中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

探究精神獎

050405

戀家的費波那契

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳孟甄	楊玉星
高二 蔡睿珊	陳彥勳

關鍵詞：費氏數列、遞迴關係式、最短最遠距離

摘要

本研究將費氏數列 $F(n)$前 n 項賦予正號或負號，再從第 1 項累加到第 n 項，找出過程中依次累加後的絕對值之最大值，並將這些最大值的最小值（最短最遠距離），寫成數列 $M(n)$。經由 R 軟體運算的結果，我們找出一種可走出最短最遠距離的規律性走法，並推得每六項相關之數列 $M(n)$與 $F(n)$的關係式。

接著推廣至類費氏數列 $F'(n)$（$F'_1=s$，$F'_2=t$），分成 $s=t$、$s<t$、$s>t$ 三種情況來討論。當 $s=t=m$ 時，則新關係式恰為原關係式之 m 倍。當 $s<t$ 時，則隨著 t 值所在區間的變動，會推得兩種 $M'(n)$與 $F'(n)$的關係式。當 $s>t$ 時，則隨著 s 值所在區間的變動，會影響 $M'(n)$與 $F'(n)$的關係式。

最後延伸至廣義費氏數列 $F'(n)$（$F'(n+2)=p*F'(n+1)+q*F'(n)$，$s=t=1$），分成 $p=q$、$p<q$、$p>q$ 三種情況來討論，並推得每六項相關之數列 $M'(n)$與 $F'(n)$的關係式。

壹、前言

一、研究動機

在「科學研習月刊」有定期刊出「森棚教官的數學題」，其中一道題目—散步的費波那契，我們很感興趣，便決定深入探討這個問題，看能否有進一步的發現。

二、研究目的

(一) 找出費氏數列$\langle F_n：F_1=F_2=1\rangle$的 *Minimax* 並寫成數列$\langle M_n\rangle$。

(二) 找出類費氏數列$\langle F'_n：F'_1\le F'_2\rangle$的 *Minimax* 並寫成數列$\langle M'_n\rangle$。

(三) 找出類費氏數列$\langle F'_n：F'_1>F'_2\rangle$的 *Minimax* 並寫成數列$\langle M'_n\rangle$。

(四) 找出廣義費氏數列$\langle F'_n：F'_{n+2}=pF'_{n+1}+qF'_n，p,q\in\mathbb{N}$ 且$F'_1=F'_2=1\rangle$ 的 *Minimax* 並寫成數列$\langle M'_n\rangle$。

三、名詞定義

為了研究的進行，我們做了以下名詞定義：

定義 1 費氏數列$\langle F_n\rangle$：$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$且$F_1=F_2=1$。

定義 2 類費氏數列$\langle F'_n \rangle$：$F'_{n+2} = F'_{n+1} + F'_n$且$F'_1 = s$、$F'_2 = t$。

定義 3 廣義費氏數列$\langle F'_n \rangle$：$F'_{n+2} = pF'_{n+1} + qF'_n$，$p, q \in \mathbb{N}$ 且$F'_1 = F'_2 = 1$。

定義 4 最短最遠距離(*Minimax*)：將一正數數列的前n項中每一項賦予正號或負號後，再從第 1 項累加到第n項，找出過程中依次累加後的絕對值之最大值，再找出這些最大值的最小值，稱為最短最遠距離。

定義 5 $\langle M_n \rangle$：將數列$\langle F_n \rangle$的第1項到第n項分別對應的 *Minimax* 寫成數列$\langle M_n \rangle$。

定義 6 $\langle M'_n \rangle$：將數列$\langle F'_n \rangle$的第1項到第n項分別對應的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n \rangle$。

定義 7 最大位移量：一連串數值累加後的絕對值之最大值。

四、研究工具

R 軟體程式編碼（計算$\langle M'_n \rangle$與正負走法）、***Excel*** 軟體（輔助數學歸納法的證明）

五、研究流程圖

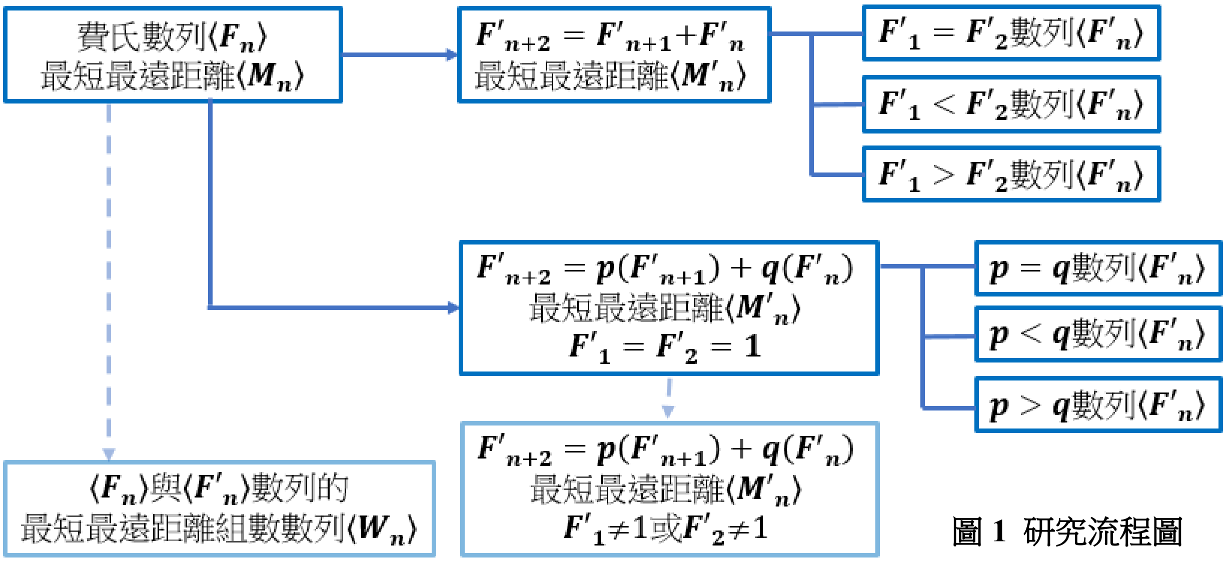


圖 1 研究流程圖

貳、文獻探討

一、原題（游森棚，2020 年）參[1].

費波那契(*Fibonacci*)先生想出去散散心。從位於原點的家門口出發，沿著數線共走五步，步長依次是 **1, 1, 2, 3, 5** 單位。每一步可以往數線的正方向或負方向走。但是他不想離家太遠。所以希望在散步的過程中，最遠的落腳處可以離家盡量近。

二、費氏數列（顏鎮軍，2001）參[2].

費氏數列$\langle F_n \rangle$：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$，前兩項相加會等於下一項，即

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 且 $F_1 = F_2 = 1$。

參、費氏數列 F_n

前面原題（**游森棚，2020 年**）中，想找出$n = 5$ 之 *Minimax*，我們以**圖 2** 示範兩個例子：

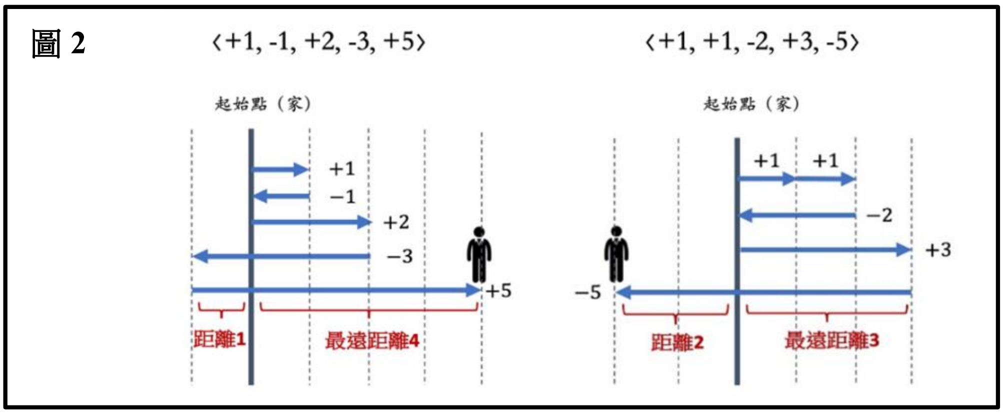


圖 2

以向右為正，由上圖右側得知當走法為$< +1, +1, -2, +3, -5 >$時，最遠距離是3，會比左側走法$< +1, -1, +2, -3, +5 >$的最遠距離是4來得短，所以$M_5 = 3$。從中發現：**最遠距離可能發生在最後一步或倒數第二步**，接著我們設法找出數列中「**所有n值**」之 ***Minimax*** 為何？

事實 1　如表 1，將費氏數列$\langle F_n \rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M_n \rangle$，並觀察其規律性。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\langle F_n \rangle$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
$\langle M_n \rangle$	1	1	2	2	3	4	7	11	18	28	45	72	117	189	306	494	799	1292

表 1

經由 *R* 軟體所運算出$\langle M_n \rangle$的結果，我們發現：若將$\langle F_n \rangle$各項加上某些數值再除以 2 後，會和$\langle M_n \rangle$各項對應相等，而這些數值會每 6 個為一循環，依序為$\langle 1,1,2,1,1,0 \rangle$，則$\langle F_n \rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M_n \rangle$與$\langle F_n \rangle$的關係式為$M_n = \frac{1}{2}(F_n + i)$，$n = 6k + j \begin{pmatrix} k\text{為非負整數，} \\ 1 \le j \le 6 \end{pmatrix}$，而$i$值依序為$\langle 1,1,2,1,1,0 \rangle$。為了證明上述$\langle M_n \rangle$與$\langle F_n \rangle$的關係式為真，我們必須先證明以下兩個引理：

引理 1　費氏數列$\langle F_n \rangle$中，前 *n* 項之和加 1 後等於第(*n*+2)項，即

$\sum_{k=1}^{n} f_k + 1 = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n + 1 = f_{n+2}$。

[證明] $\sum_{k=1}^{n} f_k + 1 = 1 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n$

$$= (f_2 + f_1) + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n$$

$$= (f_3 + f_2) + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n$$

$$= (f_4 + f_3) + f_4 + \cdots + f_{n-1} + f_n$$

$$= \cdots = (f_n + f_{n-1}) + f_n = f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$$，Q.E.D。

> **引理 2** 費氏數列$\langle F_n\rangle$的連續六項中，若賦予正負符號 $\langle - - - + + - \rangle$ 後，得到以下數列 $\langle -F_m, -F_{m+1}, -F_{m+2}, F_{m+3}, F_{m+4}, -F_{m+5}\rangle$，則前六項的最大位移量為 $F_{m+4} - F_m$ 或 $F_{m+5} - (F_{m+4} - F_m)$。

[證明] 由 *R* 軟體運算所有能走出$\langle M_n\rangle$的正負走法中，我們找出一組**具有規律性的通解**：

$\langle - - - + + - \rangle$，因為$F_{m+3} = F_{m+2} + F_{m+1}$，所以前五項的最大位移量只須考慮

$F_m + F_{m+1} + F_{m+2}$和$-F_m - F_{m+1} - F_{m+2} + F_{m+3} + F_{m+4} = F_{m+4} - F_m$，如**圖 3** 所示。

又$(F_{m+4} - F_m) - (F_m + F_{m+1} + F_{m+2})$

$= (F_{m+3} + F_{m+2} - F_m) - (F_m + F_{m+1} + F_{m+2})$

$= (F_{m+2} - F_m) - F_m$

$= F_{m+1} - F_m = F_{m-1} \geq 0 (m \geq 2)$

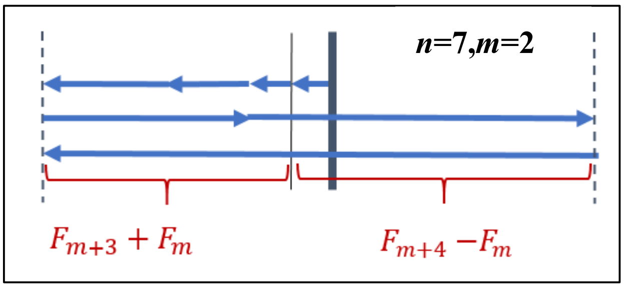


圖 3

所以前五項的最大位移量為 $F_{m+4} - F_m$，從而前六項的最大位移量為

$F_{m+4} - F_m$或 $F_{m+5} - (F_{m+4} - F_m) = (F_{m+5} - F_{m+4}) + F_m = F_{m+3} + F_m$，Q.E.D。

> **定理 1** 若數列滿足 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$且$F_1 = F_2 = 1$，則$\langle M_n\rangle$與$\langle F_n\rangle$的關係式為
>
> $$\begin{cases} n = 6k+1、6k+2、6k+4、6k+5，M_n = \frac{1}{2}(F_n + 1) \\ n = 6k+3，M_n = \frac{1}{2}(F_n + 2) \\ n = 6k+6，M_n = \frac{1}{2}(F_n + 0) \end{cases}$$ （k為非負整數）。

[證明] 由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對費氏數列$\langle F_n\rangle$的前六項，賦予正負符號

$\langle - \rangle$、$\langle + - \rangle$、$\langle + + - \rangle$、$\langle - + + - \rangle$、$\langle - - + + - \rangle$、$\langle - - - + + - \rangle$，第七項後則合併產生。

1. 當$n = 6k + 1$時，考慮前$(n-1)$項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M_n的情形：

$$< -1 - 1 - 2 - 3 + 5 + 8 - 13 - 21 - 34 - 55 + 89 + 144 - 233 >$$

$\rightarrow M_1 = 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{F_1+1}{2}$；$M_7 = 8-1-1+1 = 7 = \frac{13+1}{2} = \frac{F_7+1}{2}$；

$M_{13} = 144-21-13+7 = 123-6 = 117 = \frac{233+1}{2} = \frac{F_{13}+1}{2}$

設 $M_{h-6} = \frac{F_{h-6}+1}{2} (h \geq 7)$

且 $M_h = F_{h-1} - F_{h-5} - F_{h-6} + M_{h-6} = F_{h-1} - F_{h-5} - \frac{F_{h-6}-1}{2} = \frac{F_h+1}{2}$ 成立，

因為 $F_{h+5} = F_1 + F_2 + \cdots + F_{h+3} + 1$且$F_{h+1} = F_1 + F_2 + \cdots + F_{h-1} + 1$（引理 1）

所以 $F_{h+5} - F_{h+1} = F_{h+4} + F_{h+2} = F_h + F_{h+1} + F_{h+2} + F_{h+3}$（引理2）

推得 $F_{h+5} - F_{h+1} - \frac{F_h-1}{2} = \frac{F_h+1}{2} + F_{h+1} + F_{h+2} + F_{h+3}$

又左右兩式相加等於 $F_{h+5} + F_{h+2} + F_{h+3} + 1 = F_{h+5} + F_{h+4} + 1 = F_{h+6} + 1$

從而 $M_{h+6} = F_{h+5} - F_{h+1} - \frac{F_h-1}{2} = \frac{F_{h+6}+1}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k+1$ 時，$M_n = \frac{1}{2}(F_n+1)$。

2. 同理可證：$n = 6k+2$、$6k+4$、$6k+5$ 時，$M_n = \frac{1}{2}(F_n+1)$。

3. 同理可證：當$n = 6k+3$時，$M_n = \frac{1}{2}(F_n+2)$；當$n = 6k+6$時，$M_n = \frac{1}{2}(F_n+0)$，

Q.E.D。

肆、類費氏$F'_n(s \leq t)$數列

一、討論 $F'_1 = F'_2$ 情形

事實 2　將費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$，若$F'_1 = F'_2 = m$，

則$\langle F'_n\rangle = m \times \langle F_n\rangle$，且$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式恰為$\langle M_n\rangle$與$\langle F_n\rangle$的關係式之 *m* 倍。

$$\begin{cases} n = 6k+1, 6k+2, 6k+4, 6k+5\text{時，}M'_n = \frac{m}{2}(F_n+1) = \frac{1}{2}(F'_n+m) \\ n = 6k+3\text{時，}M'_n = \frac{m}{2}(F_n+2) = \frac{1}{2}(F'_n+2m) \\ n = 6k+6\text{時，}M'_n = \frac{m}{2}(F_n+0) = \frac{1}{2}(F'_n+0)\text{，}(m \in \mathbb{N}\text{，}k\text{為非負整數}) \end{cases}$$

二、討論 $F'_1 < F'_2$ 情形

事實 3　如表 2，將$\langle F'_n\rangle(s=1, t \geq 2)$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
類費氏數列$\langle F'_n \rangle$	1	t	t+1	2t+1	3t+2	5t+3	8t+5	13t+8	21t+13	34t+21	55t+34
$\langle M'_n \rangle, F'_2 = 2$ 或 3	1	t-1	2	2t-1	t+3	3t+1	4t+3	7t+3	10t+8	18t+9	27t+19
$\langle M'_n \rangle, F'_2 \geq 4$	1	t-1	t-1	2t-1	2t-1	3t+1	4t+3	7t+3	11t+5	18t+9	28t+15

項數n	12	13	14	15	16	17	18
類費氏數列$\langle F'_n \rangle$	89t+55	144t+89	233t+144	377t+233	610t+377	987t+610	1597t+987
$\langle M'_n \rangle, F'_2 = 2$ 或 3	45t+27	72t+45	117t+71	188t+118	306t+187	493t+307	799t+493
$\langle M'_n \rangle, F'_2 \geq 4$	45t+27	72t+45	117t+71	189t+115	306t+187	494t+303	799t+493

表 2

觀察數列後發現：$\langle F'_n \rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n \rangle$關係式為 $M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + i)$，$n = 6k + j$ $(k$為非負整數，$1 \leq j \leq 6)$，而i值依序為$\langle 1, |t-2|, |t-3|, |2t-3|, |t-4|, |t-1| \rangle$，$t \geq 2$。

為了方便之後說明，我們先證明以下引理：

引理 3　類費氏數列$\langle F'_n \rangle$的連續六項中，若賦予正負符號 $\langle - + + - + - \rangle$ 後，得到以下數列$\langle -F'_m, +F'_{m+1}, +F'_{m+2}, -F'_{m+3}, +F'_{m+4}, -F'_{m+5} \rangle$，

則前六項的最大位移量為 $F'_{m+4} - F'_m$ 或 $F'_{m+5} - (F'_{m+4} - F'_m)$。

[證明]　證明和**引理 2** 類似。

由 *R* 軟體運算所有能走出$\langle M'_n \rangle$的正負走法中，找出一組**具有規律性的通解**：$\langle - + + - + - \rangle$

定理 2　若數列滿足$(1) F'_1 = 1, F'_2 = t$（$t \geq 2$）；$(2) F'_{n+2} = F'_{n+1} + F'_n$，

則$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式
$$\begin{cases} n = 6k+1, & M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1) \\ n = 6k+2, & M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-2|] \\ n = 6k+3, & M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-3|] \\ n = 6k+4, & M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |2t-3|] \\ n = 6k+5, & M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-4|] \\ n = 6k+6, & M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-1|] \end{cases}$$
$(k$為非負整數$)$。

[證明] 由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的前六項，賦予正負符號$\langle - \rangle$、$\langle + - \rangle$、$\langle - + - \rangle$、$\langle + - + - \rangle$、$\langle - + - + - \rangle$、$\langle - + + - + - \rangle$，第七項後則合併產生。

1. 當$n = 6k + 1$時，考慮前$(n-1)$項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M'_n的情形：

$< -1 - t + (t+1) + (2t+1) - (3t+2) + (5t+3) - (8t+5) - (13t+8)$

$+(21t+13) + (34t+21) - (55t+34) + (89t+55) - (144t+89) >$

$\rightarrow M'_1 = 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{F'_1+1}{2}$；$M'_7 = (5t+3) - t - 1 + 1 = 4t + 3 = \frac{(8t+5)+1}{2} = \frac{F'_7+1}{2}$；

$M'_{13} = (89t+55) - (13t+8) - (8t+5) + (4t+3) = 72t + 45 = \frac{(144t+89)+1}{2} = \frac{F'_{13}+1}{2}$。

設 $M'_{h-6} = \frac{F'_{h-6}+1}{2} (h \geq 7)$ ，且$M'_h = F'_{h-1} - F'_{h-5} - F'_{h-6} + M'_{h-6}$

$F'_{h-1} - F'_{h-5} - \frac{F'_{h-6}-1}{2} = \frac{F'_h+1}{2}$ 成立，

因為$F'_{h+5} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h+3} + t$且$F'_{h+1} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h-1} + t$(仿引理**1**)

所以 $F'_{h+5} - F'_{h+1} = F'_{h+4} + F'_{h+2} = F'_h + F'_{h+1} + F'_{h+2} + F'_{h+3}$

推得 $F'_{h+5} - F'_{h+1} - \frac{F'_h-1}{2} = \frac{F'_h+1}{2} + F'_{h+1} + F'_{h+2} + F'_{h+3}$

又左右兩式相加等於 $F'_{h+5} + F'_{h+2} + F'_{h+3} + 1 = F'_{h+5} + F'_{h+4} + 1 = F'_{h+6} + 1$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+5} - F'_{h+1} - \frac{F'_h-1}{2} = \frac{F'_{h+6}+1}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k + 1$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$。

2. 同理，$n = 6k + 2$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-2|]$；$n = 6k + 3$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-3|]$

$n = 6k + 4$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |2t-3|]$；$n = 6k + 5$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-4|]$；

$n = 6k + 6$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-1|]$，Q.E.D。

事實 4　如表 3，將$\langle F'_n \rangle (s \geq 2, t \geq s)$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n \rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
類費氏數列$\langle F'_n \rangle$	s	t	t+s	2t+s	3t+2s	5t+3s	8t+5s	13t+8s	21t+13s	34t+21s	55t+34s	89t+55s
$s \geq 3, s+1 \leq t < \frac{3}{2}s$ 最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	s	s	2s	2s	2t+s	3t+s	4t+3s	6t+5s	10t+8s	16t+12s	28t+17s	45t+27s
$s \geq 2,\ \frac{3}{2}s \leq t < 2s$ 最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	s	s	2s	2t-s	2t+s	3t+s	4t+3s	6t+5s	10t+8s	18t+9s	28t+17s	45t+27s
$s \geq 2,\ 2s \leq t < 3s$ 最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	s	t-s	2s	2t-s	t+3s	3t+s	4t+3s	7t+3s	10t+8s	18t+9s	27t+19s	45t+27s

$s \geq 2,\ 3s \leq t < 4s$ 最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	s	t-s	t-s	2t-s	t+3s	3t+s	4t+3s	7t+3s	11t+5s	18t+9s	27t+19s	45t+27s
$s \geq 2, t \geq 4s$ 最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	s	t-s	t-s	2t-s	2t-s	3t+s	4t+3s	7t+3s	11t+5s	18t+9s	28t+15s	45t+27s

表 3

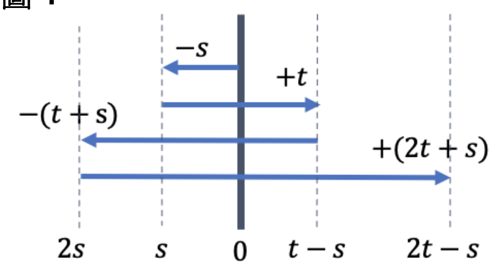
我們將類費氏數列$\langle F'_n \rangle$在 $F'_1 \geq 2$、$F'_2 \geq F'_1$ 時分為兩種情形，令$F'_1 = s, F'_2 = t$，則其一為$s + 1 \leq t < 2s$，另一為$t \geq 2s$，並列舉出一部分不同走法的圖示，說明如下：

1. $s + 1 \leq t < 2s$時（**表第一、二列**）

由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對類費氏數列$\langle F'_n \rangle$的前六項，以**第一步向負方向走開頭**，賦予數列正負符號$\langle - \rangle$、$\langle - + \rangle$、$\langle - + - \rangle$、$\langle - + - + \rangle$、$\langle - - + - + \rangle$、$\langle - + + - + - \rangle$，第七項後則合併產生。

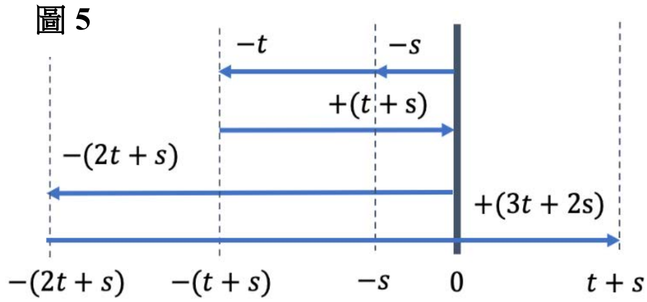
$n = 4$走法$\langle - + - + \rangle$，如**圖 4** 所示：

圖 4



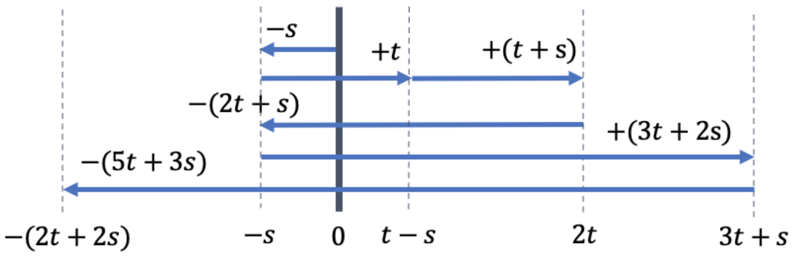
$n = 5$走法$\langle - - + - + \rangle$，如**圖 5** 所示：

圖 5



$n = 6$走法$\langle - + + - + - \rangle$，如**圖 6** 所示：

圖 6



2. $t \geq 2s$時（**表第三至五列**）

針對類費氏數列$\langle F'_n \rangle$的前六項，此時只有$n = 5$的走法 $\langle - + - + - \rangle$ 不同於 $s + 1 \leq t < 2s$時$n = 5$的走法 $\langle + + - + - \rangle$，如**圖 7** 所示：

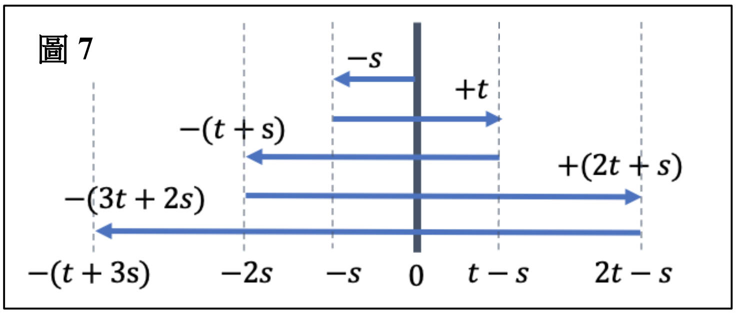


圖 7

觀察上表與上圖後，我們發現一些性質如下：

1. $n=2$(**表第二行**)時，M'_2由第一步走s後第二步相反方向走t得出，此時一邊距離原點s，另一邊則距離$t-s$，所以在$s+1\le t<2s$（**表第一、二列**）時，$1\le t-s<s$，與$t\ge 2\mathrm{s}$（**表第三至五列**）時$t-s\ge s$ 的 *Minimax* 取值不同。從而後面$n=6k+2$的M'_n取值跟著改變。$n=3$、$n=4$時，也可用同樣方法討論在不同t值範圍下的M'_n，從而後面$n=6k+3$、$6k+4$的M'_n取值也隨之改變。
2. $n=5$走第五步$3t+2s$後，依正負走法分為$s+1\le t<2s$、$t\ge 2\mathrm{s}$兩種情形：

   (1)$s+1\le t<2s$：走法為$\langle - - + - +\rangle$，一邊距原點$2t+s$，另一邊則距原點$t+s$，因為$2t+s>t+s$，所以M'_n為$2t+s$。

   (2)$t\ge 2\mathrm{s}$：走法為$\langle - + - + -\rangle$，一邊距原點$t+3s$，另一邊則距原點$2t-s$，因為在$2s\le \mathrm{t}<4s$(**表第三、四列**)時，$3s\le 2t-s<t+3s<7s$，所以M'_n應選擇離原點較遠的$t+3s$。而在 $t\ge 4\mathrm{s}$（**表第五列**）時M'_n又有所差異，因為$2t-s\ge t+3s$，所以其M'_n應為$2t-s$。從而後面 $n=6k+5$的M'_n取值也隨之改變。
3. $\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$關係式，也依$s+1\le t<2s$、$t\ge 2s$分為兩種情形：

   (1) $s+1\le t<2s$時，$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$關係式為$M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+i)$，$n=6k+j$ (k為非負整數，$1\le \mathrm{j}\le 6$)，而i值依序為$\langle s,|t-2s|,|t-3s|,|2t-3s|,t,|t-s|\rangle$。

   (2) $t\ge 2\mathrm{s}$ 時，i值依序為$\langle s,|t-2s|,|t-3s|,|2t-3s|,|t-4s|,|t-s|\rangle$。

因為$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式中，絕對值內會出現不同的s,t的一次式，因此將所有數列分成六部分，並列出不同t值區間的數列$\langle M'_n\rangle$如下：

定理 3 若數列滿足(1)$F'_1 \geq 2$ (2)$F'_1 < F'_2$，令$F'_1 = s$，$F'_2 = t$，k為非負整數，則

(i)當$s+1 \leq t < 2s$時，

$$\begin{cases} n = 6k+1，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + s) \\ n = 6k+2，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-2s|] \\ n = 6k+3，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-3s|] \\ n = 6k+4，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |2t-3s|] \\ n = 6k+5，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + t] \\ n = 6k+6，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-s|] \end{cases}$$

(ii)當$t \geq 2s$時，

$$\begin{cases} n = 6k+1，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + s) \\ n = 6k+2，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-2s|] \\ n = 6k+3，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-3s|] \\ n = 6k+4，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |2t-3s|] \\ n = 6k+5，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-4s|] \\ n = 6k+6，M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |t-s|] \end{cases}$$

[證明] 由 R 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的前六項，賦予正負符號$\langle - \rangle$、$\langle + - \rangle$、$\langle - + - \rangle$、$\langle + - + - \rangle$、$\langle + + - + - \rangle$或$\langle - + - + - \rangle$、$\langle - + + - + - \rangle$，第七項後則合併產生。

1. 當$n = 6k+1$時，考慮前$(n-1)$項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M'_n的情形：

$$< -s - t + (t+s) + (2t+s) - (3t+2s) + (5t+3s) - (8t+5s) - (13t+8s)$$
$$+(21t+13s) + (34t+21s) - (55t+34s) + (89t+55s) - (144t+89s) >$$

$$\rightarrow M'_1 = s = \frac{s+s}{2} = \frac{F'_1+s}{2}；M'_7 = (5t+3s) - t - s + s = 4t + 3s = \frac{(8t+5s)+s}{2} = \frac{F'_7+s}{2}；$$

$$M'_{13} = (89t+55s) - (13t+8s) - (8t+5s) + (4t+3s) = 75t + 45s = \frac{(144t+89s)+s}{2}$$
$$= \frac{F'_{13}+s}{2}。$$

設 $M'_{h-6} = \frac{F'_{h-6}+s}{2} (h \geq 7)$ 且 $M'_h = F'_{h-1} - F'_{h-5} - F'_{h-6} + M'_{h-6}$ (引理3)

$$= F'_{h-1} - F'_{h-5} - \frac{F'_{h-6}-s}{2} = \frac{F'_h+s}{2}$$ 成立，

因為 $F'_{h+5} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h+3} + t$

且 $F'_{h+1} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h-1} + t$ (仿引理1)

所以 $F'_{h+5} - F'_{h+1} = F'_{h+4} + F'_{h+2} = F'_h + F'_{h+1} + F'_{h+2} + F'_{h+3}$

推得 $F'_{h+5} - F'_{h+1} - \frac{F'_h-s}{2} = \frac{F'_h+s}{2} + F'_{h+1} + F'_{h+2} + F'_{h+3}$

又左右兩式相加等於 $F'_{h+5} + F'_{h+2} + F'_{h+3} + s = F'_{h+5} + F'_{h+4} + s = F'_{h+6} + s$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+5} - F'_{h+1} - \frac{F'_{h}-s}{2} = \frac{F'_{h+6}+s}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k+1$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + s)$。

2. 同理可證：

$n = 6k+2$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + (t-2s)]$；$n = 6k+3$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + (t-3s)]$；

$n = 6k+4$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + (2t-3s)]$；$n = 6k+6$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + (t-s)]$。

3. 當$n = 6k+5$時，考慮前$(n-1)$項，在$n = 5$，$n = 11$，$n = 17$產生M'_n的情形：

(1) $s+1 \le t < 2s$：$\langle + + - + - \rangle$

$< s + t - (t+s) + (2t+s) - (3t+2s) - (5t+3s) + (8t+5s) + (13t+8s)$

$-(21t+13s) + (34t+21s) - (55t+34s) - (89t+55s) + (144t+89s)$

$+(233t+144s) - (377t+233s) + (610t+377s) - (987t+610s) >$

$\rightarrow M'_5 = 2t+s = \frac{(3t+2s)+t}{2} = \frac{F'_5+t}{2}$；

$M'_{11} = (34t+21s) - (5t+3s) - (3t+2s) + (2t+s) = 28t+17s$

$= \frac{(55t+34s)+t}{2} = \frac{F'_{11}+t}{2}$；

$M'_{17} = (610t+377s) - (89t+55s) - (55t+34s) + (28t+17s)$

$= 494t+305s = \frac{(987t+610s)+t}{2} = \frac{F'_{17}+t}{2} = \frac{F'_{17}+t}{2}$。

同理設 $M'_{h-6} = \frac{F'_{h-6}+t}{2} (h \ge 11)$ 且由**引理3**可得$M'_h = \frac{F'_h+t}{2}$ 成立，

推知 $M'_{h+6} = \frac{F'_{h+6}+t}{2}$。則由數學歸納法得證：$n = 6k+5$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(M'_n + t)$。

(2) $t \ge 2s$：$\langle - + - + - \rangle$

$< -s + t - (t+s) + (2t+s) - (3t+2s) - (5t+3s) + (8t+5s) + (13t+8s)$

$-(21t+13s) + (34t+21s) - (55t+34s) - (89t+55s) + (144t+89s)$

$+(233t+144s) - (377t+233s) + (610t+377s) - (987t+610s) >$

$\rightarrow M'_5 = 2t-s = \frac{(3t+2s)+(t-4s)}{2} = \frac{F'_5+(t-4s)}{2}$；

$M'_{11} = (34t+21s) - (5t+3s) - (3t+2s) + (2t-s) = 28t+15s$

$=\frac{(55t+34s)+(t-4s)}{2}=\frac{F'_{11}+(t-4s)}{2}$；

$M'_{17}=(610t+377s)-(89t+55s)-(55t+34s)+(28t+15s)=494t+303s$

$=\frac{(987t+610s)+(t-4s)}{2}=\frac{F'_{17}+(t-4s)}{2}=\frac{F'_{17}+(t-4s)}{2}$。

同理設 $M'_{h-6}=\frac{F'_{h-6}+(t-4s)}{2}(h\geq 11)$ 且由引理3可得$M'_h=\frac{F'_h+(t-4s)}{2}$ 成立，

推知$M'_{h+6}=\frac{F'_{h+6}+(t-4s)}{2}$。

由數學歸納法可知：$n=6k+5$ 時，$M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+(t-4s)]$，Q.E.D。

伍、類費氏$F'_n(s>t)$數列

接下來，我們將討論的是$s>t$的情形，以類費氏數列$\langle F'_n\rangle$當$s=2$、$t=1$為例，而此數列$\langle F'_n\rangle$也稱為盧卡斯數列，即$F'_{n+2}=F'_{n+1}+F'_n$且$F'_1=2$、$F'_2=1$。

事實 5　如表 4，將$\langle F'_n\rangle(s=2,t=1)$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
類費氏數列$\langle F'_n\rangle$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521
最短最遠距離$\langle M'_n\rangle$	2	2	2	2	4	6	10	15	24	38	62	100	162	261

表 4

觀察以上數列後發現：$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$關係式為 $M_n=\frac{1}{2}(F_n+i)$，$n=6k+j$ $(k\in\mathbb{N}$，$1\leq j\leq 6)$，而i值依序為$\langle 2,1,1,0,1,1\rangle$。

定理 4　若數列$\langle F'_n\rangle$滿足 (1)$F'_1=2$，$F'_2=1$；(2)$F'_{n+2}=F'_{n+1}+F'_n$，則$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為

$$\begin{cases} n=6k+1，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+2) \\ n=6k+2、6k+3、6k+5、6k+6，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+1)。 \\ n=6k+4，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+0)，(k\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

[證明] 由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n\rangle$的前六項，賦予正負符號 $\langle -\rangle$、$\langle -+\rangle$、$\langle +--\rangle$、$\langle -++-\rangle$、$\langle ++-+-\rangle$、$\langle -++-+-\rangle$，第七項後則合併產生。

1. 當$n=6k+1$時，考慮前$(n-1)$項，在$n=1$，$n=7$，$n=13$產生M'_n的情形：

$<-2-1+3+4-7+11-18-29+47+76-123+199-322>$

$\rightarrow M'_1 = 2 = \frac{2+2}{2} = \frac{F'_1+2}{2}$；$M'_7 = 11 - 1 - 2 + 2 = 10 = \frac{18+2}{2} = \frac{F'_7+2}{2}$；

$M'_{13} = 199 - 29 - 18 + 10 = 170 - 8 = 162 = \frac{322+2}{2} = \frac{F'_{13}+2}{2}$

設 $M'_{h-6} = \frac{F'_{h-6}+2}{2} (h \geq 7)$

且 $M'_h = F'_{h-1} - F'_{h-5} - F'_{h-6} + M'_{h-6} = F'_{h-1} - F'_{h-5} - \frac{F'_{h-6}-2}{2} = \frac{F'_h+2}{2}$ 成立，

因為 $F'_{h+5} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h+3} + 1$且$F'_{h+1} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h-1} + 1$

所以 $F'_{h+5} - F'_{h+1} = F'_h + F'_{h+1} + F'_{h+2} + F'_{h+3}$

推得 $F'_{h+5} - F'_{h+1} - \frac{F'_h-2}{2} = \frac{F'_h+2}{2} + F'_{h+1} + F'_{h+2} + F'_{h+3}$

又左右兩式相加等於 $F'_{h+5} + F'_{h+2} + F'_{h+3} + 2 = F'_{h+5} + F'_{h+4} + 2 = F'_{h+6} + 2$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+5} - F'_{h+1} - \frac{F'_h-2}{2} = \frac{F'_{h+6}+2}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k + 1$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 2)$。

2. 同理可證：$n = 6k + 2$、$n = 6k + 3$、$n = 6k + 5$、$n = 6k + 6$時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$；

$n = 6k + 4$時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 0)$，Q.E.D。

考慮 $\boldsymbol{s \geq 2}$、$\boldsymbol{t = 1}$ 的情形，得出$\langle F'_n \rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n \rangle$關係式如下：

定理 5 **若數列滿足(1)$\boldsymbol{F'_1 = s, F'_2 = 1}$（$\boldsymbol{s \geq 2}$）；(2)$\boldsymbol{F'_{n+2} = F'_{n+1} + F'_n}$，**

則$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$的前四項均為 $\boldsymbol{s}$；而 $\boldsymbol{n \geq 5}$時，$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$與$\langle \boldsymbol{F'_n} \rangle$的關係式為

$$\begin{cases} \boldsymbol{n = 6k + 1,\ M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + |s - 4|)} \\ \boldsymbol{n = 6k + 2,\ M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |2s - 5|]} \\ \boldsymbol{n = 6k + 3,\ M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |s - 3|]} \\ \boldsymbol{n = 6k + 4,\ 2 \leq s < 4,\ M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |s - 2|];\ s \geq 4,\ M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |s - 6|]} \\ \boldsymbol{n = 6k + 5,\ M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + 1]} \\ \boldsymbol{n = 6k + 6,\ 2 \leq s < 3,\ M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |s - 1|];\ s \geq 3,\ M'_n = \frac{1}{2}[F'_n + |s - 5|]} \end{cases}$$

[證明] 我們發現$s = 3,\ s \geq 4$和$s = 2$一樣，也各有特定的正負走法，其證明和**定理 2** 類似。

考慮 $t+1\le s<2t$、$s\ge 2t$ 兩種情形，得出$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$關係式如下：

定理 6 若數列滿足$(1)F'_2\ge 2$ $(2)F'_1>F'_2$，令$F'_1=s$，$F'_2=t$，

則 (i)當$t+1\le s<2t$時，$\langle M'_n\rangle$的前四項為 s，s，$2t$，$2t$；

(ii)當$s\ge 2t$時，$\langle M'_n\rangle$的前四項均為 s，而 $n\ge 5$時，$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為

$$\begin{cases} n=6k+1，t+1\le s<2t，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+s)；s\ge 2t，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+|s-4t|) \\ n=6k+2，t+1\le s<2t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|2s-3t|]；s\ge 2t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|2s-5t|] \\ n=6k+3，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-3t|] \\ n=6k+4，t+1\le s<4t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-2t|]；s\ge 4t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-6t|] \\ n=6k+5，\quad M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+t] \\ n=6k+6，t+1\le s<3t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-t|]；s\ge 3t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-5t|] \end{cases}$$

[證明] 我們發現$t+1\le s<2t,\ 2t\le s<3t, 3t\le s<4t, s\ge 4t$和$s=2, t=1$一樣，也各有特定的正負走法，其證明和**定理 3** 類似。

陸、廣義費氏$F'_n(p\le q, s=t=1)$數列

一、討論 $p=q\ge 2$ 情形

事實 6 如表 5，將$\langle F'_n，p=q=2，s=t=1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$	1	1	4	10	28	76	208	568	1552	4240	11584	31648
最短最遠距離$\langle M'_n\rangle$	1	1	2	6	14	40	108	296	808	2208	6032	16480

表 5

我們觀察以上數列發現了如下的定理：

定理 7 若數列滿足 $F'_{n+2}=2F'_{n+1}+2F'_n$且$F'_1=F'_2=1$，則$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為 $M'_n=F'_n-(\sum_{k=1}^{n-1}F'_k-2F'_{n-3})(n\ge 4)$。

[證明] 由 *R* 軟體運算 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n\rangle$的前六項，賦予正負符號$<->$、$<+-->$、$<++-->$、$<+++-->$、$<+-++-->$、$<++-++-->$，第七項後正負符號為$<+\cdots+++-++-->$。

1. 當$n = 6k + 1$時，考慮前n項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M'_n的情形：

$\langle -1 \rangle \rightarrow M'_1 = 1$；$< 1 + 1 + 4 - 10 + 28 + 76 - 208 >$，將原式變號，可得

$$M'_7 = 208 - (76 + 28 - 10 + 4 + 1 + 1) = 208 - 100 = 108；$$

$< 1 + 1 + 4 + 10 + 28 + 76 + 208 + 568 + 1552 - 4240 + 11584 + 31648 - 86464 >$

$\rightarrow M'_{13} = 86464 - [31648 + 11584 - 4240 + 1552 + 568 + 2 \times (208 + 10) - 108]$

$= 86464 - 41440 = 45024$；

設 $M'_h = F'_h - (\sum_{k=1}^{h-1} F'_k - 2F'_{h-3})(h \geq 7)$ 成立，

因為 $M'_{h+6} = F'_{h+6} - [F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} + F'_{h+2} + F'_{h+1} + 2(F'_h + F'_{h-3}) - M'_h]$

且 $M'_h = F'_h - (F'_{h-1} + F'_{h-2} - F'_{h-3} + F'_{h-4} + \cdots + F'_1)$

所以 $2(F'_h + F'_{h-3}) - M'_h = F'_h + F'_{h-1} + F'_{h-2} + F'_{h-3} + F'_{h-4} + \cdots + F'_1$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+6} - [F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} + F'_{h+2} + F'_{h+1} + F'_h + F'_{h-1} + \cdots + F'_1]$

$= F'_{h+6} - (\sum_{k=1}^{h+5} F'_k - 2F'_{h+3})$

由數學歸納法可知：$n = 6k + 1$ 時，$M'_n = F'_n - (\sum_{k=1}^{n-1} F'_k - 2F'_{n-3})$。

2. 同理可證：$n = 6k + 2 \sim 6k + 6$時，$M'_n = F'_n - (\sum_{k=1}^{n-1} F'_k - 2F'_{n-3})$，Q.E.D。

事實 7　如表 6，將$\langle F'_n$，$p = q = 3$，$s = t = 1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n \rangle$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\langle F'_n \rangle$	1	1	6	21	81	306	1161	4401	16686	63261	239841	909306
$\langle M'_n \rangle$	1	1	4	13	52	196	745	2824	10708	40597	153916	583540

表 6

我們觀察以上數列發現了如下的定理：

> **定理 8　若數列滿足 $F'_{n+2} = pF'_{n+1} + qF'_n$，$p, q \in \mathbb{N}$ 且$F'_1 = F'_2 = 1$，**
>
> **$p = q = m \geq 3$，則$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式為 $M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k (n \geq 3)$。**

[證明] 如表 7，由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對廣義費氏數列$\langle F'_n \rangle$的各項，

賦予正負符號$< \cdots + + + + + + - >$。

項數n	1	2	3	4	5	6
廣義費氏數列$\langle F'_n \rangle$	1	1	2m	$2m^2$+m	$2m^3$+$3m^2$	$2m^4$+$5m^3$+m^2
最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	1	1	2m-2	$2m^2$-m-2	$2m^3$+m^2-3m-2	$2m^4$+$3m^3$-$4m^2$-3m-2

表 7

1. $M'_3 = 2m - 2 > 1 + 1 \Rightarrow 2m > 4, m > 2$，

∴當$m \geq 3$時，$M'_3 = F'_3 - (F'_1 + F'_2) > F'_1 + F'_2$，推得 $F'_3 > 2(F'_1 + F'_2)$。

2. $M'_4 = 2m^2 - m - 2 > 1 + 1 + 2m \Rightarrow 2m^2 - 3m - 4 > 0$，∴$m > \frac{3+\sqrt{41}}{4} \approx 2.35$。

∴當$m \geq 3$時，$M'_4 = F'_4 - (F'_1 + F'_2 + F'_3) > F'_1 + F'_2 + F'_3$，

推得 $F'_4 > 2(F'_1 + F'_2 + F'_3)$。

3. $M'_5 = 2m^3 + m^2 - 3m - 2 > 1 + 1 + 2m + (2m^2 + m) \Rightarrow 2m^3 - m^2 - 6m - 4 > 0$，

設 $f(m) = 2m^3 - m^2 - 6m - 4$，$g(m) = 2m^2 - 3m - 4$，

由除法原理可知：$f(m) = (m + 1)g(m) + m$。

所以當$m \geq 3$時，$g(m) \geq g(3) = 18 - 9 - 4 = 5$，從而 $f(m) \geq 4g(3) + 3 > 0$。

因此，$M'_5 = F'_5 - (F'_1 + F'_2 + F'_3 + F'_4) > F'_1 + F'_2 + F'_3 + F'_4$，

推得 $F'_5 > 2(F'_1 + F'_2 + F'_3 + F'_4)$。

4. $M'_6 = 2m^4 + 3m^3 - 4m^2 - 3m - 2 > 1 + 1 + 2m + (2m^2 + m) + (2m^3 + 3m^2)$

$\Rightarrow 2m^4 + m^3 - 9m^2 - 6m - 4 > 0$，

設 $h(m) = 2m^4 + m^3 - 9m^2 - 6m - 4$，$f(m) = 2m^3 - m^2 - 6m - 4$，

由除法原理可知：$h(m) = (m + 1)f(m) + (-2m + 4)$，

所以當$m \geq 3$時，$h(m) \geq 4f(3) - 2 > 0$。

因此，$M'_6 = F'_6 - (F'_1 + F'_2 + F'_3 + F'_4 + F'_5) > F'_1 + F'_2 + F'_3 + F'_4 + F'_5$，

推得 $F'_6 > 2(F'_1 + F'_2 + F'_3 + F'_4 + F'_5)$。

5. 設 $M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k > \sum_{k=1}^{n-1} F'_k > 0$ 且 $M'_{n+1} = F'_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} F'_k > \sum_{k=1}^{n} F'_k > 0$，

則 $F'_n > 2\sum_{k=1}^{n-1} F'_k$ 且 $F'_{n+1} > 2\sum_{k=1}^{n} F'_k \ (n \geq 7)$。

所以
$$\begin{aligned} F'_{n+2} - 2\sum_{k=1}^{n+1} F'_k &= m(F'_{n+1} + F'_n) - (\textstyle\sum_{k=1}^{n} F'_k + \sum_{k=1}^{n-1} F'_k + 2F'_{n+1} + F'_n) \\ &\geq 3(F'_{n+1} + F'_n) - (\textstyle\sum_{k=1}^{n} F'_k + \sum_{k=1}^{n-1} F'_k + 2F'_{n+1} + F'_n) \\ &= F'_{n+1} + 2F'_n - (\textstyle\sum_{k=1}^{n} F'_k + \sum_{k=1}^{n-1} F'_k) \\ &= (F'_{n+1} - \textstyle\sum_{k=1}^{n} F'_k) + (F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k) + F'_n > 0, \end{aligned}$$

推得 $F'_{n+2} - \sum_{k=1}^{n+1} F'_k > \sum_{k=1}^{n+1} F'_k$，從而 $M'_{n+2} = F'_{n+2} - \sum_{k=1}^{n+1} F'_k$。

由數學歸納法可知：$M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k \ (n \in \mathbb{N})$，Q.E.D。

二、討論 $p<q$ 情形

事實 8　如表 8，將$\langle F'_n$，$p=1$，$q=2$，$s=t=1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365
最短最遠距離$\langle M'_n\rangle$	1	1	2	3	6	11	22	43	86	171	342	683

表 8

若先將$\langle F'_n\rangle$加上 1 後再除以 2，則可得$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式。為了證明上述M'_n與F'_n的關係式為真，我們必須先證明以下引理：

引理 4　廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$，$p=1,q=2,F'_1=F'_2=1$中，前 $2n$ 項之和加 1 後等於第$(2n+1)$項，且前 $2n+1$ 項之和等於第$(2n+2)$項，

即 $\sum_{k=1}^{2n} f'_k+1=f'_{2n+1}$ 且 $\sum_{k=1}^{2n+1} f'_k=f'_{2n+2}, n\geq 1$。

[證明] (1)$\sum_{k=1}^{2n} f'_k+1=1+f'_1+f'_2+f'_3+\cdots+f'_{2n-1}+f'_{2n}$

$$=f'_1+f'_1+f'_2+f'_3+\cdots+f'_{2n-1}+f'_{2n}$$
$$=(2f'_1+f'_2)+f'_3+\cdots+f'_{2n-1}+f'_{2n}$$
$$=(2f'_3+f'_4)+f'_5+\cdots+f'_{2n-1}+f'_{2n}$$
$$=2f'_5+\cdots+f'_{2n-1}+f'_{2n}$$
$$=\cdots=(2f'_{2n-3}+f'_{2n-2})+f'_{2n-1}+f'_{2n}=2f'_{2n-1}+f'_{2n}=f'_{2n+1}$$ 。

(2)$\sum_{k=1}^{2n+1} f'_k=f'_1+f'_2+f'_3+\cdots+f'_{2n}+f'_{2n+1}$

$$=f'_2+f'_2+f'_3+\cdots+f'_{2n}+f'_{2n+1}$$
$$=(2f'_2+f'_3)+f'_4+\cdots+f'_{2n}+f'_{2n+1}$$
$$=(2f'_4+f'_5)+f'_6+\cdots+f'_{2n}+f'_{2n+1}$$
$$=2f'_6+\cdots+f'_{2n}+f'_{2n+1}$$
$$=\cdots=(2f'_{2n-2}+f'_{2n-1})+f'_{2n}+f'_{2n+1}=2f'_{2n}+f'_{2n+1}=f'_{2n+2}$$，Q.E.D。

定理 9　若數列滿足 $F'_{n+2}=F'_{n+1}+2F'_n$且$F'_1=F'_2=1$，則$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為

$$M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+1)$$

[證明]

由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的前六項，賦予正負符號

$< - >$、$< + - >$、$< + + - >$、$< - + + - >$、$< - - + + - >$、$< - - - + + - >$，

第七項後正負符號為$< - \cdots - - - - + + - >$。

1. 當$n = 6k + 1$時，考慮前$(n - 1)$項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M'_n的情形：

$\langle -1 \rangle \rightarrow M'_1 = 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{F'_1+1}{2}$；

$< -1 - 1 - 3 - 5 + 11 + 21 - 43 > \rightarrow M'_7 = 21 + 11 - 2 \times 5 = 22 = \frac{43+1}{2} = \frac{F'_7+1}{2}$；

$< -1 - 1 - 3 - 5 - 11 - 21 - 43 - 85 - 171 - 341 + 683 + 1365 - 2731 >$

$\rightarrow M'_{13} = 1365 + 683 - 2 \times 341 = 1366 = \frac{2731+1}{2} = \frac{F'_{13}+1}{2}$；

設 $M'_{h-6} = \frac{F'_{h-6}+1}{2} (h \geq 7)$ 且 $M'_h = F'_{h-1} + F'_{h-2} - 2F'_{h-3} = \frac{F'_h+1}{2}$ 成立，

因為 $F'_{h+5} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h+4}$且$F'_{h+4} = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h+3} + 1$(引理**4**)

所以 $F'_{h+5} + F'_{h+4} = 2(F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_{h+4}) - F'_{h+4} + 1$

$= 2F'_{h+5} - F'_{h+4} + 1$

推得 $F'_{h+5} + F'_{h+4} - 2F'_{h+3} = 2F'_{h+5} - F'_{h+4} - 2F'_{h+3} + 1$

$= 2F'_{h+5} - (F'_{h+4} + 2F'_{h+3}) + 1 = F'_{h+5} + 1$

又左右兩式相加等於

$2F'_{h+5} + F'_{h+4} - 2F'_{h+3} + 1 = 2F'_{h+5} + F'_{h+4} + (F'_{h+4} - F'_{h+5}) + 1$

$= (F'_{h+5} + 2F'_{h+4}) + 1 = F'_{h+6} + 1$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+5} + F'_{h+4} - 2F'_{h+3} = \frac{F'_{h+6}+1}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k + 1$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$。

2. 同理可證：$n = 6k + 2 \sim 6k + 6$時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$，Q.E.D。

事實 9 如表 9，將$\langle F'_n$，$p = 1$，$q = 3$，$s = t = 1 \rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n \rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n \rangle$	1	1	4	7	19	40	97	217	508	1159	2683	6160
最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	1	1	2	4	10	20	49	109	254	580	1342	3080

表 9

若先將$\langle F'_n \rangle$加上固定數值後再除以 2，這些固定數值會每 6 個為一循環，依序為$\langle 1,1,0,1,1,0 \rangle$，則$\langle F_n \rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式為 $M'_n = \frac{1}{2}(F_n + i)$，$n = 6k + j$ $(k$為非負整數，$1 \le j \le 6)$，而i值依序為$\langle 1,1,0,1,1,0 \rangle$。

定理 10　若數列滿足 $F'_{n+2} = F'_{n+1} + 3F'_n$且$F'_1 = F'_2 = 1$，則$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式為

$$\begin{cases} n = 6k+1、6k+2、6k+4、6k+5，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1) \\ n = 6k+3，n = 6k+6，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 0) \end{cases} (k\text{為非負整數})。$$

[證明] 由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的前六項，賦予正負符號$< - >$、$< + - >$、$< + + - >$、$< - + + - >$、$< - - + + - >$、$< - - - + + - >$，

第七項後正負符號為$< \cdots - - - + + + - - - + + - >$。

1. 當$n = 6k + 1$時，考慮前$(n-1)$項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M'_n的情形：

$\langle -1 \rangle \to M'_1 = 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{F'_1+1}{2}$；

$< 1 - 1 - 4 - 7 + 19 + 40 - 97 > \to M'_7 = 40 + 19 - 7 - 4 + 1 = 49 = \frac{97+1}{2} = \frac{F'_7+1}{2}$；

$< 1 - 1 - 4 - 7 + 19 + 40 + 97 - 217 - 508 - 1159 + 2683 + 6160 - 14209 >$

$\to M'_{13} = 6160 + 2683 - 1159 - 508 - 217 + 97 + 49 = 7105 = \frac{14209+1}{2} = \frac{F'_{13}+1}{2}$；

設 $M'_{h-6} = \frac{F'_{h-6}+1}{2} (h \ge 7)$

且 $M'_h = F'_{h-1} + F'_{h-2} - F'_{h-3} - F'_{h-4} - F'_{h-5} + F'_{h-6} + M'_{h-6}$

$= F'_{h-1} + F'_{h-2} - F'_{h-3} - F'_{h-4} - F'_{h-5} + \frac{3F'_{h-6}+1}{2} = \frac{F'_h+1}{2}$ 成立，

推得 $F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - F'_{h+2} - F'_{h+1} + \frac{3F'_h+1}{2}$

$= F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - F'_{h+2} - F'_{h+1} + \frac{3F'_h+1}{2}$

$= F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - (F'_{h+1} + 3F'_h) - F'_{h+1} + \frac{3F'_h+1}{2}$

$= F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - 2F'_{h+1} + \frac{-3F'_h+1}{2}$

又左右兩式相加等於

$2F'_{h+5} + 2F'_{h+4} - 2F'_{h+3} - F'_{h+2} - 3F'_{h+1} + 1$

$= 2F'_{h+5} + 2F'_{h+4} - 2F'_{h+3} - (F'_{h+2} + 3F'_{h+1}) + 1$

$= 2F'_{h+5} + 2F'_{h+4} - 3F'_{h+3} + 1$

$= F'_{h+5} + 2F'_{h+4} + (F'_{h+5} - 3F'_{h+3}) + 1$

$= F'_{h+5} + 2F'_{h+4} + F'_{h+4} + 1$

$= (F'_{h+5} + 3F'_{h+4}) + 1 = F'_{h+6} + 1$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - F'_{h+2} - F'_{h+1} + \frac{3F'_h+1}{2} = \frac{F'_{h+6}+1}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k+1$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$。

2. 同理可證：$n = 6k+2$、$6k+4$、$6k+5$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$。

3. 同理可證：$n = 6k+3$ 或 $6k+6$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 0)$，Q.E.D。

事實 10　如表 10，將$\langle \boldsymbol{F'_n}$，$\boldsymbol{p=1}$，$\boldsymbol{q=4}$，$\boldsymbol{s=t=1} \rangle$的 ***Minimax*** 寫成數列$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n \rangle$	1	1	5	9	29	65	181	441	1165	2929	7589	19305
最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	1	1	3	5	15	33	91	221	583	1465	3795	9653

表 10

若先將$\langle F'_n \rangle$加上 1 後再除以 2，則可得$\langle F'_n \rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式如下：

定理 11　**若數列滿足** $\boldsymbol{F'_{n+2} = F'_{n+1} + 4F'_n}$**且**$\boldsymbol{F'_1 = F'_2 = 1}$**，則**$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$**與**$\langle \boldsymbol{F'_n} \rangle$**的關係式為**

$$\boldsymbol{M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)}$$

[證明] 由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的前六項，賦予正負符號

$<->$、$<+->$、$<++->$、$<-++->$、$<+-++->$、$<-+-++->$，

第七項後正負符號為$<\cdots-+-+-+-++->$。

1. 當$n=6k+1$時，考慮前$(n-1)$項，在$n=1$，$n=7$，$n=13$產生M'_n的情形：

$\langle -1\rangle \rightarrow M'_1=1=\frac{1+1}{2}=\frac{F'_1+1}{2}$；$<1-1+5-9+29+65-181>$

$\rightarrow M'_7=65+29-9+5+1=91=\frac{181+1}{2}=\frac{F'_7+1}{2}$；

$<1-1+5-9+29-65+181-441+1165-2929+7589+19305-49661>$

$\rightarrow M'_{13}=19305+7589-2929+1165-441+181-2\times 65+91=24831$

$=\frac{49661+1}{2}=\frac{F'_{13}+1}{2}$；

設 $M'_{h-6}=\frac{F'_{h-6}+1}{2}(h\geq 7)$

且 $M'_h=F'_{h-1}+F'_{h-2}-F'_{h-3}+F'_{h-4}-F'_{h-5}+F'_{h-6}-2F'_{h-7}+M'_{h-6}$

$=F'_{h-1}+F'_{h-2}-F'_{h-3}+F'_{h-4}-F'_{h-5}-2F'_{h-7}+\frac{3F'_{h-6}+1}{2}=\frac{F'_h+1}{2}$ 成立，

推得 $F'_{h+5}+F'_{h+4}-F'_{h+3}+F'_{h+2}-F'_{h+1}-2F'_{h-1}+\frac{3F'_h+1}{2}$

$=F'_{h+5}+F'_{h+4}-F'_{h+3}+(F'_{h+1}+4F'_h)-F'_{h+1}-2F'_{h-1}+\frac{3F'_h+1}{2}$

$=F'_{h+5}+F'_{h+4}-F'_{h+3}+5F'_h-2F'_{h-1}+\frac{F'_h+1}{2}$

又左右兩式相加等於

$2F'_{h+5}+2(F'_{h+4}-F'_{h+3})+(F'_{h+2}-F'_{h+1})+7F'_h-4F'_{h-1}+1$

$=2F'_{h+5}+8F'_{h+2}+4F'_h+7F'_h-4F'_{h-1}+1$

$=2F'_{h+5}+8F'_{h+2}+11F'_h-4F'_{h-1}+1$

$=F'_{h+5}+(F'_{h+4}+4F'_{h+3})+8F'_{h+2}+11F'_h-4F'_{h-1}+1$

$=F'_{h+5}+F'_{h+4}+2(F'_{h+3}+4F'_{h+2})+2F'_{h+3}+12F'_h-(F'_h+4F'_{h-1})+1$

$=F'_{h+5}+3F'_{h+4}+2(F'_{h+4}-4F'_{h+2})+12F'_h-F'_{h+1}+1$

$=F'_{h+5}+4F'_{h+4}+F'_{h+4}-8F'_{h+2}+12F'_h-F'_{h+1}+1$

$=F'_{h+5}+4F'_{h+4}+(F'_{h+4}-4F'_{h+2})-4F'_{h+2}+12F'_h-F'_{h+1}+1$

$= F'_{h+5} + 4F'_{h+4} + F'_{h+3} - 4(F'_{h+2} - 4F'_{h}) - 4F'_{h} - F'_{h+1} + 1$

$= F'_{h+5} + 4F'_{h+4} + (F'_{h+3} - 4F'_{h+1}) - 4F'_{h} - F'_{h+1} + 1$

$= F'_{h+5} + 4F'_{h+4} + (F'_{h+2} - 4F'_{h}) - F'_{h+1} + 1$

$= (F'_{h+5} + 4F'_{h+4}) + 1 = F'_{h+6} + 1$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} + F'_{h+2} - F'_{h+1} - 2F'_{h-1} + \frac{3F'_{h}+1}{2} = \frac{F'_{h+6}+1}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k+1$ 時，$M'_{n} = \frac{1}{2}(F'_{n} + 1)$。

2. 同理可證：$n = 6k+2 \sim 6k+6$時，$M'_{n} = \frac{1}{2}(F'_{n} + 1)$，Q.E.D。

事實 11　如表 11，將$\langle F'_{n}$，$p = 2$，$q = 3$，$s = t = 1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_{n}\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_{n}\rangle$	1	1	5	13	41	121	365	1093	3281	9841	29525	88573
最短最遠距離$\langle M'_{n}\rangle$	1	1	3	7	21	61	183	547	1641	4921	14763	44287

表 11

若先將$\langle F'_{n}\rangle$加上 1 後再除以 2，則可得$\langle F'_{n}\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_{n}\rangle$與$\langle F'_{n}\rangle$的關係式如下：

定理 12　若數列滿足$F'_{n+2} = 2F'_{n+1} + 3F'_{n}$且$F'_{1} = F'_{2} = 1$，則$\langle M'_{n}\rangle$與$\langle F'_{n}\rangle$的關係式為

$$\boldsymbol{M'_{n} = \frac{1}{2}(F'_{n} + 1)}$$

[證明] 由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_{n}\rangle$的各項，賦予正負符號

$< \cdots + + + + + + - >$。

1. 當$n = 6k+1$時，考慮前n項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M'_{n}的情形：

$\langle -1\rangle \to M'_{1} = 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{F'_{1}+1}{2}$；$< 1+1+5+13+41+121-365 >$，將原式變號，可得

$M'_{7} = 365 - (1+1+5+13+41+121) = 365 - 182 = 183 = \frac{365+1}{2} = \frac{F'_{7}+1}{2}$；

$< 1+1+5+13+41+121+365+1093+3281+9841+29525+88573-265721 >$

$\to M'_{13} = 265721 - (88573 + 29525 + 9841 + 3281 + 1093 + 365 + 183 - 1)$

$= 265721 - 132860 = 132861 = \frac{265721+1}{2} = \frac{F'_{13}+1}{2}$；

設 $M'_{h-6}=\frac{F'_{h-6}+1}{2}(h\geq 7)$

且 $M'_h=F'_h-(F'_{h-1}+F'_{h-2}+F'_{h-3}+F'_{h-4}+F'_{h-5}+F'_{h-6}+M'_{h-6}-1)$

$=F'_h-(F'_{h-1}+F'_{h-2}+F'_{h-3}+F'_{h-4}+F'_{h-5}+\frac{3F'_{h-6}-1}{2})=\frac{F'_h+1}{2}$ 成立，

推得 $F'_{h+6}-(F'_{h+5}+F'_{h+4}+F'_{h+3}+F'_{h+2}+F'_{h+1}+\frac{3F'_h-1}{2})$

$=F'_{h+6}-\left[F'_{h+5}+F'_{h+4}+(2F'_{h+2}+3F'_{h+1})+F'_{h+2}+F'_{h+1}+\frac{3F'_h-1}{2}\right]$

$=F'_{h+6}-\left(F'_{h+5}+F'_{h+4}+3F'_{h+2}+4F'_{h+1}+\frac{3F'_h-1}{2}\right)$

又左右兩式相加等於

$2F'_{h+6}-(2F'_{h+5}+2F'_{h+4}+F'_{h+3}+4F'_{h+2}+5F'_{h+1}+3F'_h-1)$

$=2F'_{h+6}-[2F'_{h+5}+2F'_{h+4}+F'_{h+3}+4F'_{h+2}+3F'_{h+1}+(2F'_{h+1}+3F'_h)-1]$

$=2F'_{h+6}-(2F'_{h+5}+2F'_{h+4}+F'_{h+3}+5F'_{h+2}+3F'_{h+1}-1)$

$=2F'_{h+6}-[(F'_{h+6}-3F'_{h+4})+2F'_{h+4}+F'_{h+3}+3F'_{h+2}+(2F'_{h+2}+3F'_{h+1})-1]$

$=2F'_{h+6}-\left(F'_{h+6}-F'_{h+4}+(2F'_{h+3}+3F'_{h+2})-1\right)$

$=2F'_{h+6}-(F'_{h+6}-1)$

$=F'_{h+6}+1$

從而 $M'_{h+6}=F'_{h+6}-(F'_{h+5}+F'_{h+4}+F'_{h+3}+F'_{h+2}+F'_{h+1}+\frac{3F'_h-1}{2})=\frac{F'_{h+6}+1}{2}$。

由數學歸納法可知：$n=6k+1$ 時，$b'_n=\frac{1}{2}(M'_n+1)$。

2. 同理可證：$n=6k+2\sim 6k+6$時，$b'_n=\frac{1}{2}(M'_n+1)$，Q.E.D。

當$\boldsymbol{p=1}$，$\boldsymbol{q=5}$**或6**時，$\langle M'_n\rangle$和$\langle F'_n\rangle$在$n=1\sim 20$並沒有明確的關係，但$\boldsymbol{p=1,q\geq 7}$時卻有。

事實 12　如表 12，將$\langle \boldsymbol{F'_n}$，$\boldsymbol{p=1}$，$\boldsymbol{q=7}$，$\boldsymbol{s=t=1}\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle \boldsymbol{M'_n}\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$	1	1	8	15	71	176	673	1905	6616	19951	66263	205920
最短最遠距離$\langle M'_n\rangle$	1	1	6	8	46	92	401	960	3766	10485	36846	110240

表 12

我們觀察以上數列發現了如下的定理：

定理 13　若數列滿足 $\boldsymbol{F'_{n+2} = pF'_{n+1} + qF'_{n}}$，$\boldsymbol{p, q} \in \mathbb{N}$ 且$\boldsymbol{F'_1 = F'_2 = 1}$，$\boldsymbol{p = 1, q \geq 7}$

則$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$與$\langle \boldsymbol{F'_n} \rangle$的關係式為 $\boldsymbol{M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k\,(n \geq 7)}$。

[證明]

如表 12，由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的各項，賦予正負符號$< - >$、$< + - >$、$< + + - >$、 $< + - + - >$、$< + + + + - >$、$< - - + + + - >$，第七項後正負符號為$< \cdots + + + + + + + - >$，證明和**定理 8** 類似。

事實 13　如表 13，將$\langle \boldsymbol{F'_n}$，$\boldsymbol{p = 2}$，$\boldsymbol{q = 4}$，$\boldsymbol{s = t = 1} \rangle$的 ***Minimax*** 寫成數列$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n \rangle$	1	1	6	16	56	176	576	1856	6016	19456	62976	203776
最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	1	1	4	8	32	96	320	1024	3328	10752	34816	112640

表 13

我們觀察以上數列發現了如下的定理：

定理 14　若數列滿足 $\boldsymbol{F'_{n+2} = pF'_{n+1} + qF'_{n}}$，$\boldsymbol{p, q} \in \mathbb{N}$ 且$\boldsymbol{F'_1 = F'_2 = 1}$，$\boldsymbol{p = 2, q \geq 4}$，

則$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$與$\langle \boldsymbol{F'_n} \rangle$的關係式為 $\boldsymbol{M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k(n \geq 3)}$。

[證明]

如表 13，由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的各項，賦予正負符號$< \cdots + + + + + + + - >$，證明和**定理 8** 類似。

事實 14　如表 14，將$\langle \boldsymbol{F'_n}$，$\boldsymbol{p = 3}$，$\boldsymbol{q = 4}$，$\boldsymbol{s = t = 1} \rangle$的 ***Minimax*** 寫成數列$\langle \boldsymbol{M'_n} \rangle$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\langle F'_n \rangle$	1	1	7	25	103	409	1639	6553	26215	104857	419431	1677721
$\langle M'_n \rangle$	1	1	5	16	69	272	1093	4368	17477	69904	279621	1118480

表 14

我們觀察以上數列發現了如下的定理：

定理 15　若數列滿足 $F'_{n+2} = pF'_{n+1} + qF'_n$，$p, q \in \mathbb{N}$ 且$F'_1 = F'_2 = 1$，$p \geq 3, p \leq q$，則$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式為 $M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k \, (n \geq 3)$。

[證明] **如表 6 和表 14**，由 R 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的各項，

賦予正負符號$< \cdots ++++++-->$，利用**定理 8** 可得證。

柒、廣義費氏$F'_n(p > q, s = t = 1)$數列

事實 15 如表 15，將$\langle F'_n$，$p = 2$，$q = 1$，$s = t = 1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n \rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n \rangle$	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119
最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$	1	1	2	4	9	21	50	120	289	697	1682	4060

表 15

若先將$\langle F'_n \rangle$加上 1 後再除以 2，則可得$\langle F'_n \rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式如下：

定理 16　若數列滿足 $F'_{n+2} = 2F'_{n+1} + F'_n$且$F'_1 = F'_2 = 1$，則$\langle M'_n \rangle$與$\langle F'_n \rangle$的關係式為

$$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$$

[證明]　由 R 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n \rangle$的前六項，賦予正負符號

$<->$、$<+->$、$<++->$、$<-++->$、$<--++->$、$<+--++->$，

第七項後正負符號為$< \cdots ++--++--++->$。

1. 當$n = 6k + 1$時，考慮前$(n-1)$項與第n項，在$n = 1$，$n = 7$，$n = 13$產生M'_n的情形：

$\langle -1 \rangle \to M'_1 = 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{F'_1 + 1}{2}$；

$< 1 + 1 - 3 - 7 + 17 + 41 - 99 > \to M'_7 = 41 + 17 - 7 - 3 + 2 = 50 = \frac{99+1}{2} = \frac{F'_7 + 1}{2}$；

$< -1 - 1 + 3 + 7 - 17 - 41 + 99 + 239 - 577 - 1393 + 3363 + 8119 - 19601 >$

$\to M'_{13} = 8119 + 3363 - 1393 - 577 + 239 + 99 - 50 + 1 = 9801 = \frac{49661+1}{2} = \frac{F'_{13} + 1}{2}$；

設 $M'_{h-6} = \frac{F'_{h-6} + 1}{2} \, (h \geq 7)$

且 $M'_h = F'_{h-1} + F'_{h-2} - F'_{h-3} - F'_{h-4} + F'_{h-5} + F'_{h-6} - M'_{h-6} + 1$

$= F'_{h-1} + F'_{h-2} - F'_{h-3} - F'_{h-4} + F'_{h-5} + \frac{F'_{h-6}-1}{2} + 1 = \frac{F'_h+1}{2}$ 成立，

推得 $F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - F'_{h+2} + F'_{h+1} + \frac{F'_h-1}{2} + 1$

$= F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - (2F'_{h+1} + F'_h) + F'_{h+1} + \frac{F'_h-1}{2} + 1$

$= F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - F'_{h+1} - F'_h + \frac{F'_h-1}{2} + 1$

又左右兩式相加等於

$2F'_{h+5} + 2(F'_{h+4} - F'_{h+3}) - F'_{h+2} + 1$

$= 2F'_{h+5} + 2F'_{h+3} + 2F'_{h+2} - F'_{h+2} + 1$

$= 2F'_{h+5} + (2F'_{h+3} + F'_{h+2}) + 1 = (2F'_{h+5} + F'_{h+4}) + 1 = F'_{h+6} + 1$

從而 $M'_{h+6} = F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} - F'_{h+2} + F'_{h+1} + \frac{F'_h-1}{2} + 1 = \frac{F'_{h+6}+1}{2}$。

由數學歸納法可知：$n = 6k+1$ 時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$。

3. 同理可證：$n = 6k+2 \sim 6k+6$時，$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$，Q.E.D。

事實 16　如表 16，將$\langle F'_n$，$p = 3$，$q = 1$，$s = t = 1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$	1	1	4	13	43	142	469	1549	5116	16897	55807	184318
最短最遠距離$\langle M'_n\rangle$	1	1	2	7	24	80	265	876	2894	9559	31572	104276

表 16

我們觀察以上數列發現了如下的定理：

定理 17　若數列滿足 $F'_{n+2} = pF'_{n+1} + qF'_n$，$p, q \in \mathbb{N}$ 且$F'_1 = F'_2 = 1$，$p \geq 3, q = 1$

則$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為 $M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k\,(n \geq 3)$。

[證明] 如表 16，由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n\rangle$的各項，賦予正負符號

$< \cdots + + + + + + + - >$，證明和**定理 8** 類似。

事實 17　如表 17，將$\langle F'_n$，$p=3$，$q=2$，$s=t=1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$	1	1	5	17	61	217	773	2753	9805	34921	124373	442961
最短最遠距離$\langle M'_n\rangle$	1	1	3	10	37	132	471	1678	5977	21288	75619	270034

表 17

事實 18　如表 18，將$\langle F'_n$，$p=4$，$q=3$，$s=t=1\rangle$的 *Minimax* 寫成數列$\langle M'_n\rangle$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\langle F'_n\rangle$	1	1	7	31	145	673	3127	14527	67489	313537	1456615	6767071
$\langle M'_n\rangle$	1	1	5	22	105	488	2269	10542	48977	227536	1057077	4910918

表 18

我們觀察以上數列發現了如下的定理：

定理 18　若數列滿足 $F'_{n+2}=pF'_{n+1}+qF'_n$，$p,q\in\mathbb{N}$ 且$F'_1=F'_2=1$，$p\geq 3,q=2$ 或 $p\geq q,q\geq 3$，則$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為 $M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k\,(n\geq 3)$。

[證明]　如表 17、表 6 和表 18，由 *R* 軟體運算得 *Minimax* 的走法，我們針對$\langle F'_n\rangle$的各項，賦予正負符號$<\cdots+++++++->$，利用**定理 8** 即可得證。

捌、研究結論

一、若費氏數列$\langle F_n\rangle$的 *Minimax* 數列為$\langle M_n\rangle$，則兩者的關係式如下：

$$\begin{cases} n=6k+1,6k+2,6k+4,6k+5，M_n=\dfrac{1}{2}(F_n+1) \\ n=6k+3，M_n=\dfrac{1}{2}(F_n+2) \\ n=6k+6，M_n=\dfrac{1}{2}(F_n+0) \end{cases} \quad (k為非負整數)$$

若 $s=t=m$ 時，則$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式恰為$\langle M_n\rangle$與$\langle F_n\rangle$的關係式之 m 倍。

即 $n=6k+1,6k+2,6k+4,6k+5$，$M'_n=\frac{m}{2}(F_n+1)=\frac{1}{2}(F'_n+m)$；

$n=6k+3$，$M'_n=\frac{m}{2}(F_n+2)=\frac{1}{2}(F'_n+2m)$；$n=6k+6$，$M'_n=\frac{m}{2}F_n=\frac{1}{2}F'_n$。

二、若 $s<t$ 時，則類費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式如下：

1. $s\geq 1, t\geq 2s$時，
$$\begin{cases} n=6k+1，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+s) \\ n=6k+2，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-2s|] \\ n=6k+3，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-3s|] \\ n=6k+4，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|2t-3s|] \\ n=6k+5，\ M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-4s|] \\ n=6k+6，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-s|] \end{cases}(k\text{為非負整數})$$

2. $s\geq 2, s+1\leq t<2s$時，
$$\begin{cases} n=6k+1，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+s) \\ n=6k+2，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-2s|] \\ n=6k+3，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-3s|] \\ n=6k+4，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|2t-3s|] \\ n=6k+5，\ M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+t) \\ n=6k+6，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-s|] \end{cases}(k\text{為非負整數})$$

三、若 $s>t\geq 1$時，則類費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係如下：

1. $t+1\leq s<2t(t\geq 2)$時，$\langle M'_n\rangle$的前四項為 s，s，$2t$，$2t$；

2. $s\geq 2t$時，$\langle M'_n\rangle$的前四項均為 s，而 $n\geq 5$時，$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為

$$\begin{cases} n=6k+1，\ t+1\leq s<2t，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+s)；s\geq 2t，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+|s-4t|) \\ n=6k+2，t+1\leq s<2t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|2s-3t|]\ ；s\geq 2t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|2s-5t|] \\ n=6k+3，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-3t|] \\ n=6k+4，t+1\leq s<4t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-2t|]；s\geq 4t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-6t|] \\ n=6k+5，\ M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+t] \\ n=6k+6，t+1\leq s<3t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-t|]\ ；s\geq 3t，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|s-5t|] \end{cases}$$

四、 若 $p=q=2$ 時，則廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式

為 $M'_n=F'_n-(\sum_{k=1}^{n-1}F'_k-2F'_{n-3})(n\geq 4)$。

五、 若 $p=q\geq 3$ 時，則廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式

為 $M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k\,(n\geq 3)$。

六、 若 $p=1, q=2$ 或 $p=1, q=4$ 或 $p=2, q=1$ 或 $p=2, q=3$時，則廣義費氏

數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為 $M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+1)$。

七、 若 $p=1,q=3$ 時，則廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式

為 $\begin{cases} n=6k+1、6k+2、6k+4、6k+5，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+1) \\ n=6k+3，n=6k+6，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+0) \end{cases}$ $(k$為非負整數$)$。

八、 若 $p=1,q\geq 7$ 時，則廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式

為 $M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k\,(n\geq 7)$。

九、 若 $p=2,q\geq 4$ 或 $p\geq 3,p\leq q$ 時，則廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$的 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$

與$\langle F'_n\rangle$的關係式為 $M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k\,(n\geq 3)$。

十、 若 $p\geq 3,q=1$ 或 $p\geq 3,q=2$ 或 $p\geq q,q\geq 3$ 時，則廣義費氏數列$\langle F'_n\rangle$的

Minimax 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為 $M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k(n\geq 3)$。

玖、未來展望

一、在尋找費氏數列的 *Minimax* 數列$\langle M_n\rangle$時，我們發現其走法並不唯一，以$n=5$為例，$<+1,+1,-2,+3,-5>$與$<-1,-1,+2,+3,-5>$皆可完成最短的最遠距離，若將$\langle F_n\rangle$的各項對應的 *Minimax* 之走法數寫成數列$\langle W_n\rangle$，則$\langle W_n\rangle$與$\langle F_n\rangle$的關係式為何？

二、設二階遞迴數列$\langle F'_n\rangle$：$F'_{n+2}=pF'_{n+1}+qF'_n$，$p,q\in\mathbb{N}$，$F'_1\neq 1$或$F'_2\neq 1$，則其 *Minimax* 數列$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為何？

拾、參考資料

[1]. 游森棚（2020 年）。散步的費波那契—台灣網路科教館。

[2]. 顏鎮軍（2001 年）。從正五邊形談起。九章出版社。

[3]. 陳景祥（2016 年）。*R* 軟體：應用統計方法。台灣東華書局。

附錄一

R 軟體—計算$\langle M_n\rangle$與$\langle M'_n\rangle$的程式編碼

```
#步驟 1. 輸入參數
m= 18   #走 m 步
s= 1    #費氏數列第一項
t= 1    #費氏數列第二項
p= 1   #費氏數列前項係數
q=1    #費氏數列前前項係數
z= 9   #觀察目標參數變化到哪項
step_all=matrix(0,z,m)
Fibonacci_all=matrix(0,z,m)
for(t in c(1:z)){   #stpq 要隨著改

#步驟 2.生成廣義費氏數列前 m 項
Fibonacci=c()
Fibonacci[1]=s;    Fibonacci[2]=t
for(j in c(3:m)){
Fibonacci[j]=p*Fibonacci[j-1]+q*Fibonacci[j-2]
}

#步驟 3.對 m 步費氏數列窮舉所有走法
step=c()
for(n in c(1:m)){
N=2^n    #正負號的所有可能數量
LeftRight=matrix(0,2^n,n)
#創造一個矩陣來放正負 1
for(i in c(1:N)){ k=i-1
for(j in c(1:n)){
LeftRight[i,j]=k%%2   #取餘數
k=k%/%2               #取商
}}
LeftRight_PN=2*LeftRight-1#所有正負可能
F=Fibonacci[1:n]      #擷取需要數列長度
LeftRight_path=matrix(0,2^n,n)
for(i in c(1:N)){
LeftRight_path[i,]=LeftRight_PN[i,]*F
}
#步驟 4.為每一走法觀察停留位置
Position=LeftRight_path
#停留位置的矩陣
if (n>=2){
for(k in c(2:n)){
Position[,k]=Position[,k-1]+LeftRight_path[,k]
}
}


#步驟 5.為每一走法找出最遠距離
#其中的最小值為M_m
abs=c()
for(w in c(1:N)){
abs[w]=max(abs(Position[w,]))
}
step[n]=min(abs)
}
step_all[t,]=step                #stpq 要隨著改
Fibonacci_all[t,]=Fibonacci   #stpq 要隨著改
}


Fibonacci_all #為每一種參數對應的費氏數列
step_all      #為每一種參數對應的 M_m 值
```

【評語】050405

本研究將費氏數列 F(n)前 n 項賦予正號或負號，再從第 1 項累加到第 n 項，找出過程中依次累加後的絕對值之 Minimax。作者有不少的計算與推導，也用了電腦輔助計算。這個在費氏數列上做類似隨機漫步的題目，是蠻有意思的問題。但是用 R 語言來輔助解題，從所有能走出的正負走法中，找出最大位移量的正負組合，就比較可惜。因為，費氏數列是有規律的遞增數列，產生最大位移量的正負組合其實是可以分類通盤去考量分析的。其次，作者對於為何只需考慮 6 項為一個單位的循環組合，這一個重要的觀察，並未加以詳加說明，似乎也只是基於 R 程式計算結果的觀察而得，最後再以數學歸納法去加以證明。這個討論，繼續推廣到類費氏數列、廣義費氏數列，都是基於和 Theorem 1 一樣的作法。整體而言，作者算了不少東西，也做了很多觀察，但是對於數學分析能力的掌握度需要再加強。

作品簡報

戀家的費波那契

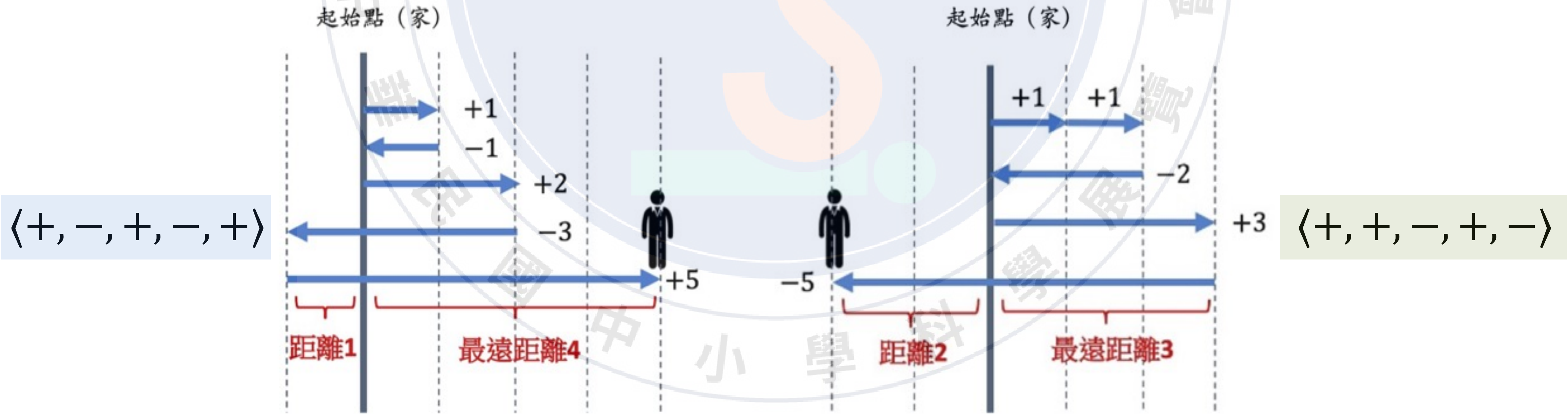
高中組 數學科

研究動機

「森棚教官的數學題」原題「散步的費波那契」：

自原點的家門口出發，共走五步，步長依次是 1,1,2,3,5 單位，每一步可以往數線的正方向或負方向走，但是他不想離家太遠，希望最遠的落腳處可以離家盡量近。

最短最遠距離



研究目的與架構

一、費氏數列

費氏數列$\langle F_n \rangle$
最短最遠距離$\langle M_n \rangle$

二、類費氏數列（改變初始值）

$F'_{n+2} = F'_{n+1} + F'_n$
最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$

- $F'_1 = F'_2$數列$\langle F'_n \rangle$
- $F'_1 < F'_2$數列$\langle F'_n \rangle$
- $F'_1 > F'_2$數列$\langle F'_n \rangle$

三、廣義費氏數列（改變遞迴關係）

$F'_{n+2} = p(F'_{n+1}) + q(F'_n)$
最短最遠距離$\langle M'_n \rangle$
$F'_1 = F'_2 = 1$

- $p = q$數列$\langle F'_n \rangle$
- $p < q$數列$\langle F'_n \rangle$
- $p > q$數列$\langle F'_n \rangle$

R軟體程式

```
> min(solution)
[1] 3
> LeftRight_path[which(solution==min(solution)),]
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    1    1   -2    3   -5
[2,]   -1   -1    2    3   -5
[3,]    1    1   -2   -3    5
[4,]   -1   -1    2   -3    5
```

Minimax M_n

項數n

Minimax 走法數 W_n

Minimax走法與$\langle F_n \rangle$

$$F'_{n+2} = F'_{n+1} + F'_n,\ F'_1 = s,\ F'_2 = t$$

項數n

```
> Fibonacci_all #為每一種參數對應的費氏數列
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12]
[1,]    1    1    2    3    5    8   13   21   34    55    89   144
[2,]    1    2    3    5    8   13   21   34   55    89   144   233
[3,]    1    3    4    7   11   18   29   47   76   123   199   322
[4,]    1    4    5    9   14   23   37   60   97   157   254   411
[5,]    1    5    6   11   17   28   45   73  118   191   309   500
[6,]    1    6    7   13   20   33   53   86  139   225   364   589
[7,]    1    7    8   15   23   38   61   99  160   259   419   678
[8,]    1    8    9   17   26   43   69  112  181   293   474   767
[9,]    1    9   10   19   29   48   77  125  202   327   529   856
> step_all      #為每一種參數對應的 M_(m )值
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12]
[1,]    1    1    2    2    3    4    7   11   18    28    45    72
[2,]    1    1    2    3    5    7   11   17   28    45    73   117
[3,]    1    2    2    5    6   10   15   24   38    63   100   162
[4,]    1    3    3    7    7   13   19   31   49    81   127   207
[5,]    1    4    4    9    9   16   23   38   60    99   155   252
[6,]    1    5    5   11   11   19   27   45   71   117   183   297
[7,]    1    6    6   13   13   22   31   52   82   135   211   342
[8,]    1    7    7   15   15   25   35   59   93   153   239   387
[9,]    1    8    8   17   17   28   39   66  104   171   267   432
```

$\langle F'_n \rangle$

費氏數列中M_5的“走法”

項數n

類費氏數列中的$\langle M'_n \rangle$

Minimax$\langle M'_n \rangle$

$\langle M_n \rangle$與$F'_1 = F'_2$的$\langle M'_n \rangle$

說明書p.3～p.5

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
費氏數列$\langle F_n \rangle$	+1	−1	−2	−3	−5	+8	+13	−21	−34	−55	−89	+144	+233	−377
最短最遠距離$\langle M_n \rangle$	1	1	2	2	3	4	7	11	18	28	45	72	117	189

$F'_1 = F'_2$的$\langle M'_n \rangle$特解走法：$\langle -\,-\,-\,+\,+\,- \rangle$

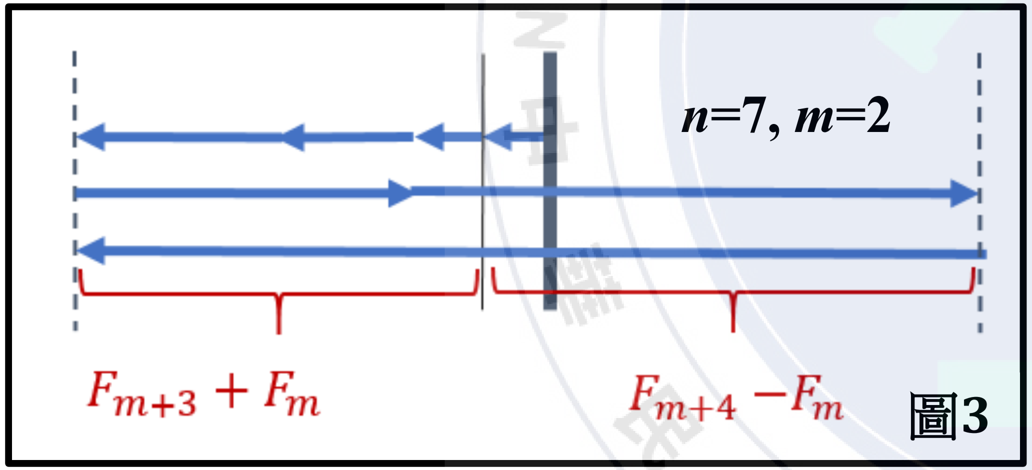


圖3

$$
\begin{cases}
n = 6k+1,\ M_n = \frac{1}{2}(F_n + 1) & \times m \\
n = 6k+2,\ M_n = \frac{1}{2}(F_n + 1) & \times m \\
n = 6k+3,\ M_n = \frac{1}{2}(F_n + 2) & \times m \\
n = 6k+4,\ M_n = \frac{1}{2}(F_n + 1) & \times m \\
n = 6k+5,\ M_n = \frac{1}{2}(F_n + 1) & \times m \\
n = 6k+6,\ M_n = \frac{1}{2}(F_n + 0) & \times m
\end{cases}
\Rightarrow M'_n
$$

，(k為非負整數)

引理2

前六項的最大位移量為 $F_{m+4} - F_m$ 或 $F_{m+5} - (F_{m+4} - F_m)$

且 $M_h = F_{h-1} - F_{h-5} - F_{h-6} + M_{h-6}$

$F'_1 < F'_2$的$\langle M'_n \rangle$

說明書p.5～p.12

賦予$\langle - \rangle$、$\langle + - \rangle$、$\langle -+- \rangle$、$\langle +-+- \rangle$、

$\langle ++-+- \rangle$ 或$\langle -+-+- \rangle$ 、$\langle -++-+- \rangle$正負符號

項數n	1	2	3	4	5	6
類費氏數列$\langle F'_n \rangle$	s	t	t+s	2t+s	3t+2s	5t+3s
$s+1 \le t < \frac{3}{2}s$	s	s	2s	2s	2t+s	3t+s
$\frac{3}{2}s \le t < 2s$	s	s	2s	2t-s	2t+s	3t+s
$2s \le t < 3s$	s	t-s	2s	2t-s	t+3s	3t+s
$3s \le t < 4s$	s	t-s	t-s	2t-s	t+3s	3t+s
$t \ge 4s$	s	t-s	t-s	2t-s	2t-s	3t+s

當$s+1 \le t < 2s(s \ge 2)$時

$$\begin{cases} n=6k+1，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+s) \\ n=6k+2，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-2s|] \\ n=6k+3，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-3s|] \\ n=6k+4，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|2t-3s|] \\ n=6k+5，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+t] \\ n=6k+6，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-s|] \end{cases}$$

當$t \ge 2s(s \ge 1)$時

$$n=6k+5，M'_n=\frac{1}{2}[F'_n+|t-4s|]$$

$F'_1 > F'_2$的$\langle M'_n \rangle$

$F'_1 = 2$，$F'_2 = 1$的$\langle M'_n \rangle$特解走法：$\langle - \rangle$、$\langle -\ + \rangle$、$\langle +-\ - \rangle$、$\langle -++\ - \rangle$、$\langle ++-+\ - \rangle$、$\langle -++-+\ - \rangle$

$$\begin{cases} n = 6k+1，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 2) \\ n = 6k+2，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1) \\ n = 6k+3，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1) \\ n = 6k+4，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 0) \\ n = 6k+5，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1) \\ n = 6k+6，M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1) \\ \qquad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$\boxed{M'_h = F'_{h-1} - F'_{h-5} - F'_{h-6} + M'_{h-6}}$$

$$\boxed{M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + i),\ \ n \geq 5}$$

當$F'_2 \geq 1$，$F'_1 > F'_2$時的i值

範圍	$t+1 \leq s < 2t$	$2t \leq s < 3t$	$3t \leq s < 4t$	$s \geq 4t$
$6k+1$	s	$\lvert s-4t \rvert$	$\lvert s-4t \rvert$	$\lvert s-4t \rvert$
$6k+2$	$\lvert 2s-3t \rvert$	$\lvert 2s-5t \rvert$	$\lvert 2s-5t \rvert$	$\lvert 2s-5t \rvert$
$6k+3$	$\lvert s-3t \rvert$	$\lvert s-3t \rvert$	$\lvert s-3t \rvert$	$\lvert s-3t \rvert$
$6k+4$	$\lvert s-2t \rvert$	$\lvert s-2t \rvert$	$\lvert s-2t \rvert$	$\lvert s-6t \rvert$
$6k+5$	t	t	t	t
$6k+6$	$\lvert s-t \rvert$	$\lvert s-t \rvert$	$\lvert s-5t \rvert$	$\lvert s-5t \rvert$

$F'_{n+2} = 2(F'_{n+1}) + 2(F'_n)$的$\langle M'_n \rangle$

說明書p.14~p.15

$F'_{n+2} = 2F'_{n+1} + 2F'_n$ 且 $F'_1 = F'_2 = 1$

項數n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\langle F'_n \rangle$	+1	+1	+4	+10	+28	+76	+208	+568	+1552	−4240	+11584	+31648	−86464
$\langle M'_n \rangle$	1	1	2	6	14	40	108	296	808	2208	6032	16480	45024

賦予 <−> 、<+−> 、<++−> 、<+++−> 、<+−++−> 、<++−++−>
七項後 <+⋯+++−++−>

設$M'_h = F'_h - (\sum_{k=1}^{h-1} F'_k - 2F'_{h-3})(h \geq 7)$ 成立，

利用M'_{h+6}與M'_h之間關係：$M'_{h+6} = F'_{h+6} - [F'_{h+5} + F'_{h+4} - F'_{h+3} + F'_{h+2} + F'_{h+1} + 2(F'_h + F'_{h-3}) - M'_h]$

推知 $M'_{h+6} = F'_{h+6} - (\sum_{k=1}^{h+5} F'_k - 2F'_{h+3})$

也成立，由數學歸納法可知：

$$M'_n = F'_n - (\sum_{k=1}^{n-1} F'_k - 2F'_{n-3})$$

$F'_{n+2}=p(F'_{n+1})+q(F'_n)$的$\langle M'_n\rangle$ 說明書p.15～p.16

$F'_{n+2}=pF'_{n+1}+qF'_n$，$p=q=m\geq 3$ 且 $p,q\in\mathbb{N}$，$F'_1=F'_2=1$

項數n	1	2	3	4	5	6
$\langle F'_n\rangle$	1	1	2m	2m^2+m	2m^3+3m^2	2m^4+5m^3+m^2
$\langle M'_n\rangle$	1	1	2m-2	2m^2-m-2	2m^3+m^2-3m-2	2m^4+3m^3-4m^2-3m-2

賦予正負符號< ⋯+++++++−>

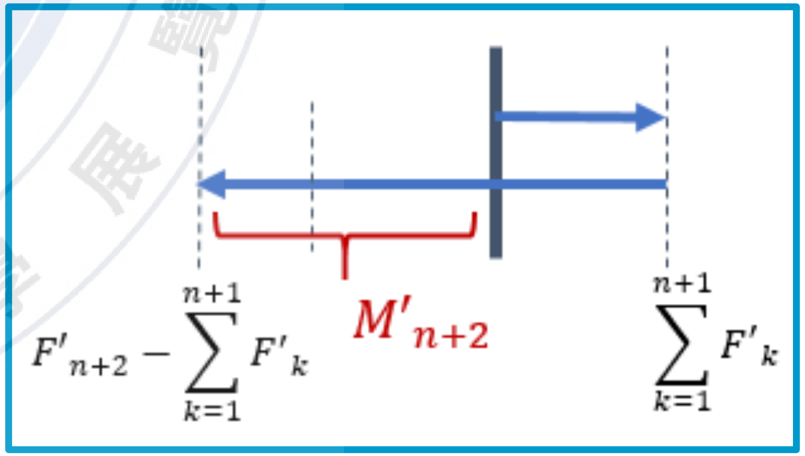
式1：$M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k>\sum_{k=1}^{n-1}F'_k>0$

$$\boxed{F'_n-2\sum_{k=1}^{n-1}F'_k>0}$$

除法原理：$f(m)=(m+1)g(m)+m$

M'_n、$M'_{n+1}\rightarrow M'_{n+2}$（此時$m\geq 3$）

由數學歸納法可知：$M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k\,(n\in\mathbb{N})$



$p=1,q\geq 7$ 或 $p=2,q\geq 4$ 或 $p\geq 3,p\leq q$

$p\geq 3,q=1$ 或 $p\geq 3,q=2$ 或 $p\geq q,q\geq 3$

結論

說明書p.28～p.29

$$F'_{n+2} = F'_{n+1} + F'_n$$

(1) $F'_1 = F'_2$

$$\boxed{M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + i)}$$

(2) $F'_1 < F'_2$

$$\boxed{M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + i)}$$

(3) $F'_1 > F'_2$

$$\boxed{M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + i)}$$

	(1) $s=t=m$	(2) $s+1 \le t < 2s$ $(s \ge 2)$	(2) $t \ge 2s$	(3) $t+1 \le s < 2t$ $(t \ge 2)$	(3) $2t \le s < 3t$	(3) $3t \le s < 4t$	(3) $s \ge 4t$
$n=6k+1$	$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + m)$	s	s	s	$\lvert s-4t\rvert$	$\lvert s-4t\rvert$	$\lvert s-4t\rvert$
$n=6k+2$	$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + m)$	$\lvert t-2s\rvert$	$\lvert t-2s\rvert$	$\lvert 2s-3t\rvert$	$\lvert 2s-5t\rvert$	$\lvert 2s-5t\rvert$	$\lvert 2s-5t\rvert$
$n=6k+3$	$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 2m)$	$\lvert t-3s\rvert$	$\lvert t-3s\rvert$	$\lvert s-3t\rvert$	$\lvert s-3t\rvert$	$\lvert s-3t\rvert$	$\lvert s-3t\rvert$
$n=6k+4$	$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + m)$	$\lvert 2t-3s\rvert$	$\lvert 2t-3s\rvert$	$\lvert s-2t\rvert$	$\lvert s-2t\rvert$	$\lvert s-2t\rvert$	$\lvert s-6t\rvert$
$n=6k+5$	$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + m)$	t	$\lvert t-4s\rvert$	t	t	t	t
$n=6k+6$	$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 0)$	$\lvert t-s\rvert$	$\lvert t-s\rvert$	$\lvert s-t\rvert$	$\lvert s-t\rvert$	$\lvert s-5t\rvert$	$\lvert s-5t\rvert$

結論

說明書p.29～p.30

$$F'_{n+2} = pF'_{n+1} + qF'_n \text{，} F'_1 = F'_2 = 1$$

(1) $p = q$

$p = q = 2$

$$M'_n = F'_n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} F'_k - 2F'_{n-3}\right) \quad (n \geq 4)$$

$p = q \geq 3$

$$M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k \quad (n \geq 3)$$

(2) $p > q$

$p = 2, q = 1$

$$M'_n = \frac{1}{2}(F'_n + 1)$$

$p \geq 3, q = 1$或
$p \geq 3, q = 2$或
$p \geq q, q \geq 3$

$$M'_n = F'_n - \sum_{k=1}^{n-1} F'_k \quad (n \geq 3)$$

$p=1,q=2$ 或 $p=1,q=4$ 或 $p=2,q=3$ $\qquad M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+1)$

(3) $p<q$

$p=1,q=3$
$$\begin{cases} n=6k+1、6k+2、6k+4、6k+5，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+1) \\ n=6k+3，n=6k+6，M'_n=\frac{1}{2}(F'_n+0) \end{cases}$$

$p=1,q\geq 7\ (n\geq 7)$
$p=2,q\geq 4$ 或 $p\geq 3,p\leq q(n\geq 3)$
$$M'_n=F'_n-\sum_{k=1}^{n-1}F'_k$$

未來展望

說明書p.29

一、若將$\langle F_n\rangle$的各項對應的最短最遠距離之走法數寫成數列$\langle W_n\rangle$，則$\langle W_n\rangle$與$\langle F_n\rangle$的關係式為何？

二、設二階遞迴數列$\langle F'_n\rangle$：$F'_{n+2}=pF'_{n+1}+qF'_n$，$p,q\in\mathbb{N}$，$F'_1\neq 1$或$F'_2\neq 1$，則其最短最遠距離$\langle M'_n\rangle$與$\langle F'_n\rangle$的關係式為何？