_kW_1,C_0B_1\cdots B_kW_2,A_0C_1\cdots C_kW_3$ 三個多邊形相似，為同一組相分多邊形。

同理可證： $W_1A_{k+1}\cdots A_{n-2}W_0,W_2B_{k+1}\cdots B_{n-2}B_0,W_3C_{k+1}\cdots C_{n-2}C_0$ 三個多邊形亦相似，為同一組相分多邊形，

則 $\dfrac{\overline{A_0W_1}}{\overline{B_0W_2}}=\dfrac{\overline{A_0A_{n-2}}}{\overline{B_0B_{n-2}}}=\dfrac{\overline{A_0B_0}}{\overline{B_0C_0}}$ ，且 $\angle W_1A_0A_{n-2}=\angle W_2B_0B_{n-2}$ ，

故 $\angle B_0A_0W_1=\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}-\angle W_1A_0A_{n-2}=\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}-\angle W_2B_0B_{n-2}=\angle C_0B_0W_2$ ，

所以由 $SAS$ 相似，得 $\Delta A_0W_1B_0\sim\Delta B_0W_2C_0$ ，

同理可得： $\Delta A_0W_1B_0,\Delta B_0W_2C_0,\Delta C_0W_3A_0$ 三個三角形相似，為同一組相鄰三角形。

令三個正 $n$ 邊形切出各區塊的重心之複數表示法分別為 $w_{11},w_{21},w_{31},w_{12},w_{22},w_{32},w_{13},w_{23},w_{33}$ ，

其構成的重心相連三角形之重心分別為 $G_1, G_2, G_3$ ，複數表示法分別為 $w_1, w_2, w_3$ ，

已知 $w_1 = \dfrac{w_{11} + w_{21} + w_{31}}{3}, w_2 = \dfrac{w_{12} + w_{22} + w_{32}}{3}, w_3 = \dfrac{w_{13} + w_{23} + w_{33}}{3}$ ，

則 $\Delta G_1 G_2 G_3$ 的重心 $G$ 之複數表示法為

$$\frac{w_1 + w_2 + w_3}{3} = \frac{(w_{11} + w_{12} + w_{13}) + (w_{21} + w_{22} + w_{23}) + (w_{31} + w_{32} + w_{33})}{9} ,$$

又由定理 4-2 可知

同一組的相鄰多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與 $\Delta A_0 B_0 C_0$ 的重心相同，

則 $\dfrac{w_{11} + w_{12} + w_{13}}{3} = \dfrac{z_1 + z_2}{3}$ ，即 $w_{11} + w_{12} + w_{13} = z_1 + z_2$ ，

同一組的相分多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與 $\Delta A_0 B_0 C_0$ 的重心亦相同，

則 $\dfrac{w_{21} + w_{22} + w_{23}}{3} = \dfrac{z_1 + z_2}{3}$ ，即 $w_{21} + w_{22} + w_{23} = z_1 + z_2$ ，

同理： $w_{31} + w_{32} + w_{33} = z_1 + z_2$ ，

故 $\dfrac{w_1 + w_2 + w_3}{3} = \dfrac{3z_1 + 3z_2}{9} = \dfrac{z_1 + z_2}{3}$ 。

故自任意三角形的三邊，同時向外（或向內）作正 $n$ 邊形，並選定一對應邊上固定比例所作的點，與此三邊上的頂點（或正 $n$ 邊形其他邊上的點）連接後，將每個正 $n$ 邊形都切成三塊，而連接三個區塊的重心相連三角形的重心，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。 ■

再討論連接內部一點切三塊：

> 定理 7-2：
>
> 自任意三角形的三邊，同時向外（或向內）作正 $n$ 邊形，並選定正 $n$ 邊形內部一對應點，與正 $n$ 邊形的任意三個頂點（或邊上的點）連接後，將每個正 $n$ 邊形都切成三塊，而連接三個區塊的重心相連三角形的重心，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。

證明：

不失一般性，在其中一個正 $n$ 邊形內部找一點 $P_1$ ，與正 $n$ 邊形的三個頂點連接，將此正 $n$ 邊形切成三個區塊。

分別以 $B_0, C_0$ 為中心，將 $C_0, A_0$ 伸縮 $\dfrac{\overline{A_0 P_1}}{\overline{A_0 B_0}}$ 倍，旋轉 $\angle P_1 A_0 B_0$ 角，得到點 $P_2, P_3$ ，並將 $P_2, P_3$ 連接對應的頂點，同定理 7-1 的證法可得，切割出之對應區塊均相似，則所形成的三個區塊一定

為「相鄰、相分、相離」、

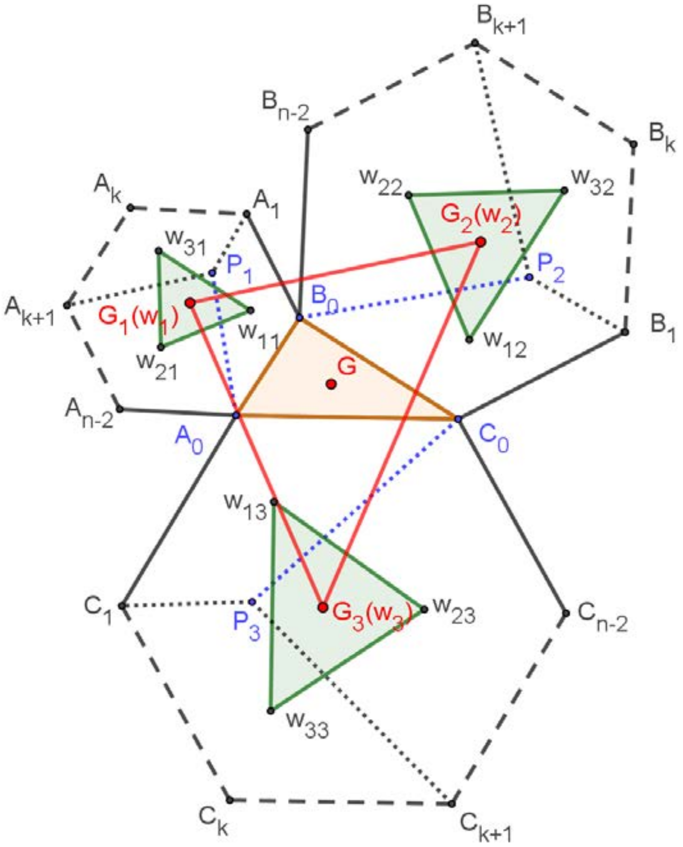
「相鄰、相分、相分」或

「相鄰、相離、相離」，

三種狀況中的其中一種。

以「相鄰、相分、相離」為例：

如圖，不失一般性，




令 $A_0,B_0,C_0,A_k,B_k,C_k$ 的複數表示法

為 $0,z_1,z_2,z_{1k},z_{2k},z_{0k}$，

則 $z_{1k}=z_1\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$，

$z_{2k}=(z_2-z_1)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_1$，

$z_{0k}=(0-z_2)\cdot t_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)+z_2$，

而 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心之複數表示法

為 $\dfrac{z_1+z_2}{3}$。

令三個正 $n$ 邊形切出各區塊的重心

之複數表示法分別為 $w_{11},w_{21},w_{31},w_{12},w_{22},w_{32},w_{13},w_{23},w_{33}$，其構成的重心相連三角形之重心分別為 $G_1,G_2,G_3$，複數表示法分別為 $w_1,w_2,w_3$，

已知 $w_1=\dfrac{w_{11}+w_{21}+w_{31}}{3},w_2=\dfrac{w_{12}+w_{22}+w_{32}}{3},w_3=\dfrac{w_{13}+w_{23}+w_{33}}{3}$，

則 $\Delta G_1G_2G_3$ 的重心 $G$ 之複數表示法為

$$\frac{w_1+w_2+w_3}{3}=\frac{(w_{11}+w_{12}+w_{13})+(w_{21}+w_{22}+w_{23})+(w_{31}+w_{32}+w_{33})}{9},$$

又由定理 4-2 可知

同一組的相鄰多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心相同，

則 $\dfrac{w_{11}+w_{12}+w_{13}}{3}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$，即 $w_{11}+w_{12}+w_{13}=z_1+z_2$，

同一組的相分多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心亦相同，

則 $\dfrac{w_{21}+w_{22}+w_{23}}{3}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$，即 $w_{21}+w_{22}+w_{23}=z_1+z_2$，

同一組的相分多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與 $\Delta A_0B_0C_0$ 的重心亦相同，

則 $\dfrac{w_{31}+w_{32}+w_{33}}{3}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$，即 $w_{31}+w_{32}+w_{33}=z_1+z_2$，

故 $\dfrac{w_1+w_2+w_3}{3}=\dfrac{3z_1+3z_2}{9}=\dfrac{z_1+z_2}{3}$。

其餘兩種狀況同理可證。

故自任意三角形的三邊，同時向外（或向內）作正 $n$ 邊形，並選定正 $n$ 邊形內部一對應點，與正 $n$ 邊形的任意三個頂點（或邊上的點）連接後，將每個正 $n$ 邊形都切成三塊，而連接三個區塊的重心相連三角形的重心，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。 ■

由定理 7-1 及定理 7-2 的證明過程，我們可以得知：自一個任意三角形的三邊向外（或向內）作正 $n$ 邊形，只要是利用相似形的切割方式，不論將正 $n$ 多邊形利用甚麼方式切割，重心相連後的圖形，其重心相連三角形之重心必與原三角形相同。

## 肆、 研究結果

我們將已有的結論整理如下：

一、對任意正整數 $n\ge 4$，連接 $n$ 邊形的一條對角線，將其切割為一個三角形跟一個 $(n-1)$ 邊形時，「$n$ 邊形重心到三角形重心與 $n$ 邊形重心到 $(n-1)$ 邊形重心之距離的比值」和「$(n-1)$ 邊形面積與三角形面積的比值」相等。

二、連接 $n$ 邊形相異邊上的任兩點（頂點亦可），將其切割為兩多邊形，則「$n$ 邊形重心到兩多邊形重心之距離比值」和「兩多邊形面積比值的倒數」相等。

三、作任意 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，令 $G_{n1}$ 為 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的重心。若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,G_{n1}$ 的複數表示法為 $z_1,z_2,\cdots,z_n,w_{n1}$，則對所有正整數 $n\ge 4$，此 $n$ 邊形重心的複數表示法為

$$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{n-2}-z_n}{3}+\frac{z_1+z_{n-1}+z_n}{3}\ 。$$

四、由同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

五、同一組的相鄰多邊形相似，且其重心相連三角形的重心與原三角形的重心相同，而相分、相離的狀況亦有相同結論。

六、作任意 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，令 $G_{n1}$ 為 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的重心，$G_{3i}$ 為 $\Delta A_1A_{i+1}A_{i+2}$ 的重心，其中 $i=1,2,\cdots,n-2$。若 $G_{n1},G_{3i}$ 的複數表示法為 $w_{n1},w_{3i}$，則對所有正整數 $n\ge 4$，此 $n$ 邊形重心的複數表示法為

$$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{31}+\frac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{32}+\cdots+\frac{S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{3,n-2}\ 。$$

七、連接同一組相接三角形邊上固定比例所作的點，所得到的三角形，其重心與原三角形的重心相同；而同一組相接三角形的重心相連三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。

八、不論是連接多邊形邊上的點或多邊形內部的點，用不同的切三塊方式，連接各區塊重心所得到的三角形，其重心相連三角形之重心與原三角形重心相同。

# 伍、討論與展望

一、遇到的問題與解決方法：

由於我們只學過三角形重心的求法，所以我們在探討 $n$ 邊形重心的時候，不確定是否為所有頂點相加除以 $n$ ，而在查詢多邊形重心的相關資料時，發現許多資料皆使用了多邊形均值點的定義，但參考了鄭元博 [3] 中提到多邊形重心與均值點不同的資料後，得知重心與均值點的差異。

但採用鄭元博 [3] 多邊形重心的畫法去作多邊形重心時，因為步驟繁瑣，所以我們去尋找 GGB 功能是否可直接畫出多邊形重心，其中有一個中心點功能，將它點在所有我們畫過的多邊形圖形中，確認中心點功能就是多邊形的重心，簡化了許多我們後面測試時的步驟。

而在研究的過程中，將多邊形切成兩塊區塊時，我們原本以為兩區塊的重心到原多邊形重心距離的比值，就是對角線被分段後的距離比值的倒數，但後來發現其實是兩區塊面積比值的倒數，而網路上的資料 [4] 也有提到，與槓桿原理有關，我們便從此著手，推出多邊形重心性質與找出多邊形重心的計算公式。

撰寫作品說明書的過程中，當我們再次查詢網路資料，發現誤解了某些網路資料所寫的重心公式 [7]，並不是所有作法都在算均值點。原本我們執著於用頂點計算多邊形重心，但將運算方式代換成保留三角形的重心表示後，我們得到了另一個多邊形重心的計算公式。

二、未來展望：

本文中皆以三角形的三邊延伸，研究新圖形與原三角形的重心之關聯，而在研究的過程中，我們曾測試以不同種類的四邊形作四邊延伸，並用類似文中的畫法，觀察到新圖形與原四邊形重心並不一定會相同，但礙於時間因素，尚未完成這部分的研究，因此我們之後想探討須具備怎樣條件的多邊形，才會使兩者重心相同？而重心相連的圖形與原圖形又有沒有甚麼特別關係呢？而多面體的狀況又是如何呢？另外，我們排除了形狀破壞的多邊形狀況，之後也可以再進一步研究形狀破壞的多邊形情形。

# 陸、 參考資料

1. 呂昱賢(2020)。「當拿破崙形不『正』作不『直』時」。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會參展作品專輯。取自 https://www.ntsec.edu.tw/Att.ashx?id=12666
2. 王哲麒、翁士傑(1991)。尋找多邊形重心。中華民國第 31 屆中小學科學展覽會參展作品專輯。取自 https://www.ntsec.edu.tw/Att.ashx?id=3758
3. 鄭元博(2003)。滿足 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$ 之 $M$ 點是否為重心之探討。臺灣 2003 年國際科學博覽會參展作品專輯。
   取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/International2003/pdf/010001.pdf
4. 林冠柏、顏嘉誼、原凱文(2004)。凹凸有致---多邊形的重心。中華民國第 44 屆中小學科學展覽會參展作品專輯。取自 https://www.ntsec.edu.tw/Att.ashx?id=810
5. 黃家禮(1997)。梅內勞斯定理；三角形的五心。幾何明珠。39-51；108-118。臺北市：九章。
6. 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明(2021)。複數的極式與幾何意義。普通型高級中等學校選修數學甲下冊。105-111。翰林。
7. 多邊形的重心。演算法筆記。取自 https://web.ntnu.edu.tw/~algo/Polygon.html。

## 【評語】050407

本件作品主要研究在於利用複數向量與三角形重心公式，找出多邊形的重心及其性質，並延伸出各類型與多邊形重心有關的結果。這篇文章具有趣味性，編排與敘述皆完整。但是就數學來說，透過不斷切割三角形的方式去求得重心的方法，其實很常見。建議作者可以考慮採用重心坐標系，在處理重心問題時，可能可以帶來一些便利性。

# 作品簡報

# 找「重」點

組 別：高級中等學校組

科 別：數學科

# 摘要

此研究利用複數、向量及三角形的重心公式，去找出多邊形的重心性質與計算公式，並探討以任意三角形三邊作出之各種相似多邊形，連接對應頂點或重心後，所構成之三角形的重心與原三角形重心的關係；再討論以此任意三角形三邊作出之正$n$邊形，找出以任意三角形三邊作出之正$n$邊形，連接相近的頂點（異於原三角形）與兩正$n$邊形的邊構成之三角形，其邊上依固定比例作出的點相連後三角形的重心以及其重心相連三角形之重心，兩者與原三角形重心的關係；最後再用不同的切三塊方式探討三角形重心的關係。

# 研究目的

(一) 找出任意多邊形重心的性質。

(二) 找出任意多邊形重心的計算公式。

(三) 找出以任意三角形三邊作出之各種相似多邊形，連接對應頂點、重心所構成之三角形的重心與原三角形重心的關係。

(四) 找出以任意三角形三邊作出之正$n$邊形，連接相近的頂點（異於原三角形）與兩正$n$邊形的邊構成之三角形，其邊上依固定比例作出的點相連後三角形的重心以及其重心相連三角形之重心，兩者與原三角形重心的關係。

(五) 找出以任意三角形三邊作出之正$n$邊形，切三塊後，連接各區塊重心所得的三角形，其重心相連三角形之重心與原三角形重心的關係。

# 研究動機

上專題課時，老師讓我們自行閱讀歷屆科展的參賽作品，尋找有興趣的主題，並從中尋找靈感。當閱讀到第60屆中小學科學展覽會的「當拿破崙形不『正』作不『直』時」[1] 這篇作品時，我們對他們研究的議題產生了興趣，因此決定了研究的方向。我們先從任意三角形延伸出的正多邊形開始研究，嘗試以不同的連接方式，試著作出新多邊形的重心，觀察其與原三角形重心的關係，發現似乎有一些一致的結果，決定深入研究。

# 文獻回顧

| 作者 | 摘要 |
| --- | --- |
| 呂昱賢 | 從正三角形、直角三角形到任意三角形，將其三邊向外或向內作相似三角形，其重心連線得到的三角形重心與原三角形相同。 |
| 王哲麒、翁士傑 | 尋找多邊形重心的方式 |
| 鄭元博 | (1)尋找多邊形重心的方式　(2)多邊形的均值點與重心不同 |
| 林冠柏、顏嘉誼、原凱文 | 利用面積交換找出面積平分處及利用槓桿原理來找重心。 |

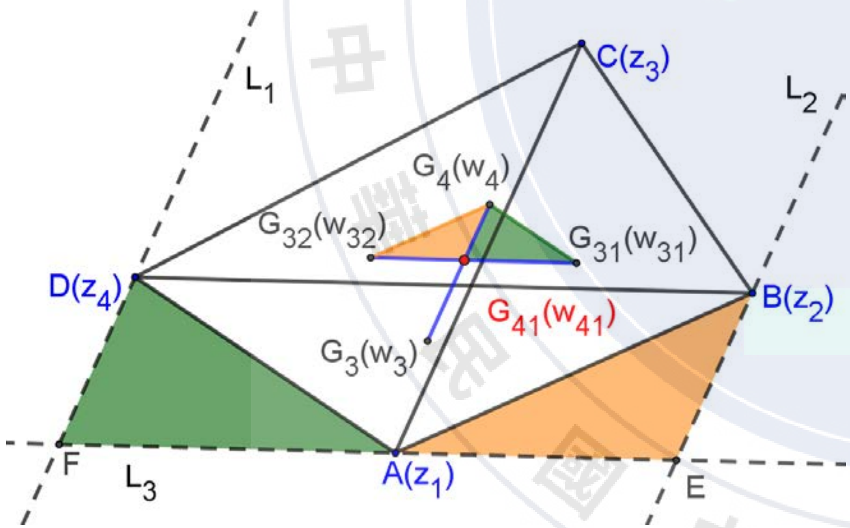
◎本作品沿用「幾何明珠」[5]內的符號使用，以$S_{\Delta ABC}$表示$\Delta ABC$的面積；

自己定義：以$G_{ki}$表示將$n$邊形自頂點 $A_1$ 向 $A_3,\cdots,A_{n-1}$ 開始連接對角線所切割出的第 $i$ 個 $k$ 邊形的重心。

# 四邊形及五邊形重心的性質

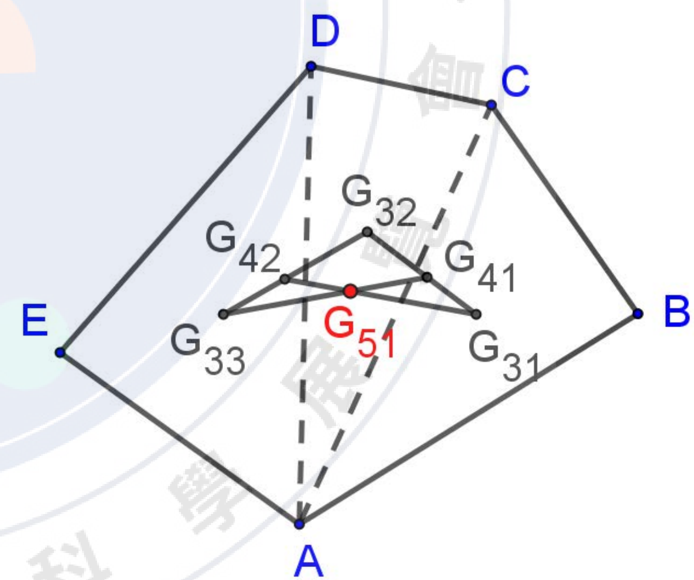
## 引理1-1

連接四邊形的對角線，將其切割為兩個三角形時，「四邊形的重心到兩三角形重心之距離比值」和「兩三角形面積比值的倒數」相等。




## 引理1-2

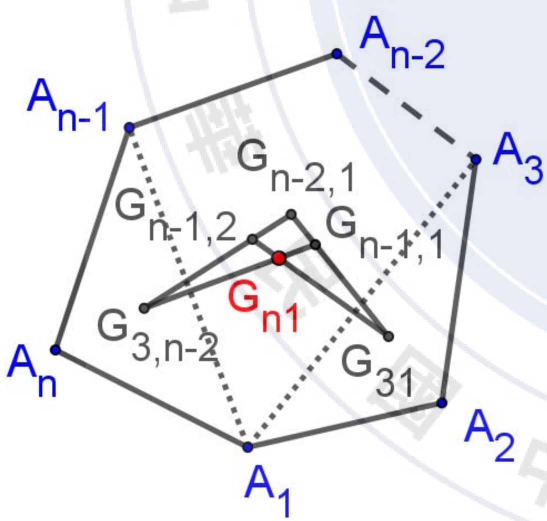
連接五邊形的對角線，將其切割為一個三角形跟一個四邊形時，「五邊形重心到三角形重心與五邊形重心到四邊形重心之距離的比值」和「四邊形面積與三角形面積的比值」相等。



# 多邊形重心的性質

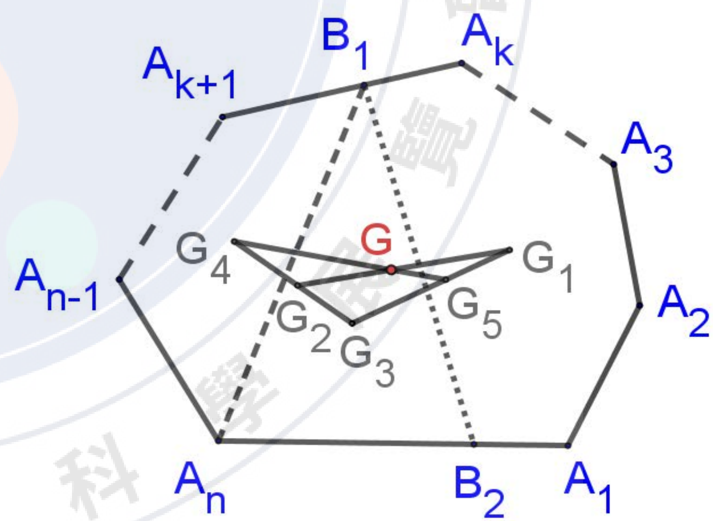
## 定理1

對任意正整數$n \geq 4$，連接對角線，將其切割為一個三角形跟一個$(n-1)$邊形時，「$n$邊形重心到三角形重心與$n$邊形重心到$(n-1)$邊形重心之距離的比值」和「$(n-1)$邊形面積與三角形面積的比值」相等。




## 定理2

連接$n$邊形相異邊上的任兩點（頂點亦可），將其切割為兩多邊形，則「$n$邊形重心到兩多邊形重心之距離比值」和「兩多邊形面積比值的倒數」相等。

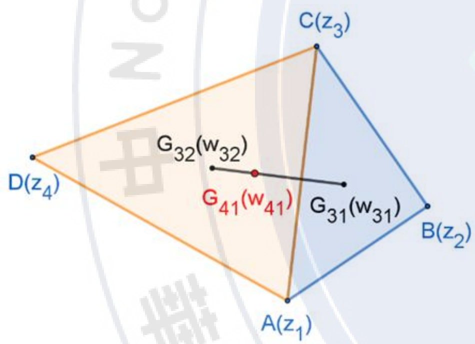


# 多邊形的重心公式 1

## 引理3-1

作任意四邊形 $ABCD$，令 $G_{41}$ 為四邊形 $ABCD$ 的重心。若 $A,B,C,D,G_{41}$ 的複數表示法為 $z_1,z_2,z_3,z_4,w_{41}$，則此四邊形重心的複數表示法為

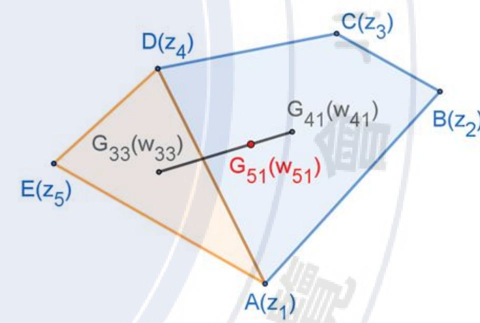
$$w_{41}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCD}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{z_1+z_3+z_4}{3}\text{。}$$




## 引理3-2

作任意五邊形 $ABCDE$，令 $G_{51}$ 為五邊形 $ABCDE$ 的重心。若 $A,B,C,D,E,G_{51}$ 的複數表示法為 $z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,w_{51}$，則此五邊形重心的複數表示法為

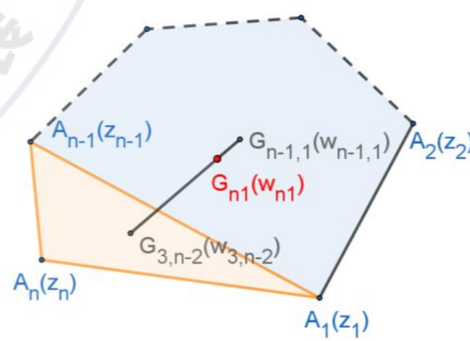
$$w_{51}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCDE}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCDE}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\frac{z_1+z_4+z_5}{3}\text{。}$$




## 定理3

作任意 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，令 $G_{n1}$ 為其重心。若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,G_{n1}$ 的複數表示法為 $z_1,z_2,\cdots,z_n,w_{n1}$，則對所有正整數 $n\geq 4$，此 $n$ 邊形重心的複數表示法為

$$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_2-z_4}{3}+\frac{S_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_3-z_5}{3}+\cdots+\frac{S_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}\cdot\frac{z_{n-2}-z_n}{3}+\frac{z_1+z_{n-1}+z_n}{3}\text{。}$$

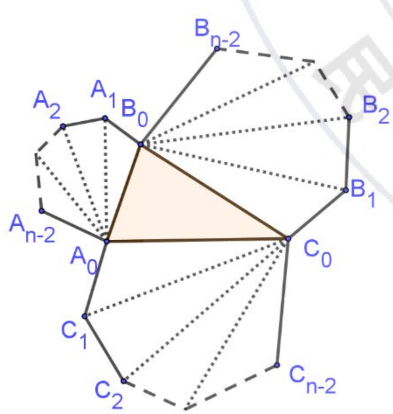


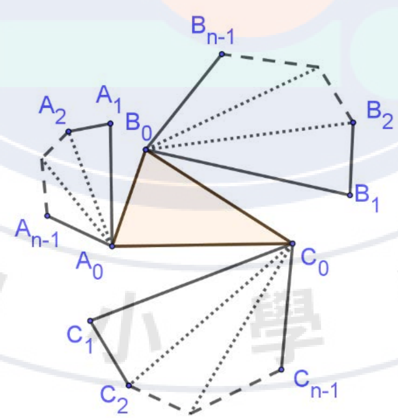
# 同一組相鄰、相分、相離的定義

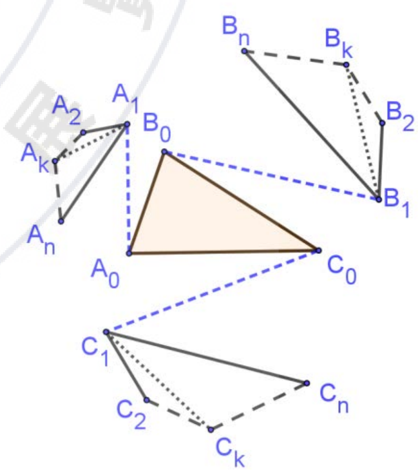
(1) 選取「$\overline{A_0B_0}, \overline{B_0C_0}, \overline{C_0A_0}$」及「分別以$A_0, B_0, C_0$為中心，將$B_0, C_0, A_0$各自伸縮旋轉後的另$(n-2)$個點」，分別連接，得$n$邊形$A_0B_0A_1A_2\cdots A_{n-2}$, $B_0C_0B_1B_2\cdots B_{n-2}$, $C_0A_0C_1C_2\cdots C_{n-2}$，由於此類$n$邊形與原三角形共用一邊，將此三個$n$邊形稱為「同一組的相鄰$n$邊形」。

(2)選取「$A_0, B_0, C_0$」及「分別以$A_0, B_0, C_0$為中心，將$B_0, C_0, A_0$各自伸縮旋轉後的另$(n-1)$個點」分別連接，得$n$邊形$A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}, B_0B_1B_2\cdots B_{n-1}$, $C_0C_1C_2\cdots C_{n-1}$，由於此類$n$邊形與原三角形共用一點，將此三個$n$邊形稱為「同一組的相分$n$邊形」。

(3)分別以$A_0, B_0, C_0$為中心，將$B_0, C_0, A_0$各自伸縮旋轉後的另$n$個點分別連接，得$n$邊形$A_1A_2\cdots A_n, B_1B_2\cdots B_n, C_1C_2\cdots C_n$由於此類$n$邊形不直接使用原三角形的邊及頂點，將此三個$n$邊形稱為「同一組的相離$n$邊形」。



# 同一組相鄰、相分、相離的性質

## 引理4-1

(1)同一組的相鄰三角形相似。 (2)同一組的相分三角形相似。 (3)同一組的相離三角形相似。

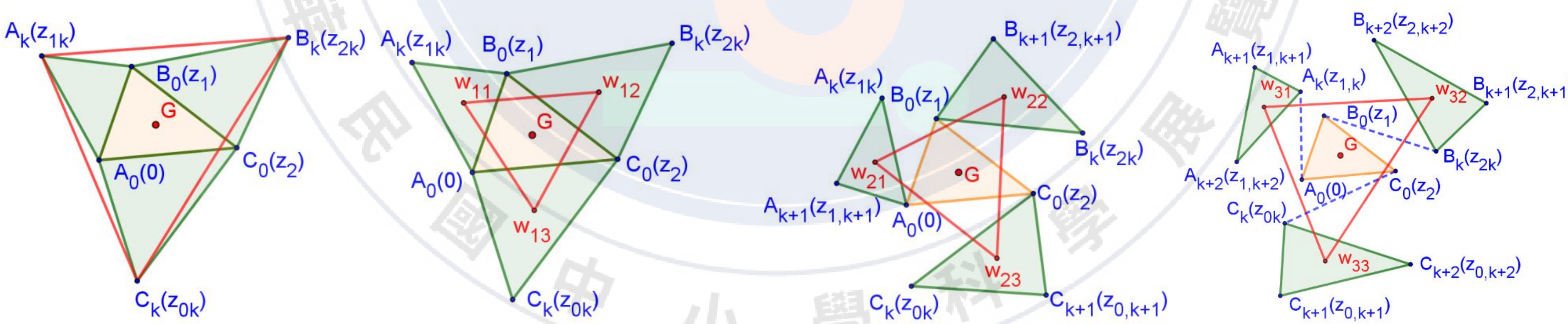
## 引理4-2

(1)由同一組相鄰三角形所作出的頂點相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(2)由同一組相鄰三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(3)由同一組相分三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(4)由同一組相離三角形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。



# 同一組相鄰、相分、相離的性質

**定理4-1**

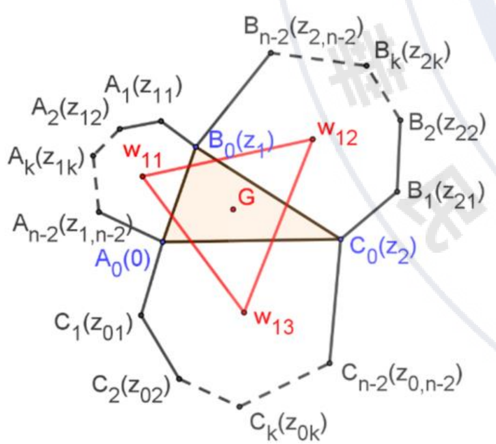
(1)同一組的相鄰多邊形相似。 (2)同一組的相分多邊形相似。 (3)同一組的相離多邊形相似。

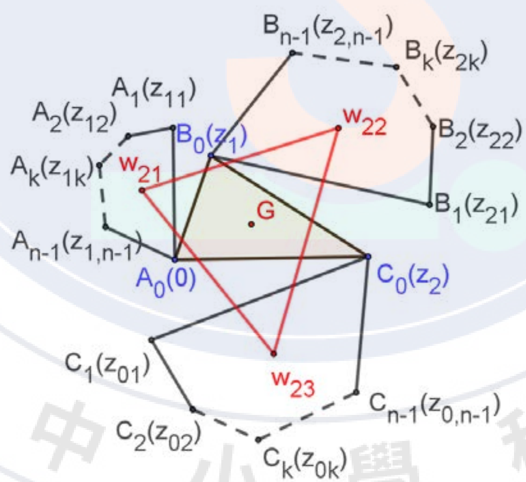
**定理4-2**

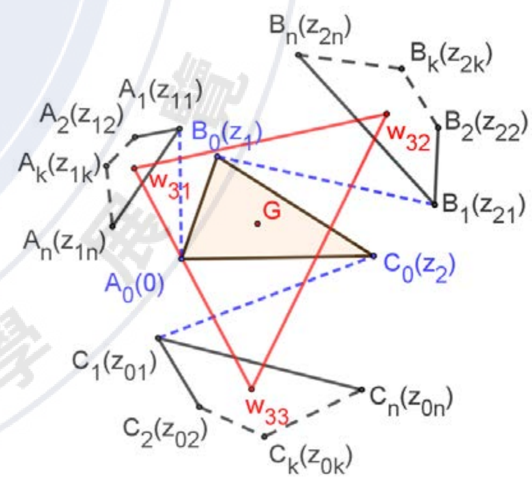
(1)由同一組相鄰多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(2)由同一組相分多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。

(3)由同一組相離多邊形所作出的重心相連三角形，其重心與原三角形的重心相同。



# 多邊形重心公式 2 及其應用

**定理5**

作任意$n$邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$，

令$G_{n1}$為$n$邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的重心，

$G_{3i}$為$\Delta A_1A_{i+1}A_{i+2}$的重心，

其中$i=1,2,\cdots,n-2$。

若$G_{n1},G_{3i}$的複數表示法為$w_{n1},w_{3i}$，

則對所有正整數$n\geq 4$，

此$n$邊形重心的複數表示法為

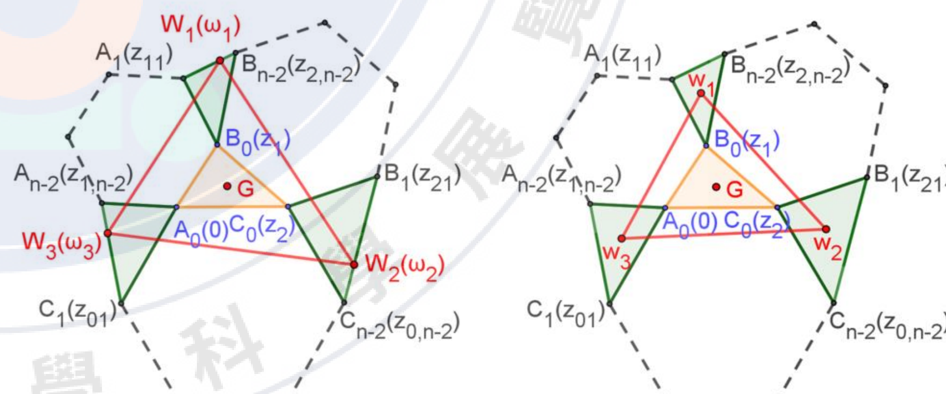
$$w_{n1}=\frac{S_{\Delta A_1A_2A_3}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{31}+\frac{S_{\Delta A_1A_3A_4}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{32}+\cdots+\frac{S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}}{S_{A_1A_2\cdots A_n}}w_{3,n-2}。$$

**定理6**

自任意三角形的邊同時向外（或向內）作正$n$邊形，並連接相近的頂點（異於原三角形）及原三角形的頂點，我們稱其為「同一組的相接三角形」。

(1)連接同一組相接三角形邊上固定比例所作的點，得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。

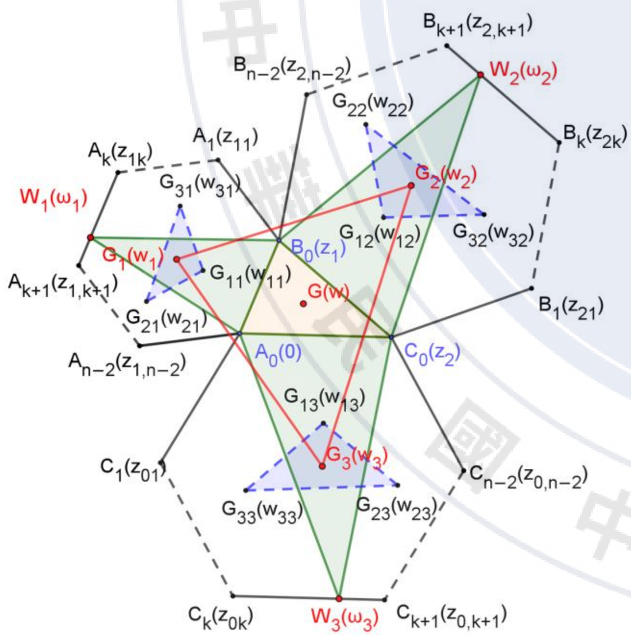
(2)同一組相接三角形的重心相連三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。



# 應用-切三塊

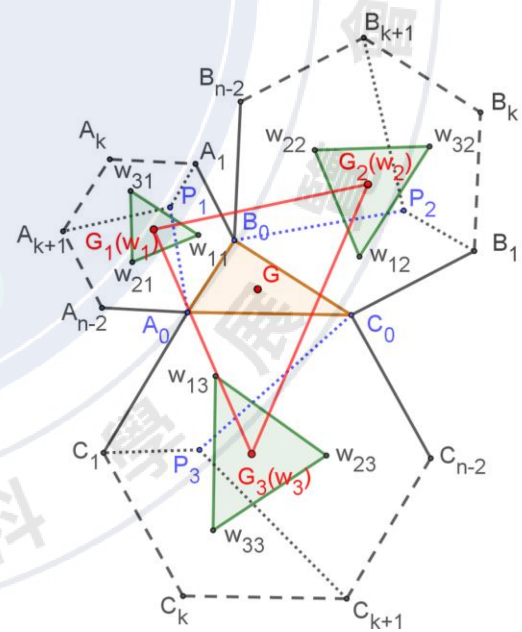
## 定理7-1

自任意三角形的三邊，同時向外（或向內）作正$n$邊形，並選定一對應邊上固定比例所作的點，與此三邊上的頂點（或正$n$邊形其他邊上的點）連接後，將每個正$n$邊形都切成三塊，而連接三個區塊的重心相連三角形的重心，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。




## 定理7-2

自任意三角形的三邊，同時向外（或向內）作正$n$邊形，並選定正$n$邊形內部一對應點，與正$n$邊形的任意三個頂點（或邊上的點）連接後，將每個正$n$邊形都切成三塊，而連接三個區塊的重心相連三角形的重心，所得到的三角形，其重心亦與原三角形的重心相同。



# 未來展望

本文中皆以三角形的三邊延伸，研究新圖形與原三角形的重心之關聯，而在研究的過程中，我們曾測試以不同種類的四邊形作四邊延伸，並用類似文中的畫法，觀察到新圖形與原四邊形重心並不一定會相同，但礙於時間因素，尚未完成這部分的研究，因此我們之後想探討須具備怎樣條件的多邊形，才會使重心相同？而重心相連的圖形與原圖形又有沒有甚麼特別關係呢？而多面體的狀況又是如何呢？另外，我們排除了形狀破壞的多邊形狀況，之後也可以再進一步研究形狀破壞的多邊形情形。

# 參考文獻


1.呂昱賢(2020)。「當拿破崙形不『正』作不『直』時」。中華民國第 60屆中小學科學展覽會參展作品專輯。

2.王哲麒、翁士傑（1991）。尋找多邊形重心。中華民國第 31屆中小學科學展覽會參展作品專輯。

3.鄭元博(2003)。滿足 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$ 之 $M$ 點是否為重心之探討。臺灣2003年國際科學博覽會參展作品專輯

4.林冠柏、顏嘉誼、原凱文(2004)。凹凸有致---多邊形的重心。中華民國第 44屆中小學科學展覽會參展作品專輯。

5.黃家禮(1997)。梅內勞斯定理；三角形的五心。幾何明珠。39-51；108-118。臺北市：九章。

6.游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明（2021）。複數的極式與幾何意義。普通型高級中等學校選修數學甲下冊。105-111。翰林。

7.多邊形的重心。演算法筆記。取自https://web.ntnu.edu.tw/~algo/Polygon.html。