中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050406

「轉」瞬即「式」—路徑轉彎數與同字不相鄰一般式探討

學校名稱：臺中市立文華高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 祝心緯	林煜家
高二 林垣邑	張仲凱
高二 孫庭翊	

關鍵詞：路徑轉彎數、同字不相鄰、期望值

摘要

本文旨在探討不同轉彎下，其路徑方法數的問題。在方格紙及長方體中，移動路徑方法數的一般式及期望值。從二維的路徑方法數一般式研究，延伸到三維的路徑方法數一般式，再分別探討二維、三維下路徑方法數的期望值及其關聯性，接著跳脫維度的概念，探討期望值間的關聯性。最後研究同字不相鄰的一般式。

壹、研究動機

在TRML2021思考賽第一題組：「從$n\times n$的方格紙的左下角頂點，沿著格線以最短路徑方式走到右上角頂點。我們以$N(n\times n,k)$表示在行進路徑中下轉彎k次的方法數。

1.試求當k為偶數時，$N(n\times n,k)$的一般式(以n與k表示)，並請說明理由。

2.試求當k為奇數時，$N(n\times n,k)$的一般式(以n與k表示)，並請說明理由。」

從此題目，我們開始好奇若將$n\times n$的方格紙改為$m\times n$的方格紙或是拓展到$n\times n\times n$的立方體，會有什麼發現。

貳、研究目的

一、分別在$n\times n$及$m\times n$的方格紙，$N(n\times n,k)$與$N(m\times n,k)$的一般式。

二、在$n\times n\times n$的立方體，$N(n\times n\times n,k)$的一般式。

三、在$n\times n\times n\times n$時，$N(n\times n\times n\times n,k)$的一般式。

四、分別在$n\times n$及$m\times n$的方格紙，$E(n\times n)$與$E(m\times n)$的一般式。

五、在$m\times n\times l$的長方體，$E(m\times n\times l)$的一般式。

六、在維度為n時，$E(a_1\times a_2\times a_3\times ...\times a_n)$的一般式。

七、a個A$(1\le a\le 5)$、b個B、c個C同字不相鄰排列數一般式。

參、研究設備及器材

紙、筆、Word、Excel、C++、MathType、SketchUp、GeoGebra、Desmos。

肆、符號定義

一、$N(a\times b,d)$ 表示：在長為 a 、寬為 b 的方格紙中，轉彎數為 d 時的路徑方法數。

二、$N(a\times b\times c,e)$ 表示：在長為 a 、寬為 b 、高為 c 的長方體中，轉彎數為 e 時的路徑方法數。

三、$E(a\times b)$ 表示：在長為 a 、寬為 b 的方格紙中，路徑轉彎數的期望值。

四、$E(a\times b\times c)$ 表示：在長為 a 、寬為 b 、高為 c 的長方體中，路徑轉彎數的期望值。

五、本文中，選擇每個捷徑走法的機會均等。

六、m,n,l 分別表示：方格紙或長方體邊長，$m+n+l$ 為路徑長度。

七、k 表示：轉彎次數。

伍、研究過程及方法

一、在 $n\times n$ 的方格紙中，$N(n\times n,k)$ 的一般式：

TRML2021 思考賽第一題組：

「從一個 $n\times n$ 的方格紙的左下角頂點，沿著格線以最短路徑方式走到右上角頂點。我們以 $N(n\times n,k)$ 表示在行進路徑中恰轉彎了 k 次的方法數。

例如：當 $n=2$ ，$k=1$ 時，$N(2\times 2,1)=2$ ，如圖 1；當 $n=2$ ，$k=2$ 時，$N(2\times 2,2)=2$ ，如圖 2；當 $n=2$ ，$k=3$ 時，$N(2\times 2,3)=2$ ，如圖 3；各情況如下圖所示。

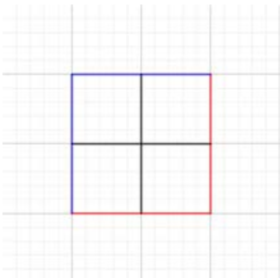


圖 1

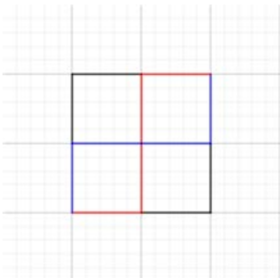


圖 2

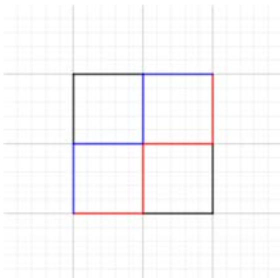


圖 3

問題一、對所有可能的 k ，試求 $N(3\times 3,k)$ 之值。(依 $k=1,2,...$ 列表顯示答案)

問題二、對所有可能的 k ，試求 $N(4\times 4,k)$ 之值。(依 $k=1,2,...$ 列表顯示答案)

問題三、試求 $N(5\times 5,2)$ 與 $N(5\times 5,3)$ 之值。

問題四、試求 $N(10\times 10,5)$ 與 $N(10\times 10,6)$ 之值。

問題五、試求當 k 為偶數時，$N(n\times n,k)$ 的一般式(以 n 與 k 表示)，並請說明理由。

問題六、試求當 k 為奇數時，$N(n\times n,k)$ 的一般式(以 n 與 k 表示)，並請說明理由。」

從 TRML2021 思考賽中，我們決定利用不盡相異物排列及排列組合來計算。

以下我們分別為問題一至問題六提供解題過程：

(一)問題一的解題過程：

假設$n\times n$的方格紙在坐標上A為X軸方向的一單位長路徑，B為Y軸方向的一單位長路徑，假設轉彎次數為k，且$1\le k\le 2n-1, k\in\mathbb{N}$。而一個$n\times n$的方格紙的路徑即可利用A及B來表示，圖4為在$3\times 3$路徑為AABABB時的路徑圖，且AB和BA均視為一個轉彎，此時$k=3$。

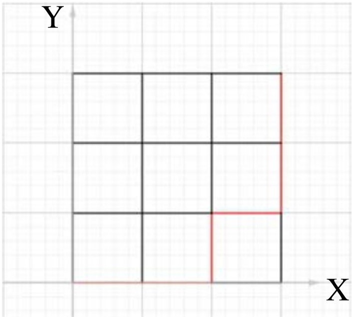


圖4

若一路徑為ABABBA，因為兩個相鄰的A、B分別互換後皆為同一條路徑，我們可以把它簡化成ABABA。當$k=1$時，只會有一個轉彎，因此只有一組A、B相鄰，可表示為AB或BA。還原為原本的路徑時，要將省略的A、B放回去，同時為了不增加轉彎數，A一定要與A相鄰，且B一定要與B相鄰。

因此，當$k=1$時：(型如AB或BA)

$$N(3\times3,1)=(\text{兩個A排入一個位置})\times(\text{兩個B排入一個位置})\times(\text{A,B互換})$$

$$=H_2^1\times H_2^1\times2=C_0^2\times C_0^2\times2=2\text{。}$$

當$k=2$時：(型如ABA或BAB)

$$N(3\times3,2)=(\text{一個A排入兩個位置})\times(\text{兩個B排入一個位置})\times(\text{A,B互換})$$

$$=H_1^2\times H_2^1\times2=C_1^2\times C_0^2\times2=4\text{。}$$

當$k=3$時：(型如ABAB或BABA)

$$N(3\times3,3)=(\text{一個A排入兩個位置})\times(\text{一個B排入兩個位置})\times(\text{A,B互換})$$

$$=H_1^2\times H_1^2\times2=C_1^2\times C_1^2\times2=8\text{。}$$

依照同樣方法，我們可以求出：

$$N(3\times3,4)=H_0^3\times H_1^2\times2=C_2^2\times C_1^2\times2=4\text{，}$$

$$N(3\times3,5)=H_0^3\times H_0^3\times2=C_2^2\times C_2^2\times2=2\text{。}$$

(二)問題二的解題過程：(使用與第一題相同的方法)

$$N(4\times4,1)=\left(三個\text{A}排入一個位置\right)\times\left(三個\text{B}排入一個位置\right)\times\left(\text{A,B}互換\right)$$

$$=H_3^1\times H_3^1\times2=C_0^3\times C_0^3\times2=2$$ 。

依照同樣方法，我們可以求出：

$$N(4\times4,2)=H_2^2\times H_3^1\times2=C_1^3\times C_0^3\times2=6$$ ，

$$N(4\times4,3)=H_2^2\times H_2^2\times2=C_1^3\times C_1^3\times2=18$$ ，

$$N(4\times4,4)=H_1^3\times H_2^2\times2=C_2^3\times C_1^3\times2=18$$ ，

$$N(4\times4,5)=H_1^3\times H_1^3\times2=C_2^3\times C_2^3\times2=18$$ ，

$$N(4\times4,6)=H_0^4\times H_1^3\times2=C_3^3\times C_2^3\times2=6$$ ，

$$N(4\times4,7)=H_0^4\times H_0^4\times2=C_3^3\times C_3^3\times2=2$$ 。

(三)問題三的解題過程：

$$N(5\times5,2)=\left(三個\text{A}排入兩個位置\right)\times\left(四個\text{B}排入一個位置\right)\times\left(\text{A,B}互換\right)$$

$$=H_3^2\times H_4^1\times2=C_1^4\times C_0^4\times2=8$$ 。

$$N(5\times5,3)=\left(三個\text{A}排入兩個位置\right)\times\left(三個\text{B}排入兩個位置\right)\times\left(\text{A,B}互換\right)$$

$$=H_3^2\times H_3^2\times2=C_1^4\times C_1^4\times2=32$$ 。

(四)問題四的解題過程：

$$N(10\times10,5)=\left(七個\text{A}排入三個位置\right)\times\left(七個\text{B}排入三個位置\right)\times\left(\text{A,B}互換\right)$$

$$=H_7^3\times H_7^3\times2=C_2^9\times C_2^9\times2=2592$$ 。

$$N(10\times10,6)=\left(六個\text{A}排入四個位置\right)\times\left(七個\text{B}排入三個位置\right)\times\left(\text{A,B}互換\right)$$

$$=H_6^4\times H_7^3\times2=C_3^9\times C_2^9\times2=6048$$ 。

(五)問題五的解題過程：

若k為偶數，則先將$\frac{k}{2}$個A與$\frac{k}{2}+1$個B或是$\frac{k}{2}+1$個A與$\frac{k}{2}$個B交錯排列，如圖5，再將$n-\frac{k}{2}$個A與$n-\frac{k}{2}-1$個B或是$n-\frac{k}{2}-1$個A與$n-\frac{k}{2}$個B排入其中，為使轉彎數不變，A只能放在另一個A旁邊，B只能放另一個B旁邊。

此排列方法數為$\left(H^{\frac{k}{2}}_{n-\frac{k}{2}}\right)\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)+\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)\left(H^{\frac{k}{2}}_{n-\frac{k}{2}}\right)$

$$=2\left(H^{\frac{k}{2}}_{n-\frac{k}{2}}\right)\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)=2\left(C^{n-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}-1}_{n-\frac{k}{2}}\right)\left(C^{n-\frac{k}{2}-1+\frac{k}{2}+1-1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)=2\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}-1}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}}\right)\text{。}$$

$$\overbrace{\text{BABABAB...AB}}^{共\frac{k}{2}個A及\frac{k}{2}+1個B}\ 或\ \overbrace{\text{ABABABA...BA}}^{共\frac{k}{2}+1個A及\frac{k}{2}個B}$$

圖5

(六)問題六的解題過程：

若k為奇數，則先將$\frac{k+1}{2}$個A與$\frac{k+1}{2}$個B交錯排列，如圖 6，再將$n-\frac{k+1}{2}$個A與$n-\frac{k+1}{2}$個B插入其中，為使轉彎數不變，A只能放在另一個A旁邊，B只能放在另一個B旁邊。

此排列方法數為$2\left(H^{\frac{k+1}{2}}_{n-\frac{k+1}{2}}\right)^2=2\left(C^{n-\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{2}-1}_{n-\frac{k+1}{2}}\right)^2=2\left(C^{n-1}_{\frac{k-1}{2}}\right)^2$。

$$\overbrace{\text{ABABABA...AB}}^{共\frac{k+1}{2}個A及\frac{k+1}{2}個B}\ 或\ \overbrace{\text{BABABAB...BA}}^{共\frac{k+1}{2}個A及\frac{k+1}{2}個B}$$

圖6

(七)若將問題五及問題六的公式以高斯符號合併，可得出公式：

$N(n\times n,k)=2\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$。

二、在$m\times n$的方格紙中，$N(m\times n,k)$的一般式：

(一)假設$m\times n$的方格紙在坐標上 A 為 X 軸方向的一單位長路徑，B 為 Y 軸方向的一單位長路徑，假設轉彎次數為k，且$1\le k\le 2n-1,\ k\in\mathbb{N},\ n\le m$。而一個$m\times n$的方格紙的路徑即可利用 A 及 B 來表示路徑，圖 7 為在4×3路徑為 AABABBA 時的路徑圖，且 AB 和 BA 均視為一個轉彎，此時$k=4$。

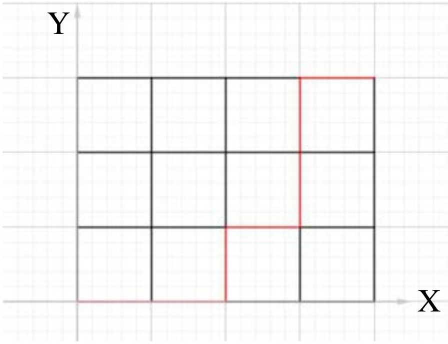


圖 7

(二)將轉彎數k分為「k為奇數」與「k為偶數」討論路徑方法數。

1.若k為奇數，先將$\frac{k+1}{2}$個 A 與$\frac{k+1}{2}$個 B 交錯排列，再將$m-\frac{k+1}{2}$個 A 與$n-\frac{k+1}{2}$個 B 插入其中，為使轉彎數不變，A 與 B 均只能放在另一個 A 與 B 旁邊。

排列方法數為$2\left(H^{\frac{k+1}{2}}_{m-\frac{k+1}{2}}\right)\left(H^{\frac{k+1}{2}}_{n-\frac{k+1}{2}}\right)=2\left(C^{m-\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{2}-1}_{m-\frac{k+1}{2}}\right)\left(C^{n-\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{2}-1}_{n-\frac{k+1}{2}}\right)=2\left(C^{m-1}_{\frac{k-1}{2}}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k-1}{2}}\right)$。

2.若k為偶數，因為可先走 X 軸方向或先走 Y 軸方向，因此需分成兩種情況討論。

(1)若先走 X 軸方向，則將$\frac{k}{2}+1$個 A 與$\frac{k}{2}$個 B 交錯排列，再將$m-\frac{k}{2}-1$個 A 與$n-\frac{k}{2}$個 B 排入其中，為使轉彎數不變，A 與 B 均只能放在另一個 A 與 B 旁邊。

排列方法數為$\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{m-\frac{k}{2}-1}\right)\left(H^{\frac{k}{2}}_{n-\frac{k}{2}}\right)=\left(C^{m-\frac{k}{2}-1+\frac{k}{2}+1-1}_{m-\frac{k}{2}-1}\right)\left(C^{n-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}-1}_{n-\frac{k}{2}}\right)=\left(C^{m-1}_{\frac{k}{2}}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}-1}\right)$。

(2)若先走 Y 軸方向，則將$\frac{k}{2}$個 A 與$\frac{k}{2}+1$個 B 作交錯排列，再將$m-\frac{k}{2}$個 A 與$n-\frac{k}{2}-1$個 B 排入其中，為使轉彎數不變，A 與 B 均只能放在另一個 A 與 B 旁邊。

排列方法數為$\left(H^{\frac{k}{2}}_{m-\frac{k}{2}}\right)\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)=\left(C^{m-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}-1}_{m-\frac{k}{2}}\right)\left(C^{n-\frac{k}{2}-1+\frac{k}{2}+1-1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)=\left(C^{m-1}_{\frac{k}{2}-1}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}}\right)$。

(三)將「k 為奇數」與「k 為偶數」合併：

1.當 k 為奇數時，轉彎方法數 $N(m\times n,k)=2\cdot C^{m-1}_{\frac{k-1}{2}}\cdot C^{n-1}_{\frac{k-1}{2}}$。

2.當 k 為偶數且先走 X 軸時，轉彎方法數 $N(m\times n,k)=C^{m-1}_{\frac{k}{2}}\cdot C^{n-1}_{\frac{k}{2}-1}$。

3.當 k 為偶數且先走 Y 軸時，轉彎方法數 $N(m\times n,k)=C^{m-1}_{\frac{k}{2}-1}\cdot C^{n-1}_{\frac{k}{2}}$。

4.將以上三種情況合併得轉彎方法數 $N(m\times n,k)=C^{m-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}+C^{m-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$。

三、在 $n\times n\times n$ 的立方體情況下，$N(n\times n\times n,k)$ 的一般式：

(一)假設 $n\times n\times n$ 的立方體在坐標上 A 為 X 軸方向的一單位長路徑，B 為 Y 軸方向的一單位長路徑，C 為 Z 軸方向的一單位長路徑，假設轉彎次數為 k，且 $2\le k\le 3n-1$, $k\in\mathbb{N}$。而一個 $n\times n\times n$ 的立方體的路徑即可利用 ABC 來代表路徑，圖 8 為在 $4\times4\times4$ 路徑為 AACABCACBBCB 時的路徑圖，且 AB,BA,BC,CB,CA,AC 均視為一個轉彎，此時 $k=9$。

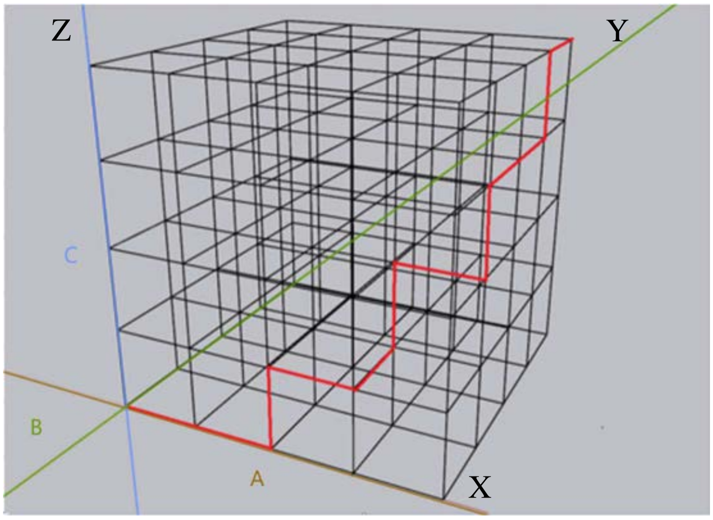


圖 8

(二)若一 $3\times3\times3$ 路徑為 ABCCCABBA，因為兩個相鄰的 A、B、C 分別互換後皆為同一條路徑，所以我們可以把它簡化成 ABCABA。我們即可運算3個 A、2 個 B、1個 C 時，ABC 同字不相鄰所有可能性次數。但在此情況下 ABCCCABBA 與 ABBCCC ABA 均會以 ABCABA 表示，所以在 $3\times3\times3$ 的情況下 ABCABA 可以表示2種情況。因此我們可以假設在 $n\times n\times n$ 的立方體中 A 方向分成 x 個片段、B 方向分成 y 個片段、C 方向分成 z 個片段，以上述方法排列後，每種排列方式的狀況數為

$H^{x}_{n-x}\times H^{y}_{n-y}\times H^{z}_{n-z}=C^{n-1}_{n-x}\times C^{n-1}_{n-y}\times C^{n-1}_{n-z}$。

(三)將同字不相鄰排列方法數之值設為I，根據(二)的計算方式，可以列出以下一般式：

$I\times C_{n-x}^{n-1}\times C_{n-y}^{n-1}\times C_{n-z}^{n-1}\times q$，$q$為$xyzw\ldots$不盡相異物排列數。統計方式為列出簡化後的所有可能性，且$z\le y\le x$。利用C++程式語言運算各情況的同字不相鄰排列方法數，並乘上$C_{n-x}^{n-1}\times C_{n-y}^{n-1}\times C_{n-z}^{n-1}\times q$。

例如：在$3\times3\times3$的路徑轉彎數為5時，x,y,z分別可能是$3,2,1$或$2,2,2$，$I\times C_{n-x}^{n-1}\times C_{n-y}^{n-1}\times C_{n-z}^{n-1}\times q$分別為$10\times C_0^2\times C_1^2\times C_2^2\times 6=120$與$30\times C_1^2\times C_1^2\times C_1^2\times 1=240$。

因此，$N(3\times3\times3,5)$為360。

(四)仿照相同方式，可計算$n\times n\times n\times n$時，$N(n\times n\times n\times n,k)$一般式。假設在$n\times n\times n\times n$中A方向分成$x$個片段、B方向分成$y$個片段、C方向分成$z$個片段、D方向分成$w$個片段，一般式為：$I\times C_{n-x}^{n-1}\times C_{n-y}^{n-1}\times C_{n-z}^{n-1}\times C_{n-w}^{n-1}\times q$，$q$為$xyzw\ldots$不盡相異物排列數。

陸、延伸探究

一、期望值一般式研究動機：

在某校高一下學期期末考的段考試題中：「如圖 9 之棋盤式街道，從A到B走捷徑，若選擇每個捷徑走法的機會均等，求轉彎次數的期望值為__________。」

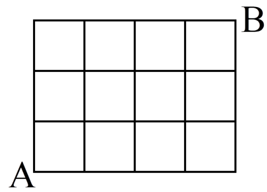


圖 9

解題過程：

轉彎次數	可走路徑方法數
1	2
2	5
3	12
4	9
5	6
6	1

路徑總方法數為$\dfrac{7!}{4!3!}=35$

$$1\times\frac{2}{35}+2\times\frac{5}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{9}{35}+5\times\frac{6}{35}+6\times\frac{1}{35}$$
$$=\frac{120}{35}=\frac{24}{7}$$

從此題目，我們開始好奇$E(n\times n)$、$E(m\times n)$、$E(m\times n\times l)$是否能推知其一般式為何？

二、在 $n\times n$ 的方格紙中，$E(n\times n)$ 的一般式：

在 $n\times n$ 的方格紙中，本研究將 $N(n\times n,k)$ 的一般式分為「k 為奇數」及「k 為偶數」兩類作討論，因此期望值的一般式需考慮到奇數與偶數。

【定理一】$E(n\times n)=n$ 。

《證明一》

當 k 為奇數時 $k_{odd}=2r-1$ ，當 k 為偶數時 $k_{even}=2r$

$$\frac{\sum_{r=1}^{n}\left(\text{奇數一般式}\times\text{轉彎次數}\right)+\sum_{r=1}^{n}\left(\text{偶數一般式}\times\text{轉彎次數}\right)}{\text{總方法數}}$$

$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\left(k_{odd}\right)2\left(C_{r-1}^{n-1}\right)^2+\sum_{r=1}^{n}\left(k_{even}\right)2\left(C_{r}^{n-1}\right)\left(C_{r-1}^{n-1}\right)}{C_n^{2n}}=\frac{\sum_{r=1}^{n}(2r-1)2\left(C_{r-1}^{n-1}\right)^2+\sum_{r=1}^{n}(2r)2\left(C_{r}^{n-1}\right)\left(C_{r-1}^{n-1}\right)}{C_n^{2n}}$$

$$=\frac{2\sum_{r=1}^{n}\left((2r-1)(C_{r-1}^{n-1})^2+2(n-r)(C_{r-1}^{n-1})^2\right)}{C_n^{2n}}=\frac{2\sum_{r=1}^{n}\left(C_{r-1}^{n-1}\right)^2(2r-1+2n-2r)}{C_n^{2n}}$$

$$=\frac{2\times n!n!(2n-1)\sum_{r=1}^{n}(C_{r-1}^{n-1})^2}{(2n)!}\text{(以二項式定理計算：}\sum_{r=1}^{n}(C_{r-1}^{n-1})^2=C_{n-1}^{2n-2}\text{)}$$

$$=\frac{2\times n!n!(2n-1)C_{n-1}^{2n-2}}{(2n)!}=\frac{2\times n!n!(2n-2)!(2n-1)}{(n-1)!(n-1)!(2n)!}=n\text{ 。}$$

《證明二》

當有 n 個A與 n 個B時排列，每個空隙的兩邊可能為以下四種：AA,AB,BA,BB 。

當空隙兩邊的字母不同的時候代表有轉彎，因此每個空隙轉彎的機率為：

$$\frac{(n\text{個A})\times(n\text{個B})+(n\text{個B})\times(n\text{個A})}{(2n\text{個字母取2個})\times(2\text{個互換})}=\frac{2n^2}{C_2^{2n}\times 2!}=\frac{2n^2}{(2n)(2n-1)}\text{ 。}$$

n 個A與 n 個B排列總共有 $(2n-1)$ 個空隙，

因此在 $n\times n$ 的方格紙中，$E(n\times n)=\dfrac{2n^2}{(2n)(2n-1)}\times(2n-1)=n$ 。

三、$m\times n$的方格紙中，$E(m\times n)$的一般式$(n\le m)$：

因在$m\times n$的方格紙，$N(m\times n,k)$的一般式分為「k為奇數」及「k為偶數」。

因此，期望值的一般式需考慮到奇數與偶數。

【定理二】$E(m\times n)=\dfrac{2mn}{m+n}$。

《證明一》

當k為奇數時，$k_{odd}=2r-1$；當k為偶數時，$k_{even}=2r$，$r\in\mathbb{N}$

$$\frac{\sum_{r=1}^{n}\left(\text{奇數一般式}\times\text{轉彎次數}\right)+\sum_{r=1}^{n}\left(\text{偶數一般式}\times\text{轉彎次數}\right)}{\text{總方法數}}$$

$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\left(k_{odd}\right)2C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}+\sum_{r=1}^{n}\left(k_{even}\right)(C_{r}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}+C_{r-1}^{m-1}C_{r}^{n-1})}{C_{n}^{2n}}$$

$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\left(2(2r-1)C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}+2rC_{r}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}+2rC_{r-1}^{m-1}C_{r}^{n-1}\right)}{C_{n}^{m+n}}$$

$$=\frac{2\sum_{r=1}^{n}((2r-1)C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}+(m-r)C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}+(n-r)C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1})}{C_{n}^{m+n}}$$

$$=\frac{2\sum_{r=1}^{n}C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}(2r-1+m-r+n-r)}{C_{n}^{m+n}}=\frac{2(m+n-1)m!n!\sum_{r=1}^{n}C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}}{(m+n)!}$$

$$=\frac{2(m+n-1)m!n!C_{n-1}^{m+n-2}}{(m+n)!}=\frac{2(m+n-1)m!n!(m+n-2)!}{(m+n)!(n-1)!(m-1)!}=\frac{2mn}{m+n}\text{。}$$

《證明二》

當有m個A與n個B時排列，每個空隙的兩邊可能為AA,AB,BA,BB。

當空隙兩邊的字母不同的時候代表有轉彎，因此每個空隙轉彎的機率為：

$$\frac{(m\text{個A})\times(n\text{個B})+(n\text{個B})\times(m\text{個A})}{(m+n\text{個字母取2個})\times(2\text{個互換})}=\frac{m\times n+n\times m}{C_{2}^{m+n}\times 2!}=\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}\text{。}$$

m個A與n個B排列總共有$(m+n-1)$個空隙，因此在$m\times n$的方格紙，

$$E(m\times n)=\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}\times(m+n-1)=\frac{2mn}{m+n}\text{。}$$

四、$m\times n\times l$ 的長方體，$E(m\times n\times l)$ 的一般式：

【定理三】$E(m\times n\times l)=\dfrac{2(mn+ml+nl)}{m+n+l}$ 。

《證明》

設有 m 個 A，n 個 B，l 個 C 排列，每個空隙有轉彎時兩邊可能為 AB, AC, BA, BC, CA, CB 。

因此，每個空隙的轉彎機率為：

$$\frac{(m\text{個A})\times(n\text{個B})+(m\text{個A})\times(l\text{個C})+(n\text{個B})\times(m\text{個A})+(n\text{個B})\times(l\text{個C})+(l\text{個C})\times(m\text{個A})+(l\text{個C})\times(n\text{個B})}{(m+n+l\text{個字母取2個})\times(2\text{個互換})}$$

$$=\frac{m\times n+m\times l+n\times m+n\times l+l\times m+l\times n}{C_2^{m+n+l}\times 2!}=\frac{2(mn+ml+nl)}{(m+n+l)(m+n+l-1)}\text{ 。}$$

m 個 A，n 個 B，l 個 C 排列總共有 $(m+n+l-1)$ 個空隙，因此在 $m\times n\times l$ 的長方體，

$$E(m\times n\times l)=\frac{2(mn+ml+nl)}{(m+n+l)(m+n+l-1)}\times(m+n+l-1)=\frac{2(mn+ml+nl)}{m+n+l}\text{ 。}$$

五、跳脫維度觀念，$E(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n)$ 的一般式：

【定理四】

若有 a_1 個 A_1 、a_2 個 A_2 、a_3 個 A_3 、…、a_n 個 A_n 排列，

則 $E(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n)=\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$ 。

《證明》

每個空隙兩邊可能為 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 兩兩一組。因此每個空隙的轉彎機率為

$$\frac{2(a_1\text{到}a_n\text{兩兩乘積和})}{C_2^{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}\times 2!}=\frac{2(a_1\text{到}a_n\text{兩兩乘積和})}{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n-1)}\text{ 。}$$

a_1 個 A_1 、a_2 個 A_2 、a_3 個 A_3 ... a_n 個 A_n 排列會有 $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n-1)$ 個空隙，因此

$$E(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n)=\frac{2(a_1\text{到}a_n\text{兩兩乘積和})}{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n-1)}\times(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n-1)$$

$$=\frac{2(a_1\text{到}a_n\text{兩兩乘積和})}{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\text{ 。}$$

六、同字不相鄰排列組合一般式：

在計算 $N(n\times n\times n,k)$ 與 $N(n\times n\times n\times n,k)$ 時，因 I 值不易計算，故使用C++程式語言進行輔助求解；為了探究 a 個A、b 個B、c 個C的同字不相鄰排列組合一般式，我們將A的數量先進行特殊化，嘗試進行研究。我們從3個A、b 個B、c 個C的構想開始，再推廣至 a 個A $(1\le a\le 5)$、b 個B、c 個C同字不相鄰排列方法數的一般式 $(c\le b)$：

(一) 3個A、b 個B、c 個C同字不相鄰排列組合一般式：

「3個A、b 個B、c 個C」改以「3個A、$p+s$ 個B、p 個C」表示。3個A、$p+s$ 個B、p 個C同字不相鄰排列組合的形式以「數列1, A ,數列2」表示，如：$\underbrace{\text{C,B,A,B,C,B,C}}_{\text{數列1}},\text{A},\underbrace{\text{C,B,C,A,B,C,B}}_{\text{數列2}}$，其中數列1為「1個A、$m$ 個B、n 個C同字不相鄰排列且A不排在數列最右」，數列2為「1個A、m 個B、n 個C同字不相鄰排列且A不排在數列最左」。

將數列1的排列組合一般式表示為 $a_{m,n}$，若將數列1倒序排列即為數列2，因此數列2的排列組合一般式亦可表示為 $a_{m,n}$。m、n 的數量對於B、C而言，可以交換，因此 $a_{m,n}=a_{n,m}$。

此時 $a_{m,n}$ 之值可分為以下三種情況($n+3\le m$時無解)：

1.情況 1：$m=n+2$

此時數列1為1個A、n 個C插入於 $n+1$ 個空格中 $\Rightarrow a_{m,n}=C_1^{n+1}=n+1$ 種。

2.情況 2：$m=n+1$

(1)情況 2-1：A兩旁為B、C

若拿掉A，數列即為B,C,B,$\cdots$,C,B，

A會有 $2n+1$ 個位置可填入 $\Rightarrow a_{m,n}=C_1^{2n+1}=2n+1$ 種。

(2)情況 2-2：A兩旁為B、B

若拿掉一組A,B，數列即B,C,B,C,$\cdots$,B,C或C,B,C,B,$\cdots$,C,B，

A,B 分別皆有 n 個位置可填入 $\Rightarrow a_{m,n}=C_1^{n}+C_1^{n}=2n$ 種。

(3)情況 2-3：A兩旁為C、C

若拿掉A，即會有一組C,C相鄰，因此至少會有一組B,B相鄰 $\Rightarrow a_{m,n}=0$ 種。

3.情況 3：$m=n$

(1)情況 3-1：A 兩旁為 B、C

若拿掉 A，數列即為 $B,C,B,C,\cdots,B,C$ 或是 $C,B,C,B,\cdots,C,B$，

A 各會有 $2n$ 個位置可填入 $\Rightarrow a_{m,n}=C_1^{2n}+C_1^{2n}=4n$ 種。

(2)情況 3-2：A 兩旁為 B、B

若拿掉一組 A,B，數列即為 $C,B,C,\cdots,B,C$，

A,B 會有 $n-1$ 個位置可填入 $\Rightarrow a_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$ 種。

(3)情況 3-3：A 兩旁為 C、C

若拿掉一組 A,C，數列即為 $B,C,B,\cdots,C,B$，

A,C 會有 $n-1$ 個位置可填入 $\Rightarrow a_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$ 種。

統整以上三種情形，$a_{m,n}=a_{n,m}=\begin{cases} n+1 & ,m=n+2 \\ 4n+1 & ,m=n+1 \\ 6n-2 & ,m=n \\ 4(n-1)+1 & ,m=n-1 \\ (n-2)+1 & ,m=n-2 \end{cases}$。

3 個 A、$p+s$ 個 B、p 個 C 同字不相鄰排列組合可表示為：「數列 1, A ,數列 2」，所以當數列 1 有 m 個 B、n 個 C 時，數列 2 會有 $p+s-m$ 個 B、$p-n$ 個 C。此時數列 1 有 $a_{m,n}$ 種排法，數列 2 有 $a_{p+s-m,p-n}$ 種排法，而 3 個 A、$p+s$ 個 B、p 個 C 同字不相鄰的排列數就會是 $\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$。

為方便觀察，我們將 $a_{i,j}$ 的值繪製成表 1：

表 1

$a_{m,n}$		m											
		0	1	2	3	4	…	p–3	p–2	p–1	p	p+1	p+2
n	0	–	1	1	–	–	…	–	–	–	–	–	–
	1	1	4	5	2	–	…	–	–	–	–	–	–
	2	1	5	10	9	3	…	–	–	–	–	–	–
	3	–	2	9	16	13	…	–	–	–	–	–	–
	4	–	–	3	13	22	…	–	–	–	–	–	–
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	p–3	–	–	–	–	–	…	6(p-3)-2	4(p-2-1)+1	(p-1-2)+1	–	–	–
	p–2	–	–	–	–	–	…	4(p-3)+1	6(p-2)-2	4(p-1-1)+1	(p-2)+1	–	–
	p–1	–	–	–	–	–	…	(p-1)-1	4(p-2)+1	6(p-1)-2	4(p-1)+1	(p+1-2)+1	–
	p	–	–	–	–	–	…	–	(p)-1	4(p-1)+1	6p-2	4(p+1-1)+1	(p+2-2)+1

表 1 中，橘色、灰色、黃色、藍色、綠色格子分別為$a_{n+2,n}$ 、$a_{n+1,n}$ 、$a_{n,n}$ 、$a_{n-1,n}$ 、$a_{n-2,n}$的情況，而其他格子為$a_{m,n}$不存在的情況。

接下來，我們分別在$s=0,1,2,3,4$的情況下討論$\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$之值。

當$s=0$時，

$a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}$對應的格子分別為綠色×橘色、藍色×灰色、黃色×黃色、灰色×藍色、橘色×綠色，將五種情形以$\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$表示並相加後，

即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p-2}a_{m,m+2}\times a_{p-m,p-m-2}+\sum_{m=0}^{p-1}a_{m,m+1}\times a_{p-m,p-m-1}+\sum_{m=1}^{p-1}a_{m,m}\times a_{p-m,p-m}$$
$$+\sum_{m=0}^{p-1}a_{m,m+1}\times a_{p-m,p-m-1}+\sum_{m=0}^{p-2}a_{m,m+2}\times a_{p-m,p-m-2}$$
$$=2(\sum_{m=0}^{p-2}a_{m,m+2}\times a_{p-m,p-m-2}+\sum_{m=0}^{p-1}a_{m,m+1}\times a_{p-m,p-m-1})+\sum_{m=1}^{p-1}a_{m,m}\times a_{p-m,p-m}$$
$$=2[\sum_{m=0}^{p-2}(m+1)(p-m-1)+\sum_{m=0}^{p-1}(4m+1)(4(p-m-1)+1)]+\sum_{m=1}^{p-1}(6m-2)(6(p-m)-2)$$
$$=2[\sum_{m=1}^{p}(-m^2+pm)+\sum_{m=1}^{p}(-16m^2+\left(16p+16\right)m+\left(-12p-3\right))]$$
$$+\sum_{m=1}^{p-1}(-36m^2+36pm+(-12p+4))$$
$$=\sum_{m=1}^{p}(-34m^2+(34p+32)m+(-24p-6))+\sum_{m=1}^{p-1}(-36m^2+36pm+(-12p+4))$$
$$=-34\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(34p+32)\frac{p(p+1)}{2}+(-24p-6)p$$
$$-36\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}+(36p)\frac{(p-1)p}{2}+(-12p+6)(p-1)=\boxed{\frac{35}{3}p^3-20p^2+\frac{43}{3}p-4}$$

當$s=1$時，

$a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}$對的格子分別為橘色×藍色、灰色×黃色、黃色×灰色、藍色×橘色，將四種情形以$\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$表示並相加後，即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p-1}a_{m,m+2}\times a_{p-m,p-m-1}+\sum_{m=0}^{p-1}a_{m,m+1}\times a_{p-m,p-m}+\sum_{m=1}^{p}a_{m,m}\times a_{p-m,p-m+1}+\sum_{m=1}^{p}a_{m,m-1}\times a_{p-m,p-m+2}$$
$$=\sum_{m=0}^{p-1}((m)+1)(4(p-m-1)+1)+\sum_{m=0}^{p-1}(4(m)+1)(6(p-m)-2)+\sum_{m=1}^{p}(6m-2)(4(p-m)+1)$$
$$+\sum_{m=1}^{p}(4(m-1)+1)((p-m)+1)$$

$$=\sum_{m=1}^{p}(m)(4p-4m+1)+\sum_{m=1}^{p}(4m-3)(6p-6m+4)+\sum_{m=1}^{p}(6m-2)(4p-4m+1)$$

$$+\sum_{m=1}^{p}(4m-3)(p-m+1)$$

$$=\sum_{m=1}^{p}(-4m^2+(4p+1)m)+(-24m^2+(24p+34)m+(-18p-12))$$

$$+(-24m^2+(24p+14)m+(-8p-2))+(-4m^2+(4p+7)m+(-3p-3))$$

$$=\sum_{m=1}^{p}(-56m^2+(56p+56)m+(-29p-17))$$

$$=-56\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(56p+56)\frac{p(p+1)}{2}+(-29p-17)p=\boxed{\frac{28}{3}p^3-p^2+\frac{5}{3}p}$$

當 $s=2$ 時，

$a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}$ 對應的格子分別為橘色×黃色、灰色×灰色、黃色×橘色，將三種情形以 $\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$ 表示並相加後，即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p-1}a_{m,m+2}\times a_{p-m,p-m}+\sum_{m=0}^{p}a_{m,m+1}\times a_{p-m,p-m+1}+\sum_{m=1}^{p}a_{m,m}\times a_{p-m,p-m+2}$$

$$=\sum_{m=0}^{p-1}((m)+1)(6(p-m)-2)+\sum_{m=0}^{p}(4(m)+1)(4(p-m)+1)+\sum_{m=1}^{p}(6m-2)((p-m)+1)$$

$$=\sum_{m=1}^{p}(m)(6(p-m)-2)+\sum_{m=1}^{p+1}(4m-3)(4p-4m+5)+\sum_{m=1}^{p}(6m-2)(p-m+1)$$

$$=\sum_{m=1}^{p}(-6m^2+(6p+4)m)+\sum_{m=1}^{p+1}(-16m^2+(16p+32)m+(-12p-15))$$

$$+\sum_{m=1}^{p}(-6m^2+(6p+8)m+(-2p-2))$$

$$=\sum_{m=1}^{p}(-12m^2+(12p+12)m+(-2p-2))+\sum_{m=1}^{p+1}(-16m^2+(16p+32)m+(-12p-15))$$

$$=-12(\frac{p(p+1)(2p+1)}{6})+(12p+12)(\frac{p(p+1)}{2})+(-2p-2)p$$

$$-16(\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6})+(16p+32)(\frac{(p+1)(p+2)}{2})+(-2p-2)(p+1)$$

$$=\boxed{\frac{14}{3}p^3+8p^2+\frac{13}{3}p+1}$$

當 $s=3$ 時，

$a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}$ 對應的格子分別為橘色×灰色、灰色×橘色，將兩種情形以

$\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$ 表示並相加後，即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p} a_{m,m+2}\times a_{p-m,p-m+1}+\sum_{m=0}^{p} a_{m,m+1}\times a_{p-m,p-m+2}$$
$$=\sum_{m=0}^{p}((m)+1)(4(p-m)+1)+\sum_{m=0}^{p}(4(m)+1)((p-m)+1)$$
$$=\sum_{m=1}^{p+1}(-4m^2+(4p+5)m)+\sum_{m=1}^{p+1}(-4m^2+(4p+11)m+(-3p-6))$$
$$=\sum_{m=1}^{p+1}(-8m^2+(8p+16)m+(-3p-6))$$
$$=-8\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}+(8p+16)\frac{(p+1)(p+2)}{2}-(3p+6)(p+1)=\boxed{\frac{4}{3}p^3+5p^2+\frac{17}{3}p+2}$$

當 $s=4$ 時，

$a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}$ 對應的格子為橘色×橘色，寫成 $\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$ 後即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p} a_{m,m+2}\times a_{p-m,p-m+2}=\sum_{m=0}^{p}((m)+1)((p-m)+1)=\sum_{m=1}^{p+1}(m)(p-m+2)=\sum_{m=1}^{p+1}(-m^2+(p+2)m)$$
$$=-\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}+(p+2)\frac{(p+1)(p+2)}{2}=\boxed{\frac{1}{6}p^3+p^2+\frac{11}{6}p+1}$$

(二)2個A、b個B、c個C同字不相鄰排列組合一般式：

「2個A、b個B、c個C」改以「2個A、$p+t$個B、p個C」表示。2個A、$p+t$個B、p個C同字不相鄰排列數可表示為：「數列3,數列2」，如：$\underbrace{\text{C,B,C,B,C,A,}}_{\text{數列3}}\underbrace{\text{C,B,C,A,B,C,B}}_{\text{數列2}}$，其中數列3為「1個A、$m$個B、$n$個C同字不相鄰排列且A限定排在數列最右」。將數列3的排列組合一般式表示為 $b_{m,n}$，$b_{m,n}=b_{n,m}$。

此時 $b_{m,n}$ 之值可分為以下兩種情況：

1.情況 1：$m=n$

此時B與C可互換 $\Rightarrow b_{m,n}=2$ 種。

2.情況 2：$m=n+1$

此時B與C不可互換 $\Rightarrow b_{m,n}=1$ 種。

當數列3有 m 個B、n 個C時，數列2會有 $p+t-m$ 個B、$p-n$ 個C。此時數列3有 $b_{m,n}$ 種排法，數列2有 $b_{p+t-m,p-n}$ 種排法，而2個A、$p+t$個B、p個C同字不相鄰排列數就會是 $\sum_{m=0}^{p+t}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(b_{m,n}\times a_{p+t-m,p-n}\right)\right)$。

為方便觀察，我們將 $b_{m,n}$ 的值繪製成表 2：

表 2

$b_{m,n}$		m										
		0	1	2	3	4	…	p–3	p–2	p–1	p	p+1
n	0	1	1	—	—	—	…	—	—	—	—	—
	1	1	2	1	—	—	…	—	—	—	—	—
	2	—	1	2	1	—	…	—	—	—	—	—
	3	—	—	1	2	1	…	—	—	—	—	—
	4	—	—	—	1	2	…	—	—	—	—	—
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	p–3	—	—	—	—	—	…	2	1	—	—	—
	p–2	—	—	—	—	—	…	1	2	1	—	—
	p–1	—	—	—	—	—	…	—	1	2	1	—
	p	—	—	—	—	—	…	—	—	1	2	1

表 2 中，粉色、棕色、紫色格子分別為 $b_{m,m-1}$ 、 $b_{m,m}$ 、 $b_{m,m+1}$ 的情況，而其他格子為 $b_{m,n}$ 不存在的情況。

接下來，我們分別在 $t=0,1,2,3$ 的情況下討論 $\sum_{m=0}^{p+t}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(b_{m,n}\times a_{p+t-m,p-n}\right)\right)$ 之值。

當 $t=0$ 時，

$b_{m,n}\times a_{p+t-m,p-n}$ 對應的格子分別為(表 2 的紫色×表 1 的灰色)、(表 2 的棕色×表 1 的黃色)、(表 2 的粉色×表 1 的藍色)，將三種情形以 $\sum_{m=0}^{p+t}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(b_{m,n}\times a_{p+t-m,p-n}\right)\right)$ 表示並相加後，即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p-1}b_{m,m+1}\times a_{p-m,p-m-1}+\sum_{m=0}^{p-1}b_{m,m}\times a_{p-m,p-m}+\sum_{m=1}^{p}b_{m,m-1}\times a_{p-m,p-m+1}$$
$$=\sum_{m=0}^{p-1}(4(p-m-1)+1)+2\sum_{m=0}^{p-1}(6(p-m)-2)+\sum_{m=1}^{p}(4(p-m)+1)-(6p-2)$$
$$=\sum_{m=1}^{p}(4p-4m+1)+2\sum_{m=1}^{p}(6p-6m+4)+\sum_{m=1}^{p}(4p-4m+1)-6p+2$$
$$=\sum_{m=1}^{p}(-20m+20p+10)-6p+2=-20\frac{p(p+1)}{2}+20p^2+10p-6p+2=\boxed{10p^2-6p+2}$$

當 $t=1$ 時，

$b_{m,n}\times a_{p+t-m,p-n}$ 對應的格子分別為(表 2 的紫色×表 1 的橘色)、(表 2 的棕色×表 1 的灰

色)、(表 2 的粉色×表 1 的黃色)，將三種情形寫成$\sum_{m=0}^{p+t}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(b_{m,n}\times a_{p+t-m,\,p-n}\right)\right)$表示並相加後，即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p-1} b_{m,m+1}\times a_{p-m+1,\,p-m-1}+\sum_{m=0}^{p} b_{m,m}\times a_{p-m+1,\,p-m}+\sum_{m=1}^{p} b_{m,m-1}\times a_{p-m+1,\,p-m+1}$$

$$=\sum_{m=0}^{p-1}((p-m-1)+1)+2\sum_{m=0}^{p}(4(p-m)+1)+\sum_{m=1}^{p}(6(p-m+1)-2)-(4p+1)$$

$$=\sum_{m=1}^{p}\left(-7m+7p+5\right)+\sum_{m=1}^{p+1}(-8m+8p+10)-4p-1$$

$$=-7\frac{p(p+1)}{2}+7p^2+5p-8\frac{(p+1)(p+2)}{2}+8p(p+1)+10(p+1)-4p-1=\boxed{\frac{15}{2}p^2+\frac{7}{2}p+1}$$

當$t=2$時，

$b_{m,n}\times a_{p+t-m,\,p-n}$對應的格子分別為(表 2 的棕色×表 1 的橘色)、(表 2 的粉色×表 1 的灰色)，將兩種情形寫成$\sum_{m=0}^{p+t}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(b_{m,n}\times a_{p+t-m,\,p-n}\right)\right)$表示並相加後，即為一般式：

$$\sum_{m=0}^{p} b_{m,m}\times a_{p-m+2,\,p-m}+\sum_{m=1}^{p+1} b_{m,m-1}\times a_{p-m+2,\,p-m+1}=2\sum_{m=0}^{p}((p-m)+1)+\sum_{m=1}^{p+1}(4(p-m+1)+1)-(p+1)$$

$$=2\sum_{m=1}^{p+1}(p-m+2)+\sum_{m=1}^{p+1}(4p-4m+5)-p-m=\sum_{m=1}^{p+1}(-6m+6p+9)-p-1$$

$$=-6\frac{(p+1)(p+2)}{2}+6p(p+1)+9(p+1)-p-1=\boxed{3p^2+5p+2}$$

當$t=3$時，

$b_{m,n}\times a_{p+t-m,\,p-n}$對應的格子為(表 2 的粉色×表 1 的橘色)，

將此種情形以$\sum_{m=0}^{p+t}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(b_{m,n}\times a_{p+t-m,\,p-n}\right)\right)$表示後，即為一般式：

$$\sum_{m=1}^{p+2} b_{m,m-1}\times a_{p-m+3,\,p-m+1}=\sum_{m=1}^{p+2}((p-m+1)+1)=\sum_{m=1}^{p+2}(-m+p+2)$$

$$=-\frac{(p+2)(p+3)}{2}+p(p+2)+2(p+2)=\boxed{\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p+1}$$

(三)1個A、b個B、c個C同字不相鄰排列組合一般式：

1個A、m個B、n個C同字不相鄰排列組合方式為數列1增加A可在最右位的情形，將其值表示為$c_{m,n}$，其性質與$a_{m,n}$相似並同樣分三種情況討論，$c_{m,n}=c_{n,m}$。

1.情況 1： $m=n+2 \Rightarrow c_{m,n}=C_1^{n+1}=n+1$種

2.情況 2： $m=n+1$

(1)情況 2-1： A 兩旁為 B 、 C $\Rightarrow c_{m,n}=C_1^{2n+2}=2n+2$種。

(2)情況 2-2： A 兩旁為 B 、 B $\Rightarrow c_{m,n}=C_1^{n+1}+C_1^{n}=2n$種。

(3)情況 2-3： A 兩旁為 C 、 C $\Rightarrow c_{m,n}=0$種。

3.情況 3： $m=n$

(1)情況 3-1： A 兩旁為 B 、 C $\Rightarrow c_{m,n}=C_1^{2n+1}+C_1^{2n+1}=4n+2$種。

(2)情況 3-2： A 兩旁為 B 、 B $\Rightarrow c_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$種。

(3)情況 3-3： A 兩旁為 C 、 C $\Rightarrow c_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$種。

統整以上三種情形， $c_{m,n}=c_{n,m}=\begin{cases} n+1 & ,m=n+2 \\ 4n+2 & ,m=n+1 \\ 6n & ,m=n \end{cases}$ 。

(四) 5個 A 、 b 個 B 、 c 個 C 同字不相鄰排列組合一般式：

「5個 A 、 b 個 B 、 c 個 C 」改以「5個 A 、 $p+z$ 個 B 、 p 個 C 」表示。5個 A 、 $p+z$ 個 B 、 p 個 C 同字不相鄰排列組合可表示為：「數列3,數列4, A ,數列4,數列5 」，如： $\underbrace{C,B,C,A,}_{數列3}\underbrace{C,A,C,B}_{數列4},A,\underbrace{B,A,B,C,}_{數列4}\underbrace{A,B,C,B}_{數列5}$ 。其中數列4 為「1個 A 、 m 個 B 、 n 個 C 同字不相鄰排列且 A 不排在數列最左或最右」，數列5 為「1個 A 、 m 個 B 、 n 個 C 同字不相鄰排列且 A 限定排在數列最左」。將數列4 的排列數一般式表示為 $d_{m,n}$ 。若將數列5 倒序排列即為數列3，因此數列5 的排列數一般式也可表示為 $b_{m,n}$ 。數列4 的組合方式為數列1排除 A 可在最左位的情形，其性質與 $a_{m,n}$ 類似並同樣分三種情況討論， $d_{m,n}=d_{n,m}$ 。

1.情況 1： $m=n+2 \Rightarrow d_{m,n}=C_1^{n+1}=n+1$種。

2.情況 2： $m=n+1$

(1)情況 2-1： A 兩旁為 B 、 C $\Rightarrow d_{m,n}=C_1^{2n}=2n$種。

(2)情況 2-2： A 兩旁為 B 、 B $\Rightarrow d_{m,n}=C_1^{n}+C_1^{n}=2n$種。

(3)情況 2-3： A 兩旁為 C 、 C $\Rightarrow d_{m,n}=0$種。

3.情況 3： $m=n$

(1)情況 3-1： A 兩旁為 B 、 C $\Rightarrow d_{m,n}=C_1^{2n-1}+C_1^{2n-1}=4n-2$ 種。

(2)情況 3-2： A 兩旁為 B 、 B $\Rightarrow d_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$ 種。

(3)情況 3-3： A 兩旁為 C 、 C $\Rightarrow d_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$ 種。

統整以上三種情形， $d_{m,n}=d_{n,m}=\begin{cases} n+1 & ,m=n+2 \\ 4n & ,m=n+1 \\ 6n-4 & ,m=n \end{cases}$ 。

將 5 個 A 、 $p+z$ 個 B 、 p 個 C 同字不相鄰排列中左邊與右邊分別兩個數列相乘後，

較容易計算。令 $\sum_{m=0}^{i}\left(\sum_{n=0}^{j}\left(b_{m,n}\times d_{i-m,j-n}\right)\right)=e_{i,j}$ ，其中 $0\le|i-j|=t\le 3,0\le j\le i\le p$ ，因此

5 個 A 、 $p+z$ 個 B 、 p 個 C 同字不相鄰排列方法數 $=\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$ 。

接下來，我們分別在 $t=0,1,2,3$ 的情況下討論 $e_{i,j}$ 之值。

當 $t=0$ 時，

$$e_{i,i}=\sum_{m=0}^{i-1}b_{m,m+1}\times d_{i-m,i-m-1}+\sum_{m=0}^{i-1}b_{m,m}\times d_{i-m,i-m}+\sum_{m=1}^{i}b_{m,m-1}\times d_{i-m,i-m+1}$$

$$=\sum_{m=0}^{i-1}(4(i-m-1))+2\sum_{m=0}^{i-1}(6(i-m)-4)+\sum_{m=1}^{i}(4(i-m))-(6i-4)=\boxed{10i^2-12i+4}$$

當 $t=1$ 時，

$$e_{i+1,i}=\sum_{m=0}^{i-1}b_{m,m+1}\times d_{i-m+1,i-m-1}+\sum_{m=0}^{i}b_{m,m}\times d_{i-m+1,i-m}+\sum_{m=1}^{i}b_{m,m-1}\times d_{i-m+1,i-m+1}$$

$$=\sum_{m=0}^{i-1}((i-m-1)+1)+2\sum_{m=0}^{i}(4(i-m))+\sum_{m=1}^{i}(6(i-m+1)-4)-(4i)=\boxed{\frac{15}{2}i^2-\frac{1}{2}i}$$

當 $t=2$ 時，

$$e_{i+2,i}=\sum_{m=0}^{i}b_{m,m}\times d_{i-m+2,i-m}+\sum_{m=1}^{i+1}b_{m,m-1}\times d_{i-m+2,i-m+1}$$

$$=2\sum_{m=0}^{i}((i-m)+1)+\sum_{m=1}^{i+1}(4(i-m+1))-(i+1)=\boxed{3i^2+4i+1}$$

當 $t=3$ 時，

$$e_{i+3,i}=\sum_{m=1}^{i+2}b_{m,m-1}\times d_{i-m+3,i-m+1}=\sum_{m=1}^{i+2}((i-m+1)+1)=\boxed{\frac{1}{2}i^2+\frac{3}{2}i+1}$$

因此，當$z=0$時，$\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$

(以下推導過程同上述，不贅述其推導過程。)

$$=\sum_{r=1}^{p-1}((10r^2-12r+4)\times(10(p-r)^2-12(p-r)+4))$$

$$+2\sum_{r=1}^{p-1}((\frac{15}{2}r^2-\frac{1}{2}r)\times(\frac{15}{2}(p-r-1)^2-\frac{1}{2}(p-r-1)))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-2}((3r^2+4r+1)\times(3(p-r-2)^2+4(p-r-2)+1))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-3}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(\frac{1}{2}(p-r-3)^2+\frac{3}{2}(p-r-3)+1))$$

$$=\boxed{\frac{77}{10}p^5-42p^4+\frac{189}{2}p^3-110p^2+\frac{329}{5}p-16}$$

當$z=1$時，$\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$

$$=2\sum_{r=1}^{p-1}((\frac{15}{2}r^2-\frac{1}{2}r)\times(10(p-r)^2-12(p-r)+4))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-1}((3r^2+4r+1)\times(\frac{15}{2}(p-r-1)^2-\frac{1}{2}(p-r-1)))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-2}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(3(p-r-2)^2+4(p-r-2)+1))$$

$$=\boxed{\frac{33}{5}p^5-\frac{37}{2}p^4+22p^3-\frac{27}{2}p^2+\frac{17}{5}p}$$

當$z=2$時，$\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=1}^{p-1}((\frac{15}{2}r^2-\frac{1}{2}r)\times(\frac{15}{2}(p-r)^2-\frac{1}{2}(p-r)))+2\sum_{r=0}^{p-1}((3r^2+4r+1)\times(10(p-r)^2-12(p-r)+4))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-1}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(\frac{15}{2}(p-r-1)^2-\frac{1}{2}(p-r-1)))$$

$$=\boxed{\frac{33}{8}p^5+\frac{5}{8}p^4-\frac{11}{8}p^3+\frac{11}{8}p^2-\frac{3}{4}p}$$

當$z=3$時，$\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$

$$=2\sum_{r=0}^{p-1}((3r^2+4r+1)\times(\frac{15}{2}(p-r)^2-\frac{1}{2}(p-r)))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-1}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(10(p-r)^2-12(p-r)+4))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-1}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(10(p-r)^2-12(p-r)+4))$$

$$=\boxed{\frac{11}{6}p^5+\frac{25}{4}p^4+\frac{19}{3}p^3+\frac{11}{4}p^2+\frac{5}{6}p}$$

當$z=4$時，$\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p}((3r^2+4r+1)\times(3(p-r)^2+4(p-r)+1))$$

$$+2\sum_{r=0}^{p-1}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(\frac{15}{2}(p-r)^2-\frac{1}{2}(p-r)))$$

$$=\boxed{\frac{11}{20}p^5+\frac{23}{6}p^4+\frac{113}{12}p^3+\frac{61}{6}p^2+\frac{151}{30}p+1}$$

當$z=5$時，$\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$

$$=2\sum_{r=0}^{p}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(3(p-r)^2+4(p-r)+1))$$

$$=\boxed{\frac{1}{10}p^5+\frac{13}{12}p^4+\frac{13}{3}p^3+\frac{95}{12}p^2+\frac{197}{30}p+2}$$

當$z=6$時，$\sum_{i=0}^{p+z}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times e_{p+z-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)\times(\frac{1}{2}(p-r)^2+\frac{3}{2}(p-r)+1))$$

$$=\boxed{\frac{1}{120}p^5+\frac{1}{8}p^4+\frac{17}{24}p^3+\frac{15}{8}p^2+\frac{137}{60}p+1}$$

(五) 4個A、b個B、c個C同字不相鄰排列組合一般式：

「4個A、b個B、c個C」改以「4個A、$p+g$個B、p個C」表示。4個A、$p+g$個B、p個C同字不相鄰排列組合可表示為：「數列3,數列4,A,數列2」，如：$\underbrace{\text{C,B,C,A,}}_{\text{數列}3}\underbrace{\text{C,A,C,B}}_{\text{數列}4}\text{, A, }\underbrace{\text{B,C,A,B,C}}_{\text{數列}2}$。

因此4個A、$p+g$個B、p個C同字不相鄰排列方法數$=\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$。

接下來，我們分別在$g=0,1,2,3,4,5$的情況下討論$\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$之值。

當$g=0$時，$\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p-2}((3r^2+4r+1)((p-r-2)+1))+\sum_{r=1}^{p-1}((\frac{15}{2}r^2-\frac{1}{2}r)(4(p-r-1)+1))$$

$$+\sum_{r=1}^{p-1}((10r^2-12r+4)(6(p-r)-2))+\sum_{r=1}^{p-1}((\frac{15}{2}(r-1)^2-\frac{1}{2}(r-1))(4(p-r)+1))$$

$$+\sum_{r=0}^{p-2}((3(r-2)^2+4(r-2)+1)((p-r)+1))=\boxed{\frac{21}{2}p^4-35p^3+\frac{95}{2}p^2-31p+8}$$

當$g=1$時，$\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p-2}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)((p-r-2)+1))+\sum_{r=0}^{p-1}((3r^2+4r+1)(4(p-r-1)+1))$$

$$+\sum_{r=1}^{p-1}((\frac{15}{2}r^2-\frac{1}{2}r)(6(p-r)-2))+\sum_{r=1}^{p}((10r^2-12r+4)(4(p-r)+1))$$

$$+\sum_{r=1}^{p}((\frac{15}{2}(r-1)^2-\frac{1}{2}(r-1))((p-r)+1))=\boxed{\frac{35}{4}p^4-\frac{21}{2}p^3+\frac{27}{4}p^2-2p}$$

當$g=2$時，$\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p-1}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)(4(p-r-1)+1))+\sum_{r=0}^{p-1}((3r^2+4r+1)(6(p-r)-2))$$

$$+\sum_{r=1}^{p}((\frac{15}{2}r^2-\frac{1}{2}r)(4(p-r)+1))+\sum_{r=1}^{p}((10r^2-12r+4)((p-r)+1))$$

$$=\boxed{5p^4+6p^3+2p^2+p}$$

當 $g=3$ 時，$\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p-1}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)(6(p-r)-2))+\sum_{r=0}^{p}((3r^2+4r+1)(4(p-r)+1))$$

$$+\sum_{r=1}^{p}((\frac{15}{2}r^2-\frac{1}{2}r)((p-r)+1))$$

$$=\boxed{\frac{15}{8}p^4+\frac{29}{4}p^3+\frac{73}{8}p^2+\frac{19}{4}p+1}$$

當 $g=4$ 時，$\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)(4(p-r)+1))+\sum_{r=0}^{p}((3r^2+4r+1)((p-r)+1))$$

$$=\boxed{\frac{5}{12}p^4+\frac{17}{6}p^3+\frac{79}{12}p^2+\frac{37}{6}p+2}$$

當 $g=5$ 時，$\sum_{i=0}^{p+g}\left(\sum_{j=0}^{p}\left(e_{i,j}\times a_{p+g-i,p-j}\right)\right)$

$$=\sum_{r=0}^{p}((\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r+1)((p-r)+1))=\boxed{\frac{1}{24}p^4+\frac{5}{12}p^3+\frac{35}{24}p^2+\frac{25}{12}p+1}$$

(六) a 個A、b 個B、c 個C同字不相鄰排列組合一般式統整：

將(一)到(五)的同字不相鄰排列組合一般式以組合數的形式表示，

型如：$a_nC_n^p+a_{n-1}C_{n-1}^p+a_{n-2}C_{n-2}^p+\cdots+a_1C_1^p+a_0C_0^p$，並將係數統計於表格中，如圖 10。

1BC

BC差	a_1	a_0
0	6	0
1	4	2
2	1	1

2BC

BC差	a_2	a_1	a_0
0	20	4	2
1	15	11	1
2	6	8	2
3	1	2	1

3BC

BC差	a_3	a_2	a_1	a_0
0	70	30	6	-4
1	56	54	10	0
2	28	44	17	1
3	8	18	12	2
4	1	3	3	1

4BC

BC差	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	252	168	32	-8	8
1	210	252	73	3	0
2	120	216	110	14	0
3	45	111	88	23	1
4	10	32	36	16	2
5	1	4	6	4	1

5BC

BC差	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	924	840	210	-10	16	-16
1	792	1140	456	44	0	0
2	495	1005	633	127	4	0
3	220	590	538	186	18	0
4	66	224	277	147	29	1
5	12	50	80	60	20	2
6	1	5	10	10	5	1

圖 10

將以上數據改以末 n 式係數和來統整，如圖 11(灰色表示一般式數量 $\leq n$)。

末一式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	2	1
3	0	0	1	3	3	1
4	0	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5	1

末二式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	5	3
2	0	0	0	7	10	3
3	0	0	9	21	15	3
4	0	11	36	42	20	3
5	13	55	90	70	25	3

末三式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	22	21	4
3	0	0	37	65	32	4
4	0	56	147	130	43	4
5	79	279	367	217	54	4

末四式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	42	25	6
3	0	0	93	119	42	4
4	0	176	363	240	57	4
5	299	869	905	403	72	4

末五式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	42	25	6
3	0	0	163	149	48	0
4	0	386	615	313	60	4
5	794	1874	1538	530	76	4

末六式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	42	25	6
3	0	0	163	149	48	0
4	0	638	783	345	52	12
5	1586	3018	1994	574	76	4

圖 11

以下為末 n 式係數和一般式的推導($1\leq n\leq 5$)：

1.末一式係數和：

假設 a 個A、b 個B、c 個C為 t 個A、$p+t+1$ 個B、p 個C，所有可能性即為

$$C_p^{p+t}=C_0^tC_t^p+C_1^tC_{t-1}^p+\cdots+C_{t-1}^tC_1^p+C_t^tC_0^p=\sum_{k=0}^{t}(C_k^tC_k^p)\text{ 。}$$

2.末二式係數和：

末二式係數和為末一式係數和與 t 個A、$p+t$ 個B、p 個C一般式相加。t 個A、$p+t$ 個B、p 個C的所有可能性即為 $C_t^{p+t}\times 2+C_{t-1}^{p+t-1}C_1^p\times 2$ 。

與末一式係數和合併為 $3C_t^{p+t}+2pC_{t-1}^{p+t-1}$

$$\begin{aligned}
&=3C_0^tC_t^p+3C_1^tC_{t-1}^p+\cdots+3C_{t-1}^tC_1^p+3C_t^tC_0^p\\
&\quad+2pC_0^tC_{t-1}^{p-1}+2pC_1^tC_{t-2}^{p-1}+\cdots+2pC_{t-2}^tC_1^{p-1}+2pC_{t-1}^tC_0^{p-1}\\
&=3C_0^tC_t^p+3C_1^tC_{t-1}^p+\cdots+3C_{t-1}^tC_1^p+3C_t^tC_0^p\\
&\quad+2tC_0^tC_t^p+2(t-1)C_1^tC_{t-1}^p+\cdots+4C_{t-2}^tC_2^p+2pC_{t-1}^tC_1^p\\
&=(2t+3)C_n^p+(2t^2+t)C_{n-1}^p+\cdots+5tC_1^p+3C_0^p=\sum_{k=0}^{t}((2k+3)C_k^tC_k^p)
\end{aligned}$$

3.末三式係數和(A 的數量 ≤ 1 時，無法滿足此一般式)：

末三式係數和為末二式係數和與 t 個A、$p+t-1$ 個B、p 個C一般式相加。

t 個A、$p+t-1$ 個B、p 個C的所有可能性為

$$C_t^{p+t}+C_{t-1}^{p+t-1}C_1^p\times 4+C_{t-2}^{p+t-2}C_1^p+C_{t-1}^{p+t-2}C_1^p+C_{t-2}^{p+t-2}C_2^p\times 4\text{ 。}$$

與末二式係數和合併為 $4C_t^{p+t}+6pC_{t-1}^{p+t-1}+(p-1)C_{t-1}^{p+t-2}+(2p^2-p)C_{t-2}^{p+t-2}$

$$\begin{aligned}
&=4C_0^tC_t^p+4C_1^tC_{t-1}^p+4C_2^tC_{t-2}^p+\cdots+4C_{t-1}^tC_1^p+4C_t^tC_0^p\\
&\quad+6tC_0^tC_t^p+6(t-1)C_1^tC_{t-1}^p+6(t-2)C_2^tC_{t-2}^p+\cdots+6C_{t-1}^tC_1^p\\
&\quad+tC_0^{t-1}C_t^p+(t-1)C_1^{t-1}C_{t-1}^p+(t-2)C_2^{t-1}C_{t-2}^p+\cdots+C_{t-2}^{t-1}C_1^p\\
&\quad-C_0^{t-2}C_{t-1}^p-C_1^{t-2}C_{t-2}^p-\cdots-C_{t-2}^{t-2}C_1^p\\
&\quad+(t-1)C_0^{t-2}C_{t-1}^p+(t-2)C_1^{t-1}C_{t-2}^p+\cdots+C_{t-2}^{t-1}C_1^p\\
&\quad+2t(t-1)C_0^tC_t^p+2(t-1)(t-2)C_1^tC_{t-1}^p+2(t-2)(t-3)C_2^tC_{t-2}^p+\cdots+4C_{t-1}^tC_1^p\\
&=\sum_{k=0}^{t}(((2k^2+4k+4)C_k^t+kC_k^{t-1}+kC_{k-1}^{t-1}-C_{k-1}^{t-2})C_k^p)
\end{aligned}$$

4.末四式係數和(A 的數量≤ 2時，無法滿足此一般式)：

末四式係數和為末三式係數和與t個 A 、 $p+t-2$個 B 、 p個 C 一般式相加。

t個 A 、 $p+t-2$個 B 、 p個 C 的所有可能性為

$$2pC_{t-1}^{p+t-1}+2(p-1)C_{t-1}^{p+t-2}+2p(2p-1)C_{t-2}^{p+t-2}+2(p-1)^2C_{t-2}^{p+t-3}+\frac{2p(p-1)(2p-1)}{3}C_{t-3}^{p+t-3}$$

$$=\sum_{k=0}^{t}(((\frac{4}{3}k^3+\frac{2}{3}k)C_k^t+(2k^2)C_k^{t-1}+(2k^2)C_{k-1}^{t-1}-2(k+1)C_{k-1}^{t-2}+2C_{k-1}^{t-3})C_k^p)$$ 。

與末三式係數和合併為

$$\sum_{k=0}^{t}(((\frac{4}{3}k^3+2k^2+\frac{14}{3}k+4)C_k^t+(2k^2+k)C_k^{t-1}+(2k^2+k)C_{k-1}^{t-1}+(-2k-3)C_{k-1}^{t-2}+2C_{k-1}^{t-3})C_k^p)$$

5.末五式係數和(A 的數量≤ 3時，無法滿足此一般式)：

末五式係數和為末四式係數和與t個 A 、 $p+t-3$個 B 、 p個 C 一般式相加。

t個 A 、 $p+t-3$個 B 、 p個 C 的所有可能性為

$$\sum_{k=0}^{t}(((\frac{2}{3}k^4-\frac{4}{3}k^3+\frac{4}{3}k^2-\frac{2}{3}k)C_k^t+(2k^3-2k^2+k)C_k^{t-1}+(2k^3-2k^2+k)C_{k-1}^{t-1}$$
$$-(k^2+3k+1)C_{k-1}^{t-2}+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_{k-2}^{t-2}+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_k^{t-2}+kC_{k-2}^{t-3}+C_{k-2}^{t-4}$$
$$+(3k+4)C_{k-1}^{t-3}-3C_{k-1}^{t-4})C_k^p)$$

與末四式係數和合併為

$$\sum_{k=0}^{t}(((\frac{2}{3}k^4+\frac{10}{3}k^2+4k+4)C_k^t+(2k^3+2k)C_k^{t-1}+(2k^3+2k)C_{k-1}^{t-1}-(k^2+5k+4)C_{k-1}^{t-2}$$
$$+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_{k-2}^{t-2}+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_k^{t-2}-kC_{k-2}^{t-3}+C_{k-2}^{t-4}+(3k+6)C_{k-1}^{t-3}-3C_{k-1}^{t-4})C_k^p)$$

我們目前尚未能找出末n式係數和係數間的規律，但從上述一般式可得知若以$a_nC_n^p+a_{n-1}C_{n-1}^p+a_{n-2}C_{n-2}^p+\cdots+a_1C_1^p+a_0C_0^p$表示時，$a_0$為$0$次式；$a_1$為$1$次式，而$a_n$為$1$次式；$a_{n-1}$為$2$次式；$a_{n-2}$為$3$次式，因此在中間的項為最高次數。而此情況在各列係數關係為階差，以圖 12 末二式係數和為例，a_0各列係數差為0；a_1各列係數相鄰的差相同；a_2各列係數的差再取相鄰的差相同；a_3各列係數的差再取相鄰的差再取相鄰的差相同，以此類推。但是末n式係數和($3\le n$)紅色部分第一列無法滿足此規律。

末二式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	5	3
2	0	0	0	7	10	3
3	0	0	9	21	15	3
4	0	11	36	42	20	3
5	13	55	90	70	25	3

圖 12

柒、研究結果

一、在$n\times n$的方格紙中，$N(n\times n,k)$的一般式可分為「k為奇數」及「k為偶數」：

(一)若k為奇數，一般式為$2\left(C^{n-1}_{\frac{k-1}{2}}\right)^2$；

(二)若k為偶數，一般式為$2\cdot C^{n-1}_{\frac{k}{2}-1}\cdot C^{n-1}_{\frac{k}{2}}$；

合併後，$N(n\times n,k)$的一般式為$2\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$。

二、在$m\times n$的方格紙中，$N(m\times n,k)$的一般式可分為「k為奇數」及「k為偶數」：

(一)若k為奇數，一般式為$2\cdot C^{m-1}_{\frac{k-1}{2}}\cdot C^{n-1}_{\frac{k-1}{2}}$；

(二)若k為偶數，一般式分為先走X軸方向及先走Y軸方向：

1.若先走X軸方向，一般式為$C^{m-1}_{\frac{k}{2}}\cdot C^{n-1}_{\frac{k}{2}-1}$；

2.若先走Y軸方向，一般式為$C^{m-1}_{\frac{k}{2}-1}\cdot C^{n-1}_{\frac{k}{2}}$；

合併後，$N(m\times n,k)$的一般式為$C^{m-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}+C^{m-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$。

三、在$n\times n\times n$的立方體，$N(n\times n\times n,k)$的一般式為$I\times C^{n-1}_{n-x}\times C^{n-1}_{n-y}\times C^{n-1}_{n-z}\times q$。

四、在$n\times n\times n\times n$時，$N(n\times n\times n\times n,k)$的一般式$I\times C^{n-1}_{n-x}\times C^{n-1}_{n-y}\times C^{n-1}_{n-z}\times C^{n-1}_{n-w}\times q$。

五、在$n\times n$的方格紙中，$E(n\times n)$的一般式為n。

六、在$m\times n$的方格紙中，$E(m\times n)$的一般式為$\dfrac{2mn}{m+n}$。

七、在$m\times n\times l$的長方體，$E(m\times n\times l)$的一般式為$\dfrac{2(mn+ml+nl)}{m+n+l}$。

八、在維度為n時，$E(a_1\times a_2\times a_3\times ...\times a_n)$的一般式為$\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$。

九、1個A、m個B、n個C同字不相鄰排列數一般式為$\begin{cases}6n & ,m=n\\ 4n+2 & ,m=n+1\\ n+1 & ,m=n+2\end{cases}$。

十、2個A、$p+t$個B、p個C同字不相鄰排列數一般式為$\begin{cases}10p^2-6p+2 & ,t=0\\ \frac{15}{2}p^2+\frac{7}{2}p+1 & ,t=1\\ 3p^2+5p+2 & ,t=2\\ \frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p+1 & ,t=3\end{cases}$。

十一、3個A、$p+s$個B、p個C同字不相鄰排列數一般式為

$$\begin{cases}\frac{35}{3}p^3-20p^2+\frac{43}{3}p-4 & ,s=0\\ \frac{28}{3}p^3-p^2+\frac{5}{3}p & ,s=1\\ \frac{14}{3}p^3+8p^2+\frac{13}{3}p+1 & ,s=2\\ \frac{4}{3}p^3+5p^2+\frac{17}{3}p+2 & ,s=3\\ \frac{1}{6}p^3+p^2+\frac{11}{6}p+1 & ,s=4\end{cases}\text{。}$$

十二、4個A、$p+g$個B、p個C同字不相鄰排列數一般式為

$$\begin{cases}\frac{21}{2}p^4-35p^3+\frac{95}{2}p^2-31p+8 & ,g=0\\ \frac{35}{4}p^4-\frac{21}{2}p^3+\frac{27}{4}p^2-2p & ,g=1\\ 5p^4+6p^3+2p^2+p & ,g=2\\ \frac{15}{8}p^4+\frac{29}{4}p^3+\frac{73}{8}p^2+\frac{19}{4}p+1 & ,g=3\\ \frac{5}{12}p^4+\frac{17}{6}p^3+\frac{79}{12}p^2+\frac{37}{6}p+2 & ,g=4\\ \frac{1}{24}p^4+\frac{5}{12}p^3+\frac{35}{24}p^2+\frac{25}{12}p+1 & ,g=5\end{cases}\text{。}$$

十三、5個A、$p+z$個B、p個C同字不相鄰排列數一般式為

$$\begin{cases}\frac{77}{10}p^5-42p^4+\frac{189}{2}p^3-110p^2+\frac{329}{5}p-16 & ,z=0\\ \frac{33}{5}p^5-\frac{37}{2}p^4+22p^3-\frac{27}{2}p^2+\frac{17}{5}p & ,z=1\\ \frac{33}{8}p^5+\frac{5}{8}p^4-\frac{11}{8}p^3+\frac{11}{8}p^2-\frac{3}{4}p & ,z=2\\ \frac{11}{6}p^5+\frac{25}{4}p^4+\frac{19}{3}p^3+\frac{11}{4}p^2+\frac{5}{6}p & ,z=3\\ \frac{11}{20}p^5+\frac{23}{6}p^4+\frac{113}{12}p^3+\frac{61}{6}p^2+\frac{151}{30}p+1 & ,z=4\\ \frac{1}{10}p^5+\frac{13}{12}p^4+\frac{13}{3}p^3+\frac{95}{12}p^2+\frac{197}{30}p+2 & ,z=5\\ \frac{1}{120}p^5+\frac{1}{8}p^4+\frac{17}{24}p^3+\frac{15}{8}p^2+\frac{137}{60}p+1 & ,z=6\end{cases}\text{。}$$

十四、a個A、b個B、c個C同字不相鄰排列數一般式以組合數表示的末n式係數和

$(1\le n\le 5)$：

末一式係數和為$\displaystyle\sum_{k=0}^{t}(C_k^t C_k^p)$；

末二式係數和為$\displaystyle\sum_{k=0}^{t}((2k+3)C_k^t C_k^p)$；

末三式係數和為$\displaystyle\sum_{k=0}^{t}(((2k^2+4k+4)C_k^t+kC_k^{t\text{-}1}+kC_{k\text{-}1}^{t\text{-}1}-C_{k\text{-}1}^{t\text{-}2})C_k^p)$；

末四式係數和為
$$\sum_{k=0}^{t}(((\frac{4}{3}k^3+2k^2+\frac{14}{3}k+4)C_k^t+(2k^2+k)C_k^{t-1}+(2k^2+k)C_{k-1}^{t-1}$$
$$+(-2k-3)C_{k-1}^{t-2}+2C_{k-1}^{t-3})C_k^p)；$$

末五式係數和為
$$\sum_{k=0}^{t}(((\frac{2}{3}k^4+\frac{10}{3}k^2+4k+4)C_k^t+(2k^3+2k)C_k^{t-1}+(2k^3+2k)C_{k-1}^{t-1}$$
$$-(k^2+5k+4)C_{k-1}^{t-2}+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_{k-2}^{t-2}+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_k^{t-2}-kC_{k-2}^{t-3}+C_{k-2}^{t-4}$$
$$+(3k+6)C_{k-1}^{t-3}-3C_{k-1}^{t-4})C_k^p)。$$

捌、未來展望

一、在$m\times n\times l$的長方體，$N(m\times n\times l,k)$的一般式。

二、a個A、b個B、c個C同字不相鄰排列組合一般式。

玖、參考資料及其他

一、參考資料

(一)南一版高中數學課本第二冊排列組合。

(二)TRML2021思考賽試題。

(三)104學年度全國高級中等學校小論文寫作比賽 / 數學科 / 一個同字不相鄰的探究過程 —「3個A、n個B、n個C同字不相鄰的直線排列數」的公式解。

二、其他(C++程式碼)

下方為C++程式碼，是為了本研究所撰寫的。在計算上，因同字不相鄰計算過於複雜，此程式可以輔助解決問題，並能減少計算上的錯誤。以下為我們撰寫的程式碼及計算結果。

使用C++程式輔助計算$n\times n\times n$下，$N(n\times n\times n,k)$的一般式的操作過程：

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
string answer;
int n,end;
int big[3];
int a=0,b=0,c=0;
int first,second,times;
int hi(string b){
int total=0;
do{
    int flags = 1;
for(int i=1;i<b.size();i++)
    if(b[i-1] == b[i]){
        flags = 0;
        break;
    }
   if (flags)
        total++;

} while (next_permutation(b.begin(),b.end()));
return total;
}
int ty(int x){
int u=1;
for(int i=1;i<=x;i++){
u=u*i;
}
return u;
}
int cmod(int x,int y){
int u=ty(x);
u=u/ty(y);
u=u/ty(x-y);
return u;
}
int main(){

while(1==1){
cout<<"請打abc"<<endl;
cin>>answer;
cout<<"請打N"<<endl;
cin>>n;
a=0,b=0,c=0;
for(int i=0;i<answer.length();i++){
if(answer[i]=='a'){//q
a++;
big[0]=a;
}else if(answer[i]=='b'){
b++;
big[1]=b;
}else{
c++;
big[2]=c;
}
}
first=cmod(n-1,n-a)*cmod(n-1,n-b)*cmod(n-1,n-c);
sort(big,big+3);
if(big[0]==big[1]){
if(big[1]==big[2]){
times=1;
}else{
times=3;
}
}else if(big[1]==big[2]){
times=3;
}else{
times=6;
}
cout<<first*times*hi(answer)<<endl;
cout<<"按0結束"<<endl;
cin>>end;

}
}
```

右圖為C++運算結果：

```
請打abc
aaabbcc
請打N
4
3078
按0結束
```

【評語】050406

本研究探討在 n x n 的方格紙轉彎 k 次的路徑數出發，從而延伸到 n x m 以及更多其它的情形。並探討了期望值，以及一些 generating function。整體而言內容很認真做，但也都是硬算，失之繁瑣，創意較少是可惜之處。

作品簡報

「轉」瞬即「式」
路徑轉彎數與同字不相鄰一般式探討

數學科　　高中組

摘要

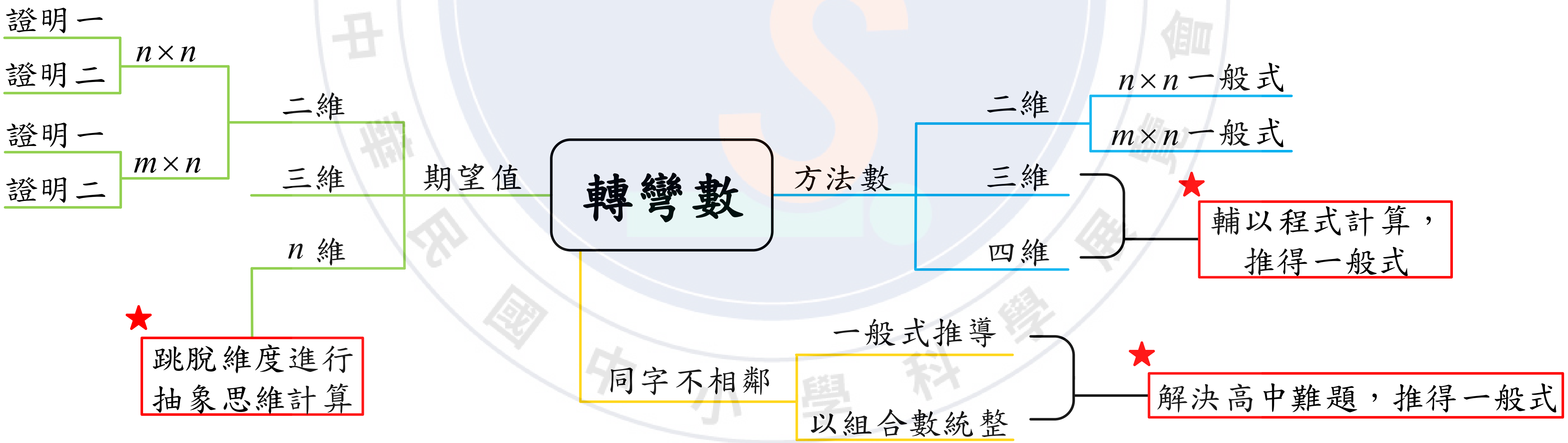
研究動機

在TRML2021思考賽第一題組：「從$n\times n$的方格紙的左下角頂點，沿著格線以最短路徑方式走到右上角頂點。我們以$N(n\times n,k)$表示在行進路徑中恰轉彎k次的方法數。

1.試求當k為偶數時，$N(n\times n,k)$的一般式(以n與k表示)，並請說明理由。

2.試求當k為奇數時，$N(n\times n,k)$的一般式(以n與k表示)，並請說明理由。」

研究心智圖

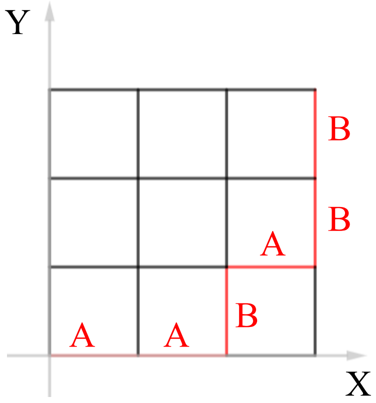


摘要與初探

符號定義

$N(a\times b,d)$、$N(a\times b\times c,e)$ 路徑方法數

$E(a\times b)$、$E(a\times b\times c)$ 路徑轉彎數的期望值



$N(n\times n,k)$的一般式

k為偶數

排列方法數為 $\left(H^{\frac{k}{2}}_{n-\frac{k}{2}}\right)\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)+\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)\left(H^{\frac{k}{2}}_{n-\frac{k}{2}}\right)=2\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}-1}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}}\right)$

$$\underbrace{\mathrm{A}\overbrace{\downarrow\mathrm{B}\downarrow\mathrm{A}\downarrow\mathrm{B}\downarrow\mathrm{A}\downarrow\ldots\downarrow\mathrm{A}\downarrow\mathrm{B}\downarrow}^{\text{排入}n-\frac{k}{2}-1\text{個A},\,n-\frac{k}{2}\text{個B}}\mathrm{A}}_{\frac{k}{2}+1\text{個A},\,\frac{k}{2}\text{個B交錯排列}}$$

k為奇數

排列方法數為 $2\left(H^{\frac{k+1}{2}}_{n-\frac{k+1}{2}}\right)^2=2\left(C^{n-1}_{\frac{k-1}{2}}\right)^2$

$$\underbrace{\mathrm{A}\overbrace{\downarrow\mathrm{B}\downarrow\mathrm{A}\downarrow\mathrm{B}\downarrow\mathrm{A}\downarrow\ldots\downarrow\mathrm{A}\downarrow}^{\text{排入}n-\frac{k+1}{2}\text{個A},\,n-\frac{k+1}{2}\text{個B}}\mathrm{B}}_{\frac{k+1}{2}\text{個A},\,\frac{k+1}{2}\text{個B交錯排列}}$$

以高斯符號合併：$N(n\times n,k)=2\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$

初探

$N(m\times n,k)$的一般式

k為奇數

排列方法數為 $2\left(H^{\frac{k+1}{2}}_{m-\frac{k+1}{2}}\right)\left(H^{\frac{k+1}{2}}_{n-\frac{k+1}{2}}\right)=2\left(C^{m-1}_{\frac{k-1}{2}}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k-1}{2}}\right)$

k為偶數

先走X軸方向

排列方法數為 $\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{m-\frac{k}{2}-1}\right)\left(H^{\frac{k}{2}}_{n-\frac{k}{2}}\right)=\left(C^{m-1}_{\frac{k}{2}}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}-1}\right)$

先走Y軸方向

排列方法數為 $\left(H^{\frac{k}{2}}_{m-\frac{k}{2}}\right)\left(H^{\frac{k}{2}+1}_{n-\frac{k}{2}-1}\right)=\left(C^{m-1}_{\frac{k}{2}-1}\right)\left(C^{n-1}_{\frac{k}{2}}\right)$

以高斯符號合併：$N(m\times n,k)=C^{m-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}+C^{m-1}_{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot C^{n-1}_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$

初探

$N(n\times n\times n,k)$的一般式

ABC交換的可能性 $\Rightarrow$ ABC不盡相異物排列數

$\uparrow$

ABCCCABBA $\xrightarrow{\text{簡化}}$ ABCABA $\Rightarrow$ 運算3個A、2個B、1個C同字不相鄰所有可能性

$\downarrow$ 還原

ABCCCABBA *or* ABBCCCABA $\Rightarrow$ 簡化的ABC選取插入

簡化後ABC同字不相鄰的所有可能性 $\leftarrow \boxed{I}\times\boxed{q}\times\boxed{C^{n-1}_{n-x}\times C^{n-1}_{n-y}\times C^{n-1}_{n-z}} \rightarrow$ 簡化的ABC選取插入

$\downarrow$

簡化後ABC不盡相異物排列數

延伸探究

$E(n\times n)$的一般式　【定理一】$E(n\times n)=n$

《證明一》

k為奇數 $\Rightarrow k_{odd}=2r-1$, k為偶數 $\Rightarrow k_{even}=2r$

$$\frac{\sum_{r=1}^{n}(\text{奇數一般式}\times\text{轉彎次數})+\sum_{r=1}^{n}(\text{偶數一般式}\times\text{轉彎次數})}{\text{總方法數}}$$

$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}(2r-1)2\left(C_{r-1}^{n-1}\right)^2+\sum_{r=1}^{n}(2r)2\left(C_{r}^{n-1}\right)\left(C_{r-1}^{n-1}\right)}{C_{n}^{2n}}=n$$

《證明二》

空隙的兩邊可能為：AA,AB,BA,BB

$\Rightarrow$空隙兩邊符號不同代表有轉彎

〇 $\leftrightarrow$ 〇
空隙

每個空隙轉彎的機率：

$$\frac{(n\text{個A})\times(n\text{個B})+(n\text{個B})\times(n\text{個A})}{(2n\text{個符號取2個})\times(2\text{個互換})}=\frac{2n^2}{(2n)(2n-1)}$$

$$\Rightarrow E(n\times n)=\frac{2n^2}{(2n)(2n-1)}\times(2n-1)=n$$

$E(m\times n)$的一般式　【定理二】$E(m\times n)=\dfrac{2mn}{m+n}$

$E(m\times n\times l)$的一般式　【定理三】$E(m\times n\times l)=\dfrac{2(mn+ml+nl)}{m+n+l}$

〇 $\leftrightarrow$ 〇
m個A 空隙 m個A
n個B　n個B
l個C　l個C

$E(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n)$的一般式　【定理四】$E(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n)=\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$

延伸探究

1個A、m 個B 、n 個C同字不相鄰排列組合一般式

$m=n+2\Rightarrow$ 共$n+1$種

$$\underbrace{B\overbrace{{}^{\downarrow}B^{\downarrow}B^{\downarrow}B^{\downarrow}\cdots{}^{\downarrow}B^{\downarrow}}^{1\text{個}A,n\text{個}C}B}_{n+2\text{個}}\Rightarrow C_1^{n+1}=n+1\text{種}$$

$m=n+1\Rightarrow$ 共$4n+2$種

$$(1)\ \underbrace{\overbrace{{}^{\downarrow}B^{\downarrow}C^{\downarrow}\cdots{}^{\downarrow}B^{\downarrow}C^{\downarrow}B^{\downarrow}}^{1\text{個}A}}_{n+1\text{個}B,\ n\text{個}C}\Rightarrow C_1^{2n+2}=2n+2\text{種}$$

$$(2)\ \underbrace{B\overbrace{{}^{\downarrow}CB^{\downarrow}CB^{\downarrow}\cdots B^{\downarrow}}^{1\text{組}AB}C}_{n+1\text{個}B,\ n\text{個}C}\ or\ \underbrace{CB\overbrace{{}^{\downarrow}CB^{\downarrow}CB^{\downarrow}\cdots B^{\downarrow}}^{1\text{組}AB}}_{n+1\text{個}B,\ n\text{個}C}\Rightarrow C_1^{n}+C_1^{n}=2n\text{種}$$

$$(3)\ \underbrace{BC\overbrace{{}^{\downarrow}BC^{\downarrow}B\cdots C^{\downarrow}}^{1\text{組}AC}B}_{n-1\text{個}B,\ n+1\text{個}C}\Rightarrow 0\text{種}$$

$m=n\Rightarrow$ 共$6n$種

$$(1)\ \underbrace{\overbrace{{}^{\downarrow}B^{\downarrow}C^{\downarrow}B^{\downarrow}C\cdots B^{\downarrow}C^{\downarrow}}^{1\text{個}A}}_{n\text{個}B,\ n\text{個}C}\ or\ \underbrace{\overbrace{{}^{\downarrow}C^{\downarrow}B^{\downarrow}C^{\downarrow}B\cdots C^{\downarrow}B^{\downarrow}}^{1\text{個}A}}_{n\text{個}B,\ n\text{個}C}$$

$$\Rightarrow C_1^{2n+1}+C_1^{2n+1}=4n+2\text{種}$$

$$(2)\ \underbrace{CB\overbrace{{}^{\downarrow}CB^{\downarrow}\cdots B^{\downarrow}}^{1\text{組}AB}C}_{n-1\text{個}B,\ n\text{個}C}\Rightarrow C_1^{n-1}=n-1\text{種}$$

$$(3)\ \underbrace{BC\overbrace{{}^{\downarrow}BC^{\downarrow}B\cdots C^{\downarrow}}^{1\text{組}AC}B}_{n\text{個}B,\ n-1\text{個}C}\Rightarrow C_1^{n-1}=n-1\text{種}$$

3個A、m 個B 、n 個C同字不相鄰排列組合一般式

數列1為「1 個 A、m 個 B、n 個C 同字不相鄰排列且A 不排在數列最右」

數列2為「1 個 A、m 個 B、n 個C 同字不相鄰排列且A 不排在數列最左」

$$\underbrace{C,A,B,C}_{\text{數列}1},A,\underbrace{C,B,A,B}_{\text{數列}2}$$

延伸探究

3個A、m 個B 、n 個C同字不相鄰排列組合一般式

$m=n+2 \Rightarrow$ 共$n+1$種

$a_{m,n}=C_1^{n+1}=n+1$種

$m=n+1 \Rightarrow$ 共$4n+1$種

(1) $a_{m,n}=C_1^{2n+1}=2n+1$種

(2) $a_{m,n}=C_1^{n}+C_1^{n}=2n$種

(3) $a_{m,n}=0$種

$m=n \Rightarrow$ 共$6n-2$種

(1) $a_{m,n}=C_1^{2n}+C_1^{2n}=4n$種

(2) $a_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$種

(3) $a_{m,n}=C_1^{n-1}=n-1$種

3個 A 、 $p+s$ 個 B 、 p 個 C
同字不相鄰的排列數：

$$\sum_{m=0}^{p+s}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(a_{m,n}\times a_{p+s-m,p-n}\right)\right)$$

$a_{m,n}$		m											
		0	1	2	3	4	...	p-3	p-2	p-1	p	p+1	p+2
n	0	—	1	1	—	—	...	—	—	—	—	—	—
	1	1	4	5	2	—	...	—	—	—	—	—	—
	2	1	5	10	9	3	...	—	—	—	—	—	—
	3	—	2	9	16	13	...	—	—	—	—	—	—
	4	—	—	3	13	22	...	—	—	—	—	—	—
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	p-3	—	—	—	—	—	...	6(p-3)-2	4(p-2-1)+1	(p-1-2)+1	—	—	—
	p-2	—	—	—	—	—	...	4(p-3)+1	6(p-2)-2	4(p-1-1)+1	(p-2)+1	—	—
	p-1	—	—	—	—	—	...	(p-1)-1	4(p-2)+1	6(p-1)-2	4(p-1)+1	(p+1-2)+1	—
	p	—	—	—	—	—	...	—	(p)-1	4(p-1)+1	6(p)-2	4(p+1-1)+1	(p+2-2)+1

$s=0$, $\frac{35}{3}p^3-20p^2+\frac{43}{3}p-4$

$s=1$, $\frac{28}{3}p^3-p^2+\frac{5}{3}p$

$s=2$, $\frac{14}{3}p^3+8p^2+\frac{13}{3}p+1$

$s=3$, $\frac{4}{3}p^3+5p^2+\frac{17}{3}p+21$

$s=4$, $\frac{1}{6}p^3+p^2+\frac{11}{6}p+1$

延伸探究

2個A、m 個B、n 個C同字不相鄰排列組合一般式

數列3為「1 個 A 、m 個 B 、n 個 C 同字不相鄰排列且 A 限定排在數列最右」

$$\underbrace{C,B,A,}_{\text{數列}3}\underbrace{B,C,A,C,B}_{\text{數列}2}$$

$b_{m,n}$		m										
		0	1	2	3	4	...	p-3	p-2	p-1	p	p+1
n	0	1	1	—	—	—	...	—	—	—	—	—
	1	1	2	1	—	—	...	—	—	—	—	—
	2	—	1	2	1	—	...	—	—	—	—	—
	3	—	—	1	2	1	...	—	—	—	—	—
	4	—	—	—	1	2	...	—	—	—	—	—
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	p-3	—	—	—	—	—	...	2	1	—	—	—
	p-2	—	—	—	—	—	...	1	2	1	—	—
	p-1	—	—	—	—	—	...	—	1	2	1	—
	p	—	—	—	—	—	...	—	—	1	2	1

$m=n$：此時B與C可互換$\Rightarrow b_{m,n}=2$種

$m=n+1$：此時B與C不可互換$\Rightarrow b_{m,n}=1$種

2個 A、$p+s$ 個 B、p 個 C 同字不相鄰的排列數：

$$\sum_{m=0}^{p+t}\left(\sum_{n=0}^{p}\left(b_{m,n}\times a_{p+t-m,\,p-n}\right)\right)$$

$t=0$, $10p^2-6p+2$

$t=1$, $\dfrac{15}{2}p^2+\dfrac{7}{2}p+1$

$t=2$, $3p^2+5p+2$

$t=3$, $\dfrac{1}{2}p^2+\dfrac{3}{2}p+1$

延伸探究

4個A、m 個B 、n 個C同字不相鄰排列組合一般式

$g=0$，$\frac{21}{2}p^4-35p^3+\frac{95}{2}p^2-31p+8$

$g=1$，$\frac{35}{4}p^4-\frac{21}{2}p^3+\frac{27}{4}p^2-2p$

$g=2$，$5p^4+6p^3+2p^2+p$

$g=3$，$\frac{15}{8}p^4+\frac{29}{4}p^3+\frac{73}{8}p^2+\frac{19}{4}p+1$

$g=4$，$\frac{5}{12}p^4+\frac{17}{6}p^3+\frac{79}{12}p^2+\frac{37}{6}p+2$

$g=5$，$\frac{1}{24}p^4+\frac{5}{12}p^3+\frac{35}{24}p^2+\frac{25}{12}p+1$

5個A、m 個B 、n 個C同字不相鄰排列組合一般式

$z=0$，$\frac{77}{10}p^5-42p^4+\frac{189}{2}p^3-110p^2+\frac{329}{5}p-16$

$z=1$，$\frac{33}{5}p^5-\frac{37}{2}p^4+22p^3-\frac{27}{2}p^2+\frac{17}{5}p$

$z=2$，$\frac{33}{8}p^5+\frac{5}{8}p^4-\frac{11}{8}p^3+\frac{11}{8}p^2-\frac{3}{4}p$

$z=3$，$\frac{11}{6}p^5+\frac{25}{4}p^4+\frac{19}{3}p^3+\frac{11}{4}p^2+\frac{5}{6}p$

$z=4$，$\frac{11}{20}p^5+\frac{23}{6}p^4+\frac{113}{12}p^3+\frac{61}{6}p^2+\frac{151}{30}p+1$

$z=5$，$\frac{1}{10}p^5+\frac{13}{12}p^4+\frac{13}{3}p^3+\frac{95}{12}p^2+\frac{197}{30}p+2$

$z=6$，$\frac{1}{120}p^5+\frac{1}{8}p^4+\frac{17}{24}p^3+\frac{15}{8}p^2+\frac{137}{60}p+1$

延伸探究

a個A、b 個B 、c 個C同字不相鄰排列組合一般式統整

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \cdots + b_1 p^1 + b_0 p^0$$

↓以組合數表示

$$a_n C_n^p + a_{n-1} C_{n-1}^p + a_{n-2} C_{n-2}^p + \cdots + a_1 C_1^p + a_0 C_0^p$$

1bc

BC差	a_1	a_0
0	6	0
1	4	2
2	1	1

2bc

BC差	a_2	a_1	a_0
0	20	4	2
1	15	11	1
2	6	8	2
3	1	2	1

3bc

BC差	a_3	a_2	a_1	a_0
0	70	30	6	-4
1	56	54	10	0
2	28	44	17	1
3	8	18	12	2
4	1	3	3	1

4bc

BC差	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	252	168	32	-8	8
1	210	252	73	3	0
2	120	216	110	14	0
3	45	111	88	23	1
4	10	32	36	16	2
5	1	4	6	4	1

5bc

BC差	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	924	840	210	-10	16	-16
1	792	1140	456	44	0	0
2	495	1005	633	127	4	0
3	220	590	538	186	18	0
4	66	224	277	147	29	1
5	12	50	80	60	20	2
6	1	5	10	10	5	1

末一式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	2	1
3	0	0	1	3	3	1
4	0	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5	1

末二式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	5	3
2	0	0	0	7	10	3
3	0	0	9	21	15	3
4	0	11	36	42	20	3
5	13	55	90	70	25	3

末三式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	22	21	4
3	0	0	37	65	32	4
4	0	56	147	130	43	4
5	79	279	367	217	54	4

末四式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	42	25	6
3	0	0	93	119	42	4
4	0	176	363	240	57	4
5	299	869	905	403	72	4

末五式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	42	25	6
3	0	0	163	149	48	0
4	0	386	615	313	60	4
5	794	1874	1538	530	76	4

末六式係數和

A的數量	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	0	0	0	0	11	3
2	0	0	0	42	25	6
3	0	0	163	149	48	0
4	0	638	783	345	52	12
5	1586	3018	1994	574	76	4

延伸探究與其他

a個A、b 個B 、c 個C同字不相鄰排列組合一般式統整

末1式係數和：$\sum_{k=0}^{t}(C_k^t C_k^p)$　　末2式係數和：$\sum_{k=0}^{t}((2k+3)C_k^t C_k^p)$

末3式係數和：$\sum_{k=0}^{t}(((2k^2+4k+4)C_k^t + kC_k^{t-1} + kC_{k-1}^{t-1} - C_{k-1}^{t-2})C_k^p)$

末4式係數和：$\sum_{k=0}^{t}(((\frac{4}{3}k^3+2k^2+\frac{14}{3}k+4)C_k^t+(2k^2+k)C_k^{t-1}+(2k^2+k)C_{k-1}^{t-1}+(-2k-3)C_{k-1}^{t-2}+2C_{k-1}^{t-3})C_k^p)$

末5式係數和：$\sum_{k=0}^{t}(((\frac{2}{3}k^4+\frac{10}{3}k^2+4k+4)C_k^t+(2k^3+2k)C_k^{t-1}+(2k^3+2k)C_{k-1}^{t-1}-(k^2+5k+4)C_{k-1}^{t-2}$

$+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_{k-2}^{t-2}+(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)C_k^{t-2}-kC_{k-2}^{t-3}+C_{k-2}^{t-4}+(3k+6)C_{k-1}^{t-3}-3C_{k-1}^{t-4})C_k^p)$

參考資料

- 南一版高中數學課本第二冊排列組合。
- TRML2021思考賽試題。
- 104學年度全國高級中等學校小論文寫作比賽/數學科/一個同字不相鄰的探究過程—「3個A、n個B、n個C同字不相鄰的直線排列數」的公式解。