中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050403

化繁為簡—尋找最小值通式

學校名稱：國立斗六高級中學

作者：	指導老師：
高二 梁家佑 高二 莊羽旋 高二 周祐熒	王馨儀

關鍵詞：路徑、通式

摘 要

研究的方向是從「雙週一題」108 第一學期的第三題出發：**數列滿足 $X_0=2$ 與 $|x_k|=|x_{k-1}+1|$，$k\geqq 1$，求 $|x_1+x_2+\cdots+x_{2019}|$ 的最小值**。題目只做 2019 項的相加，我們想延伸到 n 項相加，若從「雙週一題」公布的解析思考，每換一個 n 值都要一個推導過程，才能得到答案，不那麼直接，少了「公式」精簡過程的精神。故我們要找一個代入 n 值就能得到答案的通式。

將分支做了定義，框出各層得到最小值的所有路徑，找出層間共通路徑，並由此推出最小值的通式。之後嘗試用程式－**貪婪法與窮舉法**、雙週一題概念、數學理論等方法驗證最小值通式、路徑的正確性。

數學式子猜想與通式，從無到有，經發想、找尋、推導到證明，完成了這份研究。

壹、 前言

數學是一門嚴謹的科學，自古以來被歸納出的通式皆是從看似無跡可循的數群中一層層分析推敲而得來的，我們想探討的，也不外乎從一個有無限多種可能性且難以推敲的算式中，找出可能隱含的規律性，並試著寫出通式。

108 學年度第一學期，中山大學應用數學系所舉辦的「雙週一題」第三題(108.10.18 公布 108.11.01 截止)，題目及公布的解法如下：

設一數列滿足 $X_0=2$ 與 ｜X_k｜=｜$X_{k-1}+1$｜， $k\geqq 1$，試求｜$X_1+X_2+\cdots+X_{2019}$｜的最小值。

解答： 已知 $|x_k|=|x_{k-1}+1|$，所以將方程式兩邊平方去掉絕對值，得到：

$$x_k^2=x_{k-1}^2+2x_{k-1}+1\Rightarrow x_k^2-x_{k-1}^2=2x_{k-1}+1$$

因此

$$\begin{aligned} x_1^2-x_0^2&=2x_0+1\\ x_2^2-x_1^2&=2x_1+1\\ &\vdots\\ x_{2020}^2-x_{2019}^2&=2x_{2019}+1 \end{aligned}$$

將 2020 條方程式作加總，可得：

$$x_{2020}^2=2\left(x_1+x_2+\cdots+x_{2019}\right)+2028$$

因此 $|x_1+x_2+\cdots+x_{2019}|=\frac{|x_{2020}^2-2028|}{2}$。

直接帶入可得到：當 $k=1$ 時，$x_1=\{-3,3\}$，$k=2$ 時，$x_2=\{-4,-2,2,4\}\cdots$，

所以由歸納法我們可推得 $x_{2020}=\{-2022,-2020,\ldots,44,46,\ldots,2020,2022\}$。

所以我們取 $x_{2020}=46$ (因為 $46^2=2116$ 最接近 2028)，因此 $|x_1+x_2+\cdots+x_{2019}|=\left|\frac{(2116-2028)}{2}\right|=44$。

公布的解析，剩一個變數要找，不過要解出 $x_{2020}\in\{-2022,-2020,\ldots,44,46,\ldots,2020,2022\}$，再找平方後最接近 2028 的數。如果改任意 n 項相加，n 為正整數，找 $|x_1+x_2+\ldots+x_n|$ 最小值，如公布的解析，要先找最末項，例、 $x_3\in\{-5,-3,-1,1,3,5\}$， $x_4\in\{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$， $x_5\in\{-7,-5,-1,1,3,5,7\}$， $x_6\in\{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}\cdots$，再找平方後最接近 $n+9$ 的數。

所以要求 $|x_1+x_2+\ldots+x_n|$ 最小值，先找 $x_{n+1}\in\{-(n+3),-(n+1),\ldots,n+1,n+3\}$，(1)若 $n+1$ 為偶數，找範圍內偶數(2)若 $n+1$ 為奇數，找範圍內奇數，平方後最接近 $n+9$ 的數。但這樣的方法， n 值改都要再推算一下，才能得到答案。所以在想**是否存在一種規律、一個通式，只要代入 n 值就能得到答案?**

貳、 研究過程及方法

一、研究目的

「設一數列滿足 $x_0 = 2$ 且 $|x_k| = |x_{k-1}+1|, k \geq 1$，試求 $|x_1 + x_2 + ... + x_n|$ 的最小值」

(一)是否有**特定路徑的走法**，使 $|x_1 + x_2 + ... + x_n|$ 為最小值，對任意正整數 n。

(二)找出 $|x_1 + x_2 + ... + x_n|$ 最小值的通式，對任意正整數 n。

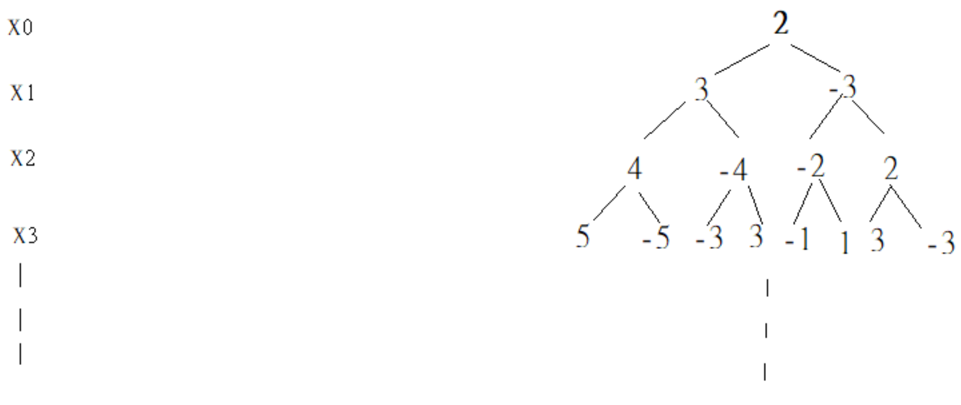
(三)呈(二)，當起始值 x_0 為任意實數，$|x_1 + x_2 + ... + x_n|$ 最小值通式

二、研究方法

(一)**定義**：

$$|x_k| = |x_{k-1}+1| \Rightarrow x_k = \pm(x_{k-1}+1) \Rightarrow \begin{cases} x_k = x_{k-1}+1(\text{路徑定向左下走,記為}0) \\ x_k = -(x_{k-1}+1)(\text{路徑定向右下走,記為}1) \end{cases}$$

(二)



例 $|x_1 + x_2 + x_3|$ 的所有情況有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 種：$|3+4+5| = 12$、$|3+4+(-5)| = 2$、$|3+(-4)+(-3)| = 4$、$|3+(-4)+3| = 4$、$|(-3)+(-2)+(-1)| = 6$、$|(-3)+(-2)+1| = 4$、$|(-3)+2+3| = 2$、$|3+2+(-3)| = 2$

最小值為 2，上面能得最小值的對應走法分別為 001、110、111，下一頁統整幾層，來找共通路徑的規律。

$\lvert x_1+x_2+...+x_n \rvert$	$x_0=2$ 過程選擇	最小值	路徑
$\lvert x_1+x_2 \rvert$	$2\rightarrow$ (3,4)，值 7 (3,−4)，值 1 (−3,−2)，值 5 (−3,2)，值 1	1	 00 $\boxed{01}$ 10 $\boxed{11}$
$\lvert x_1+x_2+x_3 \rvert$	$2\rightarrow$ (3,4,5)，值 12 (3,4,−5)，值 2 (3,−4,−3)，值 4 (3,−4,3)，值 2 (−3,−2,−1)，值 6 (−3,−2,1)，值 4 (−3,2,3)，值 2 (−3,2,−3)，值 4	2	 000 $\boxed{001}$ 010 $\boxed{011}$ 100 101 $\boxed{110}$ 111
$\lvert x_1+x_2+x_3+x_4 \rvert$	$2\rightarrow$ (3,4,5,6)，值 18 (3,4,5,−6)，值 6 (3,4,−5,−4)，值 2 (3,4,−5,4)，值 6 (3,−4,−3,−2)，值 6 (3,−4,−3,2)，值 2 (3,−4,3,4)，值 6 (3,−4,3,−4)，值 2 (−3,−2,−1,−0)，值 6 (−3,−2,1,2)，值 2 (−3,−2,1,−2)，值 6 (−3,2,3,4)，值 6 (−3,2,3,−4)，值 2 (−3,2,−3,−2)，值 6 (−3,2,−3,2)，值 2	2	 0000 0001 $\boxed{0010}$ 0011 0100 $\boxed{0101}$ 0110 $\boxed{0111}$ 1000 $\boxed{1010}$ 1011 1100 $\boxed{1101}$ 1110 $\boxed{1111}$
$\lvert x_1+x_2+...+x_5 \rvert$	$2\rightarrow$ (3,4,5,6,7)，值 25 (3,4,5,6,−7)，值 11 (3,4,5,−6,−5)，值 1 (3,4,5,−6,5)，值 11 (3,4,−5,−4,−3)，值 5 (3,4,−5,−4,3)，值 1 (3,4,−5,4,5)，值 11 (3,4,−5,4,−5)，值 1	1	 00000 00001 $\boxed{00010}$ 00011 00100 $\boxed{00101}$ 00110 $\boxed{00111}$

$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_n \rvert$	$x_0=2$ 過程選擇	最小值	路徑
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_5 \rvert$	$2\rightarrow$	1	
	(3,–4,–3,–2 -1) ，值 7		01000
	(3,–4,–3,–2,1) ，值 5		01001
	(3,–4,–3,2,3) ，值 1		$\boxed{01010}$
	(3,–4,–3,2,–3) ，值 5		01011
	(3,–4,3,4,5) ，值 11		01100
	(3,–4,3,4,–5) ，值 1		$\boxed{01101}$
	(3,–4,3,–4,–3) ，值 5		01110
	(3,–4,3,–4,3) ，值 1		$\boxed{01111}$
	(–3,–2,–1,0,1) ，值 5		10000
	(–3,–2,–1,0,–1) ，值 7		10001
	(–3,–2,–1,0,1) ，值 5		10010
	(–3,–2,–1,0,–1) ，值 7		10011
	(–3,–2,1,2,3) ，值 1		$\boxed{10100}$
	(–3,–2,1,2,–3) ，值 5		10101
	(–3,–2,1,–2,–1) ，值 7		10110
	(–3,–2,1,–2,1) ，值 5		10111
	(–3,2,3,4,5) ，值 11		11000
	(–3,2,3,4,–5) ，值 1		$\boxed{11001}$
	(–3,2,3,–4,–3) ，值 5		11010
	(–3,2,3,–4,3) ，值 1		$\boxed{11011}$
	(–3,2,–3,–2,–1) ，值 7		11100
	(–3,2,–3,–2,1) ，值 5		11101
	(–3,2,–3,2,3) ，值 1		$\boxed{11110}$
	(–3,2,–3,2,–3) ，值 5		11111
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_6 \rvert$	$2\rightarrow$	3	
	(3,4,5,6,7,8) ，值 33		000000
	(3,4,5,6,7,-8) ，值 17		000001
	(3,4,5,6,-7,-6) ，值 5		000010
	(3,4,5,–6,-5,-4) ，值 3		$\boxed{000100}$
	(3,4,–5,–4,-3,-2) ，值 7		001000
	(3,–4,–3,–2,-1,0) ，值 7		010000
	(–3,2,3,4,5,6) ，值 17		100000
	(3,4,5,6,-7,-6) ，值 5		000011
	(3,4,5,–6,-5,4) ，值 5		000101
	(3,4,–5,–4,-3,2) ，值 3		$\boxed{001001}$
	⋮		⋮

(三) 找出共同有的規律走法

由第(二)部分，任意正整數n，$|x_1+x_2+...+x_n|$最小值，對應到的路徑，觀察彼此間**皆有**的特定規律，挑出其中一條容易推最小值的路徑整理一起，如下

$\lvert x_1+x_2+...+x_n \rvert$	最小值	有規律的路徑
$\lvert x_1 \rvert$	3	0
$\lvert x_1+x_2 \rvert$	1	01
$\lvert x_1+x_2+x_3 \rvert$	2	001
$\lvert x_1+x_2+...+x_4 \rvert$	2	0010
$\lvert x_1+x_2+...+x_5 \rvert$	1	00010
$\lvert x_1+x_2+...+x_6 \rvert$	3	000100
$\lvert x_1+x_2+...+x_7 \rvert$	$\boxed{0}$	0000100
$\lvert x_1+x_2+...+x_8 \rvert$	4	00000100
$\lvert x_1+x_2+...+x_9 \rvert$	1	000001000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{10} \rvert$	3	0000001000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{11} \rvert$	2	00000010000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{12} \rvert$	2	000000010000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{13} \rvert$	3	0000000100000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{14} \rvert$	1	00000000100000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{15} \rvert$	4	000000001000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{16} \rvert$	$\boxed{0}$	0000000001000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{17} \rvert$	5	00000000001000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{18} \rvert$	1	000000000010000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{19} \rvert$	4	0000000000010000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{20} \rvert$	2	00000000000100000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{21} \rvert$	3	000000000000100000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{22} \rvert$	3	0000000000001000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{23} \rvert$	2	00000000000001000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{24} \rvert$	4	000000000000010000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{25} \rvert$	1	0000000000000010000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{26} \rvert$	5	00000000000000100000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{27} \rvert$	$\boxed{0}$	000000000000000100000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{28} \rvert$	6	0000000000000000100000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{29} \rvert$	1	00000000000000001000000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{30} \rvert$	5	000000000000000001000000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{31} \rvert$	2	0000000000000000010000000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{32} \rvert$	4	00000000000000000010000000000000
$\lvert x_1+x_2+...+x_{33} \rvert$	3	000000000000000000100000000000000
⋮	⋮	⋮

参、研究結果

一、路徑：1 前面有幾個 0 之探討

滿足$|x_k|=|x_{k-1}+1|, k\geq 1$且$x_0=2$，對任意正整數$n$，找使$|x_1+x_2+...+x_n|$為最小值的共通路徑。由前幾項發現並猜想有其一$\boxed{\text{規律路徑}}$：前面$y$個 0、1 個 1、再$n-1-y$個 0(即一直向左下走，到某點向右下轉，再一直向左下走直到最後一數x_n)，看似比較容易推得最小值的通式 。

$\|x_1+x_2+...+x_n\|$	最小值	路徑	y	a_n	$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$	備註
$\|x_1\|$	3	0	1		1	y值欄除了框起的數，其餘兩兩同。可用高斯符號$\left\lfloor \frac{\ }{2} \right\rfloor$解決(同理，若同數出現三次就用÷3，再取高斯符號來做)
$\|x_1+x_2\|$	1	01	1		1	
$\|x_1+x_2+x_3\|$	2	001	2		2	
$\|x_1+x_2+...+x_4\|$	2	0010	2	a_1	2	
$\|x_1+x_2+...+x_5\|$	1	00010	3		3	
$\|x_1+x_2+...+x_6\|$	3	000100	3		3	
$\|x_1+x_2+...+x_7\|$	$\boxed{0}$	**0000100**	$\boxed{4}$		4	
$\|x_1+x_2+...+x_8\|$	4	00000100	5		4	
$\|x_1+x_2+...+x_9\|$	1	000001000	5		5	
$\|x_1+x_2+...+x_{10}\|$	3	0000001000	6		5	
$\|x_1+x_2+...+x_{11}\|$	2	00000010000	6		6	
$\|x_1+x_2+...+x_{12}\|$	2	000000010000	7	a_2	6	
$\|x_1+x_2+...+x_{13}\|$	3	0000000100000	7		7	
$\|x_1+x_2+...+x_{14}\|$	1	00000000100000	8		7	
$\|x_1+x_2+...+x_{15}\|$	4	000000001000000	8		8	
$\|x_1+x_2+...+x_{16}\|$	$\boxed{0}$	**0000000001000000**	$\boxed{9}$		8	
$\|x_1+x_2+...+x_{17}\|$	5	00000000001000000	10		9	
$\|x_1+x_2+...+x_{18}\|$	1	000000000010000000	10		9	
$\|x_1+x_2+...+x_{19}\|$	4	0000000000010000000	11		10	
$\|x_1+x_2+...+x_{20}\|$	2	00000000000100000000	11		10	
$\|x_1+x_2+...+x_{21}\|$	3	000000000000100000000	12		11	
$\|x_1+x_2+...+x_{22}\|$	3	0000000000001000000000	12	a_3	11	
$\|x_1+x_2+...+x_{23}\|$	2	00000000000001000000000	13		12	
$\|x_1+x_2+...+x_{24}\|$	4	000000000000010000000000	13		12	
$\|x_1+x_2+...+x_{25}\|$	1	0000000000000010000000000	14		13	
$\|x_1+x_2+...+x_{26}\|$	5	00000000000000100000000000	14		13	
$\|x_1+x_2+...+x_{27}\|$	$\boxed{0}$	000000000000000100000000000	15		14	

$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_n \rvert$	最小值	路徑	y	a_n	$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$	備註
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_{28} \rvert$	6	0000000000000000100000000000	16		14	
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_{29} \rvert$	1	00000000000000001000000000000	16		15	
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_{30} \rvert$	5	000000000000000001000000000000	17	a_4	15	
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_{31} \rvert$	2	0000000000000000010000000000000	17		16	
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_{32} \rvert$	4	00000000000000000010000000000000	18		16	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

【說明】推 y 值的步驟

(一)除了 $\lvert x_1+x_2+\ldots+x_n \rvert$ 和的最小值為 0 各列，y 值欄由上往下每兩兩同，可用 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$

(二)由表中 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$、$y$ 欄知，有些 $y \neq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$，但發現作些修改就能代表 y

(1) a_1 區(第一區) 對 y 值的修改：$\left\lfloor \frac{n+1+0}{2} \right\rfloor$

(2) a_2 區(第二區) 對 y 值的修改：$\left\lfloor \frac{n+1+1}{2} \right\rfloor$

(3) a_3 區(第三區) 對 y 值的修改：$\left\lfloor \frac{n+1+2}{2} \right\rfloor$

(4) a_4 區(第四區) 對 y 值的修改：$\left\lfloor \frac{n+1+3}{2} \right\rfloor$

(5)以此類推，a_k 區(第 k 區) 求 y 值的修改：$\left\lfloor \frac{n+1+(k-1)}{2} \right\rfloor$

(三)求 k

各區的數量依序為 7 個、9 個、11 個、13 個、...，成等差數列(先假設後面項也成等差，由此推導得的結果再做證明確認)。第 a_k 區的第一項 n 大於前 $a_1 \sim a_{k-1}$ 區的總數

$$n > \frac{項數 \times \left(2 \times 首項 + (項數-1) \times 公差\right)}{2}$$

$$\Rightarrow n > \frac{(k-1)\left(2 \times 7 + \left((k-1)-1\right) \times 2\right)}{2}$$

$$\Rightarrow n > (k-1)(k+5)$$

$$\Rightarrow k^2 + 4k - (5+n) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4-\sqrt{16-4 \cdot 1 \cdot (-(5+n))}}{2} < k < \frac{-4+\sqrt{16-4 \cdot 1 \cdot (-(5+n))}}{2}$$

$$\Rightarrow -2-\sqrt{n+9} < k < -2+\sqrt{n+9}$$

$$\therefore k < -2+\sqrt{n+9} \quad (取正)$$

得 $k-1 < -3+\sqrt{n+9}$

$k-1$為正整數，取整數可用**高斯符號**來幫忙，所以要修正的$k-1=\left[-3+\sqrt{n+9}\right]$。$a_k$區

(第k區) y值為$\left\lfloor\dfrac{n+1+(k-1)}{2}\right\rfloor$。求得$|x_1+x_2+\ldots+x_n|$前有 $\underline{\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]}$個 0

二、研究結果的應用

中山大學「雙週一題」第三題 108.10.18 公布，108.11.01 截止，答案為 44

設一數列滿足 $X_0=2$ 與 ｜X_k｜=｜$X_{k-1}+1$｜， $k\geqq1$，試求｜$X_1+X_2+\cdots+X_{2019}$｜的最小值。

【解】■**用自己算出的規律算式，路徑由**前面$\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0、1 個 1、再

$n-1-\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0，得到一樣的答案。

■因$\left[\dfrac{2019+1+\left[-3+\sqrt{2019+9}\right]}{2}\right]=\left[\dfrac{2062}{2}\right]=1031$ 所以，前有 1031 個 0、再 1 個 1、再 2019-1-1031=987 個 0

$$
\begin{aligned}
&|(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+\ldots+x_{1031})+(x_{1032})+(x_{1033}+\ldots+x_{2019})| \\
&=|(3+4+5+\ldots+46+47+\ldots+1033)+(-1034)+(-1033+\ldots.-47)| \\
&=|(3+4+5+\ldots+46)+(-1034)| \\
&=|1078-1034| \\
&=44
\end{aligned}
$$

從路徑的走法討論，代入「雙週一題」題目做檢查得到一樣的答案，前進了一步。下一步想推$|x_1+x_2+\ldots+x_n|$最小值的通式，對任意正整數n。

肆、討論

一、最小值通式之推導

一數列滿足$|x_k|=|x_{k-1}+1|, k\ge 1$且$x_0=2$，這裡要推$|x_1+x_2+...+x_n|$最小值的通式，對任何正整數$n$。前面已找到一條最小值走法

$\boxed{\textbf{規律路徑}}$：前先$\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0、中間 1 個 1、再$n-1-\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0

●令$\Delta=\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$

路徑	初始值 $x_0=2$
(1)前： Δ個 0	前面Δ個數，成等差數列：首項$x_1=3$ 和=$\dfrac{項數\times(2\times首項+(項數-1)\times公差)}{2}=\dfrac{\Delta(2\times3+(\Delta-1)\times1)}{2}=\dfrac{1}{2}\Delta^2+\dfrac{5}{2}\Delta$
(2)中： 1 個 1	第(1)部分的末項$=$首項$+($項數$-1)\times$公差$=3+(\Delta-1)\times1=2+\Delta$ 所以往右下支走，得此$-((2+\Delta)+1)=-3-\Delta$
(3)後：$(n-1-\Delta)$個 0	後面$n-1-\Delta$個數，也成等差數列： ■前一項$-3-\Delta$。後面這$n-1-\Delta$個數也成等差數列，首項$-2-\Delta$ ■算總和=$\dfrac{項數\times(2\times首項+(項數-1)\times公差)}{2}$ $=\dfrac{(n-1-\Delta)\times(2\times(-2-\Delta)+((n-1-\Delta)-1)\times1)}{2}$ $=\dfrac{(n-1-\Delta)(n-6-3\Delta)}{2}$ $=\dfrac{1}{2}\left(3\Delta^2+(9-4n)\Delta+(n^2-7n+6)\right)$ $=\dfrac{3}{2}\Delta^2+\dfrac{9-4n}{2}\Delta+\dfrac{n^2-7n+6}{2}$
合計	$2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\dfrac{n(n-7)}{2}$

$\therefore$ $|x_1+x_2+...+x_n|$的最小值為上三個部份的加總，即

$$\underline{\underline{|\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{5}{2}\Delta}}+\underline{\underline{(-3-\Delta)}}+\underline{\underline{\left(\frac{3}{2}\Delta^2+\frac{9-4n}{2}\Delta+\frac{n^2-7n+6}{2}\right)}}|=\left|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right|$$

其中 $\Delta=\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$　(兩個中括號都是高斯符號)

二、最小值通式之應用

用我們求得的 $|x_1+x_2+...+x_n|$ 最小值的通式 $\left|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right|$，其中

$\Delta=\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$，來求中山大學「雙週一題」108 上學期第三題

設一數列滿足 $X_0=2$ 與 $|X_k|=|X_{k-1}+1|$， $k\geqq 1$，試求 $|X_1+X_2+\cdots+X_{2019}|$ 的最小值。

【解】 $\Delta=\left[\frac{2019+1+\left[-3+\sqrt{2019+9}\right]}{2}\right]=\left[\frac{2020+\left[42\cdot...\right]}{2}\right]=\left[\frac{2020+42}{2}\right]=1031$

所以 $|x_1+x_2+...+x_{2019}|$ 最小值為 $|2(1031)^2+\left(6-2\times 2019\right)\times 1031+\frac{2019\times 2012}{2}|$

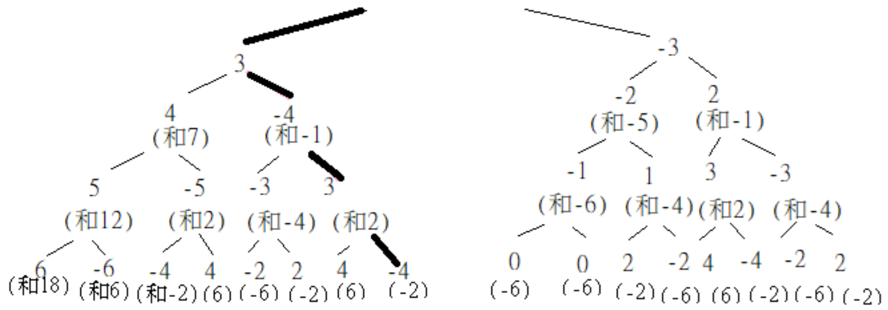
$$=|2125922-4156992+2031114|$$
$$=44$$

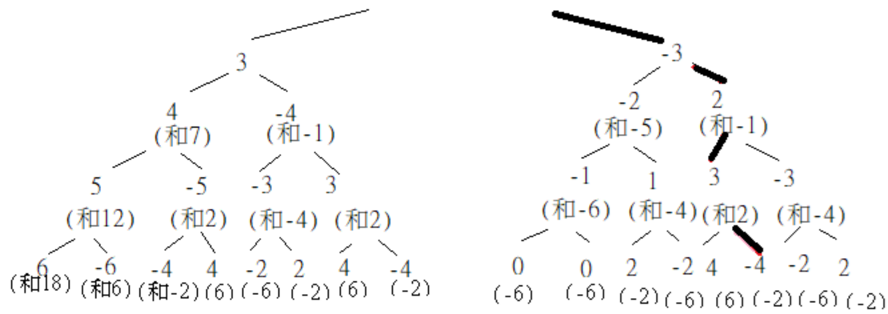
三、研究結果的證明－最小值通式的證明

(一) 軟體驗證－程式

①**窮舉法：**一開始想用程式語言直接跑出所有可能的結果找最小值，與通式的結果做比較，但實際執行後發現這方法行不通，因為電腦的記憶體是有限的，因 $1\text{G}=2^{30}$ B (B→KB→MB→GB)，例如｜$x_1+x_2+\cdots+x_{60}$｜，有 2^{60} 條要檢查，約 $2^{60}\times 60\,\text{B}$，換算成所需的記憶體有 $\frac{2^{60}\times 60}{2^{30}}\approx 644$億 G，但記憶體才幾 G 而已。實際上只能跑到二十七左右。

②第二種程式－貪婪法，加到某層時只選擇使總和為較小的分支，保留前路徑，繼續往下選分支，如下示意圖。這樣大大減低電腦的負擔，即使 n 很大，在幾秒內就能跑出結果。有趣地是各層結果跟我們通式代入 n 值一致。但這非窮舉法，仍需數學理論來證明。





(二) 利用雙週一題數學理論+EXCEL

從「雙週一題」的解析來做輔助驗證，雙週是 2019 項，我們把它延伸到 n 項。

$|x_k| = |x_{k-1}+1|$ 平方去掉絕對值，得 $x_k^2 = x_{k-1}^2 + 2x_{k-1} + 1 \Rightarrow x_k^2 - x_{k-1}^2 = 2x_{k-1}+1$

因此

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_0^2 &= 2x_0 + 1 \\ x_2^2 - x_1^2 &= 2x_1 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n+1}^2 - x_n^2 &= 2x_n + 1 \end{aligned}$$

將 n+1 條方程式作加總，得：$x_{n+1}^2 = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n + 1 + x_0^2 + 2x_0$

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = \frac{|x_{n+1}^2 - (n+9)|}{2}。$$

$x_3 \in \{-5,-3,-1,1,3,5\}$，$x_4 \in \{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$，$x_5 \in \{-7,-5,-1,1,3,5,7\}$，

$x_6 \in \{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}$，…，$x_{n+1} \in \{-(n+3),-(n+1),\ldots,n+1,n+3\}$，(1)若 $n+1$ 為偶數，找範圍內偶數(2)若 $n+1$ 為奇數，找範圍內奇數，平方後最接近 $n+9$ 的數。但這樣的方法，n 值改都要再推算一下，才能得到答案。

表(一)：為用雙週一題的解析+EXCEL，**n 值改都要再推算一下**(不方便)，而得的

$|x_k| = |x_{k-1}+1|, k \ge 1$ 且 $x_0 = 2$，$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$ 的最小值

表(二)：框起來部分為代入我們推的最小值通式 $\left|2\Delta^2 + (6-2n)\Delta + \dfrac{n(n-7)}{2}\right|$，其中

$$\Delta=\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$$，可以輸入任意正整數 n 來比對，結果一致。

表(一)

=(A3+9)^(1/2)

3

這裡需一個個手動填，n=2，n+1為奇數，所以從{5,3,1,-1,-3,-5}找接近3.31662479...的數

=ABS((C3^2-(A3+9))/2)

需一個個手填的數填好，才能計算最小值(不算通式，因每換幾項相加，還要找最接近的數)

	A	B	C	D
1	n	(n+9)^(1/2)	最接近(n+9)^(1/2)的整數	最小值
2	1	3.16227766	4	3
3	2	3.31662479	3	1
4	3	3.46410162	4	2
5	4	3.60555128	3	2
6	5	3.74165739	4	1
7	6	3.87298335	3	3
8	7	4	4	0
9	8	4.12310563	5	4
10	9	4.24264069	4	1
11	10	4.35889894	5	3
12	11	4.47213595	4	2
13	12	4.58257569	5	2
14	13	4.69041576		
15	14	4.79583152		
16	15	4.89897949		
17	16	5		
18	17	5.09901951		
19	18	5.19615242		
20	19	5.29150262		

n=5，n+1為偶數，從{8,6,4,2,0,-2,...,-8}手填最接近3.74165739..的數

表(二)

=ABS((2*INT((A2+1+(INT(-3+(A2+9)^(1/2))))/2)*INT((A2+1+(INT(-3+(A2+9)^(1/2))))/2))+(6-(2*A2))*INT((A2+1+(INT(-3+(A2+9)^(1/2))))/2)+A2*(A2-7)/2)

	B	C	D	E	F
1	(n+9)^(1/2)	最接近(n+9)^(1/2)的整數	最小值		我們推導的最小值通式 $\left\|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right\|$
2	3.16227766	4	3		3
3	3.31662479	3	1		1
4	3.46410162	4	2		2
5	3.60555128	3	2		2
6	3.74165739	4	1		1
7	3.87298335	3	3		3
8	4	4	0		0
9	4.12310563	5	4		4
10	4.24264069	4	1		1
11	4.35889894	5	3		3
12	4.47213595	4	2		2
13	4.58257569	5	2		2
14	4.69041576	4	3		3
15	4.79583152	5	1		1

其中 $\Delta=\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$

我們推的最小值通式，n值代入，就得到最小值

(三) 數學理論

前已用雙週的解法（可代任意正整數 n 檢查，但雙週解法比較費工夫)，驗證我們推的最小值通式正確性 $\left|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\dfrac{n(n-7)}{2}\right|$，其中 $\Delta=\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$。

這裡要對我們找的路徑 000⋯010⋯00 做個驗證，在前面已經檢驗最小值的正確性，而最小值是由這路徑推得，所以這路徑在某一處轉彎是各層共通會有的。以定義來看是一路往左下，到某處轉彎向右，之後再一路往左，以下再加些數學理論驗證。

路徑：前面 $\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$ 個 0、1 個 1、再 $n-1-\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$ 個 0

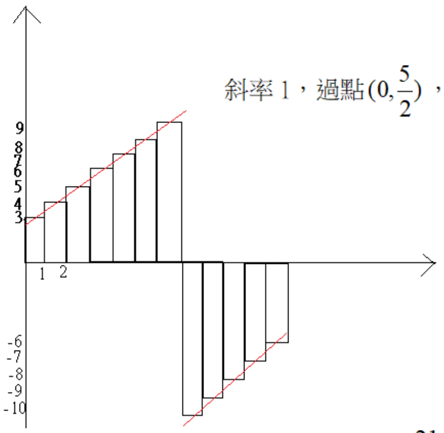
【例子】$n=12$ 時　$\Delta=\left[\dfrac{12+1+\left[-3+\sqrt{12+9}\right]}{2}\right]=7$

路徑 0　0　0　0　0　0　0　1　0　0　0　0

$$|x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}|$$

$$=|3+4+5+6+7+8+9+(-10)+(-9)+(-8)+(-7)+(-6)|=2$$

想成長條圖，再把**長條圖**改成過組中點直**線**下積分和，比較好運算



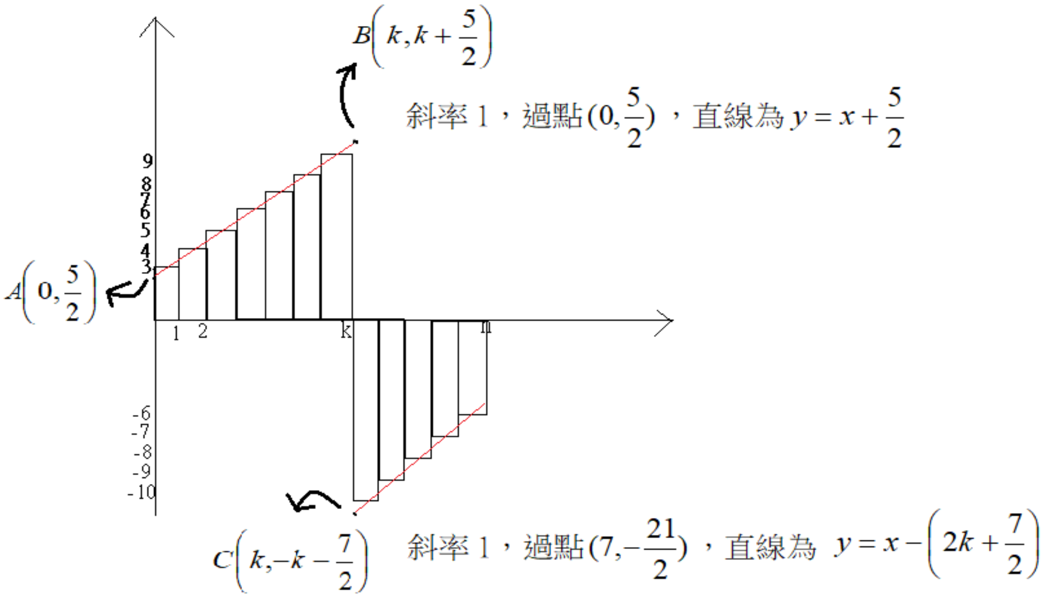
斜率 1，過點 $(0,\frac{5}{2})$，直線為 $y=x+\frac{5}{2}$

斜率 1，過點 $(7,-\frac{21}{2})$，直線為 $y=x-\frac{35}{2}$

$$和=\left|\frac{7\left(\frac{5}{2}+\frac{19}{2}\right)}{2}+\frac{5\left(-\frac{21}{2}+(-\frac{11}{2})\right)}{2}\right|=\left|\frac{84}{2}-\frac{80}{2}\right|=2$$

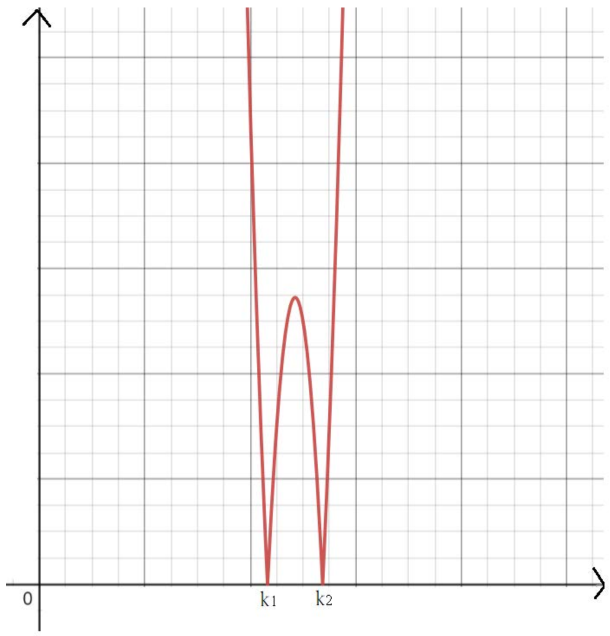
路徑：前面$\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0、1 個 1、再$n-1-\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0

【證明】第k步結束往右下選，證明$k=\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$，$k$為正整數。



■ $x_0=2$且$|x_k|=|x_{k-1}+1|, k\geq 1$，$|x_1+x_2+\ldots+x_n|=$

$$\left|\frac{k\left(\frac{5}{2}+(k+\frac{5}{2})\right)}{2}+\frac{(n-k)\left((-k-\frac{7}{2})+(n-2k-\frac{7}{2})\right)}{2}\right|=\left|2k^2+(6-2n)k+\frac{n^2-7n}{2}\right|$$圖如下



■ $|x_1+x_2+\ldots+x_n|=\left|2k^2+(6-2n)k+\dfrac{n^2-7n}{2}\right|$，發生最小值的 k ，為 k_1 或 k_2 附近的正整數，我們取 k_2 附近，最接近 k_2 的正整數(因我們找的路徑 n 增加， k 也遞增)。

$$2k^2+(6-2n)k+\frac{n^2-7n}{2}=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{-(6-2n)\pm\sqrt{(6-2n)^2-4\cdot 2\cdot\left(\dfrac{n^2-7n}{2}\right)}}{4}$$

$$\Rightarrow k=\frac{(2n-6)\pm\sqrt{4n+36}}{4}$$

$$\Rightarrow k=\frac{(n-3)\pm\sqrt{n+9}}{2}$$

也是借用 EXCEL，檢驗 k 跟我們推的 $\Delta=\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$ 一致，如下呈現一部分(可以利用 EXCEL 寫入函數，代任何正整數 n 檢查，是一致的)。其中 k 最接近 $k_2=\dfrac{(n-3)+\sqrt{n+9}}{2}$ 的正整數。

數學理論做檢驗

A	B	C
n	$\dfrac{(n-3)+\sqrt{n+9}}{2}$	最接近k2的正整數
1	0.58113883	1
2	1.158312395	1
3	1.732050808	2
4	2.302775638	2
5	2.870828693	3
6	3.436491673	3
7	4	4
8	4.561552813	5
9	5.121320344	5
10	5.679449472	6
11	6.236067977	6
12	6.791287847	7
13	7.34520788	7
14	7.897915762	8
15	8.449489743	8
16	9	9

我們從觀察路徑推出

A	B
n	△
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	5
9	5
10	6
11	6
12	7
13	7
14	8
15	8
16	9

四、延伸-更換初始值後之最小值通式

一數列滿足$|x_k|=|x_{k-1}+1|, k\geq 1$且初始值$\underline{x_0=2}$，能使$|x_1+x_2+...+x_n|$為最小值的

$\boxed{\text{規律路徑}}$：前$\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0、再 1、再$n-1-\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0

$\underline{\lvert x_1+x_2+...+x_n \rvert}$	初始值$\underline{x_0=2}$其一條規律路徑	初始值$\boxed{x_0=3}$其一條規律路徑
$\lvert x_1 \rvert$	0　（前 1 個 0）	0　（前 1 個 0）
$\lvert x_1+x_2 \rvert$	01　（前 1 個 0）	01　（前 1 個 0）
$\lvert x_1+x_2+x_3 \rvert$	001　（前 2 個 0）	001　（前 2 個 0）
$\lvert x_1+x_2+...+x_4 \rvert$	0010　（前 2 個 0）	0010　（前 2 個 0）
$\lvert x_1+x_2+...+x_5 \rvert$	00010　（前 3 個 0）	00010　（前 3 個 0）
$\lvert x_1+x_2+...+x_6 \rvert$	000100　（前 3 個 0）	000100　（前 3 個 0）
$\lvert x_1+x_2+...+x_7 \rvert$	0000100　（前 4 個 0）	0000100　（前 4 個 0）
$\lvert x_1+x_2+...+x_8 \rvert$	00000100　（前 5 個 0）	**00001000　（前 4 個 0）**
$\lvert x_1+x_2+...+x_9 \rvert$	000001000　（前 5 個 0）	
	⋮	⋮

由參之一，原推導到前$\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0 部分，會因起始值不同做些改變，這又是一個可以討論的大主題。

伍、 結論

一、一數列遵循此關係$|x_k|=|x_{k-1}+1|, k\geq 1$，對任意正整數$n$ ：

(一)當初使值$x_0=2$ ，，我們已推導出$|x_1+x_2+...+x_n|$最小值的通式為

$$\underline{\left|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right|}\text{，其中}\Delta=\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$$

(二)當初使值$x_0=a$，$|x_1+x_2+...+x_n|$最小值的通式，若有時間，是一個可再探討的主題。

二、感覺或許這樣數列最小值的討論能應用在生活上，但學識有限而不果，希望有機會發現。

陸、參考資料

中山大學應數系「雙週一題」歷屆 108 第一學期第三題 http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/

【評語】050403

此篇作品為化繁為簡—尋找最小值通式。作者一開始即提供了一種一般的解法。這問題是有趣的，但後續的工作反而是化簡為繁，且題目的設定不確定能夠有怎樣的延伸或應用，其內容中的數學性可以再更為豐富。

作品簡報

化繁為簡──尋找最小值通式

科別：數學科

組別：高級中等學校組

前言

研究動機

108學年度第一學期，中山大學所舉辦的「雙週一題」第三題(108.10.18公布108.11.01截止)，題目及公布的解法如下：

設一數列滿足$X_0=2$ 與 $|x_k|=|x_{k-1}+1|$， $k\geq1$，試求 $|x_1+x_2+...+x_{2019}|$的最小值。

解答： 已知 $|x_k|=|x_{k-1}+1|$，所以將方程式兩邊平方去掉絕對值，得到：

$$x_k^2=x_{k-1}^2+2x_{k-1}+1 \Rightarrow x_k^2-x_{k-1}^2=2x_{k-1}+1$$

因此

$$\begin{aligned} x_1^2-x_0^2&=2x_0+1\\ x_2^2-x_1^2&=2x_1+1\\ &\vdots\\ x_{2020}^2-x_{2019}^2&=2x_{2019}+1 \end{aligned}$$

將 2020 條方程式作加總，可得：

$$x_{2020}^2=2(x_1+x_2+\cdots+x_{2019})+2028$$

因此 $|x_1+x_2+\cdots+x_{2019}|=\frac{|x_{2020}^2-2028|}{2}$。
直接帶入可得到：當 $k=1$ 時，$x_1=\{-3,3\}$，$k=2$ 時，$x_2=\{-4,-2,2,4\}\cdots$，
所以由歸納法我們可推得 $x_{2020}=\{-2022,-2020,\ldots,44,46,\ldots,2020,2022\}$。
所以我們取 $x_{2020}=46$ (因為 $46^2=2116$ 最接近 2028)，因此 $|x_1+x_2+\cdots+x_{2019}|=\left|\frac{(2116-2028)}{2}\right|=44$。

- 題目只算2019項的相加，我們想研究對任意n項相加(n為正整數)，是否有最小值的通式?

由公布的解析思考，2019 項相加的討論剩一個變數要找，不過要解出

$x_{2020}\in\{-2022,-2020,...,44,46,...,2020,2022\}$，再找$x_{2020}{}^2$最接近 2028 的數。

若找$|x_1+x_2+...+x_n|$最小值(n為正整數)，要先找最末項，例、

$x_3\in\{-5,-3,-1,1,3,5\}$，$x_4\in\{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$，$x_5\in\{-7,-5,-1,1,3,5,7\}$

$x_{n+1}\in\{-(n+3),-(n+1),...,n+1,n+3\}$，

(1)若$n+1$為偶數，找範圍內偶數，平方後最接近$n+9$的數。

(2)若$n+1$為奇數，找範圍內奇數，平方後最接近$n+9$的數。

缺點：但這樣的方法，n值改都要再推算一下，才能得到答案。

討論：所以在想是否存在一種規律、一個通式，只要代入n值就能得到答案?

研究過程及方法

研究目的

(一)是否有**特定路徑的走法**，使 $|x_1+x_2+\ldots+x_n|$ 為最小值，對任意正整數 n 。

(二)找出 $|x_1+x_2+\ldots+x_n|$ 最小值的通式，對任意正整數 n。

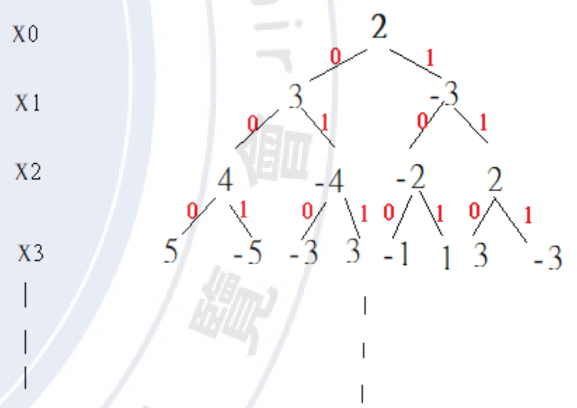
(三)呈(二)起始值 x_0 為任意實數的通式。

研究方法

(一)定義

$$|x_k|=|x_{k-1}+1|\Rightarrow x_k=\pm(x_{k-1}+1)\Rightarrow\begin{cases}x_k=x_{k-1}+1(\text{路徑定向左下走,記為}0)\\ x_k=-(x_{k-1}+1)(\text{路徑定向右下走,記為}1)\end{cases}$$

(二)



例 $|x_1+x_2+x_3|$ 的所有情況有 $2\times2\times2=8$ 種：$|3+4+5|=12$、

$|3+4+(-5)|=2$、$|3+(-4)+(-3)|=4$、$|3+(-4)+3|=4$、

$|(-3)+(-2)+(-1)|=6$、$|(-3)+(-2)+1|=4$、$|(-3)+2+3|=2$、

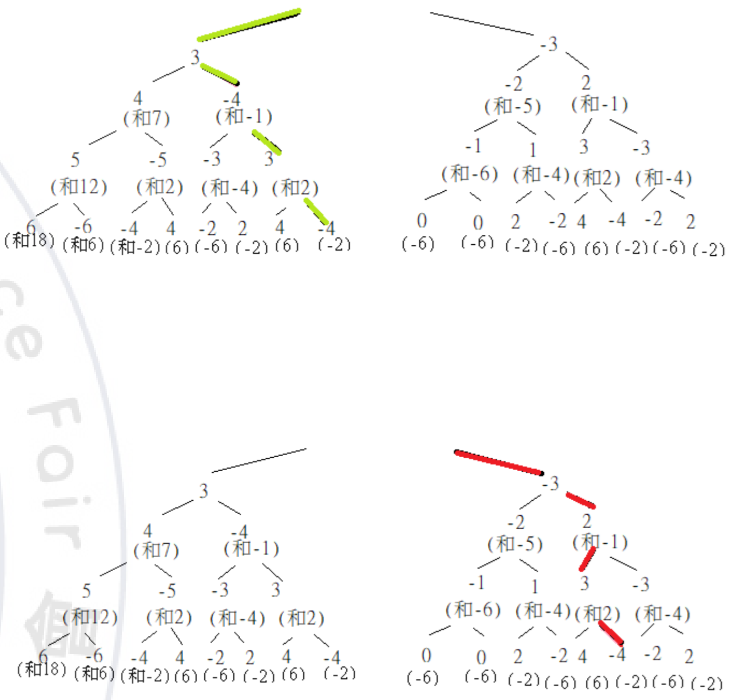
$|3+2+(-3)|=2$

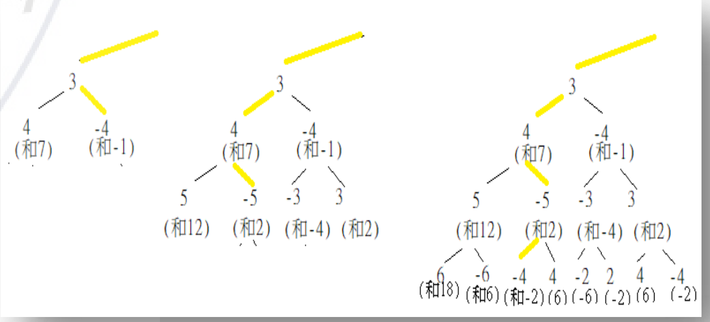
最小值為 2，上面能得最小值的對應走法分別為 001、110、111

找共通路徑的規律

$\|x_1+x_2+\ldots+x_n\|$	$x_0=2$ 過程選擇	最小值	路徑
$\|x_1+x_2\|$	$2\to$ (3,4)，值 7 (3,−4)，值 1 (−3,−2)，值 5 (−3,2)，值 1	1	00 01 10 11
$\|x_1+x_2+x_3\|$	$2\to$ (3,4,5)，值 12 (3,4,−5)，值 2 (3,−4,−3)，值 4 (3,−4,3)，值 2 (−3,−2,−1)，值 6 (−3,−2,1)，值 4 (−3,2,3)，值 2 (−3,2,−3)，值 4	2	000 001 010 011 100 101 110 111
$\|x_1+x_2+x_3+x_4\|$	$2\to$ (3,4,5,6)，值 18 (3,4,5,−6)，值 6 (3,4,−5,−4)，值 2 (3,4,−5,4)，值 6 (3,−4,−3,−2)，值 6 (3,−4,−3,2)，值 2 (3,−4,3,4)，值 6 (3,−4,3,−4)，值 2 (−3,−2,−1,−0)，值 6 (−3,−2,1,2)，值 2 (−3,−2,1,−2)，值 6 (−3,2,3,4)，值 6 (−3,2,3,−4)，值 2 (−3,2,−3,−2)，值 6 (−3,2,−3,2)，值 2	2	0000 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111 1000 1010 1011 1100 1101 1110 1111
$\|x_1+x_2+\ldots+x_5\|$	$2\to$ (3,4,5,6,7)，值 25 (3,4,5,6,−7)，值 11 (3,4,5,−6,−5)，值 1 (3,4,5,−6,5)，值 11 (3,4,−5,−4,−3)，值 5 (3,4,−5,−4,3)，值 1 (3,4,−5,4,5)，值 11 (3,4,−5,4,−5)，值 1	1	00000 00001 00010 00011 00100 00101 00110 00111

$\|x_1+x_2+\ldots+x_n\|$	$x_0=2$ 過程選擇	最小值	路徑
$\|x_1+x_2+\ldots+x_5\|$	$2\to$ (3,−4,−3,−2 -1)，值 7 (3,−4,−3,−2,1)，值 5 (3,−4,−3,2,3)，值 1 (3,−4,−3,2,−3)，值 5 (3,−4,3,4,5)，值 11 (3,−4,3,4,−5)，值 1 (3,−4,3,−4,−3)，值 5 (3,−4,3,−4,3)，值 1 (−3,−2,−1,0,1)，值 5 (−3,−2,−1,0,−1)，值 7 (−3,−2,−1,0,1)，值 5 (−3,−2,−1,0,−1)，值 7 (−3,−2,1,2,3)，值 1 (−3,−2,1,2,−3)，值 5 (−3,−2,1,−2,−1)，值 7 (−3,−2,1,−2,1)，值 5 (−3,2,3,4,5)，值 11 (−3,2,3,4,−5)，值 1 (−3,2,3,−4,−3)，值 5 (−3,2,3,−4,3)，值 1 (−3,2,−3,−2,−1)，值 7 (−3,2,−3,−2,1)，值 5 (−3,2,−3,2,3)，值 1 (−3,2,−3,2,−3)，值 5	1	01000 01001 01010 01011 01100 01101 01110 01111 10000 10001 10010 10011 10100 10101 10110 10111 11000 11001 11010 11011 11100 11101 11110 11111
$\|x_1+x_2+\ldots+x_6\|$	$2\to$ (3,4,5,6,7,8)，值 33 (3,4,5,6,7,-8)，值 17 (3,4,5,6,-7,-6)，值 5 (3,4,5,−6,-5,-4)，值 3 (3,4,−5,−4,-3,-2)，值 7 (3,−4,−3,−2,-1,0)，值 7 (−3,2,3,4,5,6)，值 17 (3,4,5,6,-7,-6)，值 5 (3,4,5,−6,-5,4)，值 5 (3,4,−5,−4,-3,2)，值 3 ⋮	3	000000 000001 000010 000100 001000 010000 100000 000011 000101 001001 ⋮





研究結果

特定規律的路徑

轉越多彎，等差級數的組數就越多，推最小值通式就越複雜。所以挑出其中一條容易推最小值的路徑整理一起，如右

規律路徑：前面 個0、1個1、再y個0。推y的步驟如下：

(一) 每兩兩同，可用$\left[\frac{n+1}{2}\right]$

(二) 由表中$\left[\frac{n+1}{2}\right]$、$y$欄知，有些$y \neq \left[\frac{n+1}{2}\right]$，

但發現作些修改就能代表y

(1) a_1區(第一區) 對y值的修改：$\left[\frac{n+1+0}{2}\right]$

(2) a_2區(第二區) 對y值的修改：$\left[\frac{n+1+1}{2}\right]$

(3) a_3區(第三區) 對y值的修改：$\left[\frac{n+1+2}{2}\right]$

(4) a_4區(第四區) 對y值的修改：$\left[\frac{n+1+3}{2}\right]$

(5)以此類推，a_k區(第k區) 求y修改：$\left[\frac{n+1+(k-1)}{2}\right]$

(三)求k

各區數量依序為7、9、11、13、...個， (先假設後面項也成等差，由此推導得的結果再做證明確認)。第a_k區的第一項n > $a_1 \sim a_{k-1}$區的總數

$$n > \frac{項數 \times (2 \times 首項 + (項數-1) \times 公差)}{2}$$

$$\Rightarrow n > \frac{(k-1)(2 \times 7 + ((k-1)-1) \times 2)}{2}$$

$$\Rightarrow k^2 + 4k - (5+n) < 0$$

$$\Rightarrow -2-\sqrt{n+9} < k < -2+\sqrt{n+9} \quad (取正)\ 得 k-1 < -3+\sqrt{n+9}$$

■$k-1$為正整數，取整數用高斯符號。a_k區(第k區)y值為$\left[\frac{n+1+(k-1)}{2}\right]$。

求得$|x_1+x_2+...+x_n|$前有$\left[\frac{n+1+[-3+\sqrt{n+9}]}{2}\right]$個0

$\lvert x_1+x_2+...+x_n \rvert$	最小值	路徑	y	a_n	$\left[\frac{n+1}{2}\right]$	備註
$\lvert x_1 \rvert$	3	0	**1**		**1**	y值欄除了框起的數，其餘兩兩同。可用高斯符號$\left[\frac{}{2}\right]$解決(同理，若同數出現三次就用÷3，再取高斯符號來做)
$\lvert x_1+x_2 \rvert$	1	01	**1**		**1**	
$\lvert x_1+x_2+x_3 \rvert$	2	001	**2**		**2**	
$\lvert x_1+x_2+...+x_4 \rvert$	2	0010	**2**	a_1	**2**	
$\lvert x_1+x_2+...+x_5 \rvert$	1	00010	**3**		**3**	
$\lvert x_1+x_2+...+x_6 \rvert$	3	000100	**3**		**3**	
$\lvert x_1+x_2+...+x_7 \rvert$	$\boxed{0}$	**0000100**	$\boxed{4}$		**4**	
$\lvert x_1+x_2+...+x_8 \rvert$	4	00000100	**5**		4	
$\lvert x_1+x_2+...+x_9 \rvert$	1	000001000	**5**		5	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{10} \rvert$	3	0000001000	**6**		5	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{11} \rvert$	2	00000010000	**6**		6	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{12} \rvert$	2	000000010000	**7**	a_2	6	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{13} \rvert$	3	0000000100000	**7**		7	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{14} \rvert$	1	00000000100000	**8**		7	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{15} \rvert$	4	000000001000000	**8**		8	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{16} \rvert$	$\boxed{0}$	**0000000001000000**	$\boxed{9}$		8	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{17} \rvert$	5	00000000001000000	**10**		9	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{18} \rvert$	1	000000000010000000	**10**		9	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{19} \rvert$	4	0000000000010000000	**11**		10	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{20} \rvert$	2	00000000000100000000	**11**		10	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{21} \rvert$	3	000000000000100000000	**12**		11	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{22} \rvert$	3	0000000000001000000000	**12**	a_3	11	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{23} \rvert$	2	00000000000001000000000	**13**		12	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{24} \rvert$	4	000000000000010000000000	**13**		12	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{25} \rvert$	1	0000000000000010000000000	**14**		13	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{26} \rvert$	5	00000000000000100000000000	**14**		13	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{27} \rvert$	$\boxed{0}$	000000000000000100000000000	**15**		14	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{28} \rvert$	6	0000000000000000100000000000	**16**	a_4	14	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{29} \rvert$	1	00000000000000001000000000000	**16**		15	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{30} \rvert$	5	000000000000000001000000000000	**17**		15	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{31} \rvert$	2	0000000000000000010000000000000	**17**		16	
$\lvert x_1+x_2+...+x_{32} \rvert$	4	00000000000000000010000000000000	**18**		16	
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	

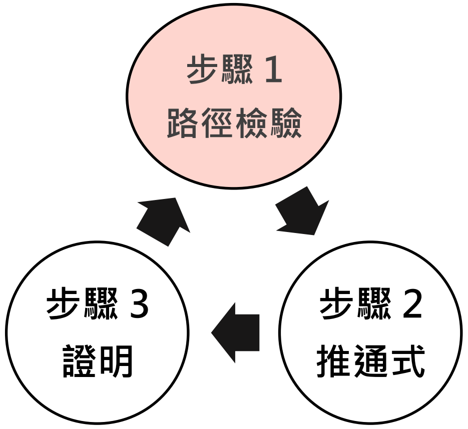
推最小值的通式

(一) **檢驗找的路徑**，路徑：前面 $\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$ 個0、1個1、再n-1- $\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$ 個0。

代入「雙週一題」題目做檢查，得到一樣的答案，前進了一步。

【解】前有 $\left[\frac{2019+1+\left[-3+\sqrt{2019+9}\right]}{2}\right]=\left[\frac{2062}{2}\right]=1031$ 個0、1個1 、987個0 ，$|x_1+x_2+\ldots+x_{2019}|$的最小值

為 $|(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{1031})+(x_{1032})+(x_{1033}+\ldots+x_{2019})|=|(3+4+5+\ldots+1033)+(-1034)+(-1033+\ldots-47)|=44$



(二) 最小值的通式

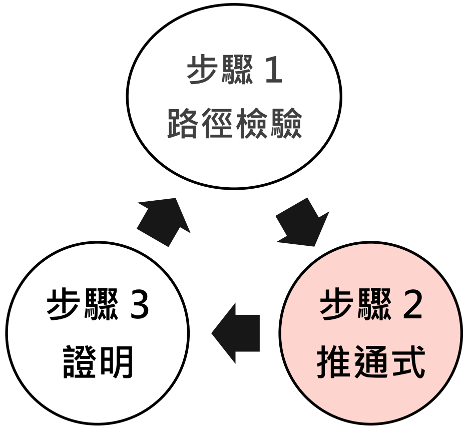
設一數列滿足$X_0=2$ 與 $|x_k|=|x_{k-1}+1|$ ，k≥1，試$|x_1+x_2+\ldots+x_n|$的最小值。

(1)前 Δ個0 ：成等差級數 首項$X_1=3$、項數Δ 總和 $\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{5}{2}\Delta$

(2)中 1個1 ：第(1)部分的末項 $=3+(\Delta-1)\times1=2+\Delta$ 往右下支走 得 $-((2+\Delta)+1)=-3-\Delta$

(3)後 n-1-Δ個0 ：成等差級數 首項 $-2-\Delta$、項數n-1-Δ 總和 $\frac{3}{2}\Delta^2+\frac{9-4n}{2}\Delta+\frac{n^2-7n+6}{2}$

上面加總，得$|x_1+x_2+\ldots+x_n|$的最小值 $\left|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right|$



最小值通式證明

(三) 最小值通式的證明

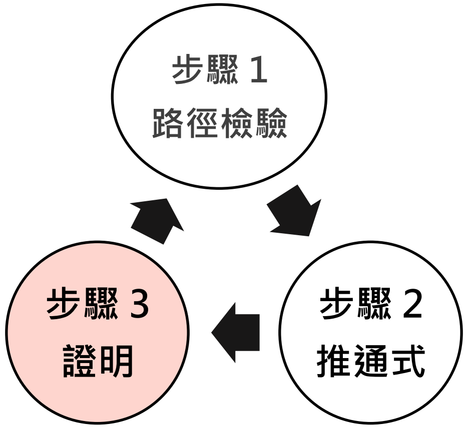
■ 證明方法1 – 利用程式(未成功)

1.窮舉法

一開始想用程式語言直接跑出所有可能的結果找最小值，與通式的結果做比較，但實際執行後發現這方法行不通，因為電腦的記憶體是有限的，實際上只能跑到二十七左右。

2.貪婪法

加到某層時只選擇使總和為較小的分支，保留前路徑，繼續往下選分支，這樣演算法大大減低電腦的負擔，有趣地是各層結果跟我們通式代入n值一致。但這非窮舉法，仍需數學理論來證明。



■ 證明方法2 –利用雙週一題的解析輔佐驗證 (成功)

雙週是2019項，我們把它延伸到n項。

$x_3 \in \{-5,-3,-1,1,3,5\}$

$x_4 \in \{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$

$x_5 \in \{-7,-5,-1,1,3,5,7\}$

$x_6 \in \{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}$

$x_{n+1} \in \{-(n+3),-(n+1),\ldots,n+1,n+3\}$

$|x_k| = |x_{k-1}+1|$ 平方去掉絕對值，得 $x_k^2 = x_{k-1}^2 + 2x_{k-1} + 1 \Rightarrow x_k^2 - x_{k-1}^2 = 2x_{k-1} + 1$

因此

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_0^2 &= 2x_0 + 1 \\ x_2^2 - x_1^2 &= 2x_1 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n+1}^2 - x_n^2 &= 2x_n + 1 \end{aligned}$$

將 n+1 條方程式作加總，得：$x_{n+1}^2 = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n + 1 + x_0^2 + 2x_0$

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = \frac{|x_{n+1}^2 - (n+9)|}{2}。$$

證明方法2 —利用雙週一題的解析輔佐驗證 (成功)

表(一)：用雙週一題的解析+EXCEL

表(二)：我們推的最小值通式 $\left|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right|$

$|x_1+x_2+\cdots+x_n| = \frac{|x^2_{n+1}-(n+9)|}{2}$

fx =(A3+9)^(1/2)

fx 3

這裡需一個個手動填，n=2，n+1為奇數，所以從{5,3,1,-1,-3,-5}找接近3.31662479...的數

表(一)

	A	B	C	D
1	n	(n+9)^(1/2)	最接近(n+9)^(1/2)的整數	最小值
2	1	3.16227766	4	3
3	2	3.31662479	3	1
4	3	3.46410162	4	2
5	4	3.60555128	3	2
6	5	3.74165739	4	1
7	6	3.87298335	3	3
8	7	4	4	0
9	8	4.12310563	5	4
10	9	4.24264069	4	1
11	10	4.35889894	5	3
12	11	4.47213595	4	2
13	12	4.58257569	5	2
14	13	4.69041576		
15	14	4.79583152		
16	15	4.89897949		
17	16	5		
18	17	5.09901951		
19	18	5.19615242		
20	19	5.29150262		

fx =ABS((C3^2-(A3+9))/2)

需一個個手填的數填好，才能計算最小值（不算通式，因每換幾項相加，還要找最接近的數）

$|x_1+x_2+\cdots+x_n| = \frac{|x^2_{n+1}-(n+9)|}{2}$

n=5，n+1為偶數，從{8,6,4,2,0,-2,...,-8}手填最接近3.74165739..的數

表(二)

fx =ABS((2*INT((A2+1+(INT(-3+(A2+9)^(1/2))))/2)*INT((A2+1+(INT(-3+(A2+9)^(1/2))))/2))+(6-(2*A2))*INT((A2+1+(INT(-3+(A2+9)^(1/2))))/2)+ A2*(A2-7)/2)

	A	B
1	n	我們推導的最小值通式 $\left\|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right\|$
2	1	3
3	2	1
4	3	2
5	4	2
6	5	1
7	6	3
8	7	0
9	8	4
10	9	1
11	10	3
12	11	2
13	12	2
14	13	3
15	14	1

其中 $\Delta = \left[\frac{n+1+[-3+\sqrt{n+9}]}{2}\right]$

我們推的最小值通式，n值代入，就得到最小值

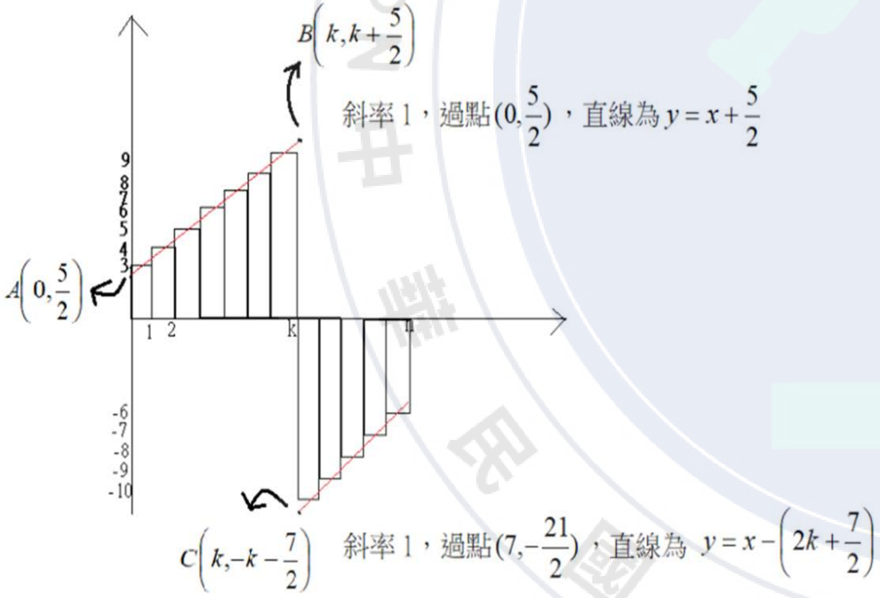
【說明】雙週解析的做法：n值改都要再推算，不方便。所以為何我們想要找最小值通式!）

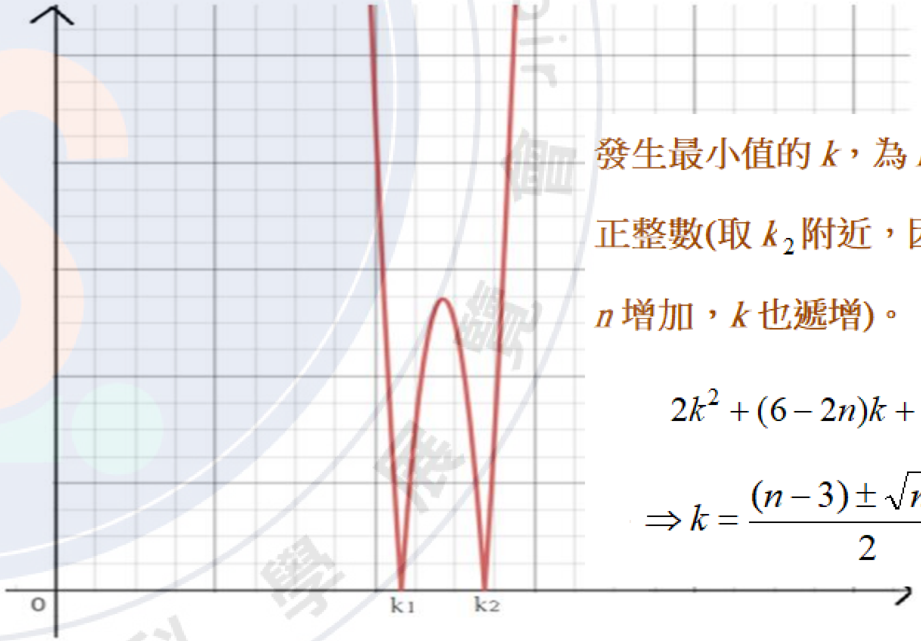
在EXCEl輸入任意正整數n表(一)(二)來比對，結果一致。

證明方法3 —理論證明　路徑 000…010…00 的驗證

路徑：前面$\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0、1 個 1、再$n-1-\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0

證明$k=\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$，$k$ 為正整數





發生最小值的 k，為 k_1 或 k_2 附近的正整數(取 k_2 附近，因我們找的路徑 n 增加，k 也遞增)。

$$2k^2+(6-2n)k+\frac{n^2-7n}{2}=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{(n-3)\pm\sqrt{n+9}}{2}$$ (取"加")

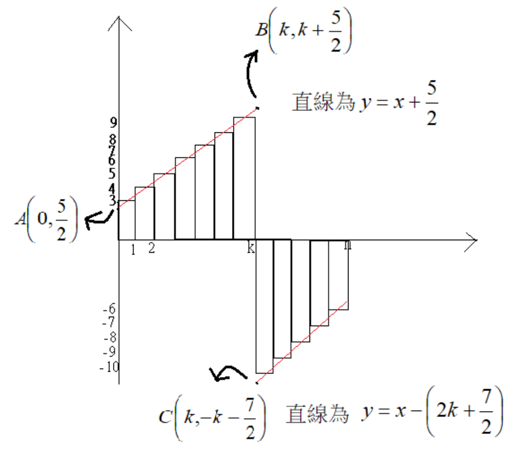
01長條圖改成過組中點直線下積分和

02 $|x_1+x_2+\ldots+x_n|=\left|\dfrac{k\left(\frac{5}{2}+(k+\frac{5}{2})\right)}{2}+\dfrac{(n-k)\left((-k-\frac{7}{2})+(n-2k-\frac{7}{2})\right)}{2}\right|=\left|2k^2+(6-2n)k+\dfrac{n^2-7n}{2}\right|$ 如上圖

■ 證明方法3 —理論證明

路徑：前面$\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0、1 個 1、再$n-1-\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$個 0

證明$k=\left[\dfrac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$



數學理論做檢驗

A	B	C
n	$\frac{(n-3)+\sqrt{n+9}}{2}$	最接近k2的正整數
1	0.58113883	1
2	1.158312395	1
3	1.732050808	2
4	2.302775638	2
5	2.870828693	3
6	3.436491673	3
7	4	4
8	4.561552813	5
9	5.121320344	5
10	5.679449472	6
11	6.236067977	6
12	6.791287847	7
13	7.34520788	7
14	7.897915762	8
15	8.449489743	8
16	9	9

我們從觀察路徑推出

A	B
n	△
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	5
9	5
10	6
11	6
12	7
13	7
14	8
15	8
16	9

也是借用EXCEL，檢驗k跟我們推的Δ 一致

結論

(一) $|x_k| = |x_{k-1}+1|, k \geq 1$，當初使值$x_0$=2，對任意正整數$n$，$|x_1+x_2+\ldots+x_n|$ 最小值的通式為 ：

$$\left|2\Delta^2+(6-2n)\Delta+\frac{n(n-7)}{2}\right| \text{，其中 } \Delta=\left[\frac{n+1+\left[-3+\sqrt{n+9}\right]}{2}\right]$$

(二) $|x_k| = |x_{k-1}+1|, k \geq 1$，當初使值改變，對任意正整數$n$，$|x_1+x_2+\ldots+x_n|$最小值的通式 ，是一個可 再探討的主題。

$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_n\rvert$	初始值$\boxed{x_0=2}$其一條規律路徑	初始值$\boxed{x_0=3}$其一條規律路徑
$\lvert x_1\rvert$	0 （前 1 個 0）	0 （前 1 個 0）
$\lvert x_1+x_2\rvert$	01 （前 1 個 0）	01 （前 1 個 0）
$\lvert x_1+x_2+x_3\rvert$	001 （前 2 個 0）	001 （前 2 個 0）
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_4\rvert$	0010 （前 2 個 0）	0010 （前 2 個 0）
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_5\rvert$	00010 （前 3 個 0）	00010 （前 3 個 0）
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_6\rvert$	000100 （前 3 個 0）	000100 （前 3 個 0）
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_7\rvert$	0000100 （前 4 個 0）	0000100 （前 4 個 0）
$\lvert x_1+x_2+\ldots+x_8\rvert$	00000100 （前 5 個 0） 已不同	00001000 （前 4 個 0）
	⋮	⋮

(三)希望這樣數列的最小值討論，將來能有機會應用在生活上。

- 按一下以編輯母片文字樣式
  - 第二層
    - 第三層
      - 第四層
        - 第五層

參考資料

中山大學應數系「雙週一題」**108第一學期第三題**

http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/