

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

第一名

050402

百密無一疏－特殊多邊形密閉區塊之研究

學校名稱：國立花蓮女子高級中學

| | |
|-----------------------------------|--------------|
| 作者： 高二 蔡孟真 高二 魏岑晏 高二 鄭子誼 | 指導老師： 陳宥良 |
|-----------------------------------|--------------|

關鍵詞：正多邊形、正多角星形、密鋪

得獎感言

首先，在科展這個奇幻的旅程中要感謝的人非常多，最重要要感謝的人就是我們的指導老師，感謝他在我們每次遇到瓶頸時，都會跟我們一起想出解決辦法，陪伴並引領著我們完成這份作品；而我們也要感謝彼此在研究過程中的互相鼓勵，在每個最艱難的時期裡，因為有彼此的互相扶持，才能夠堅持下去；最後，感謝不辭辛勞的家人們，無怨無悔的接送我們，並在心靈上給予我們最大的支持。

在研究過程中，有幾次面臨困境與阻礙，無法達到猜想中的結果，都令人覺得灰心，但也因為這些打擊，才磨練出我們更堅強的意志。過程中，我們都抱持著「盡最大努力，做最壞打算」的心態，追求我們學習到了什麼、進步了什麼進而磨成了怎麼樣的人，這一切就是希望不愧對自己的良心與責任，不要讓未來的自己回頭看這份作品時感到遺憾，且能肯定自己那段時光的付出，即使失敗，我們也雖敗猶榮。

科展最大的收穫不僅在於獲獎的當下，淚水與汗水交織的光榮與喜悅，更是研究過程當中歷經的幾番失敗、挫折而成功的成就感，以及抱持堅定的信念撐過所有「最後一里路」的感動。而令我們印象深刻的還有在頒獎典禮時，教授所提點到「學然後知不足」。透過這次刻骨銘心的科展之旅，讓我們切身體驗不少做學問應有的態度，及面對人生中熱愛的事物所懷抱的熱情，「競賽是一時的，學習是長久的」，願我們在未來能繼續在研究這條道路上並肩前行，繼續抱持不抹滅的好奇心，窺探科學的奧秘與神奇。



摘要

本研究討論如何利用 k 個全等 n 邊形圍成密閉區塊，其中多邊形分成正多邊形與正多角星形兩種類型。除了找出可以圍成密閉區塊的最少塊數外，亦由多邊形邊數 n 與塊數 k 討論密閉區塊的存在性。若存在某種拼接方法可利用 k 個 n 邊形圍出密閉區塊，則進一步討論該拼接方法是否能夠密鋪整個二維平面。在大多數的情形下，研究成果已能判斷 k 個正 n 邊形或正 n 角星形能否圍出密鋪區塊，以及是否可密鋪平面，並且提出一套建構拼接方法的流程。

壹、前言

一、研究動機

由文獻中得知，正多邊形中，若只使用單一種多邊形，只有正三角形、正方形、正六邊形可以密鋪平面，稱為正鑲嵌圖；若使用兩種以上多邊形，稱為半正鑲嵌圖。除此之外，Johannes Kepler(1619)曾發表過由多種基本圖形所形成的鑲嵌圖案，如圖 1，我們對此產生好奇，若一個正多邊形無法密鋪平面，是否可以使用「單一種正多邊形」圍出一個密閉區塊？若可以圍出密閉區塊，能否以「單一種正多邊形」及「其所圍出的密閉區塊」這 2 種圖形密鋪整個平面？我們想從正多邊形開始討論，再進而將此問題推廣至正多角星形。

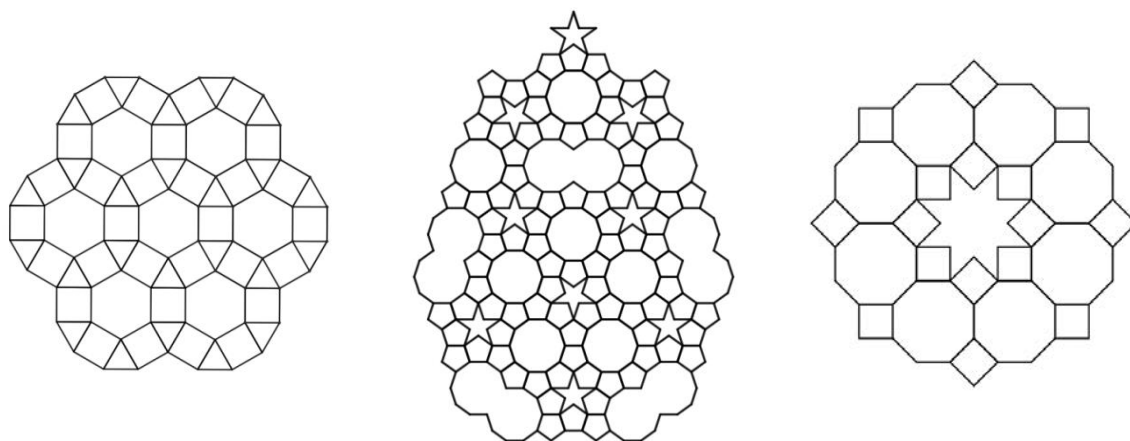


圖 1 Johannes Kepler 的鑲嵌圖形

二、研究目的

- (一) 探討 k 個正 n 邊形圍出密閉區塊的存在性。
- (二) 探討 k 個正 n 邊形與其所圍出密閉區塊是否可密鋪整個平面。
- (三) 探討 k 個正 n 角星形圍出密閉區塊的存在性。
- (四) 探討 k 個正 n 角星形與其所圍出密閉區塊是否可密鋪整個平面。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra 程式、Mathematica 程式

參、研究過程或方法

一、名詞定義

(一) 拼接方法 X_k

X_k 是由 k 個非負整數所形成的序列 (x_1, x_2, \dots, x_k) ，當使用 k 個全等多邊形依 X_k 進行拼接時，在第 1 個多邊形中任取一個邊為開始邊，接著依「逆時針方向」跳過 x_1 個邊後，取下一個邊為共用邊拼接第 2 個多邊形，再依「逆時針方向」跳過 x_2 個邊後，取下一個邊為共用邊拼接第 3 個多邊形，依相同方法（即當 $1 \leq i \leq k$ 時，第 i 個多邊形的兩共用邊之間的邊數為 x_i ）可拼接 k 個多邊形。圖 2 呈現正 9 邊形依 $X_3 = (3, 1, 2)$ 逐步拼接的圖形，其中紅色邊為共用邊。

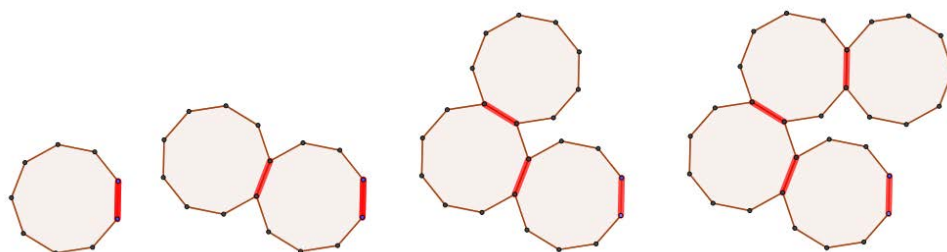


圖 2 正 9 邊形依 $X_3 = (3, 1, 2)$ 逐步拼接的圖形

(二) 密閉區塊與密閉區塊的邊數 $T(n, k)$

1、密閉區塊是指使用 k 個全等多邊形所拼出的多邊形，其中任兩個相接多邊形有一個共用邊，且任兩多邊形沒有重疊區塊。若兩密閉區塊可經平移、旋轉、伸縮或線對稱後重合，視為相同的密閉區塊。

2、若 k 個全等 n 邊形可依拼接方法 $X_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ 形成密閉區塊，將該密閉區塊邊數記為 $T(n, k)$ ，可知 $T(n, k) = \sum_{i=1}^k x_i$ 。圖 3

是利用 6 個 7 邊形依拼接方法 $X_6 = (1, 1, 2, 1, 1, 2)$ 拼出的圖形，斜線部分稱為密閉區塊，其邊數 $T(7, 6) = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8$ 。

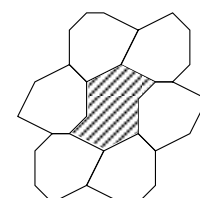


圖 3 利用 6 個 7 邊形圍出的密閉區塊

(三) 正 n 邊形依 X_k 所拼成的密閉區塊 $p_{n,k}(X_k)$

若 k 個全等正 n 邊形可依拼接方法 $X_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ 形成一個密閉區塊，則稱該密閉區塊為 $p_{n,k}(X_k)$ 或 $p_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 。圖 4 中的斜線部分稱為 $p_{7,6}(1, 1, 2, 1, 1, 2)$ 。

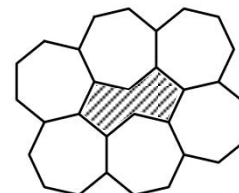


圖 4 $p_{7,6}(1, 1, 2, 1, 1, 2)$ 圖形

(四) 正 n 角星形依 X_k 所拼成的密閉區塊 $s_{n,d,k}(X_k)$

若 k 個全等正 n 角星形可依拼接方法 $X_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ 形成一個密閉區塊，則稱該密閉區塊為 $s_{n,d,k}(X_k)$ 或 $s_{n,d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ，其中正 n 角星形是指將一圓圓周 n 等分後，連接每個頂點與其相隔 d 個弧的另一個頂點所形成的多邊形，且 $1 < d < \frac{n}{2}$ 。圖 5 中的斜線部分稱為 $s_{7,2,6}(3, 3, 5, 3, 3, 5)$ 。

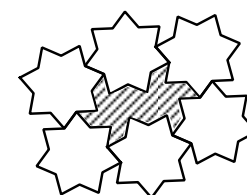


圖 5 $s_{7,2,6}(3, 3, 5, 3, 3, 5)$ 圖形

(五) $P_{n,k}$ 與 $S_{n,d,k}$ 的存在性

- 1、 $P_{n,k}$ 為一個集合，其元素為「使用 k 個正 n 邊形所圍出的密閉區塊」，即「 k 個正 n 邊形若能利用拼接方法 X_k 圍出密閉區塊，則 $p_{n,k}(X_k) \in P_{n,k}$ 」。若集合 $P_{n,k}$ 非空集合，則稱 $P_{n,k}$ 具有存在性。
- 2、 $S_{n,d,k}$ 為一個集合，其元素為「使用 k 個正 n 角星形所圍出的密閉區塊」，即「 k 個正 n 角星形若能利用拼接方法 X_k 圍出密閉區塊，則 $s_{n,d,k}(X_k) \in S_{n,d,k}$ 」。若集合 $S_{n,d,k}$ 非空集合，則稱 $S_{n,d,k}$ 具有存在性。

(六) $p_{n,k}(X_k)$ 、 $P_{n,k}$ 、 $s_{n,d,k}(X_k)$ 與 $S_{n,d,k}$ 的密鋪性

- 1、若 $p_{n,k}(X_k) \in P_{n,k}$ ，且可「僅使用正 n 邊形與 $p_{n,k}(X_k)$ 此 2 種圖形密鋪整個平面」，則稱 $p_{n,k}(X_k)$ 具有密鋪性。若集合 $P_{n,k}$ 中，存在 1 個具有密鋪性的元素，則稱 $P_{n,k}$ 具有密鋪性。由圖 6 左可知 $p_{7,6}(2,1,1,2,1,1)$ 具有密鋪性。
- 2、若 $s_{n,d,k}(X_k) \in S_{n,d,k}$ ，且可「僅使用正 n 角星形與 $s_{n,d,k}(X_k)$ 此 2 種圖形密鋪整個平面」，則稱 $s_{n,d,k}(X_k)$ 具有密鋪性。若集合 $S_{n,d,k}$ 中，存在 1 個具有密鋪性的元素，則稱 $S_{n,d,k}$ 具有密鋪性。由圖 6 右可知 $s_{6,2,3}(1,1,1)$ 具有密鋪性。

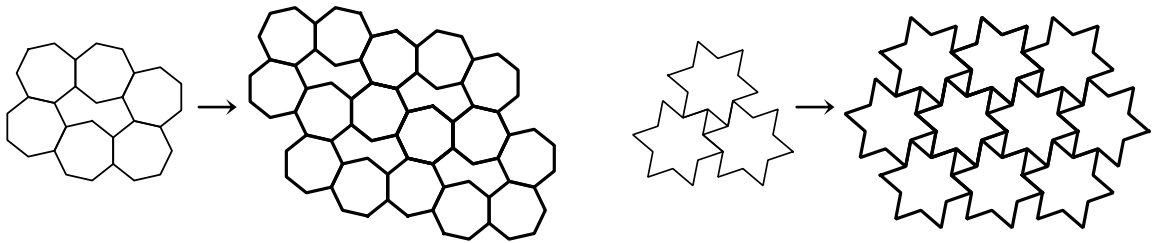


圖 6 $p_{7,6}(2,1,1,2,1,1)$ 與 $s_{6,2,3}(1,1,1)$ 的密鋪圖形

二、 $P_{n,k}$ 的存在性

(一) 基本性質與定理

引理 1.1

若 $p_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 存在，則由 k 個正 n 邊形中心點所形成的多邊形，其第 i 個內角為 $(x_i + 1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ 。

證明：

由連接方法 X_k 的定義知，第 i 個正 n 邊形兩個共用邊之間的邊數為 x_i ，因此由正 n 邊形中心點所形成的多邊形第 i 個內角度數等於 $(x_i + 1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ 。圖 7 是 $p_{9,6}(3,2,1,3,2,1)$ 圖形，其中 $\angle O_1 O_2 O_3 = (2+1) \cdot \frac{2\pi}{9}$ 。■

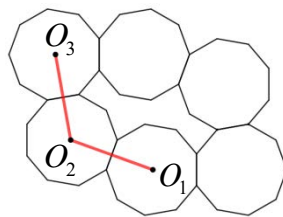


圖 7 拼接方法與角度的關係

引理 1.2

設 $O_0(1,0)$ 、 $O_1(0,0)$ ，當 i 為正整數時，以點 O_i 為旋轉中心，將點 O_{i-1} 逆時針轉 ϕ_i 得到點 O_{i+1} ，則 $\vec{O_i O_{i+1}}$ 與 x 軸正向夾角 $\theta_i = \sum_{j=1}^i \phi_j - (i-1) \cdot \pi$ 。

證明：

如圖 8 所示，依 $\angle O_1$ （藍色角 ϕ_1 ）與 $\angle O_2$ （綠色角 ϕ_2 ）是否大於 180° 分成四種情形：

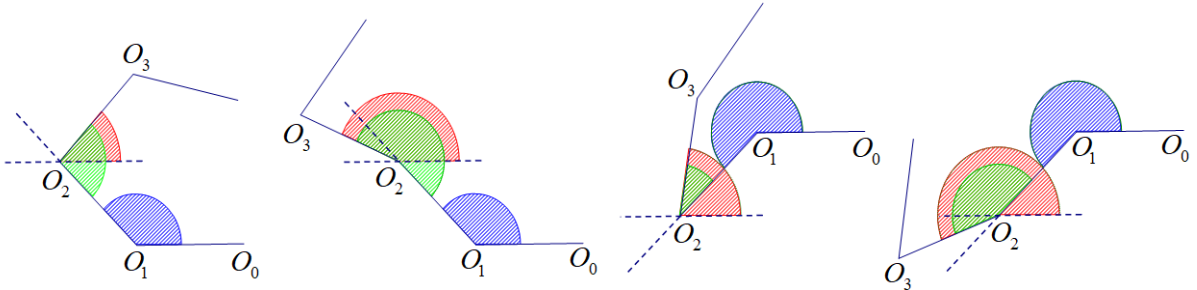


圖 8 ϕ_1 與 ϕ_2 的四種情形

不論在哪個類型中，向量 $\vec{O_1 O_2}$ 與 x 軸正向的夾角 θ_1 均與 ϕ_1 （藍色角）相等，向量 $\vec{O_2 O_3}$ 與 x 軸正向的夾角 θ_2 （紅色角）均與 $\phi_1 + \phi_2 - \pi$ 相等，即 $\theta_2 = \phi_1 + \phi_2 - \pi = \theta_1 + \phi_2 - \pi$ ，同理可得 $\theta_3 = \theta_2 + \phi_3 - \pi = (\phi_1 + \phi_2 - \pi) + \phi_3 - \pi = \sum_{j=1}^3 \phi_j - (3-1)\pi$ ，同理可推論知 $\vec{O_i O_{i+1}}$ 與 x 軸正向夾角 $\theta_i = \theta_{i-1} + \phi_i - \pi = \sum_{j=1}^i \phi_j - (i-1) \cdot \pi$ 。■

引理 1.3

當 n 為正整數時，在任一拼法 X_k 中，第 i 個與第 $i+2$ 個正 n 邊形可經平移後重合；
當 n 為偶數時，在任一拼法 X_k 中，任兩個正 n 邊形可經平移後重合。

證明：

當兩個正 n 邊形以一個邊為共用邊相接時，可視為將第 1 個正 n 邊形對著自身中心點逆時針旋轉 180° 後再平移，因此第 $i+2$ 個正 n 邊形是由第 i 個正 n 邊形經 2 次的旋轉（共旋轉 360° ）再平移所得；而當 n 為偶數時，正 n 邊形對著自身中心點逆時針旋轉 180° 即為原本圖形，因此在任一拼法 X_k 中，任兩個正 n 邊形可經平移後重合。■

定理 1.1

若 $p_{n,k}(X_k) = p_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 存在，則 $p_{n,k}(X_k)$ 的邊數 $T(n, k) = \frac{nk}{2} - n - k$ 。

證明：

當利用 k 個正 n 邊形拼出 $p_{n,k}(X_k) = p_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 時，假設其 k 個正 n 邊形的中心點為 $O_1 \sim O_k$ ，由引理 1.1 知， k 個正 n 邊形中心點所形成的多邊形，其內角和為

$$\angle O_1 + \angle O_2 + \dots + \angle O_k = (x_1 + 1) \frac{2\pi}{n} + (x_2 + 1) \frac{2\pi}{n} + \dots + (x_k + 1) \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_k + k),$$

又邊數為 k 的多邊形內角和為 $(k-2)\pi$ ，可得 $\frac{2\pi}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_k + k) = (k-2)\pi$ ，化簡得

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = \frac{nk}{2} - n - k, \text{ 即密閉區塊邊數 } T(n, k) = \frac{nk}{2} - n - k. \text{ ■}$$

定理 1.2

若 $p_{n,k}(X_k) = p_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 存在，則 $\sum_{i=1}^k \cos \theta_i = \sum_{i=1}^k \sin \theta_i = 0$ ，其中

$$\theta_i = \frac{2\pi}{n} \left(\sum_{j=1}^i (x_j + 1) \right) - (i-1)\pi。$$

證明：

不失一般性，可讓第 1 個正 n 邊形的中心點為原點 $(0,0)$ ，第 k 個正 n 邊形的中心點在 x 軸正向上。設 k 個正 n 邊形中心點所形成之多邊形的第 i 個內角為 ϕ_i ，由引理 1.1 知

$$\phi_i = (x_i + 1) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

由引理 1.2 可知，由正 n 邊形中心點所形成的向量 $\vec{O_i O_{i+1}}$ 與 x 軸正向夾角 $\theta_i = \sum_{j=1}^i \phi_j - (i-1) \cdot \pi = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^i (x_j + 1) - (i-1)\pi$ (規定第 $k+1$ 個正 n 邊形中心點 $O_{k+1} = O_1$)。

因為 $\vec{O_1 O_2} + \vec{O_2 O_3} + \dots + \vec{O_k O_1} = \vec{0}$ ，可由此推得 $\sum_{i=1}^k \cos \theta_i = \sum_{i=1}^k \sin \theta_i = 0$ 。■

定理 1.3

設 \overline{AB} 、 \overline{CD} 為某多邊形的兩個邊，若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則可將該多邊形以適當點為中心做點對稱，使得兩多邊形以 \overline{AB} 、 \overline{CD} 為共用邊相接。

證明：

由圖 9 所示，當 A 、 B 、 C 、 D 四點共線時，可將原圖形對此四點的中心（圖 9 中的紅色點）做點對稱；當 A 、 B 、 C 、 D 四點不共線時，則 $ABCD$ 為平行四邊形，可將原圖形對平行四邊形的中心（圖 9 中的紅色點）做點對稱，則原圖形與其對稱圖形必定相接，且共用邊恰為 \overline{AB} 與 \overline{CD} 。■

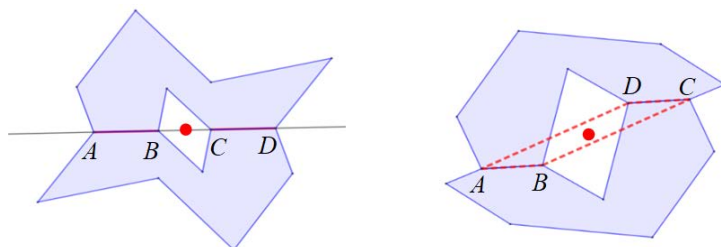


圖 9 不同情形的點對稱作圖

定理 1.4

當 n 為偶數且 $k \geq 4$ 時，若 $p_{n,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+2} ，且使得 $p_{n,k+2}(X'_{k+2})$ 存在。

證明：

若 $p_{n,k}(X_k)$ 存在，由引理 1.3 知，當 n 為偶數時， k 個正 n 邊形中任 2 個可經平移後重合，即任 2 個正 n 邊形的對應邊會互相平行，如圖 10 所示，可將原圖形分成兩部分，接著在 2 個分割處的正 n 邊形取平行邊（紅色邊），可各增加 1 個紅色正 n 邊形，即可得到 $p_{n,k+2}(X'_{k+2})$ 。■

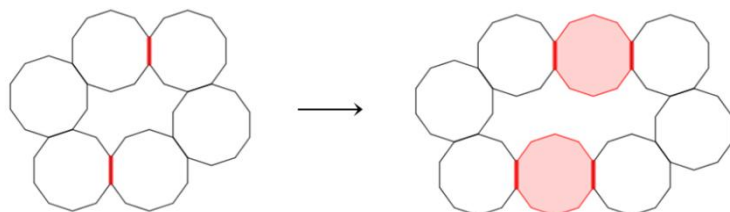


圖 10 由 $P_{10,6}(2,2,3,2,2,3)$ 延伸得到 $P_{10,8}(2,2,3,4,2,2,3,4)$

定理 1.5

當 n 為奇數且 $k \geq 6$ 時，若 $p_{n,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+4} ，且使得 $p_{n,k+4}(X'_{k+4})$ 存在。

證明：

若 $p_{n,k}(X_k)$ 存在，由引理 1.3 知，第 i 個與第 $i+2$ 個正 n 邊形可經平移後重合，即第 i 與 $i+2$ 個正 n 邊形對應邊會互相平行，如圖 11 所示，可將原圖形分成兩部分，接著在分割處的 2 個正 n 邊形取平行邊(紅色邊)，各增加 2 個正 n 邊形，可得到 $p_{n,k+4}(X'_{k+4})$ 。■

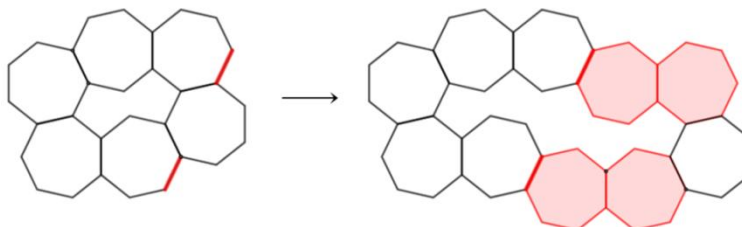


圖 11 由 $p_{7,6}(1,1,2,1,1,2)$ 延伸得到 $p_{7,10}(1,1,2,2,3,1,1,2,2,3)$

(二) 使 $P_{n,k}$ 具有存在性的最小 k 值

本研究利用 *GeoGebra* 軟體進行大量作圖，根據作圖結果，我們推測正 n 邊形依邊數 n 可分成 6 的倍數、偶數且非 6 的倍數、與奇數 三種類型，則其可讓 $P_{n,k}$ 具有存在性的最小 k 值分別為 3、4、6，以下分別證明之。

定理 1.6

當 n 為 6 的倍數時，可用 3 個全等正 n 邊形拼出 $p_{n,3}(X_3)$ 。

證明：

不失一般性，考慮三個兩兩交於 2 點的單位圓，如圖 12，設其圓心分別為 $O_1(0,0)$ 、 $O_2(\cos \frac{\pi}{n}, \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{n})$ 、 $O_3(2 \cos \frac{\pi}{n}, 0)$ ，則 $\triangle O_1 O_2 O_3$ 為邊長 $2 \cos \frac{\pi}{n}$ 的正三角形，可求出交點坐標分別為 $A(\cos \frac{-\pi}{n}, \sin \frac{-\pi}{n})$ 、 $B(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n})$ 、 $C(\cos(\frac{-\pi}{n} + \frac{\pi}{3}), \sin(\frac{-\pi}{n} + \frac{\pi}{3}))$ 、 $D(\cos(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{3}))$ 、 $E(2 \cos \frac{\pi}{n} + \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{n}))$ 、 $F(2 \cos \frac{\pi}{n} + \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{n}))$ 。取拼接方法 $X_3 = (\frac{T(n,3)}{3}, \frac{T(n,3)}{3}, \frac{T(n,3)}{3}) = (\frac{n}{6} - 1, \frac{n}{6} - 1, \frac{n}{6} - 1)$ ，設 $x = \frac{n}{6} - 1$ ，設以 $O_1(0,0)$ 為中心的正 n 邊形頂點為 $A_1 \sim A_n$ ，若將點 A_1 、 A_2 分別與 A 、 B 重合，由引理 1.1 可得知 $\angle A_1 O_1 A_{x+2} = ((x+2)-1) \cdot \frac{2\pi}{n} = ((\frac{n}{6}-1+2)-1) \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{6} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3}$ ，可知點 A_{x+2} 與點 C 重合，點 A_{x+3} 與點 D 重合，此意指我們可將第 1 個正 n 邊形中心放在 $O_1(0,0)$ 上，使其有 4 個頂點恰與 A 、 B 、 C 、 D 重合。同理可讓第 2、3 個正 n 邊形分別以 O_2 、 O_3 為中心，且各有 4 個頂點分別與兩圓交點重合，又因為正 n 邊形均在單位圓內部，因此任 2 個相鄰正 n 邊形不會有重疊部分，且以 \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF} 為共用邊相接圍成密閉區塊 $p_{n,3}(X_3)$ 。■

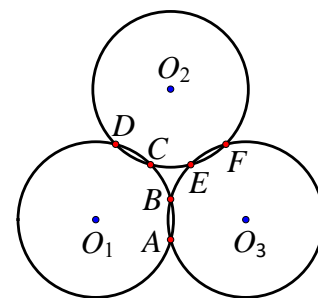


圖 12 三個正多邊形的外接圓

定理 1.7

當 n 為偶數且非 6 的倍數時，可用 4 個全等正 n 邊形拼出 $p_{n,4}(X_4)$ 。

證明：

不失一般性，考慮 4 個單位圓，圓心為 $O_1 \sim O_4$ ，因為 $T(n,4) = \frac{n \cdot 4}{2} - n - 4 = n - 4$ ，可取 $X_4 = (x, y, x, y)$ ，其中 $x = \left\lceil \frac{T(n,4)}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{4} - 1 \right\rceil$ ， $y = \frac{n}{2} - 2 - \left\lfloor \frac{n}{4} - 1 \right\rfloor$ ，設 $\alpha = \frac{2\pi}{n} \cdot (x+1)$ ， $\beta = \frac{2\pi}{n} \cdot (y+1)$ ， $\angle O_1 O_2 O_3 = \alpha$ ， $\angle O_2 O_3 O_4 = \beta$ ，如圖 13，可讓 4 個圓的圓心分別 $O_1(0,0)$ 、 $O_2(2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n}, 2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n})$ 、 $O_3(2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot (1 + \cos \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n}), 2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n})$ 與 $O_4(2 \cos \frac{\pi}{n}, 0)$ ，則四邊形 $O_1 O_2 O_3 O_4$ 為邊長 $2 \cos \frac{\pi}{n}$ 的菱形，且相鄰兩圓交點分別為 $A(\cos \frac{-\pi}{n}, \sin \frac{-\pi}{n})$ 、 $B(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n})$ 、 $C(\cos \frac{(2x+1) \cdot \pi}{n}, \sin \frac{(2x+1) \cdot \pi}{n})$ ， $D(\cos \frac{(2x+3) \cdot \pi}{n}, \sin \frac{(2x+3) \cdot \pi}{n})$ 、 $E(2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}, 2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n})$ ， $F(2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n}, 2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{(x+1) \cdot 2\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n})$ 、 $G(2 \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{(2x+1) \cdot \pi}{n}, \sin \frac{(2x+1) \cdot \pi}{n})$ ， $H(2 \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{(2x+3) \cdot \pi}{n}, \sin \frac{(2x+3) \cdot \pi}{n})$ 。設以 $O_1(0,0)$ 為中心的正 n 邊形頂點為 $A_1 \sim A_n$ ，若將點 A_1 、 A_2 分別與 A 、 B 重合，則 $\angle A_1 O_1 A_{x+2} = ((x+2)-1) \cdot \frac{2\pi}{n} = \alpha = \angle O_4 O_1 O_2$ ，可知點 A_{x+2} 與點 C 重合，點 A_{x+3} 與點 D 重合；逐一檢驗後可以得知，第 2~4 個正 n 邊形可分別以 $O_2 \sim O_4$ 為中心，且分別讓各個正 n 邊形的頂點中，有 4 個頂點與兩圓交點重合，又因正 n 邊形必在外接圓內部，因此任 2 個相鄰正 n 邊形不會有重疊部分，且以 \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF} 、 \overline{GH} 為共用邊相接圍成密閉區塊 $p_{n,4}(X_4)$ 。■

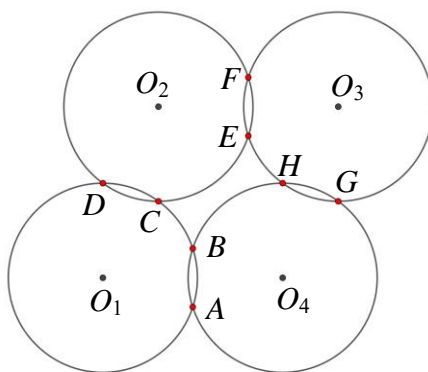


圖 13 四個正多邊形的外接圓

由定理 1.7 知，當 n 為偶數但非 6 的倍數時，可用 4 個圍成密閉區塊，我們思考是否能將個數再減少為 3 個呢？由定理 1.6 的證明過程知，當個數 k 為 3 時，其拼接方法 $X_3(n,3) = (\frac{n}{6}-1, \frac{n}{6}-1, \frac{n}{6}-1)$ ，當 n 非 6 的倍數時， $\frac{n}{6}-1$ 不是整數，所以當 n 為偶數但非 6 的倍數時， $P_{n,k}$ 具有存在性的最小 k 值為 4。

定理 1.8

當 n 為奇數時，可用 6 個全等正 n 邊形圍出 $p_{n,6}(X_6)$ 。

證明：

由定理 1.1 知， $T(n,6) = \frac{n \cdot 6}{2} - n - 6 = 2n - 6$ ，當 $n = 5$ 時，可取 $X_6 = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ；當 $n \geq 7$ 時，可取 $X_6 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ，其中 $x_1 = x_2 = \left\lceil \frac{T(n,6)}{6} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil$ ， $x_3 = n - 3 - 2 \cdot \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil$ ，依 $x_1 \sim x_3$ 拼出前 3 個正 n 邊形後，由引理 1.3 知，第 1 個與第 3 個正 n 邊形可經平移後重合，即第 1 個與第 3 個正 n 邊形存在互相平行的 2 個邊，由定理 1.3 知，選定適當點（圖 14 的藍色點）為對稱中心做點對稱後，新圖形與原圖形將會相接形成 $p_{n,6}(X_6)$ 。■

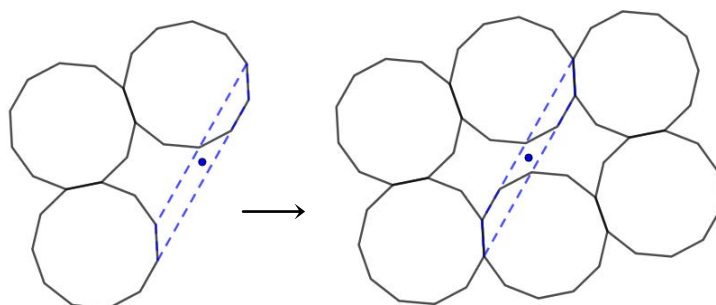


圖 14 利用定理 1.3 所拼出的 $p_{11,6}(2, 2, 4, 2, 2, 4)$

當 n 為奇數時，由定理 1.1 知 $T(n,k) = \frac{n \cdot k}{2} - n - k$ ，若 n 、 k 均為奇數，則 $T(n,k)$ 非整數，因此無法用 3 個或 5 個正 n 邊形拼出 $p_{n,k}(X_k)$ ；若僅用 4 個正 n 邊形，假設 $X_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ，由定理 1.5 證明過程中得知 $x_1 = x_3$ 且 $x_2 = x_4$ ，則 $x_1 + x_2 = \frac{T(n,4)}{2} = \frac{n}{2} - 2$ ，非整數，因此亦無法用 4 個正 n 邊形拼出 $p_{n,k}(X_k)$ ，所以當 n 為奇數時， $P_{n,k}$ 具有存在性的最小 k 值為 6。

(三) 從 n 、 k 的奇偶性探討 $P_{n,k}$ 的存在性

在研究過程中，我們發現給定 n 、 k 之值後，可能存在多組不同拼法 X_k 可圍出密閉區塊，圖 15 呈現 10 個正 5 邊形利用 4 種不同拼法所得到的密閉區塊，由左至右依序為 $p_{5,10}(1, 2, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 1, 1)$ 、 $p_{5,10}(1, 0, 2, 0, 2, 1, 0, 2, 0, 2)$ 、 $p_{5,10}(2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 2)$ 、 $p_{5,10}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ 。

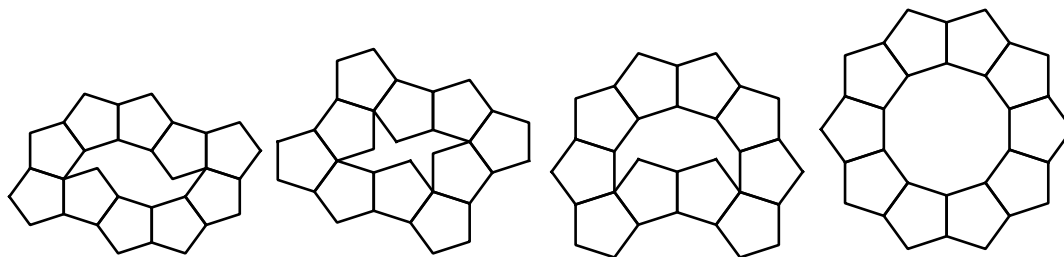


圖 15 不同拼法 X_{10} 所得到的 $p_{5,10}(X_{10})$

很明顯地，隨著個數 k 增加，集合 $P_{n,k}$ 的元素個數也會跟著增加，目前我們尚未能對 $P_{n,k}$ 元素個數提出合理的推測。本研究主要探討 $P_{n,k}$ 的存在性，即在指定正多邊形的邊數 n 與個數 k 時，能否找出至少一種拼法 X_k 圍出密閉區塊，以下依 n 、 k 的奇偶性，分成 $P_{奇,奇}$ 、 $P_{偶,偶}$ 、 $P_{奇,偶}$ 與 $P_{偶,奇}$ 四種類型進行討論。

1、 $P_{奇,奇}$ 的存在性

當邊數 n 與個數 k 均為奇數時，由定理 1.1 知 $T(n,k) = \frac{nk}{2} - n - k$ ，非整數，因此 $P_{奇,奇}$ 為空集合，即無法利用奇數個正奇數邊形圍出密閉區塊。

2、 $P_{偶,偶}$ 的存在性

當邊數 n 為偶數時，由定理 1.7 知，可由拼法 $X_4 = (x, y, x, y)$ (取 $x = \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$, $y = \frac{n}{2} - 2 - \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$) 得到 $p_{偶,4}(X_4)$ ，又由定理 1.4 知若 $p_{偶,4}(X_4)$ 存在，則 $p_{偶,4+2r}(X_{4+2r})$ 亦存在，由此可知 $P_{偶,偶}$ 均具有存在性。

3、 $P_{奇,偶}$ 的存在性

我們將大於或等於 6 的偶數分成 $6+4s$ 與 $8+4s$ 兩種類型，由定理 1.8 知，當 n 為奇數時，必可用 6 個正 n 邊形拼出 $p_{n,6}(X_6)$ ，再根據定理 1.5 知，當 n 為奇數時，若 $p_{n,k}(X_k)$ 存在，則 $p_{n,k+4}(X_{k+4})$ 亦存在，綜合上述討論可知 $P_{奇,6+4s}$ 具有存在性，因此以下僅討論 $P_{奇,8+4s}$ 的存在性。

(1) $n = 5 + 4t$ ，其中 t 為非負整數。

圖 16 呈現 $p_{5,8}(2,0,2,0,1,1,1,0)$ 、 $p_{9,8}(4,1,4,1,3,2,3,1)$ 與 $p_{13,8}(6,2,6,2,5,3,5,2)$ 圖形，當邊數增加時，除了密閉區塊的圖形逐漸相似外，我們亦發現其拼接方法具有以下規律：

$$\begin{aligned} (4,1,4,1,3,2,3,1) &= (2,0,2,0,1,1,1,0) + (2,1,2,1,2,1,2,1) \text{ ,} \\ (6,2,6,2,5,3,5,2) &= (2,0,2,0,1,1,1,0) + 2 \cdot (2,1,2,1,2,1,2,1) \text{ ,} \end{aligned}$$

我們將此規律寫成定理 1.9 並加以證明。

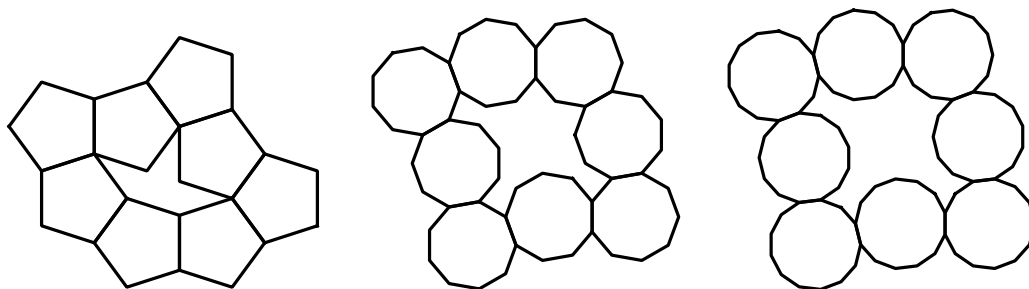


圖 16 $p_{5,8}(2,0,2,0,1,1,1,0)$ 、 $p_{9,8}(4,1,4,1,3,2,3,1)$ 與 $p_{13,8}(6,2,6,2,5,3,5,2)$ 圖形

定理 1.9 :

當 t 為非負整數時， $p_{5+4t,8}(2+2t,t,2+2t,t,1+2t,1+t,1+2t,t) \in P_{5+4t,8}$ 。

證明：

由定理 1.2 知 $\theta_i = \frac{2\pi}{n} \left(\sum_{j=1}^i (x_j + 1) \right) - (i-1)\pi$ ，若將正多邊形依 $X_8 = (2+2t,t,2+2t,t,1+2t,1+t,1+2t,t)$ 進行拼接，經計算後得 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8) = \left(\frac{4t+6}{4t+5}\pi, \frac{2t+3}{4t+5}\pi, \frac{2t+4}{4t+5}\pi, \frac{1}{4t+5}\pi, 0, \frac{-2t-1}{4t+5}\pi, \frac{-2t-2}{4t+5}\pi, -\pi \right)$ ，且 $\theta_1 - \theta_4 = \theta_2 - \theta_7 = \theta_3 - \theta_6 = \theta_5 - \theta_8 = \pi$ ，因此 $\cos \theta_1 + \cos \theta_4 = \cos(\pi + \theta_4) + \cos \theta_4 = 0$ ， $\sin \theta_1 + \sin \theta_4 = \sin(\pi + \theta_4) + \sin \theta_4 = 0$ ，可得 $\sum_{i=1}^8 \cos \theta_i = \sum_{i=1}^8 \sin \theta_i = 0$ ，滿足定理 1.2，又由圖 16 可得知，當 $t \rightarrow \infty$ 時，正多邊形會趨近於一個圓， $p_{5+4t,8}(X_8)$ 會趨近於 8 個圓相切，因此任 2 個正多邊形不會產生重疊，故 $p_{5+4t,8}(X_8) \in P_{5+4t,8}$ 。■

(2) $n=7$

我們嘗試許久，一直未能找到 $P_{7,8}$ 的任何一個元素，不禁開始懷疑 $P_{7,8}$ 是否為空集合？於是改用窮舉法進行檢驗，假設 $p_{7,8}(X_8) = p_{7,8}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in P_{7,8}$ ，由定理 1.1 知， $T(7,8) = \sum_{i=1}^8 x_i = 13$ ，我們列出此方程式的所有正整數解，再利用數學軟體 *Mathematica* 逐一檢驗是否滿足定理 1.2，結果發現無任何一組解滿足 $\sum_{i=1}^8 \cos \theta_i = \sum_{i=1}^8 \sin \theta_i = 0$ ，由此確定 $p_{7,8}(X_8)$ 不存在，即無法利用 8 個正 7 邊形圍出密閉區塊。當個數 k 為 12 時，如圖 17 所示，我們找到 $p_{7,12}(2,1,3,1,2,2,3,1,2,1,3,2)$ ，再根據定理 1.5 可推論得知 $P_{7,12+4s}$ (s 為非負整數) 具有存在性。

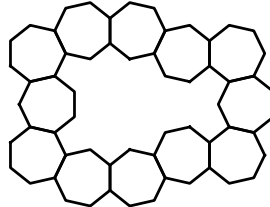


圖 17 $p_{7,12}(2,1,3,1,2,2,3,1,2,1,3,2)$ 的圖形

(3) $n \geq 11$ ，且 $n=11+4t$ ($t \geq 0$)

圖 18 呈現 $p_{11,8}(6,1,6,1,3,4,3,1)$ 、 $p_{15,8}(8,2,8,2,5,5,5,2)$ 與 $p_{19,8}(10,3,10,3,7,6,7,3)$ 的圖形，上述三個密閉區塊的拼接方法可經由 $(6,1,6,1,3,4,3,1)$ 加上 t 倍的 $(2,1,2,1,2,1,2,1)$ 進行延伸，我們將之寫成定理 1.10，其證明想法與定理 1.9 相同，礙於說明書頁數限制，將其證明省略之。

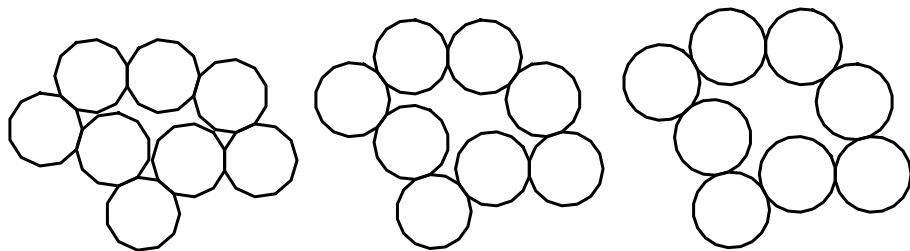


圖 18 $p_{11,8}(6,1,6,1,3,4,3,1)$ 、 $p_{15,8}(8,2,8,2,5,5,5,2)$ 與 $p_{19,8}(10,3,10,3,7,6,7,3)$ 的圖形

定理 1.10 :

當 t 為非負整數時， $p_{11+4t,8}(6+2t,1+t,6+2t,1+t,3+2t,4+t,3+2t,1+t) \in P_{11+4t,8}$ 。

綜合上述(1)~(3)的討論，可知除了 $P_{7,8}$ 無存在性，其餘 $P_{奇,偶}$ 均有存在性。

4、 $P_{偶,奇}$ 的存在性

由定理 1.4 知，當 n 為偶數且 $k \geq 5$ 時，若能找到拼接方法 X_k 使得 $p_{n,k}(X_k) \in P_{n,k}$ ，則必能將 X_k 延伸為 X'_{k+2} ，使得 $p_{n,k+2}(X'_{k+2}) \in P_{n,k+2}$ ，因此對每一個 n 值而言，只要能找到一個奇數 k 值使得 $P_{n,k}$ 具有存在性，則所有個數大於 k 的 $P_{n,奇}$ 也都會有存在性。以下我們針對不同 n 值，嘗試找出讓 $P_{n,k}$ 具有存在性的最小 k 值，因為正方形與正六邊形可以密鋪整個平面，所以我們不討論 $n=4$ 、 $n=6$ ，只考慮 n 為偶數且 $n \geq 8$ 的情況。

(1) n 為 6 的倍數

由定理 1.6 知，當邊數為 $6t$ ($t \geq 2$) 時， $P_{6t,3}$ 具有存在性，但我們一直未能找到 $P_{6t,5}$ 的任何一個元素。當個數 $k=7$ 時，我們發現一種有規律的拼接方法 $(t, 3t-2, 3t-2, t, 2t, 3t-3, 2t)$ ，經檢驗後知此種拼法滿足定理 1.2，因此 $P_{6t,7}$ 具有存在性，再利用定理 1.4 可推論得知 $P_{6t,7+2s}$ 亦具有存在性。綜合上述討論，可知除了 $P_{6t,5}$ 尚不確定外，其餘 $P_{6t,奇}$ 均具有存在性。

(2) $n = 2^i$

以下先利用反證法證明 $P_{8,奇}$ 為空集合，再用類似想法推論當 $i \geq 3$ 時， $P_{2^i,奇}$ 均為空集合。

定理 1.11 :

當 k 為奇數時， $P_{8,k}$ 不具有存在性。

證明 :

假設存在一種拼接方法 X_k 使得 $p_{8,k}(X_k) \in P_{8,k}$ ，不失一般性，設 k 個正 8 邊形的中心為 $O_1 \sim O_k$ ，且 $\vec{O_1 O_k} = (1, 0)$ ，則不論第 i 個與第 $i+1$ 個正 8 邊形以哪一個邊相接， $\vec{O_i O_{i+1}}$ 必為下列四種向量類型的其中一種：

類型 1 : $\pm(\cos 0, \sin 0) = \pm(1, 0)$ 、類型 2 : $\pm(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}) = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、

類型 3 : $\pm(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = \pm(0, 1)$ 、類型 4 : $\pm(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4}) = \pm(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

因為任 1 種類型的向量均無法表示成其他 3 種類型向量的「整係數」線性組合(例：不存在 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ，使得 $(1, 0) = a(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + b(0, 1) + c(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$)，當個數 k 為奇數時，無論何種拼法， k 個向量 $\vec{O_1 O_2} \sim \vec{O_k O_1}$ 無法使得上述 4 種向量類型數量均為偶數，所以 $\vec{O_1 O_2} + \vec{O_2 O_3} + \dots + \vec{O_k O_1} \neq \vec{0}$ ，由定理 1.2 知，此拼法 X_k 無法圍出密閉區塊，因此 $P_{8,k}$ 為空集合，即 $P_{8,k}$ 不具有存在性。■

仿照定理 1.11 證明想法，當 $n = 2^i$ 時，由正 n 邊形中心所形成的向量可分成 2^{i-1} 種類型： $\pm(\cos(k \cdot \frac{2\pi}{n}), \sin(k \cdot \frac{2\pi}{n}))$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{i-1} - 1$ ，因為 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，
 $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ， $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ ， \dots ， $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ，
 $\sin \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ ， \dots ，此 2^{i-1} 種類型的任一類型向量均無法表示成其餘類型向量的「整係數」線性組合，因此當個數 k 為奇數時， $\vec{O_1O_2} + \vec{O_2O_3} + \dots + \vec{O_kO_1} \neq \vec{0}$ ，所以 $P_{2^i, \text{奇}}$ 均不具有存在性。

(3) n 非 6 的倍數，且 $n \neq 2^i$

在 $P_{\text{奇}, \text{偶}}$ 類型中，我們可以利用特定拼法為基礎進行延伸（例：由 $p_{9,8}(X_8)$ 延伸得到 $p_{9+4t,8}(X_8)$ ），但在探討 $P_{\text{偶}, \text{奇}}$ 情形時，我們還無法完整討論其存在性，目前僅能利用以下定理 1.12 處理部分邊數 n 為非 6 的倍數且 $n \neq 2^i$ 的偶數，且個數 k 為奇數時的 $P_{n,k}$ 存在性。

定理 1.12：

若 $T(n, k)$ 與 k 的最大公因數大於 1，則 $P_{n,k}$ 具有存在性。

證明：

設 $T(n, k)$ 與 k 的最大公因數為 g ，以下分 3 種情形討論。

情形 1：當 $g = 2$ 且 n 為偶數時，可將 k 個正 n 邊形等分成 2 組，由引理 1.3 及定理 1.3 知，在選取適當的拼法拼出前 $\frac{k}{2}$ 個正 n 邊形後，可利用點對稱方式拼出剩餘 $\frac{k}{2}$ 個正 n 邊形，即可得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。

情形 2：當 $g = 2$ 且 n 為奇數時，若 $\frac{k}{2}$ 為偶數，則可假設 $k = 4m$ ，且

$$T(n, k) = T(n, 4m) = \frac{n \cdot 4m}{2} - n - 4m = (2m-1) \cdot n - 4m = \text{奇數}，\text{此和 } T(n, k)$$

與 k 的最大公因數為 2 產生矛盾，因此 $\frac{k}{2}$ 必為奇數。仿照情形 1 作法，可將 k 個正 n 邊形等分成 2 組，利用點對稱方式得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。

情形 3：當 $g \geq 3$ 時，可將 k 個正 n 邊形等分成 g 組，每組有 $\frac{k}{g}$ 個正 n 邊形，選取適當拼法 $x_1 \sim x_{\frac{k}{g}}$ 拼出前 $\frac{k}{g}$ 個正 n 邊形，將第 1 個與第 $\frac{k}{g} + 1$ 個正 n 邊形中心點當作「正 g 邊形」頂點，接著以正 g 邊形中心為旋轉中心，將前 $\frac{k}{g}$ 個正 n 邊形逆時針旋轉 $g-1$ 次，即可得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。■

有了定理 1.12 的結論後，當討論「非 6 的倍數且非 2' 的偶數 n 、個數 k 為奇數」的 $P_{n,k}$ 存在性時，可先尋找 n 的最小質因數 α （取 $\alpha \geq 5$ ），則

$T(n, \alpha) = \frac{n \cdot \alpha}{2} - n - \alpha$ 與 α 的最大公因數即是 α ，因此 $P_{n,\alpha}$ 具有存在性，例如 $n=10$ 時，可求得 $\alpha=5$ ，接著依定理 1.12 想法，將 5 個正 10 邊形分成 5 組，每組 1 個，恰好放在 1 個大正 5 邊形上；例如 $n=14$ 時，則取 $\alpha=7$ ，圖 19 呈現依此想法所得到 $p_{10,5}(2,2,2,2,2)$ 與 $p_{14,7}(4,4,4,4,4,4,4)$ 。

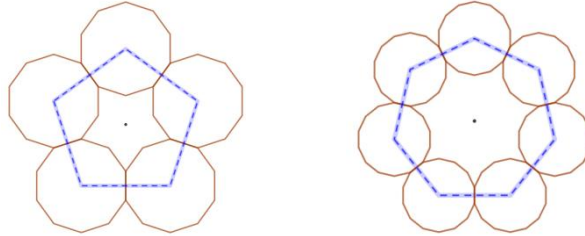


圖 19 利用定理 1.12 得到的 $p_{10,5}(2,2,2,2,2)$ 與 $p_{14,7}(4,4,4,4,4,4,4)$ 圖形

雖然定理 1.12 可用來尋找讓 $P_{\text{偶},\text{奇}}$ 具有存在性的特定個數 k 值，但目前我們仍無法判斷個數介於 3 與 k 之間的 $P_{\text{偶},\text{奇}}$ 是否具有存在性。

三、 $P_{n,k}$ 的密鋪性

在討論完 $P_{n,k}$ 的存在性後，我們好奇 $P_{n,k}$ 是否具有密鋪性，已知 $P_{\text{奇},\text{奇}}$ 不具有存在性，所以以下僅討論 $P_{\text{偶},\text{偶}}$ 、 $P_{\text{奇},\text{偶}}$ 與 $P_{\text{偶},\text{奇}}$ 的密鋪性。由文獻中得知以下結論，凸六邊形中，至少有圖 20 中所呈現的三種類型可以密鋪平面。我們將以此為基礎討論 $P_{n,k}$ 的密鋪性。

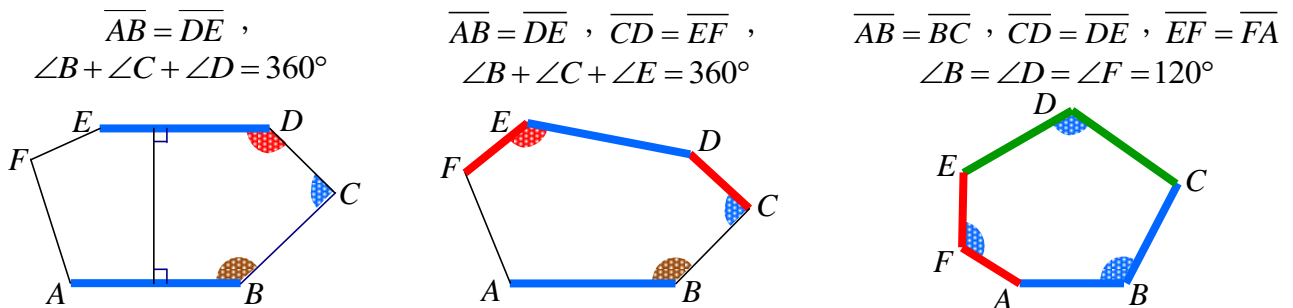


圖 20 能密鋪平面的所有六邊形類型

(一) $P_{\text{偶},\text{偶}}$ 的密鋪性

當 n 、 k 均為偶數時，由定理 1.7 的證明過程可知，在形成 $p_{\text{偶},4}(X_4)$ 的四個正多邊形中心點會形成平行四邊形，且可密鋪平面，如圖 21，因此 $P_{\text{偶},4}$ 均具有密鋪性。

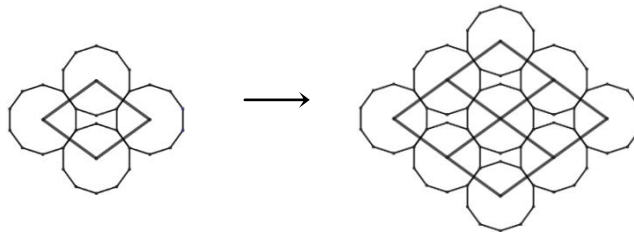


圖 21 $p_{10,4}(2,1,2,1)$ 與其密鋪圖形

利用定理 1.4 可將 $p_{\text{偶},4}(X_4)$ 圖形延伸到 $p_{\text{偶},6}(X_6)$ ，其中必存在一種延伸方法，可以使中心點多邊形新增的兩組對邊互相平行，如圖 22 所示，形成有三組對邊平行且等長的六邊形，為 Gardner (1988) 提出可密鋪平面的第一類凸六邊形，因此 $P_{\text{偶},6}$ 均具有密鋪性。依據相同想法繼續延伸，可得知 $P_{\text{偶},\text{偶}}$ 均有密鋪性。

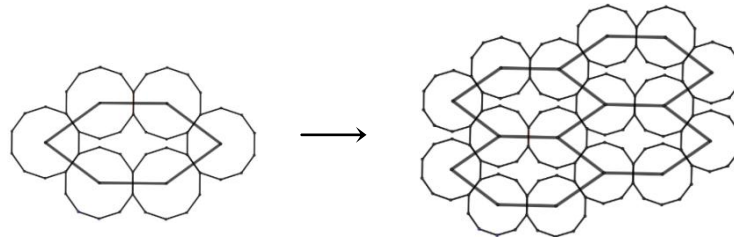


圖 22 $p_{10,6}(3,1,3,3,1,3)$ 與其密鋪圖形

(二) $P_{\text{奇},\text{偶}}$ 的密鋪性

在此情形中，我們發現除了 $P_{7+4t,12+4s}$ (t, s 為非負整數) 不確定是否有密鋪性外，其餘 $P_{\text{奇},\text{偶}}$ 均具有密鋪性。以下將邊數 n 分成 $5+4t$ 與 $7+4t$ 、個數 k 分成 $6+4s$ 與 $8+4s$ (t, s 為非負整數) 等四種情形進行討論。

1、 $n=5+4t$ 且 $k=6+4s$

由定理 1.8 知，存在拼接方法 X_6 使得 $p_{5+4t,6}(X_6) \in P_{5+4t,6}$ ，若將該拼法中的 6 個正 n 邊形中心點連線，可形成有三組對邊平行且等長的凸六邊形，為 Gardner (1988) 提出可密鋪平面的第一類六邊形，因此 $P_{5+4t,6}$ 均有密鋪性。利用定理 1.5 可將 $p_{5+4t,6}(X_6)$ 延伸至 $p_{5+4t,6+4s}(X_{6+4s})$ ，如圖 24 所示，紅色六邊形為 Gardner (1988) 提出可密鋪平面的第一類凸六邊形，由此可類推得知當 t, s 為非負整數時， $P_{5+4t,6+4s}$ 均有密鋪性。

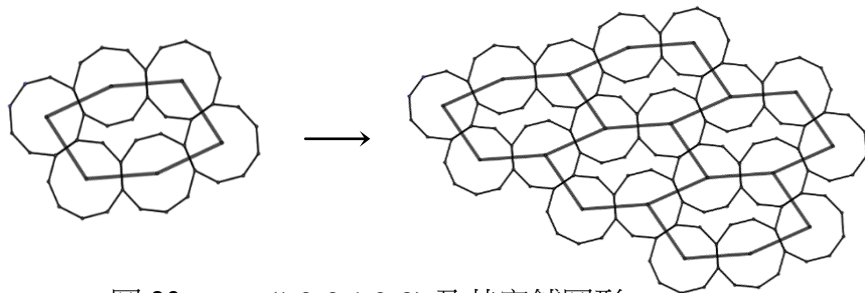


圖 23 $p_{9,6}(1,3,2,1,3,2)$ 及其密鋪圖形

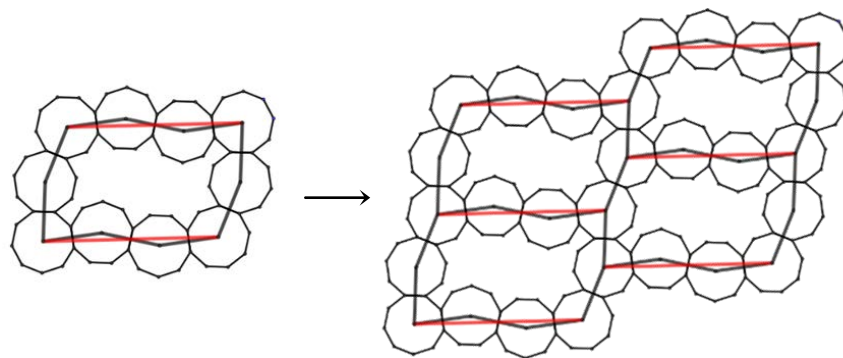


圖 24 由 $p_{9,6}(1,3,2,1,3,2)$ 延伸所得的 $p_{9,10}(1,3,2,3,4,1,3,2,3,4)$ 及其密鋪圖形

2、 $n=7+4t$ 且 $k=6+4s$

此情形推導想法與「 $n=5+4t$ 且 $k=6+4s$ 情形」完全相同，可同理推得當 $t、s$ 為非負整數時， $P_{7+4t,6+4s}$ 均具有密鋪性。

3、 $n=5+4t$ 且 $k=8+4s$

因為 $p_{5,8}(2,0,2,0,1,1,1,0) \in P_{5,8}$ ，且可延伸得到 $p_{5,12}(2,0,1,1,1,1,2,0,2,0,1,2) \in P_{5,12}$ ，由圖 25 知 $P_{5,8}$ 與 $P_{5,12}$ 均具有密鋪性，可同理延伸得知 $P_{5,8+4s}$ 均具有密鋪性。

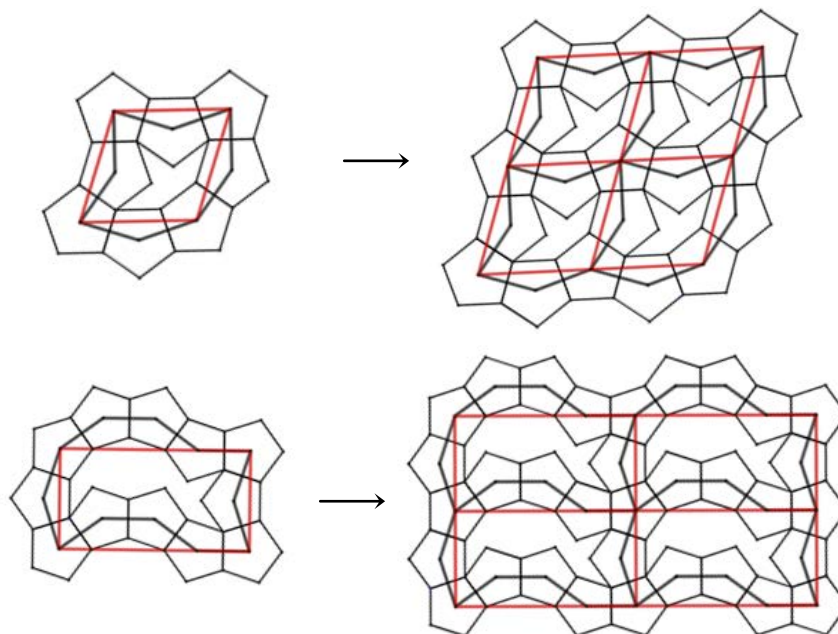


圖 25 $p_{5,8}(2,0,2,0,1,1,1,0)$ 、 $p_{5,12}(2,0,1,1,1,1,2,0,2,0,1,2)$ 與其密鋪圖形

因為 $p_{9,8}(1,3,2,3,1,4,1,4) \in P_{9,8}$ ，且可延伸得到 $p_{9,12}(1,3,2,4,2,4,1,4,1,3,5,3) \in P_{9,12}$ ，由圖 26 知 $P_{9,8}$ 與 $P_{9,12}$ 均具有密鋪性，可同理延伸得知 $P_{9,8+4s}$ 均具有密鋪性。由第 9 頁的存在性討論知道，可由 $p_{9,8}(X_8)$ 延伸至 $p_{9+4t,8}(X'_8)$ ，再依上述方式可得知 $P_{9+4t,8+4s}$ 具有密鋪性。綜合上述推論可知當 $t、s$ 為非負整數時， $P_{5+4t,8+4s}$ 均具有密鋪性。

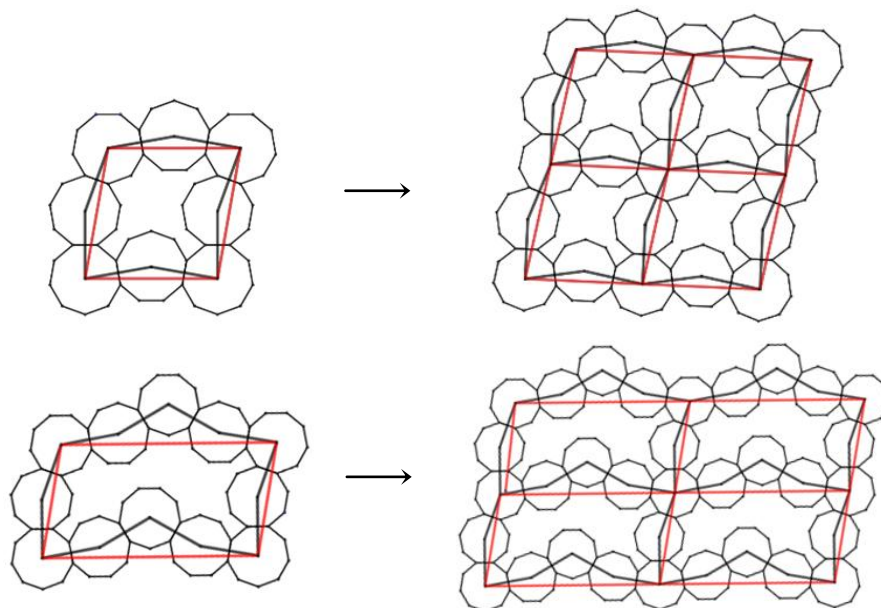


圖 26 $p_{9,8}(1,3,2,3,1,4,1,4)$ 、 $p_{9,12}(1,3,2,4,2,4,1,4,1,3,5,3)$ 與其密鋪圖形

4、 $n = 7 + 4t$ 且 $k = 8 + 4s$

此情形（因為 $P_{7,8}$ 無存在性，取 $t \geq 1$ ）中，我們測試許多已發現的拼接方法 X_{8+4s} ，目前僅確定 $P_{7+4t,8}$ 具有密鋪性，其餘 $P_{7+4t,8+4s}$ 尚無法判斷是否具有密鋪性。圖 27 以 $p_{11,8}(4,3,1,6,1,6,1,3)$ 為例，可連接正 11 邊形中心點形成紅色的平行四邊形，並進而密鋪整個平面。

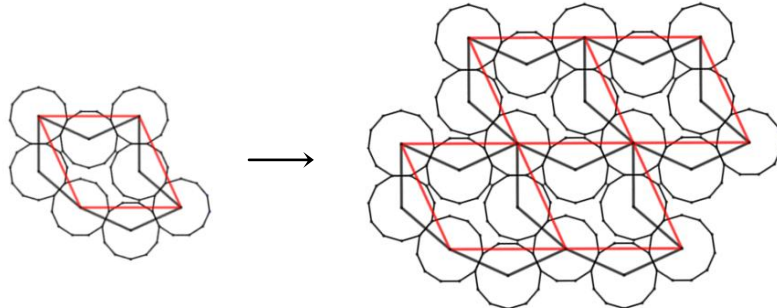


圖 27 $p_{11,8}(4,3,1,6,1,6,1,3)$ 與其密鋪圖形

(三) $P_{偶,奇}$ 的密鋪性

我們目前僅發現 $P_{6t,3}$ ($t \geq 2$) 與 $P_{10t,7}$ ($t \geq 1$) 具有密鋪性，以下分別說明之。

1、 $n = 6t$ 且 $k = 3$

由定理 1.6 知 $p_{6t,3}(\frac{n}{6}-1, \frac{n}{6}-1, \frac{n}{6}-1) \in P_{6t,3}$ ，將 3 個正 $6t$ 邊形中心點連線可形成正三角形，因此 $P_{6t,3}$ 具有密鋪性，如圖 28 所示， $P_{12,3}$ 具有密鋪性。

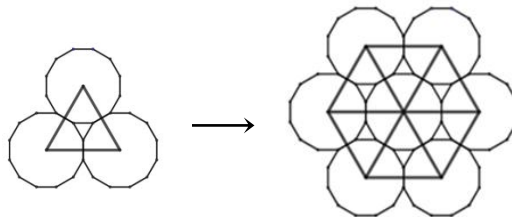


圖 28 $p_{12,3}(1,1,1)$ 與其密鋪圖形

2、 $n = 10t$ 且 $k = 7$

已知 $p_{10t,7}(3t-1, 4t-1, 4t-1, 3t-1, 3t-1, 5t-1, 3t-1) \in P_{10t,7}$ ，若連接 7 個正 $10t$ 邊形的中心點，因為其底部的三點會共線，可將其圖形視為凸六邊形，且該凸六邊形符合文獻中得知可密鋪平面的第二類六邊形，由此可知 $P_{10t,7}$ 具有密鋪性。圖 29 以 $t=1$ 為例，說明 $p_{10,7}(2,2,3,3,2,2,4)$ 的密鋪性。

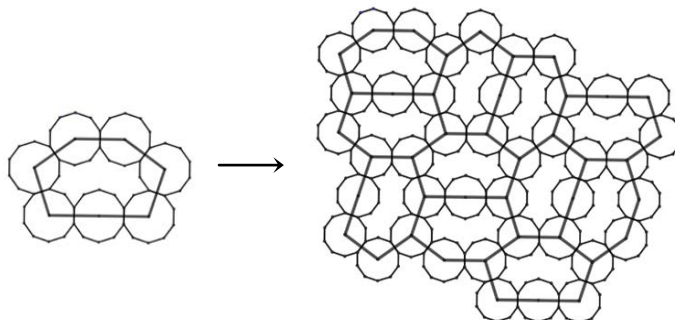


圖 29 $p_{10,7}(2,2,3,3,2,2,4)$ 及其密鋪圖形

四、 $S_{n,d,k}$ 的存在性

(一) 基本性質與定理

在利用 *GeoGebra* 作圖時，我們發現正 n 角星形有「兩頂點重合」與「頂點在另一個星形邊上」的情形，因為在討論 $P_{n,k}$ 存在性時，兩個多邊形頂點相接（如圖 30 的左圖）並不算圍出密閉區塊，因此在 $S_{n,d,k}$ 存在性的討論中，我們認定「兩頂點重合」與「頂點在另一個星形邊上」亦不算圍出密閉區塊，所以將圖 30 右圖中的斜線部分視為「一個」密閉區塊。

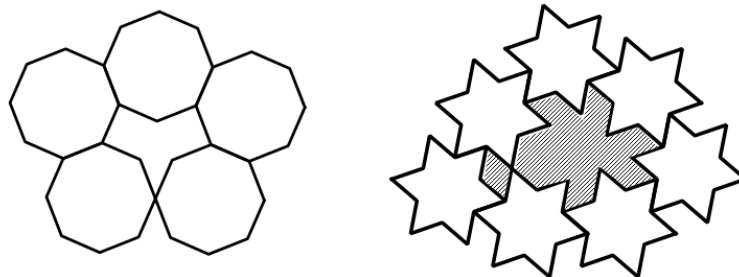


圖 30 「兩頂點重合」不算圍出密閉區塊

在拼接正 n 角星形時，若共用邊在 $\overline{OA_1}$ 逆時針那側，稱為「第I型」（圖 31 的左圖），反之，若共用邊在 $\overline{OA_1}$ 順時針那側，稱為「第II型」（圖 31 的右圖）。

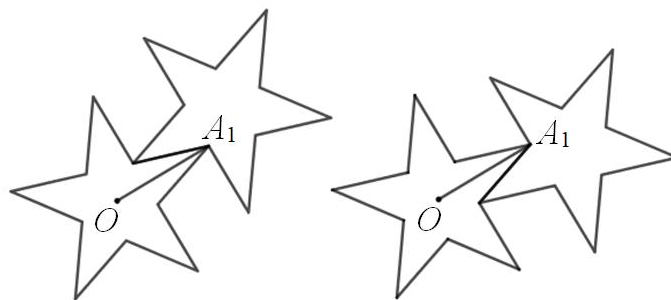


圖 31 正 n 角星形的 2 種拼接類型

圖 32 中，左方 2 個圖均跳過 3 個邊與第 2 個星形相接，右方 2 個圖均跳過 2 個邊與第 2 個星形相接，由此可知：不論第 1 個星形的第 1 個共用邊（藍色邊）為「第I型」或「第II型」，在跳過奇數個邊後拼接第 2 個星形，第 2 個星形的第 1 個共用邊（紅色邊）維持「相同類型」；在跳過偶數個邊後拼接第 2 個星形時，則改變為「另一個類型」。本研究中，在拼接正 n 角星形時，第 1 個星形的第 1 個共用邊一律採用「第I型」。

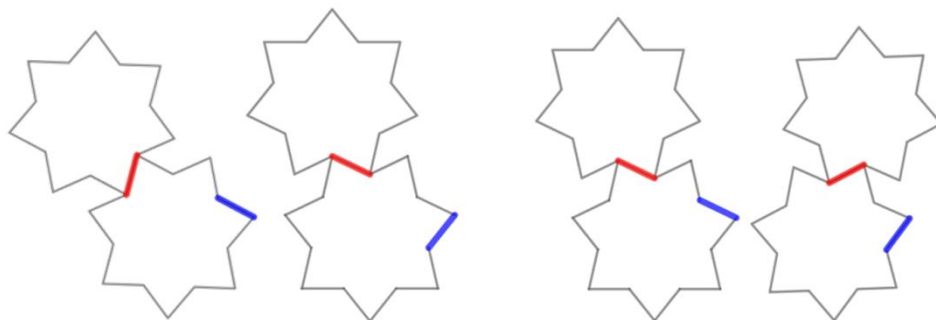


圖 32 正 n 角星形的共用邊類型變化

如圖 33，假設正 n 角星形外圈頂點為 $A_1 \sim A_n$ ，內圈頂點為 $B_1 \sim B_n$ ， M 為 $\overline{A_1B_1}$ 中點，規定 $\angle A_1OM = \alpha$ ， $\angle B_1OM = \beta$ 。本研究中，正 n 角星形是指將一圓圓周 n 等分後，將每個頂點與其相隔 d 個弧的另一個頂點連接所形成的圖形，且 $1 < d < \frac{n}{2}$ ，因此 $\angle A_1OB_1 = \frac{\pi}{n}$ ， $\angle B_1A_2B_2 = (n-2d) \cdot \frac{\pi}{n}$ ， $\angle OB_1A_1 = \frac{n+2d-2}{2} \cdot \frac{\pi}{n}$ 。

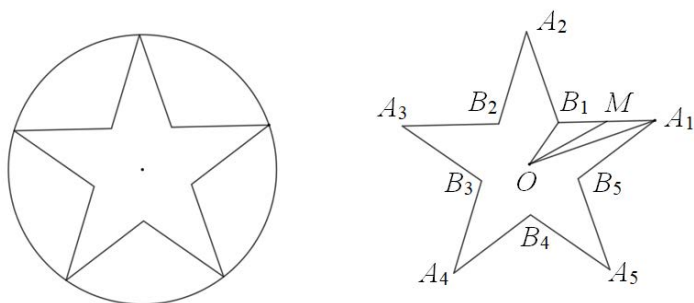


圖 33 取 $d=2$ 的正 5 角星形

由圖 34 知，不論紅色正 n 角星形的第 1 個共用邊（藍色邊）為第 I 型或第 II 型，在跳過 3 個邊後與下一個星形相接，其所旋轉的角度 $\angle O_1O_2O_3 = (3+1) \cdot \frac{\pi}{n}$ 。

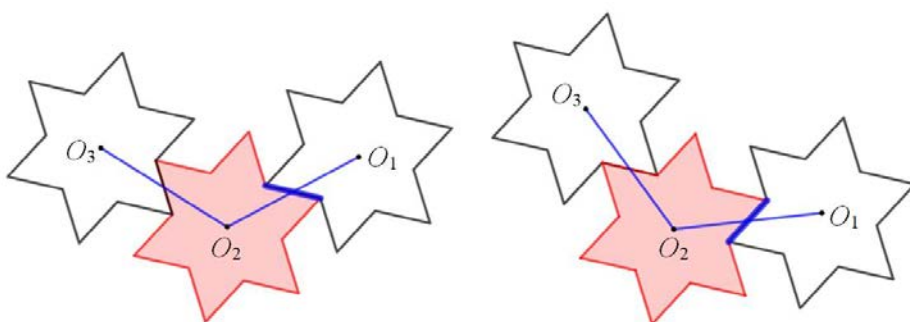


圖 34 跳過「奇數」個邊的角度變化

由圖 35 知，若紅色正 n 角星形的第 1 個共用邊（藍色邊）為第 I 型，在跳過 4 個邊後與下一個星形相接，其所旋轉的角度 $\angle O_1O_2O_3 = 4 \cdot \frac{\pi}{n} + 2\beta$ ；若紅色正 n 角星形的第 1 個共用邊為第 II 型，在跳過 4 個邊後與下一個星形相接，其所旋轉的角度 $\angle O_1O_2O_3 = 4 \cdot \frac{\pi}{n} + 2\alpha$ 。我們將此角度變化規則寫成引理 2.1。

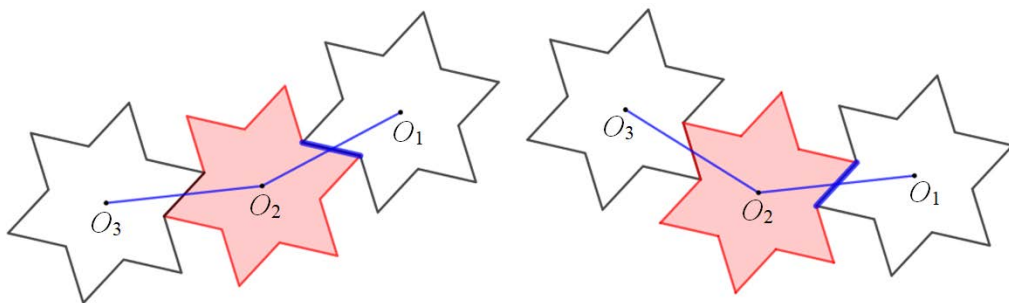


圖 35 跳過「偶數」個邊的角度變化

引理 2.1

若 $S_{n,d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 存在，則由 k 個正 n 角星形中心點所形成的多邊形內角中，當 x_i 為奇數時，第 i 個內角為 $(x_i + 1) \cdot \frac{\pi}{n}$ ；當 x_i 為偶數且第 i 個正 n 角星形的第 1 個共用邊為第 I 型時，第 i 個內角為 $x_i \cdot \frac{\pi}{n} + 2\beta$ ；當 x_i 為偶數且第 i 個正 n 角星形的第 1 個共用邊為第 II 型時，第 i 個內角為 $x_i \cdot \frac{\pi}{n} + 2\alpha$ 。

引理 2.2

當 n 為正整數時，在任一拼法 X_k 中，第 i 個與第 $i+2$ 個正 n 角星形可經平移後重合；當 n 為偶數時，在任一拼法 X_k 中，任兩個正 n 角星形可經平移後重合。

證明：

當兩個正 n 角星形以一個邊為共用邊相接時，可視為將第 1 個正 n 角星形對著自身中心點逆時針旋轉 180° 後再平移，因此第 $i+2$ 個正 n 角星形是由第 i 個正 n 角星形經 2 次的旋轉（共旋轉 360° ）再平移所得；而當 n 為偶數時，正 n 角星形對著自身中心點逆時針旋轉 180° 即為原本圖形，因此在任一拼法 X_k 中，任兩個正 n 角星形可經平移後重合。■

定理 2.1

當 $d > \frac{n+6}{4}$ 時， $S_{n,d,k}$ 無存在性。

證明：

如圖 36，兩正 n 角星形以 \overline{AB} 為共用邊，其中 $\angle BAO + \angle BCO = \angle ABD = (n-2d) \cdot \frac{\pi}{n}$ ，
 $\angle BDE = \angle ABC = \angle AOC + \angle BAO + \angle BCO = 2 \cdot \frac{\pi}{n} + (n-2d) \cdot \frac{\pi}{n} = (n+2-2d) \cdot \frac{\pi}{n}$ ，所以
 $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = \frac{2\pi}{n}$ ，因為 $\overline{BC} = \overline{BD}$ ，所以 $\angle BDC = \frac{1}{2}(\pi - \angle CBD) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{n}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ 。
 若此兩正 n 角星形沒有重疊區塊，則 $\angle BDC \leq \angle BDE$ ，即 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \leq (n+2-2d) \cdot \frac{\pi}{n}$ ，化簡可得 $d \leq \frac{n+6}{4}$ ，因此，當 $d > \frac{n+6}{4}$ 時，任兩正 n 角星形不論以哪個邊為共用邊相接，必有重疊區域，因此 $S_{n,d,k}$ 不具有存在性。■

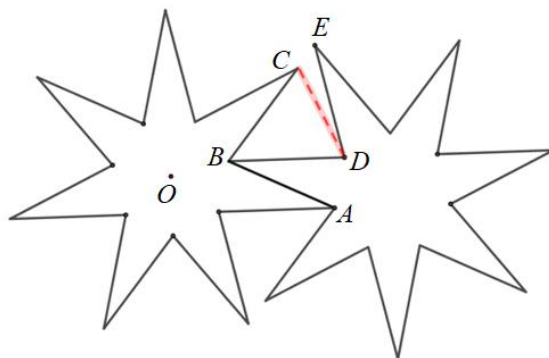


圖 36 d 與兩正 n 角星形是否有重疊區域的關係圖

定理 2.2

若 $s_{n,d,k}(X_k) = s_{n,d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 存在，則 $s_{n,d,k}(X_k)$ 的邊數 $T(2n, k) = n \cdot k - 2n - k$ 。

證明：

當利用 k 個正 n 角星形拼出 $s_{n,d,k}(X_k) = s_{n,d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 時，每一個正 n 角星形的 $2n$ 個邊可分成外部、共用邊與內部三部分，由 (外部總邊數) - (內部總邊數) = $2 \cdot 2n$ 與 $(2n) \cdot k = (\text{外部總邊數}) + 2 \cdot (\text{共用邊總數}) + (\text{內部總邊數})$ 可解得

$$(\text{內部總邊數}) = \sum_{i=1}^k x_i = T(2n, k) = n \cdot k - 2n - k \quad \square$$

定理 2.3

當 n 為偶數且 $k \geq 4$ 時，若 $s_{n,d,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+2} 使得 $s_{n,d,k+2}(X'_{k+2})$ 存在。

證明：

若 $s_{n,d,k}(X_k)$ 存在，由引理 2.2 知，當 n 為偶數時， k 個正 n 角星形中任 2 個可經平移後重合，即任 2 個正 n 角星形的對應邊會互相平行，如圖 37 所示，可將原圖形分成兩部分，接著在 2 個分割處的正 n 角星形取平行邊 (紅色邊)，可各增加 1 個藍色正 n 角星形，即可得到 $s_{n,d,k+2}(X'_{k+2})$ 。

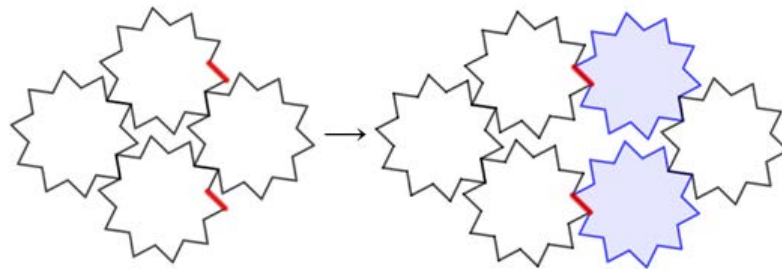


圖 37 由 $s_{10,3,4}(5,3,5,3)$ 延伸得到 $s_{10,3,6}(7,3,7,7,3,7)$

定理 2.4

當 n 為奇數且 $k \geq 6$ 時，若 $s_{n,d,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+4} 使得 $s_{n,d,k+4}(X'_{k+4})$ 存在。

證明：

若 $s_{n,d,k}(X_k)$ 存在，由引理 2.2 知，當 n 為奇數時， k 個正 n 角星形中第 i 個與第 $i+2$ 個正 n 角星形可經平移後重合，即第 i 與第 $i+2$ 個正 n 角星形對應邊會互相平行，如圖 38 所示，可將原圖形分成兩部分，接著在 2 個分割處的正 n 角星形取平行邊 (紅色邊)，各增加 2 個藍色正 n 角星形，即可得到 $s_{n,d,k+4}(X'_{k+4})$ 。

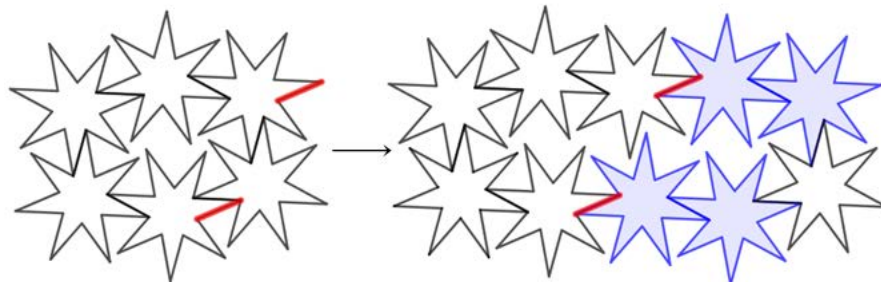


圖 38 由 $s_{7,3,6}(3,3,5,3,3,5)$ 延伸得到 $s_{7,3,10}(3,3,5,6,6,3,3,5,6,6)$

(二) $S_{n,d,k}$ 的存在性

在研究過程中，我們發現大多數情形下，「當 $d \leq \frac{n+6}{4}$ 時，若 $s_{n,2,k}(X_k)$ 存在，則該拼接方法 X_k 亦可使得不同 d 值的 $s_{n,d,k}(X_k)$ 均存在，如圖 39 所示， $X_4 = (3,3,3,3)$ 同時為 $s_{8,2,4}(3,3,3,3)$ 與 $s_{8,3,4}(3,3,3,3)$ 的成功拼法。

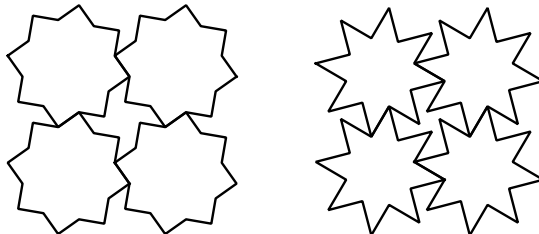


圖 39 相同拼法 X_k 在不同 d 值的 $s_{8,d,4}(X_4)$ 圖形

但我們亦發現極少數的特例，如圖 40 所示，當 $d=2$ 時，4 個正 8 角星形可利用拼接方法 $X_4 = (4,2,4,2)$ 拼出密閉區塊，但在 $d=3$ 時，該拼法卻會產生重疊區域（事實上，在滿足 $d \leq \frac{n+6}{4}$ 下，這是我們唯一發現的特例），目前我們尚無法判斷「若 $s_{n,2,k}(X_k)$ 存在時， d 值需滿足何種條件才能保證 $s_{n,d,k}(X_k)$ 亦存在」，因此在接下來的 $S_{n,d,k}$ 討論中，僅討論 $d=2$ 的情形。

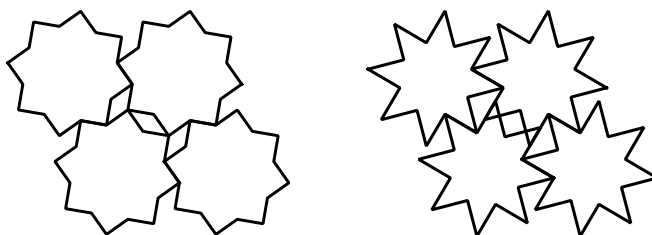


圖 40 當 $d \leq \frac{n+6}{4}$ 時，相同拼法在不同 d 值可能產生重疊區域

以下依 n 、 k 的奇偶性討論 $S_{n,d,k}$ 存在性，共分成 $S_{奇,d,奇}$ 、 $S_{偶,2,偶}$ 、 $S_{奇,2,偶}$ 與 $S_{偶,2,奇}$ 等四種類型。

1、 $S_{奇,d,奇}$ 的存在性

當 n 、 k 均為奇數時，設 $s_{n,d,k}(X_k) = s_{n,d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 存在，則由定理 2.2 知，

$$\sum_{i=1}^k x_i = T(2n, k) = nk - 2n - k = \text{奇} - \text{偶} - \text{奇} = \text{偶}，\text{因此 } x_1 \sim x_k \text{ 中有「偶數個奇數」與「奇數個偶數」。}$$

當第一個正 n 角形的第 1 個共用邊採用「類型 I」，在拼接過程中，若 x_i 為奇數，則下一個正 n 角星形第 1 個共用邊維持相同類型，若 x_i 為偶數，則會改變類型，因為 $x_1 \sim x_k$ 中有「奇數個偶數」，將導致第 k 個與第 1 個正 n 角星形的共用邊為類型 II，此與一開始的假設（第一個正 n 角形的第 1 個共用邊為「類型 I」）產生矛盾，因此當 n 、 k 均為奇數時， $s_{n,d,k}(X_k) = s_{n,d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 均不存在，即 $S_{奇,d,奇}$ 不具有存在性。

2、 $s_{\text{偶},2,\text{偶}}$ 的存在性

定理 2.5

當 n 為偶數時，可用 4 個全等正 n 角星形圍出 $s_{n,2,4}(X_4)$ 。

證明：

當 n 為偶數時，可取 $X_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ，其中 $x_1 = x_2 = \left\lfloor \frac{T(2n,4)}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ ，在拼出前 2 個星形後，由引理 2.2 知，此 2 個星形必可經平移後重合，因此可選定包含第 1 個共用邊在內的一組平行邊，將前 2 個星形對該組平行邊中心做點對稱，則可得到 $s_{n,2,4}(X_4)$ ，圖 41 以 $n=10$ 為例，取 $x_1 = x_2 = 4$ ，以藍色平行四邊形的中心為對稱點，利用上述方法得到 $s_{n,2,4}(4,4,4,4)$ 。■

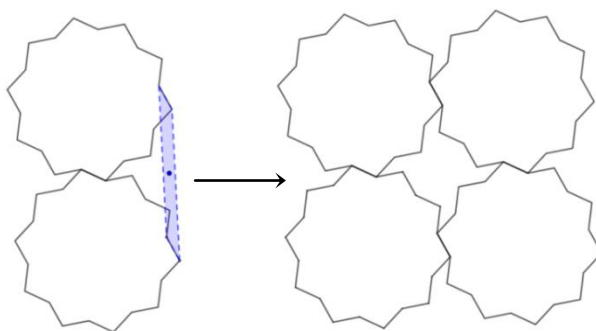


圖 41 利用點對稱方法拼出 $s_{n,2,4}(4,4,4,4)$

由上述討論可知 $s_{\text{偶},2,4}(X_4)$ 存在，再由定理 2.3 知，可由 $s_{\text{偶},2,4}(X_4)$ 延伸至所有的 $s_{\text{偶},2,4+2s}(X_{4+2s})$ ，因此當 $n、k$ 均為偶數時， $S_{\text{偶},2,\text{偶}}$ 均具有存在性。

3、 $s_{\text{奇},2,\text{偶}}$ 的存在性

定理 2.6

當 n 為奇數時，可用 6 個全等正 n 角星形圍出 $s_{n,2,6}(X_6)$ 。

證明：

當 n 為奇數時，可取 $X_6 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ，其中 $x_1 = x_2 = \left\lfloor \frac{T(2n,6)}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor$ ， $x_3 = 2n-3-2 \cdot \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor$ ，與定理 2.5 證明方式相似，在拼出前 3 個星形後，由引理 2.2 知，第 1 個與第 3 個星形必可經平移後重合，因此可在第 1 個與第 3 個星形中，選定包含第 1 個共用邊在內的一組平行邊，將前 3 個星形對該組平行邊中心做點對稱，則可得到 $s_{n,2,6}(X_6)$ 。■

當 n 為奇數時，假設 $s_{n,2,4}(X_4)$ 存在，則 4 個正 n 角星形中心點 $O_1 \sim O_4$ 可形成菱形 $O_1O_2O_3O_4$ ，故可假設 $X_4 = (x, y, x, y)$ ，由定理 2.2 知 $s_{n,2,4}(X_4)$ 的邊數總和 $T(2n,4) = 2n-4$ ，可推得 $x+y = n-2$ ，故 $x、y$ 為一個奇數、一個偶數，不失一般性，假設 x 為奇數且 y 為偶數，第 1 個正 n 星形的第 1 個共用邊為第 I 型，由引理 2.1 知 $\angle O_4O_1O_2 = (x+1) \cdot \frac{\pi}{n}$ ， $\angle O_1O_2O_3 = y \cdot \frac{\pi}{n} + 2\beta$ ，則 $\angle O_4O_1O_2 + \angle O_1O_2O_3 = (x+1) \cdot \frac{\pi}{n} + y \cdot \frac{\pi}{n} + 2\beta = \pi - \frac{\pi}{n} + 2\beta \neq \pi$ ，與菱形 $O_1O_2O_3O_4$ 相鄰兩內角互補產生矛盾，故 $s_{n,2,4}(X_4)$ 不存在，即 $S_{n,2,4}$ 無存在性。

由定理 2.6 可知 $S_{\text{奇},2,6}$ 具有存在性，接著我們討論 $S_{\text{奇},2,8}$ 的存在性，如圖 42 所示，我們分別找到 $s_{5,2,8}(1,5,1,4,2,3,2,4)$ 、 $s_{7,2,8}(2,7,2,6,3,5,3,6)$ 、 $s_{9,2,8}(3,9,3,8,4,7,4,8)$ ，且發現這些拼法具有相同規律：

$$(2,7,2,6,3,5,3,6) = (1,5,1,4,2,3,2,4) + 1 \cdot (1,2,1,2,1,2,1,2)$$

$$(3,9,3,8,4,7,4,8) = (1,5,1,4,2,3,2,4) + 2 \cdot (1,2,1,2,1,2,1,2),$$

以下將證明此種規律拼法可適用於 $s_{5+2t,2,8}$ 中。

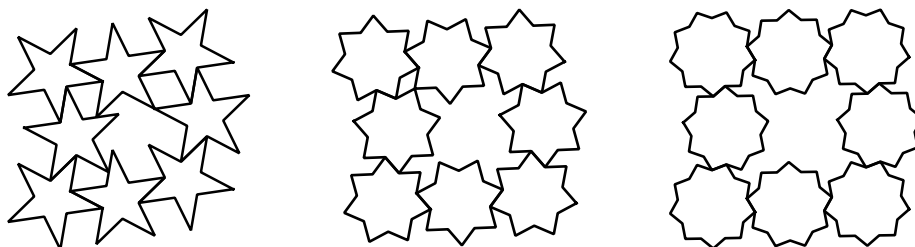


圖 42 拼接方法具有相同規律的 $s_{5,2,8}(1,5,1,4,2,3,2,4)$ 、 $s_{7,2,8}(2,7,2,6,3,5,3,6)$ 、 $s_{9,2,8}(3,9,3,8,4,7,4,8)$

定理 2.7

當 t 為非負整數時， $s_{5+2t,2,8}(1+t,5+2t,1+t,4+2t,2+t,3+2t,2+t,4+2t) \in S_{5+2t,2,8}$ 。

證明：

根據引理 1.2 與引理 2.1，可得當 t 為奇數時，正 n 角星形中心點所形成的向量與 x 軸正向夾角為 $\theta_1 = \frac{3+t}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ， $\theta_2 = \frac{4+t}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ， $\theta_3 = 0$ ， $\theta_4 = \frac{1}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ，

$\theta_5 = \frac{-1-t}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ， $\theta_6 = \frac{-2-t}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ， $\theta_7 = \frac{-4-2t}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ， $\theta_8 = -\pi$ ；當 t 為偶數時，則

$\theta_1 = \frac{2+t}{5+2t}\pi$ ， $\theta_2 = \frac{3+t}{5+2t}\pi$ ， $\theta_3 = 0$ ， $\theta_4 = \frac{1}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ， $\theta_5 = \frac{-2-t}{5+2t}\pi$ ， $\theta_6 = \frac{-3-t}{5+2t}\pi$ ，

$\theta_7 = \frac{-4-2t}{5+2t}\pi - 2\alpha$ ， $\theta_8 = -\pi$ ，在這兩種情形中， $\theta_1 - \theta_6 = \theta_2 - \theta_5 = \theta_3 - \theta_8 = \theta_4 - \theta_7 = \pi$ ，可

仿照定理 1.9 證明得知 $\sum_{i=1}^8 \cos \theta_i = \sum_{i=1}^8 \sin \theta_i = 0$ ，又由圖 43 可推測，當 $t \rightarrow \infty$ 時，正 n 角星形會趨近於一個圓， $S(n,2,8)$ 會趨近於 8 個圓相切，因此任 2 個正 n 角星形不會重疊。■

由定理 2.6 與定理 2.7 知 $S_{\text{奇},2,6}$ 與 $S_{\text{奇},2,8}$ 均具有存在性，再由定理 2.4 可推論得知 $S_{\text{奇},2,6+4s}$ 與 $S_{\text{奇},2,8+4s}$ 亦具有存在性，因此當個數 $k \geq 4$ 時， $S_{\text{奇},2,\text{偶}}$ 均具有存在性。

4、 $S_{\text{偶},2,\text{奇}}$ 的存在性

我們以正 n 邊形中 $P_{\text{偶},\text{奇}}$ 的成果為基礎，試圖推廣至正 n 角星形，如圖 43 所示， $p_{12,9}(2,3,6,3,3,4,3,4,5)$ 與 $s_{6,2,9}(2,3,6,3,3,4,3,4,5)$ 有相同的拼接方法；如圖 44 所示， $p_{20,7}(7,5,5,9,5,5,7)$ 與 $s_{10,2,7}(7,5,5,9,5,5,7)$ 亦有相同的拼接方法。

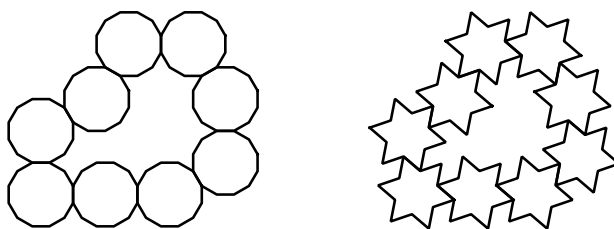


圖 43 有相同拼法的 $p_{12,9}(X_9)$ 與 $s_{6,2,9}(X_9)$

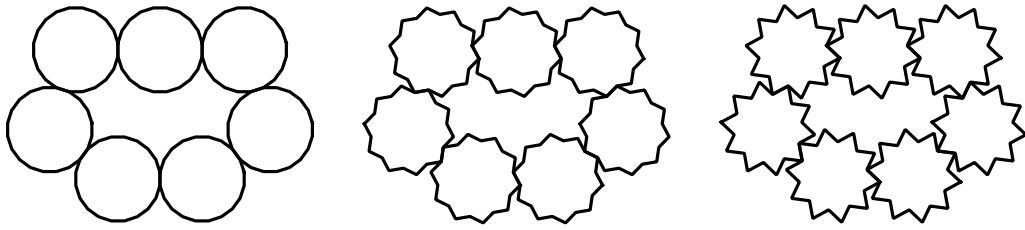


圖 44 有相同拼法的的 $p_{20,7}(X_7)$ 、 $s_{10,2,7}(X_7)$ 與 $s_{10,3,7}(X_7)$

經過許多的測試後，我們大膽提出以下猜想：當 n 為偶數且 k 為奇數時，若拼接方法 X_k 可成功拼出 $p_{2n,k}(X_k)$ ，則亦能成功拼出 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。

五、 $S_{n,2,k}$ 的密鋪性

討論完 $S_{n,2,k}$ 存在性後，我們好奇 $S_{n,2,k}$ 是否具有密鋪性，又已知 $S_{奇,d,奇}$ 不具有存在性，因此以下僅討論 $S_{偶,2,偶}$ 、 $S_{奇,2,偶}$ 與 $S_{偶,2,奇}$ 的密鋪性。

(一) $S_{偶,2,偶}$ 的密鋪性

當 n 、 k 均為偶數時，由定理 2.5 的證明過程可知，拼出 $s_{偶,2,4}(X_4)$ 的正 n 角星形中心點會形成平行四邊形，且可進一步密鋪平面，如圖 45，因此 $S_{偶,2,4}$ 均具有密鋪性。

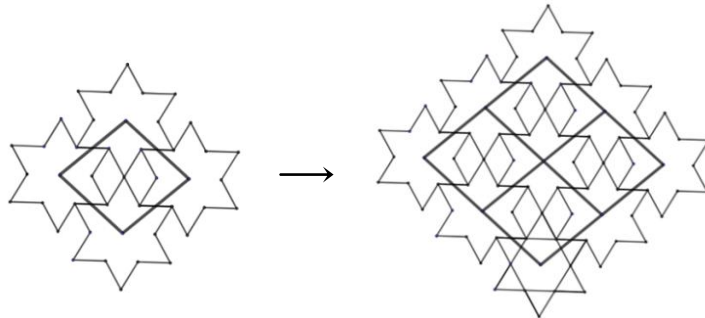


圖 45 $S_{6,2,4}(2,2,2)$ 及其密鋪圖形

根據定理 2.3，我們可將 $s_{偶,2,4}(X_4)$ 圖形延伸到 $s_{偶,2,6}(X_6)$ ，其中必存在一種延伸方法，可以使中心點連線形成的多邊形新增的兩組對邊互相平行，如圖 46 所示，此六邊形為 Gardner(1988)提出可密鋪平面的第一類凸六邊形，因此 $S_{偶,2,6}$ 均有密鋪性。依據相同想法，可以推論得知 $S_{偶,2,偶}$ 均有密鋪性。

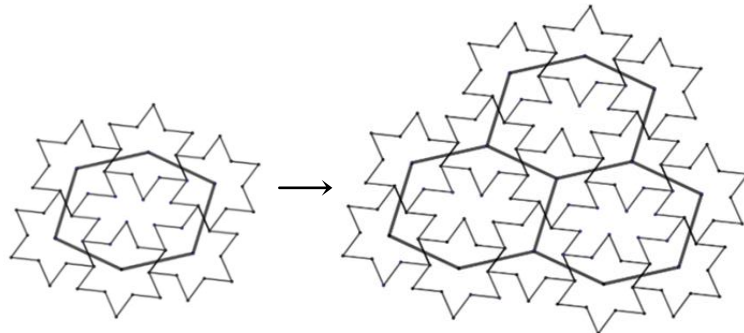


圖 46 $s_{6,2,6}(2,3,4,2,3,4)$ 及其密鋪圖形

(二) $S_{\text{奇},2,\text{偶}}$ 的密鋪性

我們發現 $S_{\text{奇},2,\text{偶}}$ 皆具有密鋪性，以下我們將個數 k 分成 $6+4s$ 與 $8+4s$ 二種情形分別進行討論。

1、 n 為奇數且 $k = 6 + 4s$

由定理 2.6 知，當 n 為奇數時，可利用 $X_6 = (x, x, y, x, x, y)$ 拼出 $s_{\text{奇},2,6}(X_6)$ ，再將 6 個正 n 角星形中心點連線，可形成有三組對邊平行且等長的六邊形，為 Gardner(1988)提出可密鋪平面的第一類凸六邊形，因此 $S_{\text{奇},2,6}$ 均有密鋪性。圖 47 左方呈現 $s_{5,2,6}(2,3,2,2,3,2)$ 與其密鋪圖形，圖 47 右方呈現由 $s_{5,2,6}(2,3,2,2,3,2)$ 經由定理 2.4 延伸所得的 $s_{5,2,10}(2,3,4,4,2,2,3,4,4,2)$ ，其中紅色六邊形為 Gardner(1988)可密鋪平面的第一類凸六邊形，以此類推可得所有 $S_{\text{奇},2,6+4s}$ 均具有密鋪性。

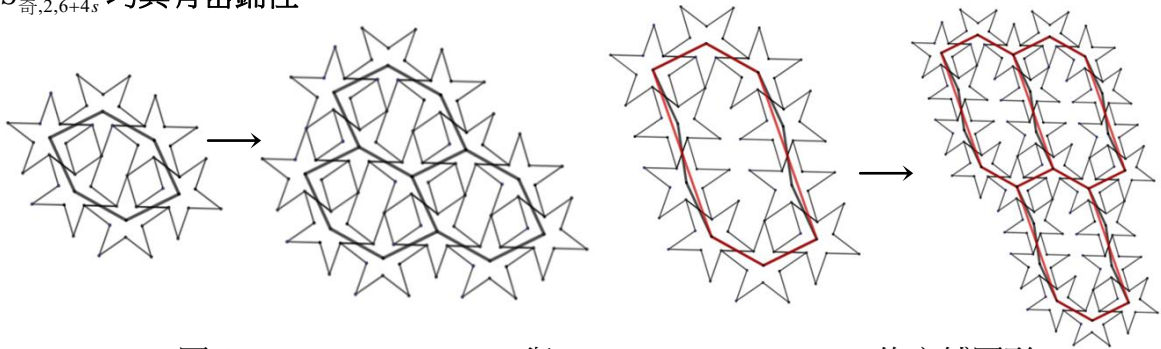


圖 47 $s_{5,2,6}(2,3,2,2,3,2)$ 與 $s_{5,2,10}(2,3,4,4,2,2,3,4,4,2)$ 的密鋪圖形

2、 n 為奇數且 $k = 8 + 4s$

當 $n = 5 + 2t$ (t 為非負整數) 時，由定理 2.7 知 $s_{n,2,8}(1+t, 5+2t, 1+t, 4+2t, 2+t, 3+2t, 2+t, 4+2t)$ 存在，由此 8 個正 n 角星形中選取 4 個適當中心點形成平行四邊形，因此 $S_{\text{奇},2,8}$ 均有密鋪性。圖 48 左方呈現 $s_{7,2,8}(2,7,2,6,3,5,3,6)$ 與其密鋪圖形，圖 48 右方呈現由 $s_{7,2,8}(2,7,2,6,3,5,3,6)$ 經由定理 2.4 延伸所得的 $s_{7,2,12}(2,7,2,6,6,6,3,5,3,6,6,6)$ ，以此推論可得所有 $S_{\text{奇},2,8+4s}$ 均具有密鋪性。

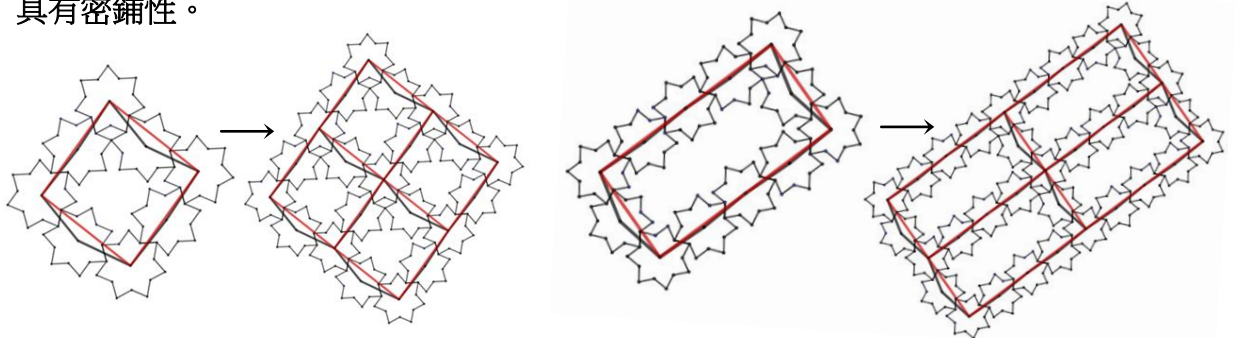


圖 48 $s_{7,2,8}(2,7,2,6,3,5,3,6)$ 與 $s_{7,2,12}(2,7,2,6,6,6,3,5,3,6,6,6)$ 的密鋪圖形

(三) $S_{\text{偶},2,\text{奇}}$ 的密鋪性

我們目前僅發現 $S_{6t,2,3}$ 與 $S_{10t,2,7}$ ($t \geq 1$) 具有密鋪性，以下分別說明之。

1、 $S_{6t,2,3}$ 的密鋪性

當 $n = 6t$ 時，可利用 $X_3 = (2t-1, 2t-1, 2t-1)$ 拼出 $s_{6t,2,3}(X_3)$ ，將 3 個正 n 角星形中心點連線可形成正三角形，如圖 49 所示， $S_{6t,2,3}$ 具有密鋪性。

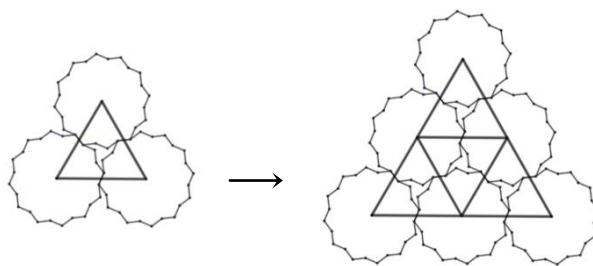


圖 49 $s_{12,2,3}(3,3,3)$ 及其密鋪圖形

2、 $S_{10t,2,7}$ 的密鋪性

當 $n=10t$ 時，因為 $p_{10t,7}(3t-1, 4t-1, 4t-1, 3t-1, 3t-1, 5t-1, 3t-1) \in P_{10t,7}$ ，根據 $S_{\text{偶},2,\text{奇}}$ 的猜想，可得 $s_{10t,2,7}(6t-1, 8t-1, 8t-1, 6t-1, 6t-1, 10t-1, 6t-1)$ 存在，若將 7 個正 n 角星形中心點連線則可形成符合文獻中可密鋪平面的第二類六邊形，由此可知 $S_{10t,2,7}$ 皆具有密鋪性。圖 50 以 $t=1$ 為例，說明 $s_{10,2,7}(5, 7, 7, 5, 5, 9, 5)$ 的密鋪性。

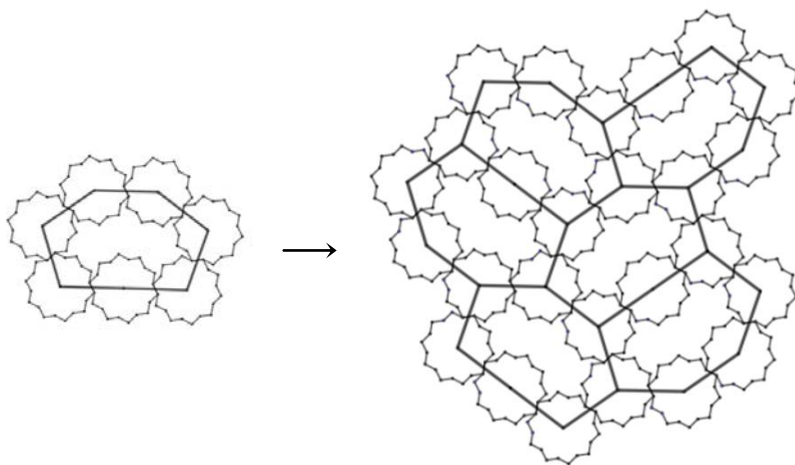


圖 50 $s_{10,2,7}(5, 7, 7, 5, 5, 9, 5)$ 及其密鋪圖形

肆、研究成果

一、使用 k 個正 n 邊形拼出密閉區塊

(一) $P_{n,k}$ 具有存在性的最小 k 值

- 1、當 n 為 6 的倍數 ($n > 6$) 時，最少可利用 3 個正 n 邊形拼出密閉區塊。
- 2、當 n 為偶數且非 6 的倍數 ($n > 6$) 時，最少可利用 4 個正 n 邊形拼出密閉區塊。
- 3、當 n 為大於 3 的奇數時，最少可利用 6 個正 n 邊形拼出密閉區塊。

(二) $P_{n,k}$ 的存在性與拼接方法 X_k

- 1、當 n 、 k 均為奇數時， $P_{n,k}$ 無存在性，即不存在任何一種拼法 X_k 可利用 k 個正 n 邊形拼出密閉區塊。
- 2、當 n 、 k 均為偶數時：
 - (1) $P_{n,k}$ 均具有存在性。

- (2) 給定 k 個正 n 邊形，可先依 $X_4 = \left(\left\lfloor \frac{n}{4} - 1 \right\rfloor, \frac{n}{2} - 2 - \left\lfloor \frac{n}{4} - 1 \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{4} - 1 \right\rfloor, \frac{n}{2} - 2 - \left\lfloor \frac{n}{4} - 1 \right\rfloor \right)$ 拼出 $p_{n,4}(X_4)$ ，再根據定理 1.4 進行延伸得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。

3、當 n 為奇數且 k 為偶數時：

- (1) 除了 $P_{7,8}$ 無存在性外，其餘 $P_{n,k}$ 均具有存在性。
- (2) 當 $n=5$ 且 $k=6+4s$ (s 為非負整數) 時，可先依 $X_6=(1,1,0,1,1,0)$ 拼出 $p_{5,6}(X_6)$ ，再根據定理 1.5 進行延伸得到 $p_{5,k}(X_k)$ 。
- (3) 當 n 為大於 5 的奇數且 $k=6+4s$ (s 為非整數) 時，可先依 $X_6=\left(\left[\frac{n-3}{3}\right], \left[\frac{n-3}{3}\right], n-3-2\cdot\left[\frac{n-3}{3}\right], \left[\frac{n-3}{3}\right], \left[\frac{n-3}{3}\right], n-3-2\cdot\left[\frac{n-3}{3}\right]\right)$ 拼出 $p_{n,6}(X_6)$ ，再根據定理 1.5 進行延伸得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。
- (4) 當 $n=5+4t$ 且 $k=8+4s$ (t, s 為非負整數) 時，可先依 $X_8=(2+2t, t, 2+2t, t, 1+2t, 1+t, 1+2t, t)$ 拼出 $p_{5+4t,8}(X_8)$ ，再根據定理 1.5 進行延伸得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。
- (5) 當 $n=7$ 且 $k=12+4s$ (s 為非負整數) 時，可先依 $X_{12}=(2,1,3,1,2,2,3,1,2,1,3,2)$ 拼出 $p_{7,12}(X_{12})$ ，再根據定理 1.5 進行延伸得到 $p_{7,k}(X_k)$ 。
- (6) 當 $n=11+4t$ 且 $k=8+4s$ (t, s 為非負整數) 時，可先依 $X_8=(6+2t, 1+t, 6+2t, 1+t, 3+2t, 4+t, 3+2t, 1+t)$ 拼出 $p_{11+4t,8}(X_8)$ ，再根據定理 1.5 進行延伸得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。

4、當 n 為偶數且 k 為奇數時：

- (1) 當 $n=2^i$ ($i \geq 3$) 且 k 為奇數時， $P_{n,k}$ 無存在性。
- (2) 當 $n=6t$ ($t \geq 2$) 且 k 為非 5 的奇數時， $P_{n,k}$ 具有存在性，但 $P_{12+6t,5}$ 未知有無存在性。可先依 $X_3=(t-1, t-1, t-1)$ 與 $X_7=(t, 3t-2, 3t-2, t, 2t, 3t-3, 2t)$ 分別拼出 $p_{6t,3}(X_3)$ 與 $p_{6t,7}(X_7)$ ，再根據定理 1.5 進行延伸得到 $p_{n,k}(X_k)$ 。
- (3) 當 $n \neq 2^i$ 且 $n \neq 6t$ 時，若 α 為 n 的質因數 ($\alpha \geq 5$)，則 $P_{n,\alpha}$ 具有存在性。可先依 $X_\alpha=\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{\alpha}-1, \frac{n}{2}-\frac{n}{\alpha}-1, \dots, \frac{n}{2}-\frac{n}{\alpha}-1\right)$ 拼出 $p_{n,\alpha}(X_\alpha)$ ，再根據定理 1.5 進行延伸得到 $p_{n,k}(X_k)$ ，其中 k 為不小於 α 的奇數。

(三) $P_{n,k}$ 的密鋪性：

- 1、當 n, k 均為奇數時， $P_{n,k}$ 無存在性，亦無密鋪性。
- 2、當 n, k 均為偶數時
 - (1) $P_{n,k}$ 均有密鋪性。
 - (2) 當 $k=4$ 時，可先依存在性結論得到 $p_{n,4}(X_4)$ ，再依第 13 頁圖 21 拼接方法密鋪平面。
 - (3) 當 $k \geq 6$ 時，可先依存在性結論得到 $p_{n,k}(X_k)$ ，再依第 14 頁圖 22 拼接方法密鋪平面。
- 3、 n 為奇數且 k 為偶數時，
 - (1) $P_{7,8}$ 無存在性，亦無密鋪性。

- (2) 當 $k = 6 + 4s$ (s 為非負整數) 時, $P_{n,k}$ 均有密鋪性。可先依存在性結論得到 $p_{n,k}(X_k)$, 再依第 14 頁圖 23 拼接方法密鋪平面。
- (3) 當 $n = 5 + 4t$ 且 $k = 8 + 4s$ (t, s 為非負整數) 時, $P_{n,k}$ 均有密鋪性。可先依存在性結論得到 $p_{n,k}(X_k)$, 再依第 15 頁圖 25 拼接方法密鋪平面。
- (4) 當 $n = 11 + 4t$ 且 $k = 8 + 4s$ (t, s 為非負整數) 時, 目前僅確認 $P_{11+4t,8}$ 有密鋪性。可先依存在性結論得到 $p_{11+4t,8}(X_8)$, 再依第 16 頁圖 27 拼接方法密鋪平面。

4、 n 為偶數且 k 為奇數時,

- (1) 目前僅發現 $P_{6t,3}$ ($t \geq 2$) 與 $P_{10t,7}$ ($t \geq 1$) 有密鋪性。
- (2) 當 $n = 6t$ ($t \geq 2$) 且 $k = 3$ 時, 可先依存在性結論得到 $p_{n,3}(X_3)$, 再依第 16 頁圖 28 拼接方法密鋪平面。
- (3) 當 $n = 10t$ ($t \geq 1$) 且 $k = 7$ 時, 可先依存在性結論得到 $p_{n,7}(X_7)$, 再依第 16 頁圖 29 拼接方法密鋪平面。

二、使用 k 個正 n 角星形拼出密閉區塊

(一) $S_{n,2,k}$ 具有存在性的最小 k 值

- 1、當 n 為 6 的倍數 ($n \geq 6$) 時, 最少可利用 3 個正 n 角星形拼出密閉區塊。
- 2、當 n 為偶數且非 6 的倍數 ($n > 6$) 時, 最少可利用 4 個正 n 角星形拼出密閉區塊。
- 3、當 n 為大於 3 的奇數時, 最少可利用 6 個正 n 角星形拼出密閉區塊。

(二) $S_{n,2,k}$ 的存在性與拼接方法 X_k

- 1、當 $d > \frac{n+6}{4}$ 時, $S_{n,d,k}$ 無存在性。
- 2、當 n, k 均為奇數時, $S_{n,2,k}$ 無存在性。
- 3、當 n, k 均為偶數時:
 - (1) $S_{n,2,k}$ 均具有存在性。
 - (2) 給定 k 個正 n 角星形, 可先依 $X_4 = \left(\left[\frac{n}{2} - 1 \right], \left[\frac{n}{2} - 1 \right], \left[\frac{n}{2} - 1 \right], \left[\frac{n}{2} - 1 \right] \right)$ 拼出 $s_{n,2,4}(X_4)$, 再根據定理 2.3 進行延伸得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。
- 4、當 n 為奇數且 k 為偶數時:
 - (1) $S_{n,2,k}$ 均具有存在性。
 - (2) 當 $k = 6 + 4s$ (s 為非負整數) 時, 可先依 $X_6 = \left(\left[\frac{2n-3}{3} \right], \left[\frac{2n-3}{3} \right], 2n-3-2 \cdot \left[\frac{2n-3}{3} \right], \left[\frac{2n-3}{3} \right], \left[\frac{2n-3}{3} \right], \left[\frac{2n-3}{3} \right], 2n-3-2 \cdot \left[\frac{2n-3}{3} \right] \right)$ 拼出 $s_{n,2,6}(X_6)$, 再根據定理 2.4 進行延伸得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。
 - (3) 當 $n = 5 + 2t$ 且 $k = 8 + 4s$ (t, s 為非負整數) 時, 可先依 $X_6 = (1+t, 5+2t, 1+t, 4+2t, 2+t, 3+2t, 2+t, 4+2t)$ 拼出 $s_{n,2,8}(X_8)$, 再根據定理 2.4 進行延伸得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。
- 5、當 n 為偶數且 k 為奇數時, 猜想若 X_k 可拼出 $p_{2n,k}(X_k)$, 則亦能拼出 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。

(三) $S_{n,2,k}$ 的密鋪性：

1、當 n 、 k 均為奇數時， $S_{n,2,k}$ 無存在性，亦無密鋪性。

2、當 n 、 k 均為偶數時：

(1) $S_{n,2,k}$ 均有密鋪性。

(2) 當 $k = 4$ 時，可先依存在性結論得到 $s_{n,2,4}(X_4)$ ，再依第 24 頁圖 45 拼接方法密鋪平面。

(3) 當 $k \geq 6$ 時，可依先存在性結論得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ ，再依第 24 頁圖 46 拼接方法密鋪平面。

3、 n 為奇數且 k 為偶數時，

(1) $S_{n,2,k}$ 均有密鋪性。

(2) 當 $k = 6 + 4s$ (s 為非負整數) 時，可先依存在性結論得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ ，再依第 25 頁圖 47 拼接方法密鋪平面。

(3) 當 $k = 8 + 4s$ (s 為非負整數) 時，可先依存在性結論得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ ，再依第 25 頁圖 48 拼接方法密鋪平面。

4、 n 為偶數且 k 為奇數時，

(1) 目前僅發現 $S_{6t,2,3}$ 與 $S_{10t,2,7}$ ($t \geq 1$) 具有密鋪性。

(2) 當 $n = 6t$ ($t \geq 1$) 且 $k = 3$ 時，可先依存在性結論得到 $s_{n,2,3}(X_3)$ ，再依第 26 頁圖 49 拼接方法密鋪平面。

(3) 當 $n = 10t$ ($t \geq 1$) 且 $k = 7$ 時，可先依存在性結論得到 $s_{n,2,7}(X_7)$ ，再依第 26 頁圖 50 拼接方法密鋪平面。

伍、討論與未來展望

一、 $p_{2n,k}(X_k)$ 與 $s_{n,2,k}(X_k)$ 的關係

由 $P_{2n,k}$ 與 $S_{n,2,k}$ 的作圖與存在性討論中發現，在大多數情形中，當邊數與個數相同時，若拼接方法 X_k 可得到密閉區塊 $p_{2n,k}(X_k)$ ，則該拼法亦可得到密閉區塊 $s_{n,2,k}(X_k)$ ，我們曾一度認為反之亦成立，即若 $s_{n,2,k}(X_k)$ 存在，則 $p_{2n,k}(X_k)$ 亦存在，但圖 51 的例子推翻了此猜測，拼法 $X_6 = (3, 6, 3, 5, 4, 5)$ 可讓 6 個正 8 角星形圍出密閉區塊，但 6 個正 16 邊形卻會產生重疊部分。

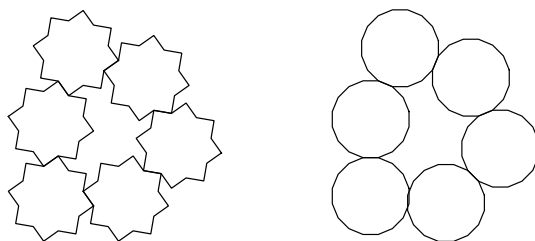


圖 51 相同的拼接方法 $X_6 = (3, 6, 3, 5, 4, 5)$ 下， $s_{8,2,6}(X_6)$ 存在，但 $p_{16,6}(X_6)$ 不存在

二、從 $p_{n,k}(X_k)$ 延伸至 k 個 n 邊形

因為大多數情況中，若 $p_{2n,k}(X_k)$ 存在，則 $s_{n,2,k}(X_k)$ 亦存在，於是我們嘗試將 X_k 套用在任意 n 邊形上，很多時候會得到令人驚喜的結果，但亦有許多情形以失敗告終。雖然我們尚不

知何種情形下可將使 $p_{n,k}(X_k)$ 存在的拼法 X_k 直接套用在其他 n 邊形上，但在嘗試利用 k 個 n 邊形拼出密閉區塊時，仍是提供了一個可能成功的拼法。圖 52 呈現 $X_8 = (1,1,0,2,0,2,0,1)$ 時，可讓該五邊形圍出密閉區塊，而且還可使用不同邊當起始共用邊（紅色邊），圖 53 呈現將正 n 邊形拼法 X_k 套用在凹多邊形的成功例子。

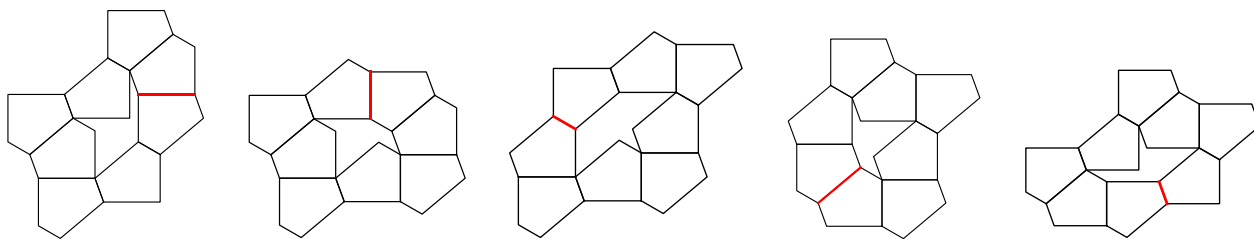


圖 52 利用邊長不相等的五邊形圍出密閉區塊

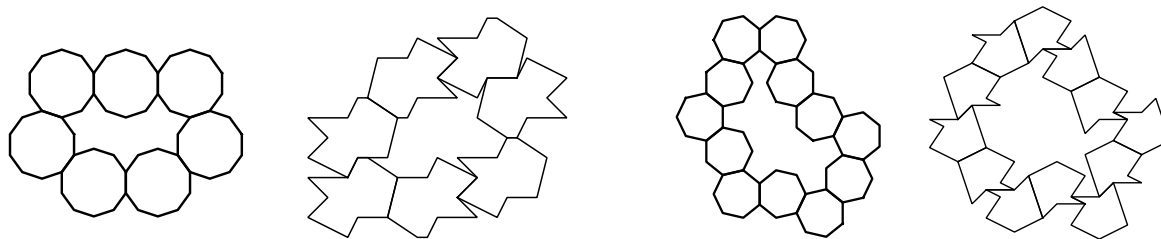


圖 53 相同邊數的正多邊形與凹多邊形分別利用 $X_7 = (3,2,2,4,2,2,3)$ 與 $X_{12} = (1,3,1,3,1,1,3,3,1,2,1,3)$ 拼出密閉區塊

三、 $p_{n,k}(X_k)$ 的密鋪性

我們原本猜想若 $p_{n,k}(X_k)$ 有存在性，則 $p_{n,k}(X_k)$ 亦具有密鋪性，現在已發現某些反例，以 $p_{10,5}(2,2,2,2,2)$ 為例，若此拼法可密鋪平面，則必存在一個正 10 邊形同時與 3 個密鋪區塊相鄰，且其 10 個邊中有 3 個為共用邊，但剩下的總邊數卻不等於 $2+2+2$ ，矛盾。

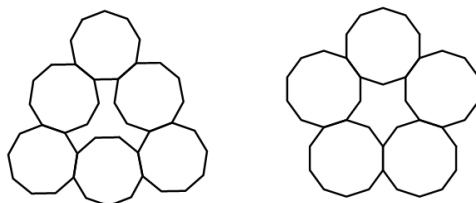


圖 54 無法密鋪平面的 $p_{9,6}(3,1,3,1,3,1)$ 與 $p_{10,5}(2,2,2,2,2)$

四、未來展望

我們希望進一步能完全解決 $P_{偶,奇}$ 與 $S_{偶,2,奇}$ 存在性問題。在指定邊數 n 、個數 k 與拼接方法 X_k 時，能找到 $p_{n,k}(X_k)$ 與 $s_{n,2,k}(X_k)$ 存在性的判斷法則，並延伸至任意凸多邊形與凹多邊形。

陸、參考資料

- 一、傅海倫 (2005)。有關平面鑲嵌的開放性問題。《數學教育》，21，87-89。
- 二、Gardner, M.(1988) · Tilings with Convex Polygons, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*(pp.162-176) · W.H.Freeman.
- 三、Marianne Freiberger (2018)、Rachel Thomas (2018)。數學好有事 (畢馨云譯)。麥田。(原著出版於 2018)
- 四、林壽福 (2006)。《數學樂園》。如何出版社。

【評語】 050402

本件作品是探討如何利用 k 個全等 n 邊形圍成封閉區域，其中 n 邊形分成兩種，一種是正多邊形，另一種正多角星形。作者證明了一些基本樣態的存在性，並藉此推導出更複雜型態的存在性。目前的成果相當有意思，作者們所得到的結果也相當豐富，是值得讚許的作品。

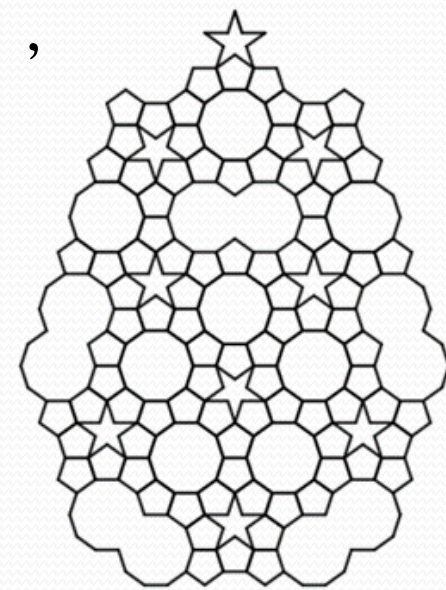
作品簡報

百密無一疏 特殊多邊形密閉區塊之研究



研究動機

Johannes Kepler (1619) 曾發表過由多種基本圖形所形成的鑲嵌圖案，如圖右，我們好奇是否可以使用「單一種正多邊形或正多角星形」圍出一個密閉區塊？若可以，又能否密鋪整個平面？



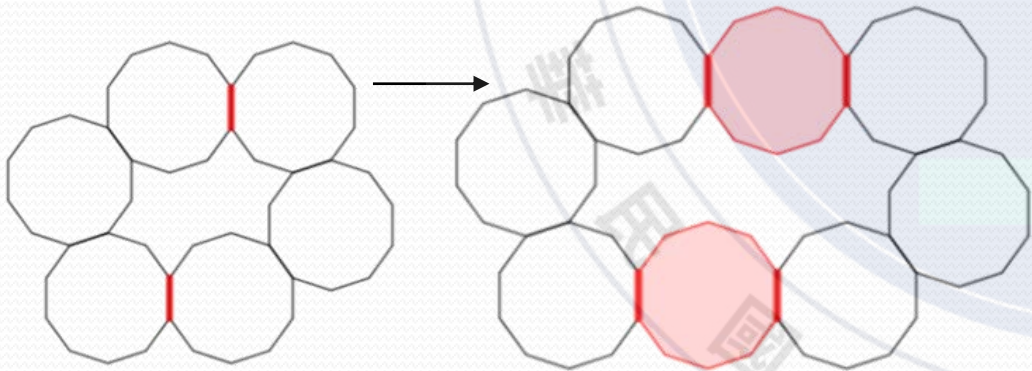
研究目的

- (一) 探討 k 個正 n 邊形圍出密閉區塊的存在性。
- (二) 探討 k 個正 n 邊形與其所圍出密閉區塊是否可密鋪整個平面。
- (三) 探討 k 個正 n 角星形圍出密閉區塊的存在性。
- (四) 探討 k 個正 n 角星形與其所圍出密閉區塊是否可密鋪整個平面。

探討 $P_{n,k}$ 存在性的理論基礎

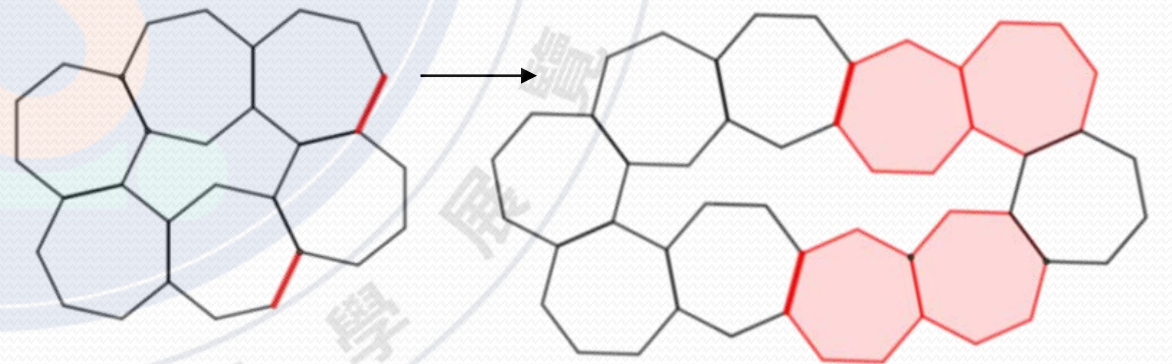
定理1.4

當 n 為偶數且 $k \geq 4$ 時，若 $p_{n,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+2} ，且使得 $p_{n,k+2}(X'_{k+2})$ 存在。



定理1.5

當 n 為奇數且 $k \geq 6$ 時，若 $p_{n,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+4} ，且使得 $p_{n,k+4}(X'_{k+4})$ 存在。



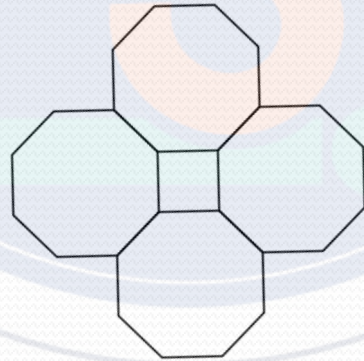
$P_{n,k}$ 的存在性

(一) $P_{n,k}$ 具有存在性的最小 k 值

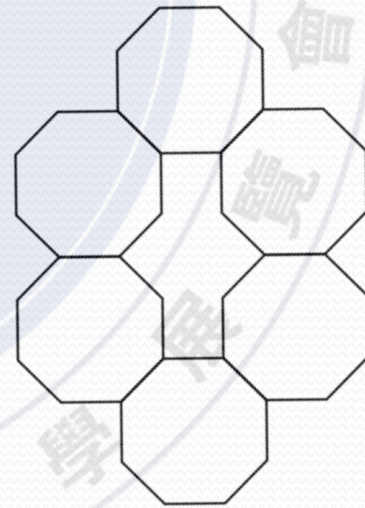
- 1、當 n 為 6 的倍數時，最少可用 3 個正 n 邊形拼出密閉區塊。
- 2、當 n 為偶數非 6 的倍數時，最少可用 4 個正 n 邊形拼出密閉區塊。
- 3、當 n 為奇數時，最少可用 6 個正 n 邊形拼出密閉區塊。

(二) $P_{n,k}$ 的存在性與拼接方法 X_k

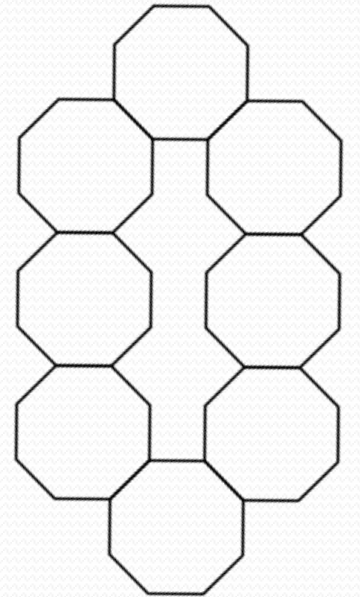
- 1、當 n 、 k 均為奇數時，
 $P_{n,k}$ 無存在性。
- 2、當 n 、 k 均為偶數時，
 $P_{n,k}$ 均具有存在性。



$p_{4,8}(1,1,1,1)$



$p_{8,6}(1,2,2,1,2,2)$



$p_{8,8}(1,2,3,2,1,2,3,2)$

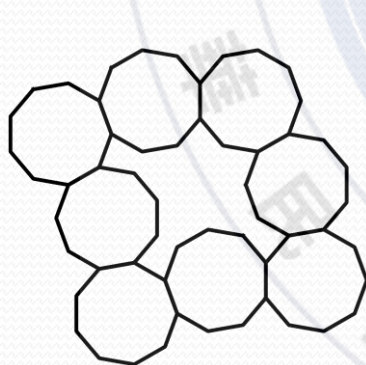
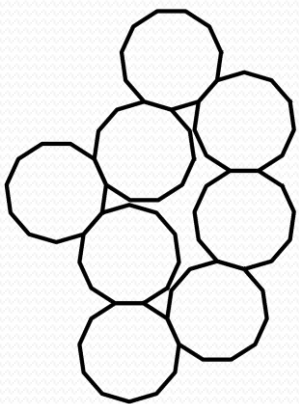
$P_{\text{奇},\text{偶}}$ 、 $P_{\text{偶},\text{奇}}$ 的存在性

3、當 n 為奇數且 k 為偶數時：

(1) $P_{7,8}$ 無存在性，其餘 $P_{n,k}$ 均有存在性。

(2)

| | | | | |
|--------|--------|--------|---------|---------|
| 邊數 n | 奇數 | $5+4t$ | $11+4t$ | 7 |
| 個數 k | $6+4s$ | $8+4s$ | | $12+4s$ |



$p_{11,8}(6,1,6,1,3,4,3,1)$ $p_{9,8}(4,1,4,1,3,2,3,1)$ $p_{7,12}(2,1,3,1,2,2,3,1,2,1,3,2)$

4、當 n 為偶數且 k 為奇數時：

(1) 確定無存在性：當 $n = 2^i$ 且 k 為奇數。

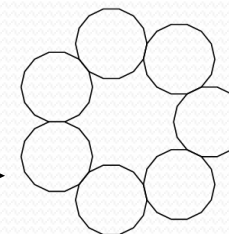
(2) 確定有存在性：

- ① 當 $n = 6t$ 且 k 為非 5 的奇數。
- ② 當 $n \neq 2^i$ 且 $n \neq 6t$ 時，若 α 為 n 的質因數， $P_{n,\alpha}$ 有存在性。

例： $p_{14,23}(X_{23}) \rightarrow \alpha=7$

$\rightarrow T(14, 7)=28$

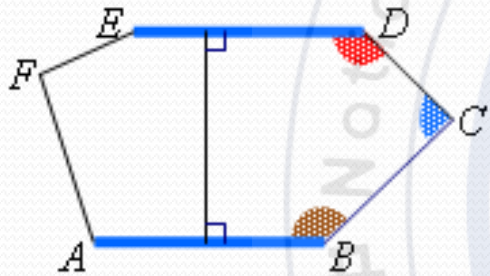
$\rightarrow X_7 = (4,4,4,4,4,4,4) \rightarrow$



$P_{n,k}$ 的密鋪性

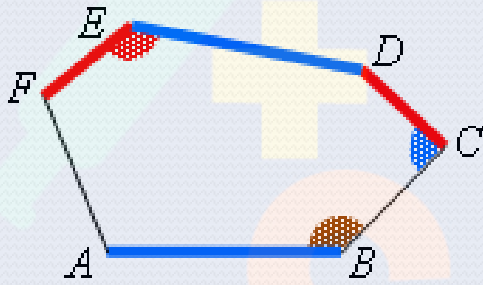
$$\overline{AB} = \overline{DE},$$

$$\angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



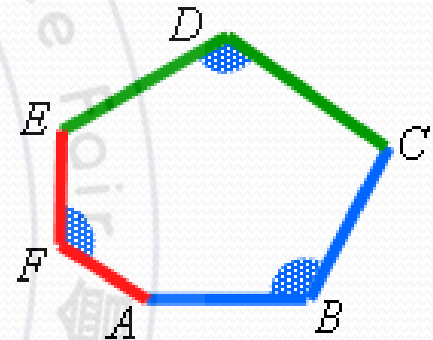
$$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{CD} = \overline{EF},$$

$$\angle B + \angle C + \angle E = 360^\circ$$

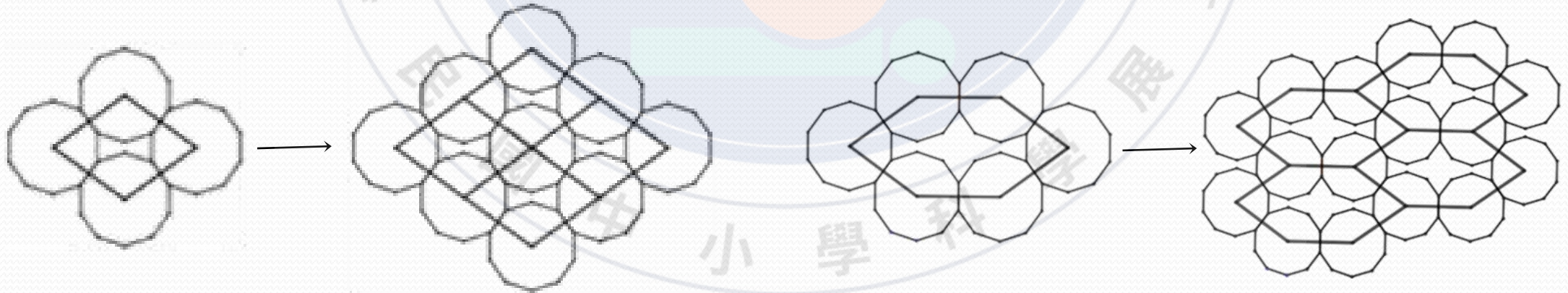


$$\overline{AB} = \overline{BC}, \overline{CD} = \overline{DE}, \overline{EF} = \overline{FA}$$

$$\angle B = \angle D = \angle F = 120^\circ$$



- 1、當 n 、 k 均為奇數時， $P_{n,k}$ 無存在性，亦無密鋪性。
- 2、當 n 、 k 均為偶數時， $P_{n,k}$ 均具有密鋪性。

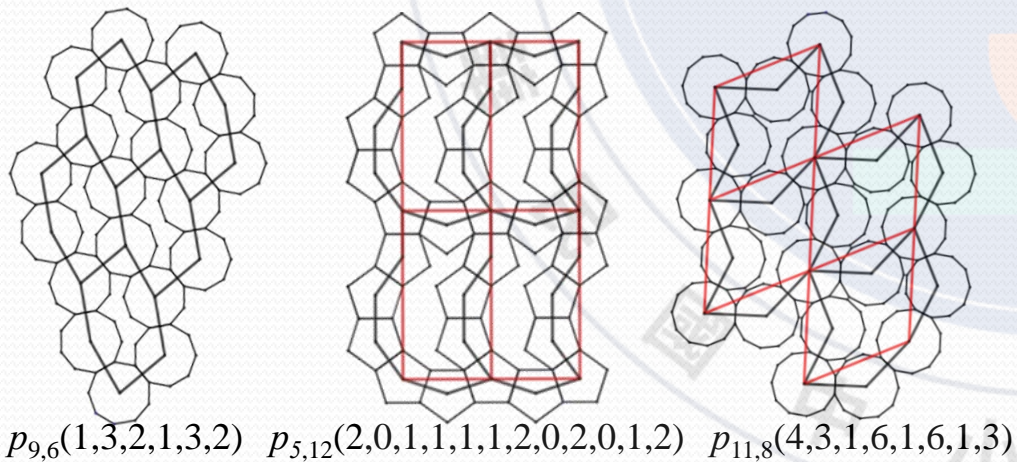


$P_{\text{奇},\text{偶}}$ 與 $P_{\text{偶},\text{奇}}$ 的密鋪性

3、當 n 為奇數， k 為偶數時

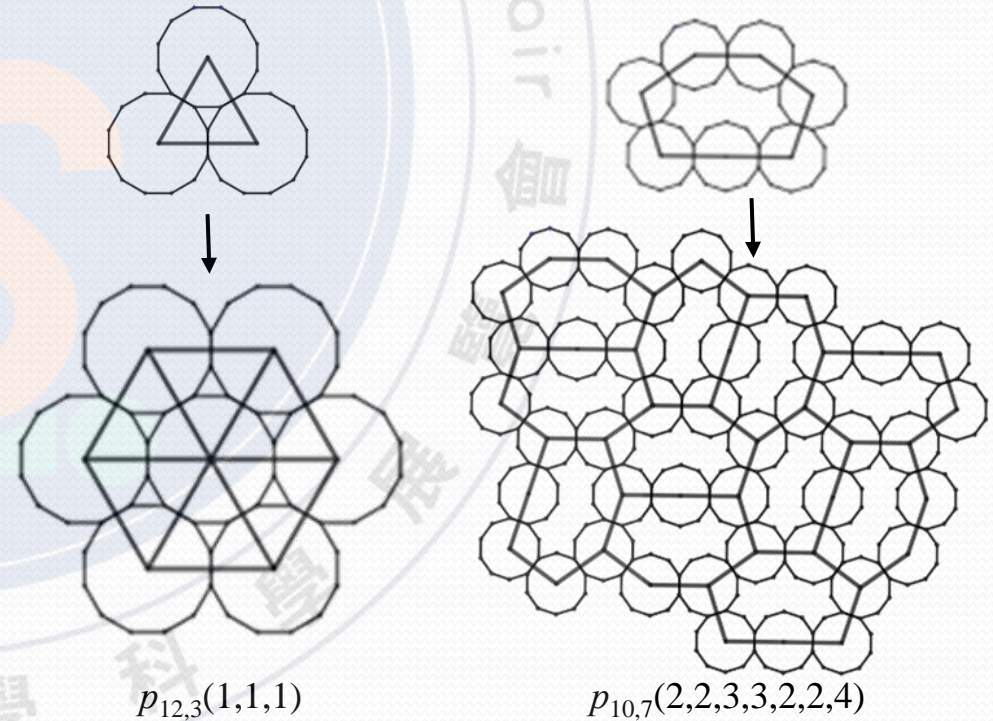
(1) 當 $n=5+4t$ 、 k 為偶數時， $P_{n,k}$ 均有密鋪性。

(2) 當 $n=11+4t$ 、 $k=8+4s$ 時，目前僅確認 $P_{11+4t,8}$ 具有密鋪性。



4、當 n 為偶數， k 為奇數時

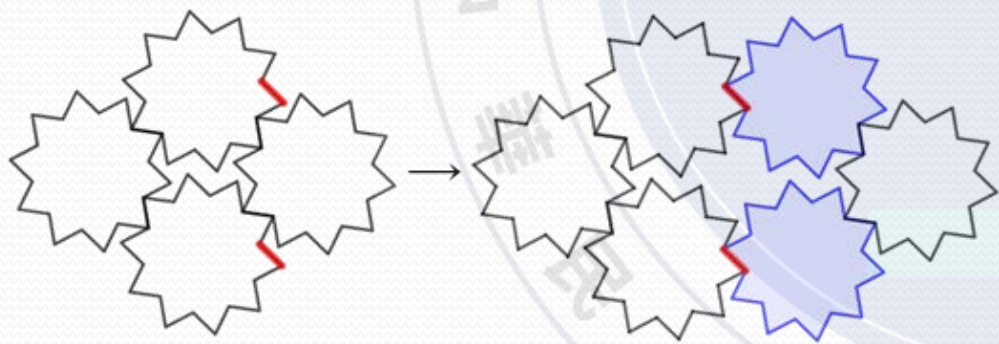
(1) 僅發現 $P_{6t,3}$ 與 $P_{10t,7}$ 有密鋪性。



探討 $S_{n,d,k}$ 存在性的理論基礎

定理2.3

當 n 為偶數且 $k \geq 4$ 時，若 $S_{n,d,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+2} 使得 $S_{n,d,k+2}(X'_{k+2})$ 存在。

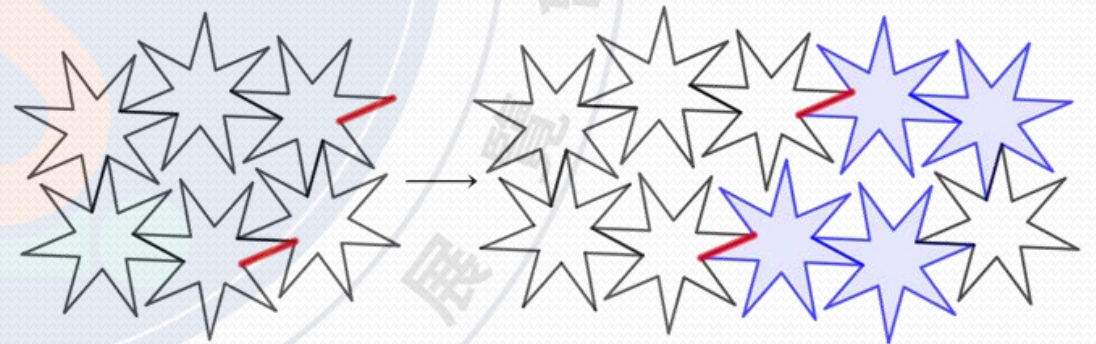


$S_{10,3,4}(5,3,5,3)$

$S_{10,3,6}(7,3,7,7,3,7)$

定理2.4

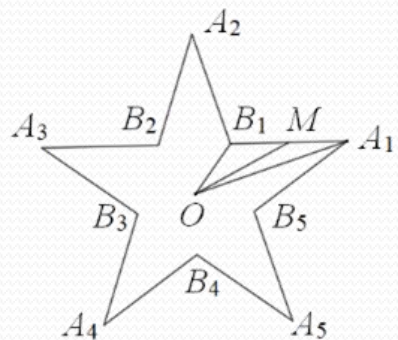
當 n 為奇數且 $k \geq 6$ 時，若 $S_{n,d,k}(X_k)$ 存在，則可由 X_k 延伸得到 X'_{k+4} 使得 $S_{n,d,k+4}(X'_{k+4})$ 存在。



$S_{7,3,6}(3,3,5,3,3,5)$

$S_{7,3,10}(3,3,5,6,6,3,3,5,6,6)$

$S_{n,d,k}$ 的存在性



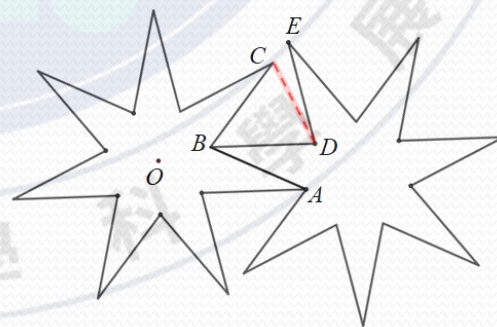
跳過「奇數」個邊的角度變化 跳過「偶數」個邊的角度變化

(一) $S_{n,d,k}$ 具有存在性的最小 k 值

- 1、當 n 為 6 的倍數時，最少可用 3 個正 n 角星形拼出密閉區塊。
- 2、當 n 為偶數非 6 的倍數時，最少可用 4 個正 n 角星形拼出密閉區塊。
- 3、當 n 為奇數時，最少可用 6 個正 n 角星形拼出密閉區塊。

(二) $S_{n,d,k}$ 的存在性

- 1、當 $d > \frac{n+6}{4}$ ， $S_{n,d,k}$ 無存在性。
- 2、當 n 、 k 均為奇數時， $S_{n,d,k}$ 無存在性。



$S_{n,2,k}$ 的存在性

3、當 n 、 k 均為偶數時， $S_{n,2,k}$ 有存在性。

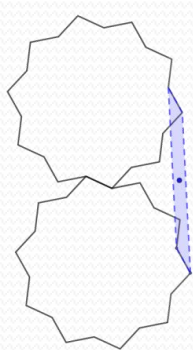
4、當 n 為奇數且 k 為偶數時，

(1) $S_{\text{奇},2,\text{偶}}$ 均有存在性。

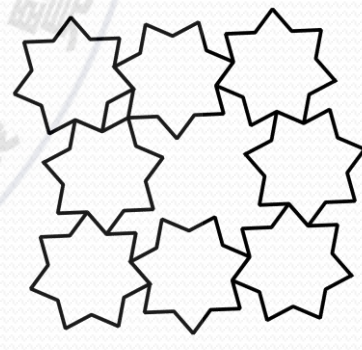
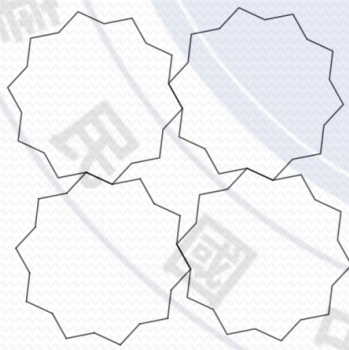
(2) 當 $k=6+4s$ 時，可先拼出 $s_{n,2,6}(X_6)$ ，再延伸得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。

(3) 當 $k=8+4s$ 時，可先拼出 $s_{n,2,8}(X_8)$ ，再延伸得到 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。

5、當 n 為偶數且 k 為奇數時，猜想若 X_k 可拼出 $p_{2n,k}(X_k)$ ，亦能拼出 $s_{n,2,k}(X_k)$ 。



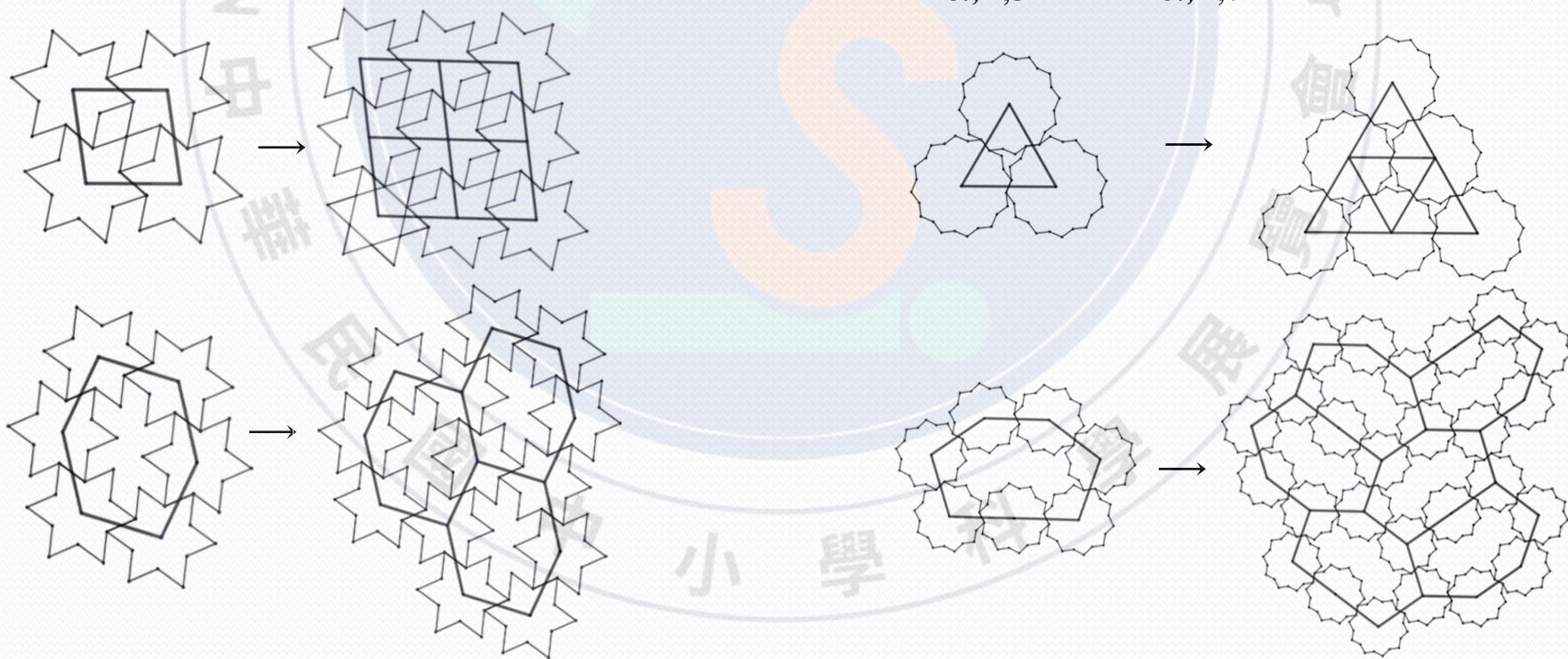
$s_{10,2,4}(X_4)$



$s_{5,2,8}(X_8)$ 以及 $s_{7,2,8}(X_8)$

$S_{n,d,k}$ 的密鋪性

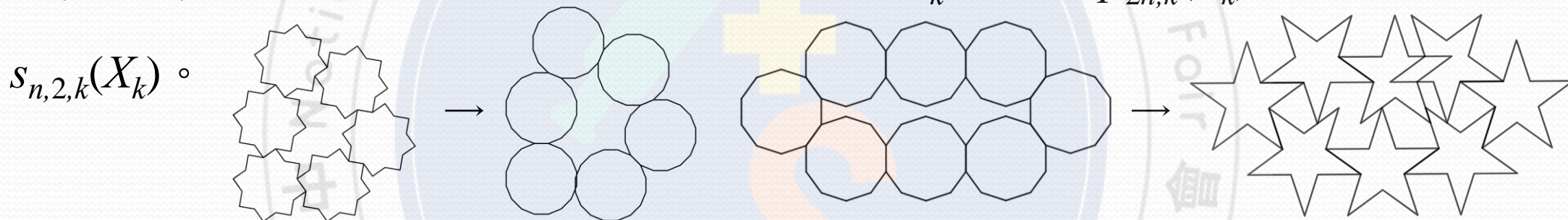
- 1、當 n 、 k 均為奇數時， $S_{n,2,k}$ 無密鋪性。
- 2、當 n 、 k 均為偶數時， $S_{n,2,k}$ 均有密鋪性。
- 3、當 n 為奇數且 k 為偶數時， $S_{n,2,k}$ 均有密鋪性。
- 4、當 n 為偶數且 k 為奇數時，目前僅發現 $S_{6t,2,3}$ 與 $S_{10t,2,7}$ 具有密鋪性。



討論與未來展望

(一) $p_{2n,k}(X_k)$ 與 $s_{n,2,k}(X_k)$ 的關係

大多數情形況中，當邊數與個數相同時，若 X_k 可得到 $p_{2n,k}(X_k)$ ，則亦可得到



(二) 從 $p_{n,k}(X_k)$ 延伸至 k 個任意 n 邊形

有些任意多邊形也可以利用與 $P_{n,k}$ 相同的拼接方法拼成密閉區塊。

(三) 我們希望進一步解決 $P_{偶,奇}$ 與 $S_{偶,2,奇}$ 存在性問題

，並將情況延伸至任意凸多邊形與凹多邊形中。

