中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050401

斜面下相遇的機率

學校名稱：國立潮州高級中學

作者：	指導老師：
高一 林秉皞	洪育祥
高一 鄭宇紘	楊勝惠

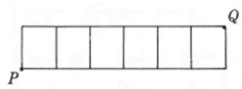
關鍵詞：格子路徑、生成函數、卡塔蘭數

摘要

在$m \times n$的矩形方格街道加上二元一次不等式的邊界條件，若甲從左下到右上，乙從右上到左下，各自沿格線走捷徑前進，探討兩人相遇的機率。過程中發現碰撞次數會影響機率，而碰撞次數則與卡塔蘭數的乘積有關，透過生成函數的卷積將此乘積記為$c(n,k)$，經由文獻探討找到計算的方法。為了容易看出碰撞次數，我們將$c(n,k)$透過變數變換定義$T(n,k)$，創建斧頭定理並就邊界是否通過原點及終點是否在邊界上分項討論，以表列方式呈現定理，大幅簡化機率的計算。最後將實際問題以分區概念應用上述定理，成功解決矩形的邊界問題。為了探討斜率大於1的邊界問題，我們找到$L(n,r,k)$的文獻，發現在$r=1$時與$c(n,k)$、$T(n,k)$有關，進而推廣至整數$r>1$的斧頭定理。而Fuss-Catalan numbers也與$L(n,r,k)$公式相似，可得相同推論。

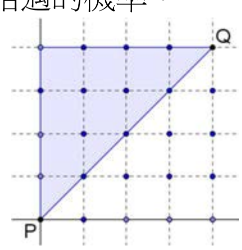
壹、前言

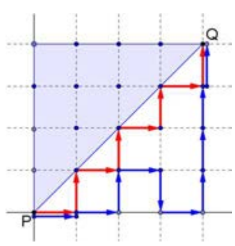
一、研究動機



在大考考古題中，有一題機率問題如下：有街道如右圖(每一小方格皆為正方形)，甲自P往Q，乙自Q往P，倆人同時出發，以相同速度，沿最短路線前進。假設在每一分岔路口時，選擇前進方向的機率都相等，問甲、乙二人在路上相遇的機率有多大？

我們將街道擴展並加入二元一次不等式的邊界條件，再探討兩人相遇的機率。為方便討論，假設坐標平面上$n \times n$方格街道的邊長為 1，令 P 點為原點，Q 點坐標為(n,n)(如下圖)。本文主要探討：在邊界條件的限制下，也就是只能在非陰影區行進，甲從 P 點走到 Q 點，乙從 Q 點走到 P 點，兩人同時出發，以相同速率沿方格線「走捷徑」的方式行進，可碰觸邊界但不能超出邊界，也不能沿著對角線邊界行進。假設兩人在每一分岔路口選擇前進方向的機率相等，求兩人最後相遇的機率。





以4×4方格街道說明如上圖。甲沿方格線從$P(0,0)$到$Q(4,4)$時，「走捷徑」的意思是指以最短距離方式完成路徑，故甲只會向上或向右前進，如上圖中的紅色路徑即為捷徑走法之一，藍色路徑則不是捷徑走法。特別的是，走到街道右邊界時只能向上，走到對角線邊界時

只能向右，除此之外，在分岔路口選擇向上或向右的機率均為$\frac{1}{2}$。同理，乙以「走捷徑」的方式從$Q(4,4)$到$P(0,0)$時，亦有類似的情況。這個邊界限制，將使得在討論兩人相遇的機率，變得更複雜。

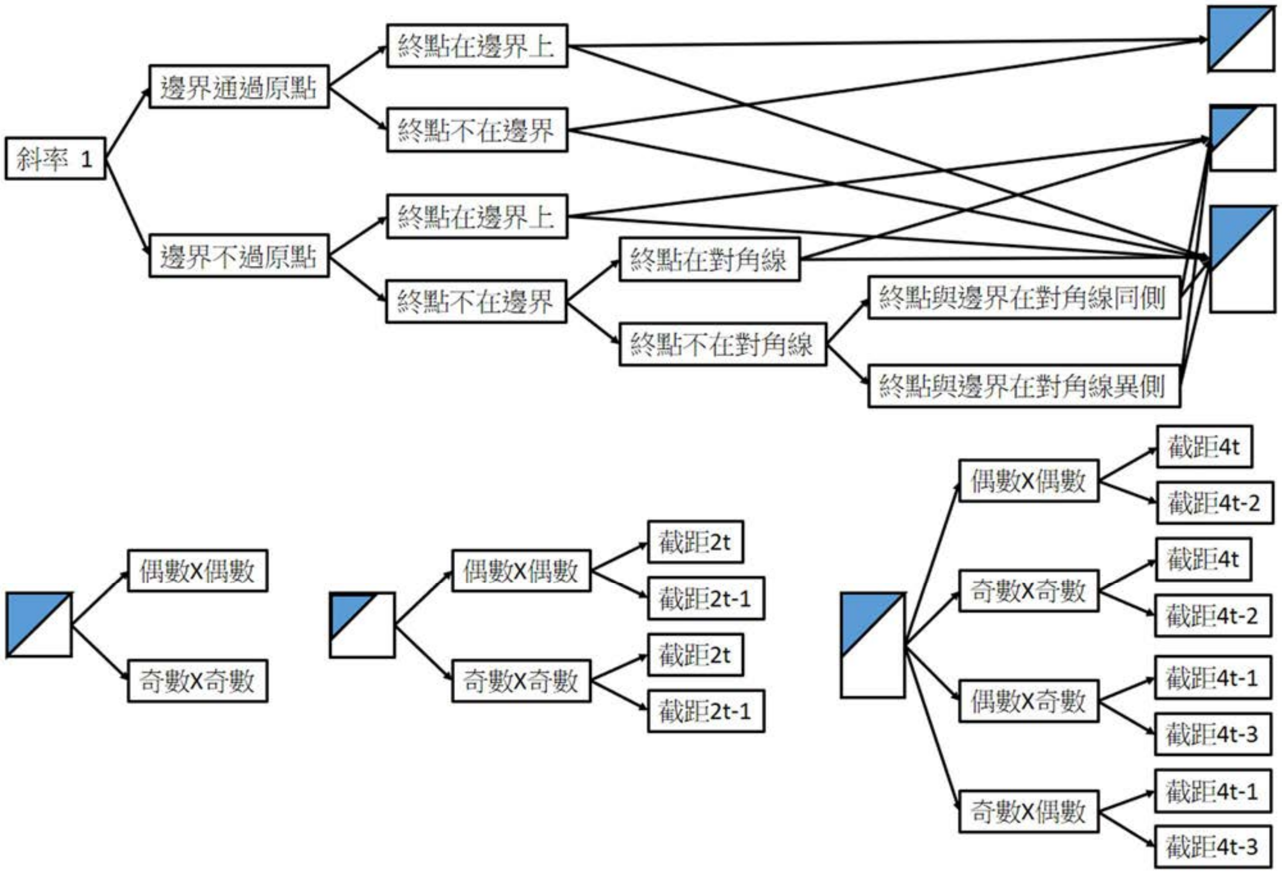
二、研究目的

(一)解決正方形方格路徑邊界條件過原點的問題。

(二)解決正方形方格路徑邊界條件不過原點的問題。

(三)解決長方形方格路徑邊界條件過其中一頂點的問題。

三、研究架構



四、文獻回顧

在$r=1$時，我們將研究方法分成(一)邊界條件下的路徑計算、(二)正方形方格街道、(三)探討路徑的碰撞次數、(四)邊界條件通過原點、(五)邊界條件未通過原點等五個階段。其中(一)之定義 1.01~定理 1.05 (Christian Krattenthaler, Lattice Path Enumeration.p.7~8)及(三)定義 3.01~定理 3.11 (Steven J. Tedford, 2011)為參考文獻內容。

為了更進一步將我們研究成果推廣至在$r>1$的整數，參考文獻(Christian Krattenthaler, 1989)並定義 7.01，作為發展基礎，其餘則為作者推論或新創。

貳、研究設備及器材

一、筆、格子紙。

二、電腦、Word 軟體、Excel 軟體、GeoGebra 繪圖軟體、Visual Basic 程式。

參、研究過程或方法

為了方便表示路徑數計算，以$\left|L\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right|$表示在$n\times n$方格街道中，從$(0,0)$以「走捷徑」的方式行進至$(n,n)$的路徑數，其中邊界條件$y\le x$，表示可在下半平面行進，不可超越邊界但可碰觸邊界$y=x$，與高中課本不同的地方，我們將不可行走地方塗上陰影。若邊界條件為$y<x$，則表示除了$(0,0)$與(n,n)外，不可超越也不可碰觸邊界$y=x$。若甲在邊界條件$y\le x$下沿方格線從$(0,0)$到$(4,4)$，則「走捷徑」路徑數以$\left|L\left((0,0)\to(4,4);\{y\le x\}\right)\right|$表示。

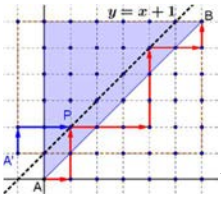
(一)邊界條件下的路徑計算

定義 1.01：卡塔蘭數 Catalan Numbers. $C_n=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$

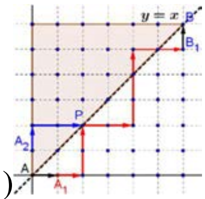
定理 1.02：(邊界條件過原點、終點在邊界上)試證：

(1)$\left|L\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right|=C_n$

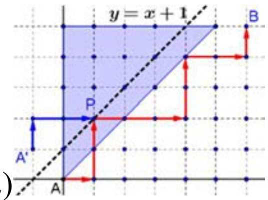
(2)$\left|L\left((0,0)\to(n,n);\{y<x\}\right)\right|=C_{n-1}$



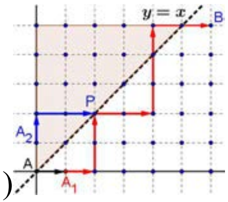
1.02(1)



1.02(2)



1.03(1)



1.03(2)

定理 1.03：(邊界條件過原點、終點不在邊界)試證：

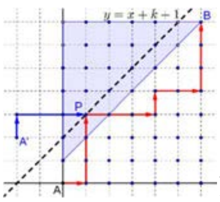
(1)$\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x\}\right)\right|=\dfrac{m-n+1}{m+1}C_m^{m+n}$

(2)$\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y<x\}\right)\right|=\dfrac{m-n}{m}C_{m-1}^{m+n-1}$

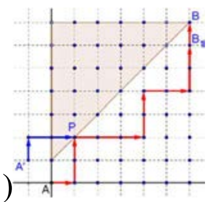
定理 1.04：(邊界條件不過原點、終點在邊界上)試證：

(1)$\left|L\left((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\right)\right|=\dfrac{k+1}{n+1}C_n^{2n-k}$

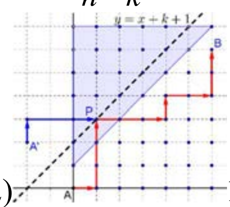
(2)$\left|L\left((0,0)\to(n-k,n);\{y<x+k\}\right)\right|=\dfrac{k}{n-k}C_n^{2n-k-1}$



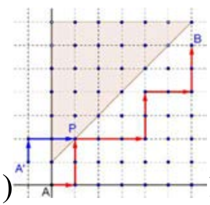
1.04(1)



1.04(2)



1.05(1)



1.05(2)

定理 1.05：(邊界條件不過原點、終點不在邊界)試證：

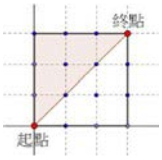
(1)$\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x+k\}\right)\right|=C_m^{m+n}-C_{m+k+1}^{m+n}$

(2)$\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y<x+k\}\right)\right|=C_m^{m+n}-C_{m+k}^{m+n}$

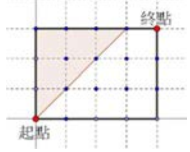
(二)正方形方格街道

定義 2.01：碰撞次數定義：邊界過原點(起點)，次數從 1 算起；邊界不過原點，次數從 0 算起。若路徑終點在邊界上，則該點不採計。

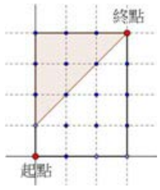
碰撞次數 1~3 次



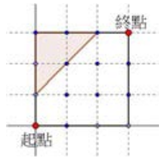
碰撞次數 1~4 次



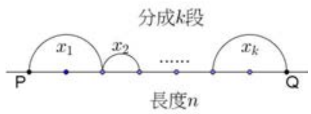
碰撞次數 0~3 次



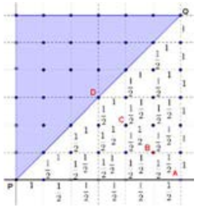
碰撞次數 0~3 次



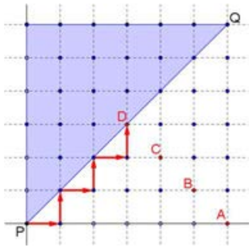
定義 2.02：若 $\overline{PQ}=n$ 單位，將 $\overline{PQ}$ 分成 k 段，每段至少 1 單位，則這樣的方法數為 $x_1+x_2+...+x_k=n$ 之正整數解，即 $(x_1-1)+(x_2-1)+...+(x_k-1)=n-k$ 之非負整數解。



範例 2.03：如圖，若甲從 $(0,0)$ 沿格線走捷徑前進至 D 的機率為 $\frac{10}{32}$。

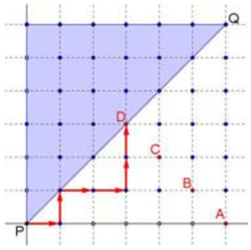


① (X,Y,X,Y,X,Y)



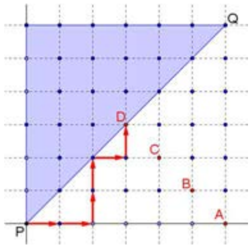
與 $y=x$ 碰三次

② (X,Y,X,X,Y,Y)



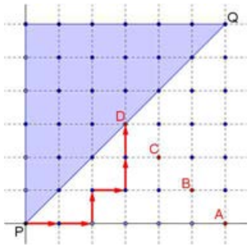
與 $y=x$ 碰二次

③ (X,X,Y,Y,X,Y)



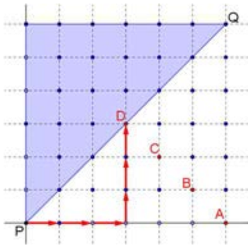
與 $y=x$ 碰二次

④ (X,X,Y,X,Y,Y)



與 $y=x$ 碰一次

⑤ (X,X,X,Y,Y,Y)



與 $y=x$ 碰一次

(1)與 $y=x$ 恰碰三次：此種路徑可視為 $x_1+x_2+x_3=3$ 的正整數解，故僅一組解 $(x_1,x_2,x_3)=(1,1,1)$，表示 $(0,0)\to(1,1)$、$(1,1)\to(2,2)$、$(2,2)\to(3,3)$ 各碰一次，其方法數計算可由定理 1.02(2)得 $C_0C_0C_0$，其機率為 $(\frac{1}{2})^{6-3}=\frac{1}{8}$ (如①)。故機率 $C_0C_0C_0\times\frac{1}{8}=\frac{4}{32}$

(2)與 $y=x$ 恰碰二次：此種路徑可視為 $x_1+x_2=3$ 的正整數解，故有二組解 $(x_1,x_2)=(1,2),(2,1)$，有可能 $(0,0)\to(1,1)$、$(1,1)\to(3,3)$ 各碰一次，其方法數為 C_0C_1；或是 $(0,0)\to(2,2)$、$(2,2)\to(3,3)$ 各碰一次，其方法數為 C_1C_0。故方法數有 $C_0C_1+C_1C_0$，路徑的機率都是 $(\frac{1}{2})^{6-2}=\frac{1}{16}$ (如②③)。故機率為 $(C_0C_1+C_1C_0)\times\frac{1}{16}=\frac{4}{32}$

(3)與 $y=x$ 恰碰一次：此種路徑可視為 $x_1=3$ 的正整數解，故僅一組解，表示 $(0,0)\to(3,3)$ 只碰一次，其方法數為 C_2，每條路徑的機率都是 $(\frac{1}{2})^{6-1}=\frac{1}{32}$ (如④⑤)。

故機率為 $C_2\times\frac{1}{32}=\frac{2}{32}$。

故得甲從 $(0,0)$ 沿格線走捷徑前進至 D 的機率為 $\frac{4}{32}+\frac{4}{32}+\frac{2}{32}=\frac{10}{32}$。

由範例 2.03 推知：符合條件的路徑與邊界 $y=x$ 的碰撞次數會影響該路徑的機率，其中碰撞次數則依定義 2.01 計算。以下我們試著研究路徑的碰撞次數，以簡化機率的計算。

(三)探討路徑的碰撞次數

定義 3.01：(1)若 $C(x)$ 為數列 $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($C_0=1, C_1=1, C_2=2, C_3=5, C_4=14, C_5=42$)的生成函數，

則 $C(x)=\sum_{n\geq 0} C_n x^n = C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+...=1+x+2x^2+5x^3+14x^4+...$

(2)若 $C^{k+1}(x)$ 為 $C(x)$ 經 k 次自我卷積的生成函數，令 $c(n,k)$ 表示生成函數 $C^{k+1}(x)$ 中 x^n 項的係數，則 $c(n,k)=\sum_{i_1+i_2+...+i_{k+1}=n} C_{i_1}C_{i_2}...C_{i_{k+1}}$

由範例 2.03 推知，碰撞次數與 $\sum_{i_1+i_2+...+i_{k+1}=n} C_{i_1}C_{i_2}...C_{i_{k+1}}$ 有關。由定義 3.01 推知，只要能算出 $c(n,k)$ ，就能計算路徑的碰撞次數，於是參考文獻(Steven J. Tedford, 2011)尋求解決方法。

以下將內文重點式列出，並從定理 3.12 起為我們的推論。

定義 3.02：(1) W 是由有限個 $\{X,Y\}$ 所構成的文字序列的集合

(2)若 $w\in W$ ，則 $|w|$ 是 w 的長度

(3)若 $1\leq i\leq |w|$ ，則 w_i 表示 w 中長度為 i 的子字串

(4) $n_X(w), n_Y(w)$ 分別表示 w 中 X,Y 出現次數

定義 3.03：我們稱 $w\in W$ 是 proper word，如果 w 滿足以下兩個性質

(1) $n_X(w)=n_Y(w)=n$

(2)若 $1\leq i\leq 2n$ ， $n_Y(w_i)\leq n_X(w_i)$

定理 3.04： $W(n)$ 表示長度為 $2n$ 的 proper words 所成的集合，則 $C_n=|W(n)|$

定義 3.05：我們稱 $w\in W$ 是 k-proper words，如果 w 滿足以下兩個性質

(1) $n_X(w)=n, n_Y(w)=n+k$

(2)若 $1\leq i\leq 2n+k$ ， $n_Y(w_i)\leq n_X(w_i)+k$

並令 $W(n,k)$ 是長度 $2n+k$ 的 k-proper words 所成的集合

定義 3.06：由定義 3.01(3)①之 $xC^2(x)=C(x)-1$ 同乘 $C^k(x)$ ，可得 $xC^{k+2}(x)=C^{k+1}(x)-C^k(x)$ 。

定義 3.07：定義 $W_k(x)$ 為數列 $\{|W(n,k)|\}_{n=0}^{\infty}$ 的生成函數，

引理 3.08： $W(n,k+1)=W(n-1,k+2)+W(n,k)$

定理 3.09： $xW_{k+2}(x)=W_{k+1}(x)-W_k(x)$

推論 3.10： $c(n,k)=|W(n,k)|$

引理 3.11： $|W(n,k)|=|w|$ ，其中 $w\in W(n+k)$ 且滿足 $w_k=\underbrace{XX...X}_{k個}$ 。即計算前 k 個是 X ，之後有 n 個 X 且 $n+k$ 個 Y 的 proper words 個數。

經由上述文獻探討(Steven J. Tedford, 2011)，可推論 $c(n,k)$ 的計算公式。

定理 3.12： $c(n,k)=\frac{k+1}{n+k+1}C_n^{2n+k}$

證　　明：滿足 $w\in W(n+k)$ 且 $w_k=\underbrace{XX...X}_{k個}$ ，即前 k 個是 X ，之後有 n 個 X 且 $n+k$ 個 Y 的 proper words。其中 $k+1\leq i\leq 2n+2k$ ， $n_Y(w_i)\leq n_X(w_i)+k$ ，將問題轉換成路徑問

題，即計算在$(n+k)\times(n+k)$方格街道且在邊界條件$y\le x$下，從$(k,0)$以「走捷徑」方式行進至$(n+k,n+k)$的可能路徑。由推論 3.10 知$c(n,k)=|W(n,k)|$，則
$$c(n,k)=|W(n,k)|=\left|L\left((k,0)\to(n+k,n+k);\{y\le x\}\right)\right|=C_n^{2n+k}-C_{n-1}^{2n+k}=\frac{k+1}{n+k+1}C_n^{2n+k}$$

定理 3.13：令$T(n,k)$表示從$(0,0)\to(n,n)$與$y=x$經過k次碰撞，則$T(n,k)=\dfrac{k}{n}C_{n-1}^{2n-k-1}$。

證　　明：(一)解讀$c(n,k)$

(1) k表示生成函數$C(x)$經過k次卷積得到$C^{k+1}(x)$，故每項係數均為$c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_{k+1}}$的組合結構，依定義 2.01 表示包含原點不含終點，與邊界$y=x$有$k+1$次碰撞。

(2)依定義 2.02，n為$C^{k+1}(x)$展開x^n項係數$\displaystyle\sum_{(i_1-1)+(i_2-1)+\dots+(i_{k+1}-1)=n\text{非負整數解}} c_{i_1-1}c_{i_2-1}\dots c_{i_{k+1}-1}$，求$(i_1-1)+(i_2-1)+\dots+(i_{k+1}-1)=n+k+1$非負整數解，即求$i_1+i_2+\dots+i_{k+1}=n+k+1$的正整數解，表示路徑是從$(0,0)\to(n+k+1,n+k+1)$

(3)將$c(n,k)$依定理 3.12 製表如下。其中紅框處 221 的解讀如下，第一個$2=c(2,0)$，表示從$(0,0)\to(2+0+1,2+0+1)$與$y=x$經過 1 次碰撞；第二個$2=c(1,1)$表示從$(0,0)\to(1+1+1,1+1+1)$與$y=x$經過 2 次碰撞；第三個$1=c(0,2)$表示從$(0,0)\to(0+2+1,0+2+1)$與$y=x$經過 3 次碰撞。

(二)將$c(n,k)$經變數變換求得$T(n',k')$並製表

將上表轉換做適當轉換。假設$T(n',k')$表示從$(0,0)\to(n',n')$與$y=x$經過k'次碰撞。則$\begin{cases}n'=n+k+1\\k'=k+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=n'-k'\\k=k'-1\end{cases}$，將$c(n,k)=\dfrac{k+1}{n+k+1}C_n^{2n+k}$之$n,k$以$n=n'-k',k=k'-1$取代，可得$T(n',k')=\dfrac{k'}{n'}C_{n'-1}^{2n'-k'-1}$。將$n',k'$換回$n,k$得$T(n,k)=\dfrac{k}{n}C_{n-1}^{2n-k-1}$，於是將上表$c(n,k)$轉換成下表$T(n,k)$，此表方便應用。

$c(n,k)$						
碰撞	1	2	3	4	5	6
n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	2	5	9	14	20	27
3	5	14	28	48	75	110
4	14	42	90	165	275	429
5	42	132	297	572	1001	1638
6	132	429	1001	2002	3640	6188

$T(n,k)$									
n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1							
3	2	2	1						
4	5	5	3	1					
5	14	14	9	4	1				
6	42	42	28	14	5	1			
7	132	132	90	48	20	6	1		
8	429	429	297	165	75	27	7	1	
9	1430	1430	1001	572	275	110	35	8	1

斧頭定理

定理 3.14：已知$T(n,k)=\dfrac{k}{n}C_{n-1}^{2n-k-1}$，試證：$T(n,k)=T(n+1,k+1)-T(n+1,k+2)$

證　　明：$T(n+1,k+1)-T(n+1,k+2)=\dfrac{k+1}{n+1}C_n^{2n-k}-\dfrac{k+2}{n+1}C_n^{2n-k-1}$
$$=\frac{k+1}{n+1}C_n^{2n-k}-\frac{k+2}{n+1}C_n^{2n-k-1}$$
$$=\frac{(k+1)(2n-k)}{(n+1)n}C_{n-1}^{2n-k-1}-\frac{(k+2)(n-k)}{(n+1)n}C_{n-1}^{2n-k-1}$$
$$=\frac{(n+1)k}{(n+1)n}C_{n-1}^{2n-k-1}=T(n,k)$$

定理 3.15：斧頭定理(Axe theorem) $\sum_{i=k}^{n} T(n,i) = T(n+1,k+1)$

證　　明：由定理 3.14 可得 $T(n,k) = T(n+1,k+1) - T(n+1,k+2)$

$$\sum_{i=k}^{n} T(n,i) = T(n,k) + T(n,k+1) + \ldots + T(n,n)$$

$$= \left(T(n+1,k+1) - T(n+1,k+2)\right) + \left(T(n+1,k+2) - T(n+1,k+3)\right) + \ldots +$$

$$\left(T(n+1,n) - T(n+1,n+1)\right) + T(n,n)$$

$$= T(n+1,k+1)$$

仿照巴斯卡三角形聖誕襪定理的命名方式，將此定理稱為「斧頭定理」。

定理 3.16：試證明 $\left|L\left((k,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right|$ 、 $\left|L\left((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\right)\right|$ 、 $\left|L\left((0,0)\to(n,n-k);\{y\le x\}\right)\right|$ 三種情形的路徑數相等。

證　　明：將題目的三個路徑數繪圖如下

(1) $\left|L\left((k,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right|$ ，由定理 3.12 及 3.13 知其值為

$c(n-k,k) = T(n+1,k+1)$

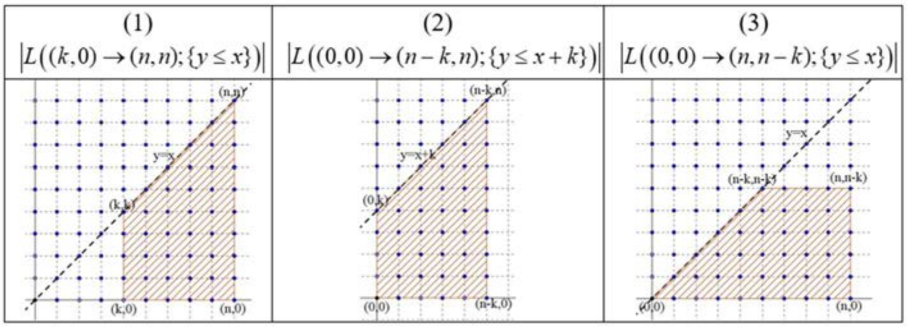
(2) $\left|L\left((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\right)\right|$ 此圖可由(1)往左平移 k 單位至 y 軸，故斜線區域大小與圖(1)相同

(3)將圖(1)經鏡射與旋轉可得圖(3)，故斜線區域大小與圖(1)相同。由上可知，三個圖形是全等的，故三個情形的路徑數均相等，由定理 3.15 得

$c(n-k,k) = T(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n} T(n,i)$ ，亦即

$$\left|L\left((k,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right| = \left|L\left((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\right)\right|$$

$$= \left|L\left((0,0)\to(n,n-k);\{y\le x\}\right)\right| = c(n-k,k) = T(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n} T(n,i)$$



(四)邊界條件通過原點

(1)點在邊界線上

定理 4.01：邊界 $y \le x$ ，終點 (n,n) ，則

(1) $\left|L\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right| = \sum_{i=1}^{n} T(n,i) = T(n+1,2)$

(2)在(1)的路徑中與 $y = x$ 邊界碰撞 k 次的次數為 $T(n,k)$

(3) $\left|P\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right| = \sum_{i=1}^{n} T(n,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}$

證　　明：(1)$\left|L\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right|=\sum_{i=1}^{n}T(n,i)=T(n+1,2)=\dfrac{2}{n+1}C_{(n+1)-1}^{2(n+1)-2-1}$

$$=\frac{2}{n+1}C_{n}^{2n-1}=\frac{2n}{2n(n+1)}C_{n}^{2n}=\frac{1}{n+1}C_{n}^{2n}=C_n$$

由定理 1.02(1)驗證相等。

(2)由應用 3.13 知 $T(n,k)$ 的意義為從 $(0,0)\to(n,n)$ 在邊界 $y\le x$ 的條件下與 $y=x$ 經過 k 次碰撞的路徑數。

	k \ n	1	2	3	…	…	n	終點
碰撞次數		1	2	3	…	…	n	(n,n)
路徑數		T(n,1)	T(n,2)	T(n,3)	…	…	T(n,n)	

(3)若定義 $\left|P\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right|$ 表示在方格街道中，在邊界條件 $y\le x$ 下，從 $(0,0)$ 以「走捷徑」的方式行進至 (n,n) 的機率，由(2)可得 $\sum_{i=1}^{n}T(n,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}$。

(2)點不在邊界線上

定理 4.02：邊界 $y\le x$，終點 $(n,n-k),0<k\le n$，則

(1)$\left|L\left((0,0)\to(n,n-k);\{y\le x\}\right)\right|=T(n+1,k+1)=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)$

(2)在(1)的路徑中與 $y=x$ 邊界碰撞 $t,1\le t\le n-k+1$ 次的路徑數為 $T(n,k+t)$

(3)$\left|P\left((0,0)\to(n,n-k);\{y\le x\}\right)\right|=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-i-1}$

證　　明：由定理 3.16 之圖(3)可得

(1)$\left|L\left((0,0)\to(n,n-k);\{x\ge y\}\right)\right|=T(n+1,k+1)=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)=\dfrac{k+1}{n+1}C_{n}^{2n-k}$

由定理 1.03(1)驗證相等。

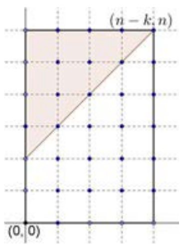
(2)依定理 3.16，由 $(n,n-1)$ 逐點往下，其碰撞次數與捷徑數的關係歸納如下。

	k \ n	1	2	3	…	k	…	k+t	…	n	終點
碰撞次數						1	…	t+1	…	n-k+1	(n,n-k)
路徑數						T(n,k)	…	T(n,k+t)	…	T(n,n)	

(3)由(2)可得 $\sum_{i=k}^{n}T(n,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-i-1}$。

(五)邊界條件未通過原點

(1)點在邊界線上



定理 5.01：(一)邊界 $y\le x+k,k$ 為正整數，終點 $(n-k,n)$，則

(1)$\left|L\left((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\right)\right|=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)=T(n+1,k+1)$

(2)在(1)的路徑中與 $y=x+k$ 邊界碰撞 $t,0\le t\le n-k$ 次的路徑數為 $T(n,k+t)$

$$(3)\left|P\big((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\big)\right|=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}$$

證　明：(一)由定理 3.16 之圖(2)可得

$$(1)\left|L\big((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x-k\}\big)\right|=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)=T(n+1,k+1)$$

由定理 1.04(1)驗證相等。

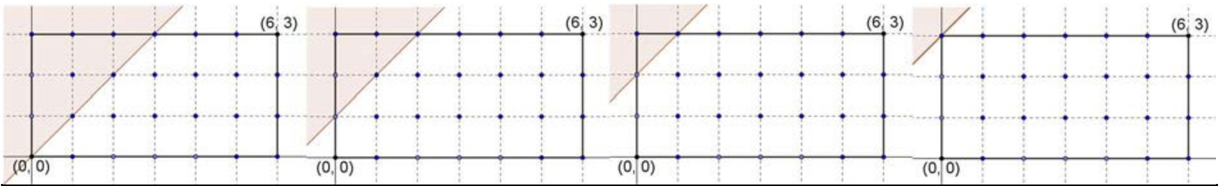
(2)依定理 3.16，其碰撞次數與捷徑數的關係歸納如下。

	n \ k	1	2	3	…	k	…	k+t	…	n	終點
碰撞次數	n					0	…	t	…	n-k	(n-k,n)
路徑數						T(n,k)	…	T(n,k+t)	…	T(n,n)	

(3)由(2)可得 $\sum_{i=k}^{n}T(n,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}$ 。

(2)點不在邊界線上

範例 5.02：(一)邊界條件 $y\le x$ ，終點 $(6,3)$ ，依定理 4.02 可得碰撞次數與路徑數。我們將邊界條件 $y\le x$ 每次上移一單位，觀察碰撞次數與路徑數的變化，可得下表



	n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	邊界條件
碰撞次數	6			1	2	3	4				$y\le x$
路徑數				T(6,3)	T(6,4)	T(6,5)	T(6,6)				
碰撞次數	7				0	1	2	3			$y\le x+1$
路徑數					T_1	T(7,5)	T(7,6)	T(7,7)			
碰撞次數	8						0	1	2		$y\le x+2$
路徑數							T_2	T(8,7)	T(8,8)		
碰撞次數	9								0	1	$y\le x+3$
路徑數									T_3	T(9,9)	

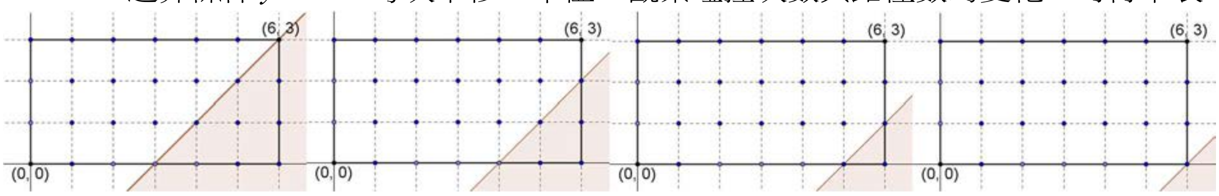
由定理 3.15 斧頭定理可得

$T_1=T(6,3)+T(6,4)+T(6,5)+T(6,6)=T(7,4)$

$T_2=T_1+\big(T(7,5)+T(7,6)+T(7,7)\big)=T(7,4)+T(8,6)$

$T_3=T_2+\big(T(8,8)+T(8,9)\big)=T(7,4)+T(8,6)+T(9,8)$

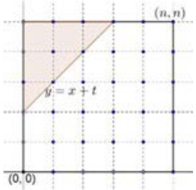
(二)邊界條件 $y\ge x-3$，終點 $(6,3)$ ，依定理 5.01 可得碰撞次數與路徑數。我們將邊界條件 $y\ge x-3$ 每次下移一單位，觀察碰撞次數與路徑數的變化，可得下表。



	n \ k	1		2	3	4	5	6	7	8	9	邊界條件
碰撞次數	6				0	1	2	3				$y \ge x-3$
路徑數					T(6,3)	T(6,4)	T(6,5)	T(6,6)				
碰撞次數	7					0	1	2	3			$y \ge x-4$
路徑數						T_1	T(7,5)	T(7,6)	T(7,7)			
碰撞次數	8							0	1	2		$y \ge x-5$
路徑數								T_2	T(8,7)	T(8,8)		
碰撞次數	9									0	1	$y \ge x-6$
路徑數										T_3	T(9,9)	

其中，T_1, T_2, T_3 值同(一)。

由範例 5.02(一)得知，當邊界與終點在對角線異側時，則由對角線開始，逐步做斧頭堆疊；由(二)得知，當邊界與終點在對角線同側時，則由過終點直線開始，逐步做斧頭堆疊。



定理 5.03：(終點在對角線上)

(1)邊界 $y \le x+t, t$ 為正整數，終點 (n,n) ，若 $0 < t \le n$ ，則

$$\left|L\left((0,0) \to (n,n); \{y \le x+t\}\right)\right| = \sum_{k=1}^{t} T(n+k, 2k-1) + \sum_{i=1}^{n-t+1} T(n+t, 2t+i-1)$$

(2) $\left|P\left((0,0) \to (n,n); \{y \le x+t\}\right)\right|$

$$= \sum_{k=1}^{t} T(n+k, 2k-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{i=1}^{n-t+1} T(n+t, 2t+i-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}$$

證　　明：(1)邊界條件 $y \le x$ ，終點 (n,n) ，依定理 4.01 可得碰撞次數與路徑數。我們將邊界條件 $y \le x$ 每次上移一單位，將碰撞次數與路徑數製表。製表如下

	n \ k	1	2	3	4	5	6	7	…	2t-1	2t	…	n+t	邊界條件
碰撞次數	n	1	2	3	4	5	6	7	…			…		$y \le x$
路徑數		T(n,1)	T(n,2)	T(n,3)	T(n,4)	T(n,5)	T(n,6)	T(n,7)	…			…		
碰撞次數	$n+1$	0	1	2	3	4	5	6	…			…		$y \le x+1$
路徑數		T_1	T(n+1,2)	T(n+1,3)	T(n+1,4)	T(n+1,5)	T(n+1,6)	T(n+1,7)	…			…		
碰撞次數	$n+2$			0	1	2	3	4	…			…		$y \le x+2$
路徑數				T_2	T(n+2,4)	T(n+2,5)	T(n+2,6)	T(n+2,7)	…			…		
碰撞次數	$n+3$					0	1	2	…			…		$y \le x+3$
路徑數						T_3	T(n+3,6)	T(n+3,7)	…			…		
碰撞次數	$n+t$								…	0	1	…	n-t+1	$y \le x+t$
路徑數									…	T_t	T(n+t,2t)	…	T(n+t,n+t)	

其中

$$T_1 = T(n,1) + \ldots + T(n,n) = T(n+1,1)$$

$$T_2 = T(n+1,1) + \left(T(n+1,2) + \ldots + T(n+1,n+1)\right) = T(n+1,1) + T(n+2,3)$$

$$T_3 = T_2 + \left(T(n+2,4) + \ldots + T(n+2,n+2)\right) = T(n+1,1) + T(n+2,3) + T(n+3,5)$$

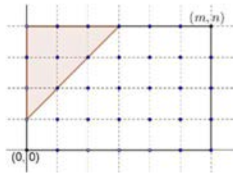
由歸納法及定理 3.15(斧頭定理)可得

$$T_t = T(n+1,1)+T(n+2,3)+T(n+3,5)+...+T(n+t,2t-1)=\sum_{k=1}^{t}T(n+k,2k-1)$$

(2) $T_t=\sum_{k=1}^{t}T(n+k,2k-1)$ 表示碰撞 0 次的總路徑數；$T(n+t,2t+i-1)$ 則表示隨著 i 的增加，碰撞 i 次的路徑數，故

$$\left|P\big((0,0)\to(n,n);\{y\le x+t\}\big)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{t}T(n+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n}+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(n+t,2t+i-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}$$

定理5.04：(邊界與終點在對角線異側)



(1)邊界 $y\le x+t, t$ 為正整數，終點 (m,n)，若 $0<t\le n<m$，則

$$\left|L\big((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\big)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{t}T(m+k,m-n+2k-1)+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,m-n+2t-1+i)$$

(2) $\left|P\big((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\big)\right|$
$$=\sum_{k=1}^{t}T(m+k,m-n+2k-1)\times(\frac{1}{2})^{m+n}+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,m-n+2t-1+i)\times(\frac{1}{2})^{m+n-i}$$

證　　明：(一)(1)邊界條件 $y\le x$，終點 (m,n)，依定理 4.02 可得碰撞次數與路徑數。我們將邊界條件 $y\le x$ 每次上移一單位，將碰撞次數與路徑數製表。

	n \ k	m-n	m-n+1	m-n+2	m-n+3	m-n+4	m-n+5	…	m-n+2t-1	m-n+2t	…	m+t	邊界條件
碰撞次數		1	2	3	4	5	6						
路徑數	m	T(m,m-n)	T(m,m-n+1)	T(m,m-n+2)	T(m,m-n+3)	T(m,m-n+4)	T(m,m-n+5)	…			…		$y\le x$
碰撞次數			0	1	2	3	4						
路徑數	m+1		T_1	T(m+1,m-n+2)	T(m+1,m-n+3)	T(m+1,m-n+4)	T(m+1,m-n+5)	…			…		$y\le x+1$
碰撞次數					0	1	2						
路徑數	m+2				T_2	T(m+2,m-n+4)	T(m+2,m-n+5)	…			…		$y\le x+2$
碰撞次數	m+t							…	0	1	…	n-t	$y\le x+t$
路徑數								…	T_t	T(m+t, m-n+2t)	…	T(m+t,m+t)	

其中

$$T_1=T(m,m-n)+...+T(m,m)=T(m+1,m-n+1)$$
$$T_2=T(m+1,m-n+1)+\big(T(m+1,m-n+2)+...+T(m+1,m+1)\big)$$
$$=T(m+1,m-n+1)+T(m+2,m-n+3)$$

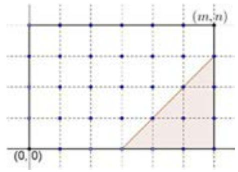
由歸納法及定理 3.15(斧頭定理)可得

$$T_t=T(m+1,m-n+1)+T(m+2,m-n+3)+...+T(n+t,m-n+2t-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{t}T(m+k,m-n+2k-1)$$

(2) $\sum_{k=1}^{t}T(m+k,m-n+2k-1)$ 表示碰撞 0 次的總路徑數；$T(m+t,m-n+2t-1+i)$ 則表示隨著 i 的增加，碰撞 i 次的路徑數，故

$$\left|P\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\right)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{t}T(m+k,m-n+2k-1)\times(\frac{1}{2})^{m+n}+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,m-n+2t-1+i)\times(\frac{1}{2})^{m+n-i}$$

引理5.05：(邊界與終點在對角線同側)



邊界 $y\ge x-t, t$ 為正整數，終點 (m,n) ，若 $0<m-n<t\le m$ ，則

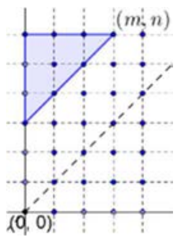
$$\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y\ge x-t\}\right)\right|=\sum_{k=1}^{t-(m-n)}T(m+k,m-n+2k-1)+\sum_{i=1}^{m-t+1}T(n+t,2t-m+n-1+i)$$

證　　明：邊界條件 $y\ge x-(m-n)$ ，終點 (m,n) ，依定理 5.01 可得碰撞次數與路徑數。我們將邊界條件 $y\ge x-(m-n)$ 每次下移一單位，將碰撞次數與路徑數製表。

	n \ k	m-n	m-n+1	m-n+2	m-n+3	m-n+4	m-n+5	…	2t-m+n-1	2t-m+n	…	m+t	邊界條件
碰撞次數	m	0	1	2	3	4	5						$y\ge x-(m-n)$
路徑數		T(m,m-n)	T(m,m-n+1)	T(m,m-n+2)	T(m,m-n+3)	T(m,m-n+4)	T(m,m-n+5)	…			…		
碰撞次數	$m+1$		0	1	2	3	4						$y\ge x-(m-n)-1$
路徑數			T_1	T(m+1,m-n+2)	T(m+1,m-n+3)	T(m+1,m-n+4)	T(m+1,m-n+5)	…			…		
碰撞次數	$m+2$				0	1	2						$y\ge x-(m-n)-2$
路徑數					T_2	T(m+2,m-n+4)	T(m+2,m-n+5)	…			…		
碰撞次數	$m+t$							…	0	1	…	m-t+1	$y\ge x-(m-n)-t$
路徑數								…	T_t	T(n+t, 2t-m+n)	…	T(n+t,n+t)	

為了方便操作邊界條件與終點在對角線同側問題，我們將引理 5.05 透過 $y=x$ 作對稱，即將終點之 x,y 座標互換，邊界條件 $y\ge x-t$ 改成 $y\le x+t$ ，可得定理 5.06。

定理 5.06：(邊界與終點在對角線同側)



邊界 $y\le x+t, t$ 為正整數，終點 (m,n) ，若 $0<n-m<t<n$ ，則

(1) $\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\right)\right|$
$$=\sum_{k=1}^{t-(n-m)}T(n+k,n-m+2k-1)+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,2t-n+m-1+i)$$

(2) $\left|P\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\right)\right|$
$$=\sum_{k=1}^{t-(n-m)}T(n+k,n-m+2k-1)\times(\frac{1}{2})^{m+n}+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,2t-n+m-1+i)\times(\frac{1}{2})^{m+n-i}$$

證　　明：(1)將引理5.05透過 $y=x$ 作對稱可得

(2) $\sum_{k=1}^{t-(n-m)}T(n+k,n-m+2k-1)$ 表示碰撞0次的總路徑數； $T(m+t,2t-n+m-1+i)$

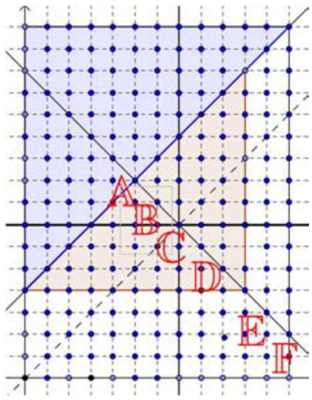
則表示隨著 i 的增加，碰撞 i 次的路徑數，故

$$\left|P\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\right)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{t-(n-m)}T(n+k,n-m+2k-1)\times(\frac{1}{2})^{m+n}+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,2t-n+m-1+i)\times(\frac{1}{2})^{m+n-i}$$

	n \ k	n-m	n-m+1	n-m+2	n-m+3	n-m+4	n-m+5	…	2t-n+m-1	2t-n+m	…	m+t	邊界條件
碰撞次數	n	0	1	2	3	4	5						$y\le x+(n-m)$
路徑數		T(n,n-m)	T(n,n-m+1)	T(n,n-m+2)	T(n,n-m+3)	T(n,n-m+4)	T(n,n-m+5)	…			…		
碰撞次數	$n+1$		0	1	2	3	4						$y\le x+(n-m)+1$
路徑數			T_1	T(n+1,n-m+2)	T(n+1,n-m+3)	T(n+1,n-m+4)	T(n+1,n-m+5)	…			…		
碰撞次數	$n+2$				0	1	2						$y\le x+(n-m)+2$
路徑數					T_2	T(n+2,n-m+4)	T(n+2,n-m+5)	…			…		
碰撞次數	$m+t$							…	0	1	…	n-t+1	$y\le x+(n-m)+t$
路徑數								…	T_t	T(m+t, 2t-n+m)	…	T(m+t,m+t)	

肆、研究結果



為了方便說明如何在實際問題中引用定理 4.01、4.02、5.01、5.03、5.04、5.06 及 6.06，我們以「長方形方格路徑邊界條件過其中一頂點」的圖形為例。假設一個 $m\times n$ 的矩形，有可能的相遇點則落在直線 $x+y=\dfrac{m+n}{2}$ 上，以 $\begin{cases}x+y=\dfrac{m+n}{2}\\ y=x\end{cases}$ 的交點 C 為中心畫出中心十字。我們將**相遇點**分成邊界上的點 A(單點)、對角線上的點 C(單點)、介於 A 與 C 之間的點 B_j(多點)、C 之外且受邊界條件影響的點 D_j(多點)、不受邊界條件影響的點 E_j(多點)、右邊界上的點 F(單點)，最多共六種情形。

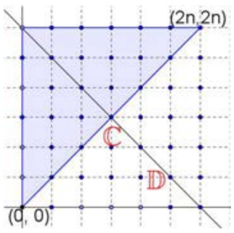
一、正方形方格路徑邊界條件過原點

定理 6.01：(1)若甲、乙分別從 $P(0,0)$、$Q(2n,2n),n\in N$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n,2n)$、$P(0,0)$ 前進，在 $y\le x$ 的邊界條件下，則兩人相遇的機率為

$$\left(\sum_{k=1}^{n}T(n,k)\times(\frac{1}{2})^{2n-k}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=2j}^{n+j}T(n+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2j-i-1}\right)^2。$$

(2)若甲、乙分別從 $P(0,0)$、$Q(2n-1,2n-1),n\in N$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n-1,2n-1)$、$P(0,0)$ 前進，在 $y\le x$ 的邊界條件下，則兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=2j-1}^{n+j-1}T(n+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2j-i-3}\right)^2。$$



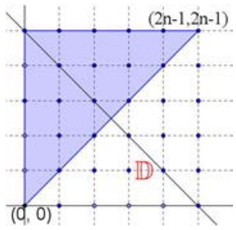
證　　明：(1)將相遇點分成 $C(n,n)$ 及 D 區的點 $D_j(n+j,n-j),j=1,2,\ldots,n$

① $C(n,n)$ 在對角線上，由定理 4.01 可得甲由 $P(0,0)$ 至 $C(n,n)$ 的機率為 $\sum_{k=1}^{n}T(n,k)\times(\frac{1}{2})^{2n-k}$，因甲、乙分別由 P,Q 至 $C(n,n)$ 的機率相等，故兩人相遇在 $C(n,n)$ 的機率為 $\left(\sum_{k=1}^{n}T(n,k)\times(\frac{1}{2})^{2n-k}\right)^2$

② D 區的相遇點 $D_j(n+j,n-j), j=1,2,...,n$ ，由定理 4.02 可得甲由 $P(0,0)$ 至 $D_j(n+j,n-j)$ 的機率為 $\sum_{i=2j}^{n+j} T(n+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2j-i-1}$ ，因甲、乙分別由 P,Q 至 D_j 的機率相等，故兩人相遇在 D_j 的機率為 $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=2j}^{n+j} T(n+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2j-i-1}\right)^2$

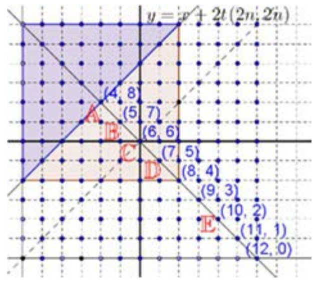
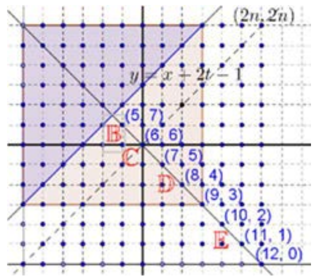
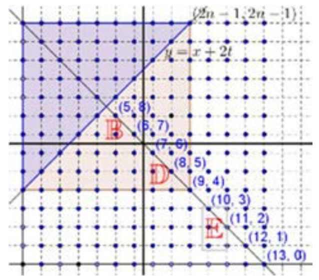
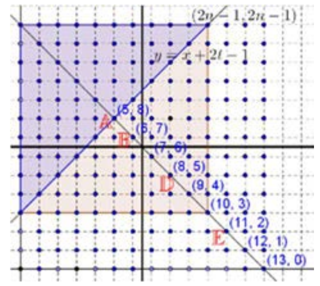
由①②得兩人相遇的機率為 $\left(\sum_{k=1}^{n} T(n,k)\times(\frac{1}{2})^{2n-k}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=2j}^{n+j} T(n+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2j-i-1}\right)^2$

(2)此條件無對角線上的相遇點，僅 D 區的相遇點 $D_j(n+j-1,n-j), j=1,2,...,n$ ，由定理 4.02 可得甲由 $P(0,0)$ 至 $D_j(n+j-1,n-j)$ 的機率為 $\sum_{i=2j-1}^{n+j-1} T(n+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2j-i-3}$ ，因甲、乙分別由 P,Q 至 D_j 的機率相等。



故兩人相遇的機率為 $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=2j-1}^{n+j-1} T(n+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2j-i-3}\right)^2$ 。

二、正方形方格路徑邊界條件不過原點

定理 6.02	定理 6.03	定理 6.04	定理 6.05
(偶數×偶數) $y=x+2t$	(偶數×偶數) $y=x+2t-1$	(奇數×奇數) $y=x+2t$	(奇數×奇數) $y=x+2t-1$
			

定理 6.02：若甲、乙分別從 $P(0,0)$ 、 $Q(2n,2n), n\in Z$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n,2n)$ 、 $P(0,0)$ 前進，在 $y\le x+2t$ $(0<2t<n, t\in N)$ 的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明： 當 $0<2t<n, t\in N$ 時，可分成 A,B,C,D,E 區。

(1)由定理 5.01 可得兩人在 $A(n-t,n+t)$ 相遇的機率為 $\left(\sum_{i=2t}^{n+t} T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i}\right)^2$

(2)由定理 5.06 可得兩人在 $B_j(n-t+j,n+t-j)$ 相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j} T(n+t-j+k,2t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ +\sum_{i=1}^{n-t-j+1} T(n+t+j,2t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}\end{array}\right)^2$$

(3)由定理 5.03 可得兩人在 $C(n,n)$ 相遇的機率為

$$\left(\sum_{k=1}^{2t}T(n+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n}+\sum_{i=1}^{n-2t+1}T(n+2t,4t+i-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}\right)^2$$

(4)由定理 5.04 可得兩人在$D_j(n+j,n-j)$相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-2t}\left(\sum_{k=1}^{2t}T(n+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\sum_{i=1}^{n-2t-j+1}T(n+2t+j,4t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}\right)^2$$

(5)由一般捷徑問題，可得兩人在$E_j(2n-2t+j,2t-j)$相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t}\left(C_{2t-j}^{2n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^2$$

將(1)(2)(3)(4)(5)加總可得兩人相遇的機率。

定理 6.03：若甲、乙分別從$P(0,0)$、$Q(2n,2n),n\in N$出發，以「走捷徑」方式往$Q(2n,2n)$、$P(0,0)$前進，在$y\le x+2t-1$ $(0<2t-1<n,t\in N)$邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：本定理無邊界上的相遇點。當$0<2t-1<n,t\in N$時，可分成B,C,D,E區。

(1)由定理 5.06 可得兩人在$B_j(n-t+j,n+t-j)$相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,2t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\\+\sum_{i=1}^{n-t-j+2}T(n+t+j-1,2t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}\end{array}\right)^2$$

(2)由定理 5.03 可得兩人在$C(n,n)$相遇的機率為

$$\left(\sum_{k=1}^{2t-1}T(n+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n}+\sum_{i=1}^{n-2t+2}T(n+2t-1,4t+i-3)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}\right)^2$$

(3)由定理 5.04 可得兩人在$D_j(n+j,n-j)$相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-2t+1}\left(\sum_{k=1}^{2t-1}T(n+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\sum_{i=1}^{n-2t-j+2}T(n+2t+j-1,4t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}\right)^2$$

(4)由一般捷徑問題，可得兩人在$E_j(2n-2t+j,2t-j)$相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-1}\left(C_{2t-1-j}^{2n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^2$$

將(1)(2)(3)(4)加總可得兩人相遇的機率。

定理 6.04：甲、乙分別從$P(0,0)$、$Q(2n-1,2n-1)$出發，n為正整數，以「走捷徑」方式往$Q(2n-1,2n-1)$、$P(0,0)$前進，在$y\le x+2t,(0<2t<\frac{2n-1}{2},t\in N)$的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：本定理無邊界及對角線上的相遇點。當$0<2t<\frac{2n-1}{2},t\in N$時可分成$B,D,E$區。

(1)由定理 5.06 可得兩人在$B_j(n-t+j-1,n+t-j)$ B相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{t}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,2t-2j+2k)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\\+\sum_{i=1}^{n-t-j+1}T(n+t+j-1,2t+2j-2+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1-i}\end{array}\right)^{2}$$

(2)由定理 5.04 可得兩人在 $D_j(n+j-1,n-j)$ 相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-2t}\left(\sum_{k=1}^{2t}T(n+j+k-1,2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\sum_{i=1}^{n-2t-j+1}T(n+2t+j-1,4t+2j-2+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1-i}\right)^{2}$$

(3)由一般捷徑問題，可得兩人在 $E_j(2n-2t+j-1,2t-j)$ 相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t}\left(C_{2t-j}^{2n-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right)^{2}$$

將(1)(2)(3)加總可得兩人相遇的機率。

定理 6.05：甲、乙分別從 $P(0,0)$ 、 $Q(2n-1,2n-1)$ 出發，n 為正整數，以「走捷徑」方式往 $Q(2n-1,2n-1)$ 、 $P(0,0)$ 前進，在 $y\le x+2t-1,(0<2t-1<\frac{2n-1}{2},t\in N)$ 的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：本定理無對角線上的相遇點。當 $0<2t-1<\frac{2n-1}{2},t\in N$ 時，可分成 A,B,D,E 區。

(1)由定理 5.01 可得兩人在 $A(n-t,n+t-1)$ 相遇的機率為

$$\left(\sum_{i=2t-1}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-2-i}\right)^{2}$$

(2)由定理 5.06 可得兩人在 $B_j(n-t+j,n+t-1-j)$ 相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j}T(n+t-j+k-1,2t-2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\\+\sum_{i=1}^{n-t-j+1}T(n+t+j-1,2t+2j-2+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1-i}\end{array}\right)^{2}$$

(3)由定理 5.04 可得兩人在 $D_j(n-1+j,n-j)$ 相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-2t+1}\left(\sum_{k=1}^{2t-1}T(n+j+k-1,2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\sum_{i=1}^{n-2t-j+2}T(n+2t+j-2,4t+2j-4+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1-i}\right)^{2}$$

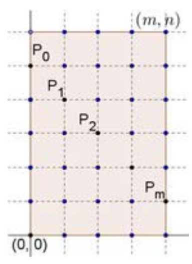
(4)由一般捷徑問題，可得兩人在 $E_j(2n-2t+j,2t-1-j)$ 相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-1}\left(C_{2t-1-j}^{2n-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right)^{2}$$

將(1)(2)(3)(4)加總可得兩人相遇的機率。

三、長方形方格路徑邊界條件過其中一頂點

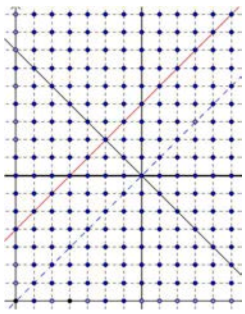
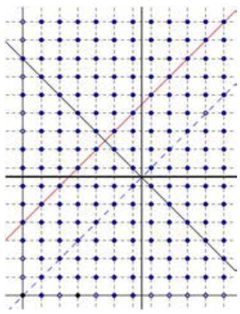
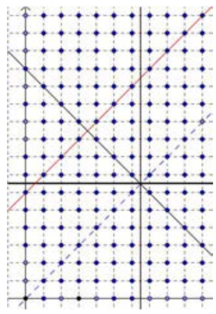
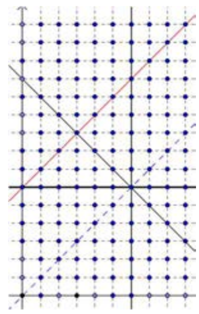
定理 6.06：(轉角問題)已知甲由 $(0,0)$ 以「走捷徑」方式至 (m,n) ，若 $m+n$ 為偶數，令 $t=\frac{m+n}{2}$ ，對於右邊界點 $P_m(m,t-m)$ ，可得甲由 $(0,0)$ 至 $P_m(m,t-m)$ 的機率為 $\sum_{k=0}^{t-m}C_k^t(\frac{1}{2})^t$ 。

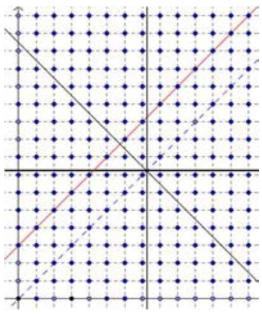
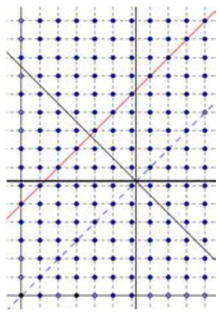
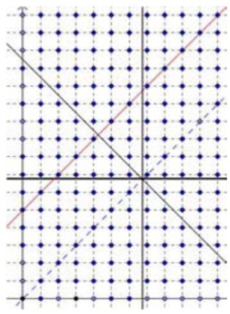
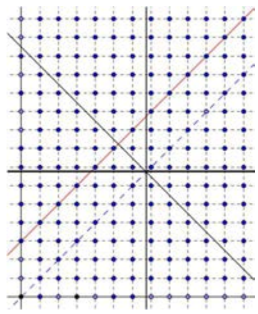


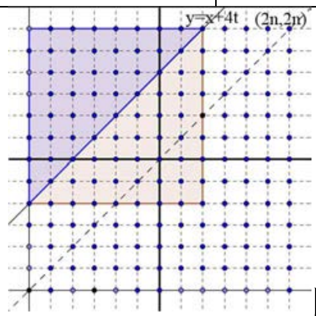
證　　明：假設相遇地點在$(0,t),\dots,(k,t-k),\dots,(m,t-m)$，若由甲出發至相遇點所對應機率分別為$P_0,P_1,\dots,P_m$，可得$P_0+P_1+\dots+P_m=1$，則

$$P_m=1-(P_0+P_1+\dots+P_{m-1})=1-(C_0^t+C_1^t+\dots+C_{m-1}^t)(\frac{1}{2})^t$$

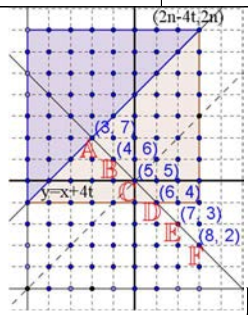
$$=(C_m^t+C_{m+1}^t+\dots+C_t^t)(\frac{1}{2})^t=(C_{t-m}^t+C_{t-m-1}^t+\dots+C_0^t)(\frac{1}{2})^t=\sum_{k=0}^{t-m}C_k^t(\frac{1}{2})^t$$

定理 6.07	定理 6.08	定理 6.09	定理 6.10
(偶數×偶數)$y=x+4t$	(奇數×奇數)$y=x+4t$	(偶數×偶數)$y=x+4t-2$	(奇數×奇數)$y=x+4t-2$
			

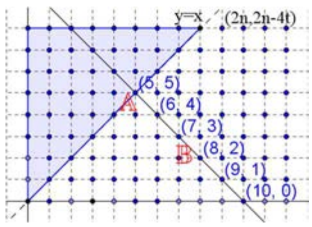
定理 6.11	定理 6.12	定理 6.13	定理 6.14
(奇數×偶數)$y=x+4t-1$	(偶數×奇數)$y=x+4t-3$	(奇數×偶數)$y=x+4t-3$	(偶數×奇數)$y=x+4t-1$
			



圖①



圖②



圖③

定理 6.07：若甲、乙分別從$P(0,0)$、$Q(2n-4t,2n),n\in N$出發，以「走捷徑」方式往$Q(2n-4t,2n)$、$P(0,0)$前進，在$y\le x+4t$ $(0<4t<n-t,t\in N)$的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：選擇上述定理如圖①，截去右側$4t\times 2n$的矩形如圖②，再進行討論。

當$0<4t<n-t$時可分成A,B,C,D,E,F區。

(1)由定理 5.01 可得甲至$A(n-3t,n+t)$的機率為$\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i}$。將圖②向右旋轉 90°，再左右鏡射，可得圖③，若圖②之相遇點為(x,y)，則圖③之相遇點為$(2n-y,2n-4t-x)$，故由定理 4.01 可得乙至$A'(n-t,n-t)$的機率為

$\sum_{i=1}^{n-t} T(n-t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\left(\sum_{i=4t}^{n+t} T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-t} T(n-t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}\right)$$

(2)由定理 5.06 可得甲至 $B_j(n-3t+j,n+t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{2j} T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-3t-j+1} T(n+t+j,4t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

由定理 4.02 可得乙至 $B'_j(2n-(n+t-j),2n-4t-(n-3t+j))=(n-t+j,n-t-j)$ 的機率為 $\sum_{i=2j}^{n-t+j} T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j} T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\\+\sum_{i=1}^{n-3t-j+1} T(n+t+j,4t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=2j}^{n-t+j} T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}\right)$$

(3)由定理 5.03 可得甲至 $C(n-t,n-t)$ 的機率為

$\sum_{k=1}^{4t} T(n-t+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t+1} T(n+3t,8t+i-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}$ 。由定理 4.02 可得乙至 $C'(n+t,n-3t)$ 的機率為 $\sum_{i=4t}^{n+t} T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i-1}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t} T(n-t+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t}+\\\sum_{i=1}^{n-5t+1} T(n+3t,8t+i-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t}^{n+t} T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i-1}\right)$$

(4)由定理 5.04 可得甲至 $D_j(n-t+j,n-t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t} T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t-j+1} T(n+3t+j,8t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

。由定理 4.02 可得乙至 $D'(n+t+j,n-3t-j)$ 的機率為

$\sum_{i=4t+2j}^{n+t+j} T(n+t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-i-1}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-5t}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t} T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\\sum_{i=1}^{n-5t-j+1} T(n+3t+j,8t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t+2j}^{n+t+j} T(n+t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-i-1}\right)$$

(5)由一般捷徑問題，可得甲至 $E_j(2n-6t+j,4t-j)$ 的機率為 $C_{4t-j}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}$ 。由定理 4.02 可得乙至 $E'(2n-4t+j,2t-j)$ 的相遇機率為

$\sum_{i=2n-6t+2j}^{2n-4t+j} T(2n-4t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j-i-1}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t}\left(C_{4t-j}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\left(\sum_{i=2n-6t+2j}^{2n-4t+j}T(2n-4t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j-i-1}\right)$$

(6)右邊界$F(2n-4t,2t)$是轉角問題，由定理 6.06 可得甲至$F(2n-4t,2t)$的機率為 $\sum_{j=0}^{2t}C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}$，由定理 4.02 可得乙至$F'(2n-2t,0)$的機率為$(\frac{1}{2})^{2n-2t-1}$。

故二人相遇機率為$\left(\sum_{j=0}^{2t}C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}\right)\left((\frac{1}{2})^{2n-2t-1}\right)$。

將(1)(2)(3)(4)(5)(6)加總可得兩人相遇的機率。

定理 6.08：若甲、乙分別從$P(0,0)$、$Q(2n-1-4t,2n-1),n\in N$出發，以「走捷徑」方式往$Q(2n-1-4t,2n-1),n\in N$、$P(0,0)$前進，在$y\le x+4t\ (0<4t<n-t-\frac{1}{2},t\in N)$的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：截去右側$(4t-2)\times(2n-1)$的矩形，再進行討論。

當$0<4t<n-t-\frac{1}{2}$時可分成B,D,E,F區。

(1)由定理 5.06 可得甲至$B_j(n-3t+j-1,n+t-j)$的機率為

$$\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,4t-2j+2k)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}+\sum_{i=1}^{n-3t-j+1}T(n+t+j-1,4t+2j-2+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1-i}$$

由定理 4.02 可得乙至$B'_j(n-t+j-1,n-t-j)$的機率為

$\sum_{i=2j-1}^{n-t+j-1}T(n-t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-3-i}$。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,4t-2j+2k)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}+\\\sum_{i=1}^{n-3t-j+1}T(n+t+j-1,4t+2j-2+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=2j-1}^{n-t+j-1}T(n-t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-3-i}\right)$$

(2)由定理 5.04 可得甲至$D_j(n-t+j-1,n-t-j)$的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t}T(n-t+j+k-1,2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}+\sum_{i=1}^{n-5t-j+1}T(n+3t+j-1,8t+2j-2+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1-i}$$

。由定理 4.02 可得乙至$D'(n+t+j-1,n-3t-j)$的機率為

$\sum_{i=4t+2j-1}^{n+t+j-1}T(n+t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-3-i}$。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-5t}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t}T(n-t+j+k-1,2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}+\\\sum_{i=1}^{n-5t-j+1}T(n+3t+j-1,8t+2j-2+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t+2j-1}^{n+t+j-1}T(n+t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-3-i}\right)$$

(3)由一般捷徑問題，可得甲至$E_j(2n-6t+j-1,4t-j)$的機率為

$C_{4t-j}^{2n-2t-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}$。由定理 4.02 可得乙至$E'(2n-4t+j-1,2t-j)$的機率為

$$\sum_{i=2n-6t+2j-1}^{2n-4t+j-1} T(2n-4t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j-3-i}$$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-1}\left(C_{4t-j}^{2n-2t-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}\right)\left(\sum_{i=2n-6t+2j-1}^{2n-4t+j-1} T(2n-4t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j-3-i}\right)$$

(4)轉角問題，由定理 6.06 可得甲至 $F(2n-1-4t,2t)$ 的機率為 $\sum_{j=0}^{2t} C_j^{2n-2t-1}(\frac{1}{2})^{2n-2t-1}$ ，

由定理 4.02 可得乙至 $F'(2n-2t-1,0)$ 的機率為 $(\frac{1}{2})^{2n-2t-2}$ 。

故二人相遇機率為 $\left(\sum_{j=0}^{2t} C_j^{2n-2t-1}(\frac{1}{2})^{2n-2t-1}\right)\left((\frac{1}{2})^{2n-2t-2}\right)$ 。

將(1)(2)(3)(4)加總可得兩人相遇的機率。

定理 6.09：若甲、乙分別從 $P(0,0)$ 、 $Q(2n-4t+2,2n), n\in N$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n-4t+2,2n)$ 、 $P(0,0)$ 前進，在 $y\le x+4t-2$ $(0<4t-2<n-t+\frac{1}{2}, t\in N)$ 的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：截去右側 $(4t-2)\times(2n)$ 的矩形，再進行討論。

當 $0<4t-2<n-t+\frac{1}{2}$ 時可分成 B,D,E,F 區。

(1)由定理 5.06 可得甲至 $B_j(n-3t+j+1,n+t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{2j-1} T(n+t-j+k,4t-2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+1}+\sum_{i=1}^{n-3t-j+3} T(n+t+j-1,4t+2j+i-4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1-i}$$

由定理 4.02 可得乙至 $B'_j(n-t+j,n-t-j+1)$ 的機率為

$$\sum_{i=2j-1}^{n-t+j} T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}$$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1} T(n+t-j+k,4t-2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}+\\ \sum_{i=1}^{n-3t-j+3} T(n+t+j-1,4t+2j+i-4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=2j-1}^{n-t+j} T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}\right)$$

(2)由定理 5.04 可得甲至 $D_j(n-t+j,n-t-j+1)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t-2} T(n-t+j+k,2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+1}+\sum_{i=1}^{n-5t-j+4} T(n+3t+j-2,8t+2j+i-6)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+1-i}$$

。由定理 4.02 可得乙至 $D_j'(n+t+j-1,n-3t-j+2)$ 的機率為

$$\sum_{i=4t+2j-3}^{n+t+j-1} T(n+t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-3-i}$$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-5t+3}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-2} T(n-t+j+k,2j+2k-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+1}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t-j+4} T(n+3t+j-2,8t+2j+i-6)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+1-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t+2j-3}^{n+t+j-1} T(n+t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-3-i}\right)$$

(3)由一般捷徑問題，可得甲至 $E_j(2n-6t+j+3,4t-j-2)$ 的機率為

$C_{4t-j-2}^{2n-2t+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+1}$。由定理 4.02 可得乙至$E'(2n-4t+j+2,2t-j-1)$的相遇機率為

$\sum_{i=2n-6t+2j+3}^{2n-4t+j+2}T(2n-4t+j+2,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j+3-i}$。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-2}\left(C_{4t-j-2}^{2n-2t+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+1}\right)\left(\sum_{i=2n-6t+2j+3}^{2n-4t+j+2}T(2n-4t+j+2,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j+3-i}\right)$$

(4)轉角問題，由定理 6.06 可得甲至$F(2n-4t+2,2t-1)$的機率為

$\sum_{j=0}^{2t-1}C_j^{2n-2t+1}(\frac{1}{2})^{2n-2t+1}$，由定理 4.02 可得乙至$F'(2n-2t+1,0)$的機率為$(\frac{1}{2})^{2n-2t}$。

故二人相遇機率為$\left(\sum_{j=0}^{2t}C_j^{2n-2t-1}(\frac{1}{2})^{2n-2t-1}\right)\left((\frac{1}{2})^{2n-2t}\right)$。

將(1)(2)(3)(4)加總可得兩人相遇的機率。

定理 6.10：若甲、乙分別從$P(0,0)$、$Q(2n-4t+1,2n-1),n\in N$出發，以「走捷徑」方式往$Q(2n-4t+1,2n-1),n\in N$、$P(0,0)$前進，在$y\le x+4t-2$ $(0<4t-2<n-t,t\in N)$的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：截去右側$(4t-2)\times(2n-1)$的矩形，再進行討論。

當$0<4t-2<n-t$時可分成A,B,C,D,E,F區。

(1)由定理 5.01 可得甲至$A(n-3t+1,n+t-1)$的機率為

$\sum_{i=4t-2}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-2-i}$。由定理 4.01 可得乙至$A'(n-t,n-t)$的機率為

$\sum_{i=1}^{n-t}T(n-t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}$。故兩人相遇的機率為

$$\left(\sum_{i=4t-2}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-2-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-t}T(n-t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}\right)$$

(2)由定理 5.06 可得甲至$B_j(n-3t+j+1,n+t-j-1)$的機率為

$$\sum_{k=1}^{2j}T(n+t-j+k-1,4t-2j+2k-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-3t-j+2}T(n+t+j-1,4t+2j+i-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

由定理 4.02 可得乙至$B'_j(n-t+j,n-t-j)$的機率為

$\sum_{i=2j}^{n-t+j}T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}$。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-2}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j}T(n+t-j+k-1,4t-2j+2k-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-3t-j+2}T(n+t+j-1,4t+2j+i-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=2j}^{n-t+j}T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}\right)$$

(3)由定理 5.03 可得甲至$C(n-t,n-t)$的機率為

$\sum_{k=1}^{4t-2}T(n-t+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t+3}T(n+3t-2,8t+i-5)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}$。由定理 4.02

可得乙至$C'(n+t-1,n-3t+1)$的機率為$\sum_{i=4t-2}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-3-i}$。故兩人相遇

的機率為

$$\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-2}T(n-t+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t+3}T(n+3t-2,8t+i-5)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t-2}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-3-i}\right)$$

(4)由定理 5.04 可得甲至 $D_j(n-t+j,n-t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t-2}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t-j+3}T(n+3t+j-2,8t+2j+i-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

。由定理 4.02 可得乙至 $D_j\,'(n+t+j-1,n-3t-j+1)$ 的機率為

$\sum_{i=4t+2j-2}^{n+t+j-1}T(n+t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-3-i}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-5t+2}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-2}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t-j+3}T(n+3t+j-2,8t+2j+i-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t+2j-2}^{n+t+j-1}T(n+t+j-1,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-3-i}\right)$$

(5)由一般捷徑問題，可得甲至 $E_j(2n-6t+j+2,4t-j-2)$ 的機率為

$C_{4t-j-2}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}$ 。由定理 4.02 可得乙至 $E_j\,'(2n-4t+j+1,2t-j-1)$ 的相遇機率為

$\sum_{i=2n-6t+2j+2}^{2n-4t+j+1}T(2n-4t+j+1,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j+1-i}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t}\left(C_{4t-j-2}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\left(\sum_{i=2n-6t+2j+2}^{2n-4t+j+1}T(2n-4t+j+1,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j+1-i}\right)$$

(6)轉角問題，由定理 6.06 可得甲至 $F(2n-4t+1,2t-1)$ 的機率為 $\sum_{j=0}^{2t-1}C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}$ ，

由定理 4.02 可得乙至 $F\,'(2n-2t,0)$ 的機率為 $(\frac{1}{2})^{2n-2t-1}$ 。

故二人相遇機率為 $\left(\sum_{j=0}^{2t-1}C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}\right)\left((\frac{1}{2})^{2n-2t-1}\right)$ 。

將(1)(2)(3)(4)(5)(6)加總可得兩人相遇的機率。

以下四種情形的相遇點**非格子點**，我們將原本相遇點所在的直線，往上及往下各半個單位，先計算至格子點機率，再考量至非格子點的相遇點的機率，並寫成定理 6.11~6.14。

定理 6.11：若甲、乙分別從 $P(0,0)$ 、 $Q(2n-4t+1,2n),n\in N$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n-4t+1,2n),n\in N$ 、 $P(0,0)$ 前進，在 $y\le x+4t-1$ $(0<4t-1<n-t+\frac{1}{4},t\in N)$ 的邊界條件下，試求兩人相遇的機率。

證　　明：截去右側 $(4t-1)\times(2n)$ 的矩形，再進行討論。本定理原相遇點所在的直線為 $x+y=2n-2t+\frac{1}{2}$ ，這些點並非格子點，故先討論甲至 $x+y=2n-2t$ 以及乙至

$x+y=2n-2t+1$ 的格子點，再考慮相遇點的機率。

(一)當 $0<4t-1<n-t+\frac{1}{4}$ 時，甲至 $x+y=2n-2t$ 的格子點可分成 B,C,D,E,F 區

(1)由定理 5.06 可得甲至 $B_j(n-3t+j,n+t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-3t-j+2}T(n+t+j-1,4t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

① $B_j(n-3t+j,n+t-j)$ 往上一點為 $Y_j(n-3t+j,n+t-j+1)$，

$Y_j'(2n-(n+t-j+1),2n-4t+1-(n-3t+j))=(n-t+j-1,n-t-j+1)$，

由定理 4.02 可得乙至 $Y_j'(n-t+j-1,n-t-j+1)$ 的機率為

$$\sum_{i=2j-2}^{n-t+j-1}T(n-t+j-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+2j-3-i}$$

② $B_j(n-3t+j,n+t-j)$ 往右一點為 $X_j(n-3t+j+1,n+t-j)$，

$X_j'(2n-(n+t-j),2n-4t+1-(n-3t+j+1))=(n-t+j,n-t-j)$，由定理 4.02 可得乙至 $X_j'(n-t+j,n-t-j)$ 的機率為 $\sum_{i=2j}^{n-t+j}T(n-t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+2j-i-1}$。

將第一點 $B_1(n-3t+1,n+t-1)$ 向上相遇部分另外討論，故兩人相遇的機率為

$$\frac{1}{4}\sum_{j=2}^{2t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-3t-j+2}T(n+t+j-1,4t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=2j-2}^{n-t+j-1}T(n-t+j-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+2j-3-i}\right)$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-3t-j+2}T(n+t+j-1,4t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=2j}^{n-t+j}T(n-t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+2j-i-1}\right)$$

③針對 $B_1(n-3t+1,n+t-1)$ 往上一點為 $Y_1(n-3t+1,n+t)$，

$Y_1'(2n-(n+t),2n-4t+1-(n-3t+1))=(n-t,n-t)$，

由定理 5.06 可得甲至 $B_1(n-3t+1,n+t-1)$ 的機率為

$$T(n+t+k-1,4t+2k-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-3t+1}T(n+t,4t+i-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

由定理 4.01 可得乙至 $Y'(n-t,n-t)$ 的機率為

$\sum_{i=1}^{n-t}T(n-t,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$，因乙在邊界上，故兩人相遇的機率為

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}T(n+t+k-1,4t+2k-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-3t+1}T(n+t,4t+i-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-t}T(n-t,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\right)$$

(2)由定理 5.03 可得甲至 $C(n-t,n-t)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+k,2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t+2}T(n+3t-1,8t+i-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

① $C(n-t,n-t)$ 往上一點為 $Y_j(n-t,n-t+1)$ ，由定理 4.02 可得乙至 $Y_j'(n+t+1,n-3t+1)$ 的機率為 $\sum_{i=4t-2}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t+1-i}$

② $C(n-t,n-t)$ 往右一點為 $X_j(n-t+1,n-t)$ ，由定理 4.02 可得乙至 $X_j'(n+t,n-3t)$ 的機率為 $\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t-i-1}$ 。故兩人相遇的機率為

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+k,2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t+2}T(n+3t-1,8t+i-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t-i-3}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+k,2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t+2}T(n+3t-1,8t+i-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t-i-1}\right)$$

(3)由定理 5.04 可得甲至 $D_j(n-t+j,n-t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t-j+2}T(n+3t+j-1,8t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

① $D_j(n-t+j,n-t-j)$ 往上一點為 $Y_j(n-t+j,n-t-j+1)$ ，由定理 4.02 可得乙至 $Y_j'(n+t+j-1,n-3t-j+1)$ 的機率為 $\sum_{i=4t+2j-2}^{n+t+j-1}T(n+t+j-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t+2j-i-3}$

② $D(n-t+j,n-t-j)$ 往右一點為 $X_j(n-t+j+1,n-t-j)$ ，由定理 4.02 可得乙至 $X_j'(n+t+j,n-3t-j)$ 的機率為 $\sum_{i=4t+2j}^{n+t+j}T(n+t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t+2j-i-1}$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n-5t+1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t-j+2}T(n+3t+j-1,8t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t+2j-2}^{n+t+j-1}T(n+t+j-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t+2j-i-3}\right)$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n-5t+1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t-j+2}T(n+3t+j-1,8t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t+2j}^{n+t+j}T(n+t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t+2j-i-1}\right)$$

(4)由一般捷徑問題，可得甲至 $E_j(2n-6t+j+1,4t-j-1)$ 的機率為

$C_{4t-j-1}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}$ 。

① $E_j(2n-6t+j+1,4t-j-1)$ 往上一點為 $Y_j(2n-6t+j+1,4t-j)$ ，由定理 4.02 可

得乙至 $Y_j'(2n-4t+j,2t-j)$ 的機率為 $\sum_{i=2n-6t+2j}^{2n-4t+j} T(2n-4t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-8t+2j-i-1}$

② $E(2n-6t+j+1,4t-j-1)$ 往右一點為 $X_j(2n-6t+j+2,4t-j-1)$，由定理 4.02 可得乙至 $X_j'(2n-4t+j+1,2t-j-1)$ 的機率為

$$\sum_{i=2n-6t+2j+2}^{2n-4t+j+1} T(2n-4t+j+1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-8t+2j-i+1}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2t-1}\left(C_{4t-j-1}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\left(\sum_{i=2n-6t+2j}^{2n-4t+j} T(2n-4t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-8t+2j-i-1}\right)$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2t-1}\left(C_{4t-j-1}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\left(\sum_{i=2n-6t+2j+2}^{2n-4t+j+1} T(2n-4t+j+1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-8t+2j-i+1}\right)$$

(5)轉角問題，由定理 6.06 可得甲至 $F(2n-4t+1,2t-1)$ 的機率為 $\sum_{j=0}^{2t-1} C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}$ 。

$F(2n-4t+1,2t-1)$ 往上一點 $Y(2n-4t+1,2t)$ ，由一般捷徑問題，可得乙至 $Y'(2n-2t,0)$ 的機率為 $(\frac{1}{2})^{2n-2t-1}$ 。故二人相遇機率為

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2t-1} C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}\right)\left((\frac{1}{2})^{2n-2t-1}\right)$$

將(1)(2)(3)(4)(5)加總可得兩人相遇的機率。

仿照定理 6.11 的方法，可得 6.12~6.14 相遇點是非格子點的證明，受限篇幅故省略。

定理 6.12：若甲、乙分別從 $P(0,0)$ 、 $Q(2n-4t+2,2n-1), n\in N$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n-4t+2,2n-1)$ 、 $P(0,0)$ 前進，在 $y\le x+4t-3\ (0<4t-3<n-t+\frac{1}{4}, t\in N)$ 的邊界條件下，可得兩人相遇的機率。

定理 6.13：若甲、乙分別從 $P(0,0)$ 、 $Q(2n-4t+3,2n), n\in N$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n-4t+3,2n)$ 、 $P(0,0)$ 前進，在 $y\le x+4t-3\ (0<4t-3<n-t+\frac{3}{4}, t\in N)$ 的邊界條件下，可得兩人相遇的機率。

定理 6.14：若甲、乙分別從 $P(0,0)$ 、 $Q(2n-4t,2n-1), n\in N$ 出發，以「走捷徑」方式往 $Q(2n-4t,2n-1)$ 、 $P(0,0)$ 前進，在 $y\le x+4t-1\ (0<4t-1<n-t-\frac{1}{4}, t\in N)$ 的邊界條件下，可得兩人相遇的機率。

伍、討論

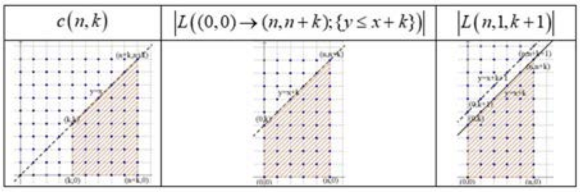
定義 7.01：從 $(0,0)\to(n,nr+k)$ 不超過 $y=rx+k$ 直到終點 $(n,nr+k)$ 停止(碰一次)，其路徑數可由下列公式得到 $L(n,r,k)=\frac{k}{(r+1)n+k}C_n^{(r+1)n+k}$ (Christian Krattenthaler, 1989)

定理 7.02： $L(n,1,k+1)=c(n,k)$

證　　明：由定義 7.01 得 $L(n,1,k+1)=\frac{k+1}{2n+k+1}C_n^{2n+k+1}=\frac{k+1}{n+k+1}C_n^{2n+k}=c(n,k)$ (定理 3.12)

故得證 $L(n,1,k+1)=c(n,k)$

$c(n,k)$透過變數變換可得$T(n',k')$；由定理 7.02 知當$r=1$時，$c(n,k)=L(n,1,k+1)$，故推論$T(n',k')$與$L(n,1,k)$有關。



定理 7.03： $L(n-k,1,k)=T(n,k)$

證　　明：由定義 7.01 得$L(n-k,1,k)=\dfrac{k}{2(n-k)+k}C_n^{2(n-k)+k}=\dfrac{k}{2n-k}C_n^{2n-k}=\dfrac{k}{n}C_{n-1}^{2n-k-1}$

由定理 3.13 知$T(n,k)=\dfrac{k}{n}C_{n-1}^{2n-k-1}$ 。

故得證$L(n-k,1,k)=T(n,k)$

$T(n,k)$可導出定理 3.15(斧頭定理)，故$L(n,1,k)$亦存在斧頭定理的架構。

定理 7.04：試證明$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,1,t)=L(n-1,1,2)$ 。

證　　明：$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,1,t)=\sum_{t=1}^{n}T(n,t)=T(n+1,2)$ (定理 7.03 及 3.15 斧頭定理)

又$T(n+1,2)=L(n-1,1,2)$(定理 7.03)

故得證$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,1,t)=L(n-1,1,2)$

定理 7.04 之左式的幾何意義為：由定理 7.03 得$L(n-t,1,t)=T(n,t)$表示從$(0,0)\to(n,n)$的捷徑中與$y=x$碰撞t次的路徑數，加總後為總路徑數；右式的幾何意義為：從定理 3.15 可知從$(0,0)\to(n,n)$的總路徑數為$T(n+1,2)$，由定理 7.03 得$T(n+1,2)=L(n-1,1,2)$，故左右兩式相等。接著我們以$L(n,r,k)$定義證明$r=2$的斧頭定理。

定理7.05：試證明： $L(n,2,2k)=L(n,2,2k+1)-L(n-1,2,2k+3)$

證　　明：

$$L(n,2,2k+1)-L(n-1,2,2k+3)$$

$$=\frac{2k+1}{3n+2k+1}C_n^{3n+2k+1}-\frac{2k+3}{3(n-1)+2k+3}C_{n-1}^{3(n-1)+2k+3}$$

$$=\frac{2k+1}{2n+2k+1}\times\frac{(3n+2k)!}{n!(2n+2k)!}-\frac{(2k+3)n}{(3n+2k)(2n+2k+1)}\times\frac{(3n+2k)!}{n!(2n+2k)!}$$

$$=\frac{2k}{3n+2k}\times C_n^{3n+2k}=L(n,2,2k)$$

故得証$L(n,2,2k)=L(n,2,2k+1)-L(n-1,2,2k+3)$

定理7.06：試證明： $\sum_{t=1}^{n}L(n-t,2,2t)=L(n-1,2,3)$

證　　明：$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,2,2t)=L(n-1,2,2)+L(n-2,2,4)+...+L(0,2,2n)$ ，由定理7.05可得

$$=\big(L(n-1,2,3)-L(n-2,2,5)\big)+\big(L(n-2,2,5)-L(n-3,2,7)\big)+...+$$

$$\big(L(1,2,2n-1)-L(0,2,2n+1)\big)+L(0,2,2n)=L(n-1,2,3)-L(0,2,2n+1)+L(0,2,2n)$$

因$L(0,2,2n+1)=L(0,2,2n)$ ，

故得證$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,2,2t)=L(n-1,2,3)$

$|L(n,2,k)|$ 且 k 為 2 的倍數

k	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
n\r	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	7	18	33	52	75	102	133	168	207	250
3	30	88	182	320	510	760	1078	1472	1950	2520
4	143	455	1020	1938	3325	5313	8050	11700	16443	22475
5	728	2448	5814	11704	21252	35880	57330	87696	129456	185504
6	3876	13566	33649	70840	134550	237510	396459	632896	973896	1E+06
7	21318	76912	197340	430560	848250	2E+06	3E+06	4E+06	7E+06	1E+07
8	120175	444015	1E+06	3E+06	5E+06	1E+07	2E+07	3E+07	5E+07	8E+07

$|L(n,2,k)|$ 及斧頭定理

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n\r	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	7	12	18	25	33	42	52	63	75
3	12	30	55	88	130	182	245	320	408	510
4	55	143	273	455	700	1020	1428	1938	2565	3325
5	273	728	1428	2448	3876	5814	8379	11704	15939	21252
6	1428	3876	7752	13566	21945	33649	49588	70840	98670	134550
7	7752	21318	43263	76912	126500	197340	296010	430560	610740	848250
8	43263	120175	246675	444015	740025	1E+06	2E+06	3E+06	4E+06	5E+06

定理7.06即 $r=2$ 時的斧頭定理，以上表為例，$\sum_{t=1}^{5} L(5-t,2,2t)=L(4,2,3)$，其幾何意義為從 $(0,0)\to(5,10)$ 的捷徑中在 $y\le 2x$ 的邊界條件下，總路徑數為 $L(4,2,3)$，而與 $y=2x$ 碰撞 t $t=1,2,\ldots,5$ 次的路徑數為 $L(5-t,2,2t)$。

定理7.07：試證明：$L(n,r,rk)=L(n,r,rk+1)-L(n-1,r,r(k+1)+1)$

證　　明：$L(n,r,rk+1)-L(n-1,r,r(k+1)+1)$

$$=\frac{rk+1}{(r+1)n+rk+1}C_n^{(r+1)n+rk+1}-\frac{r(k+1)+1}{(r+1)(n-1)+r(k+1)+1}C_{n-1}^{(r+1)(n-1)+r(k+1)+1}$$

$$=\frac{rk+1}{rn+rk+1}\times\frac{\big((r+1)n+rk\big)!}{n!(rn+rk)!}-\frac{\big(r(k+1)+1\big)n}{\big((r+1)n+rk\big)(rn+rk+1)}\times\frac{\big((r+1)n+rk\big)!}{n!(rn+rk)!}$$

$$=\frac{rk}{(r+1)n+rk}\times C_n^{(r+1)n+rk}=L(n,r,rk)$$

故得証 $L(n,r,rk)=L(n,r,rk+1)-L(n-1,r,r(k+1)+1)$

定理7.08：試證明：$\sum_{t=1}^{n} L(n-t,r,rt)=L(n-1,r,r+1)$

證　　明：$\sum_{t=1}^{n} L(n-t,r,rt)=L(n-1,r,r)+L(n-2,r,2r)+\ldots+L(0,r,nr)$，由定理7.05可得

$$=\big(L(n-1,r,r+1)-L(n-2,r,2r+1)\big)+\big(L(n-2,r,2r+1)-L(n-3,r,3r+1)\big)+\ldots+$$
$$\big(L(1,r,r(n-1)+1)-L(0,r,rn+1)\big)+L(0,r,rn)$$
$$=L(n-1,r,r+1)-L(0,r,rn+1)+L(0,r,rn)$$

因 $L(0,r,rn+1)=L(0,r,rn)$，

故得證 $\sum_{t=1}^{n} L(n-t,r,rt)=L(n-1,r,r+1)$

定理7.08即斜率為 r 時的斧頭定理，我們推論，前面研究所得到的成果，可藉由 $L(n,r,k)$ 推廣至整數 $r>1$ 時的情形。

陸、結論

一、當 $r=1$ 時，我們製作 $T(n,k)$ 表，方便掌握與邊界條件的碰撞次數，以利求出在正方形或長方形的斜面下相遇的機率。

二、以表列方式呈現定理 4.01、4.02、5.01、5.03、5.04、5.06，以利應用在實際問題上。此外，對問題的截距加以限制，以達最大分區，再依各區特性帶入適當定理，便能將實際問題一般化。

三、當 $r>1, r$ 整數時，利用 $|L(n,r,k)|=\dfrac{k}{(r+1)n+k}C_{n}^{(r+1)n+k}$ 製表，可得相對應的 $T(n,k)$ 表，這種表格有助我們快速掌握從 $(0,0)\to(n,rn)$ 在邊界 $y\le rx$ 條件下與 $y=rx$ 碰撞的次數。此外可觀察到 k 模 r 有 r 個同餘類 $[0],[1],[2],\ldots,[r-1]$，對每個 $[i], 0\le i\le r-1$ 亦存在斧頭定理。

$|L(n,3,k)|$ 且 k 為 3 的倍數

k	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	15	39	72	114	165	225	294	372	459	555
3	91	272	570	1012	1625	2436	3472	4760	6327	8200
4	612	1995	4554	8775	15225	24552	37485	54834	77490	106425
5	4389	15180	36855	75516	139128	237762	383838	592368	881199	1E+06
6	32890	118755	302064	649264	1E+06	2E+06	4E+06	6E+06	1E+07	1E+07
7	254475	949344	3E+06	6E+06	1E+07	2E+07	4E+07	6E+07	1E+08	2E+08
8	2E+06	8E+06	2E+07	5E+07	1E+08	2E+08	4E+08	6E+08	1E+09	2E+09

$|L(n,3,k)|$ 及斧頭定理

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	9	15	22	30	39	49	60	72	85	99	114
3	22	52	91	140	200	272	357	456	570	700	847	1012
4	140	340	612	969	1425	1995	2695	3542	4554	5750	7150	8775
5	969	2394	4389	7084	10626	15180	20930	28080	36855	47502	60291	75516
6	7084	17710	32890	53820	81900	118755	166257	226548	302064	395560	510136	649264
7	53820	135720	254475	420732	647280	949344	1E+06	2E+06	3E+06	3E+06	4E+06	6E+06
8	420732	1E+06	2E+06	3E+06	5E+06	8E+06	1E+07	2E+07	2E+07	3E+07	4E+07	5E+07
9	3E+06	9E+06	2E+07	3E+07	4E+07	6E+07	9E+07	1E+08	2E+08	2E+08	3E+08	4E+08

$|L(n,3,k)|$ 且 $k\equiv 1 \pmod 3$ 及斧頭定理

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	9	15	22	30	39	49	60	72	85	99	114
3	22	52	91	140	200	272	357	456	570	700	847	1012
4	140	340	612	969	1425	1995	2695	3542	4554	5750	7150	8775
5	969	2394	4389	7084	10626	15180	20930	28080	36855	47502	60291	75516
6	7084	17710	32890	53820	81900	118755	166257	226548	302064	395560	510136	649264
7	53820	135720	254475	420732	647280	949344	1E+06	2E+06	3E+06	3E+06	4E+06	6E+06
8	420732	1E+06	2E+06	3E+06	5E+06	8E+06	1E+07	2E+07	2E+07	3E+07	4E+07	5E+07
9	3E+06	9E+06	2E+07	3E+07	4E+07	6E+07	9E+07	1E+08	2E+08	2E+08	3E+08	4E+08

$|L(n,3,k)|$ 且 $k\equiv 2 \pmod 3$ 及斧頭定理

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	9	15	22	30	39	49	60	72	85	99	114
3	22	52	91	140	200	272	357	456	570	700	847	1012
4	140	340	612	969	1425	1995	2695	3542	4554	5750	7150	8775
5	969	2394	4389	7084	10626	15180	20930	28080	36855	47502	60291	75516
6	7084	17710	32890	53820	81900	118755	166257	226548	302064	395560	510136	649264
7	53820	135720	254475	420732	647280	949344	1E+06	2E+06	3E+06	3E+06	4E+06	6E+06
8	420732	1E+06	2E+06	3E+06	5E+06	8E+06	1E+07	2E+07	2E+07	3E+07	4E+07	5E+07
9	3E+06	9E+06	2E+07	3E+07	4E+07	6E+07	9E+07	1E+08	2E+08	2E+08	3E+08	4E+08

四、$|L(n,r,k)|=\dfrac{k}{(r+1)n+k}C_{n}^{(r+1)n+k}$ 與 Fuss-Catalan numbers 定義(Feng Qi,2015,p.16)

$A_n(p,r)=\dfrac{r}{np+r}C_{n}^{np+r}$ 相似，其對應關係為 $\begin{cases} n\Rightarrow n \\ p-1\Rightarrow r \\ r\Rightarrow k \end{cases}$，可得三、相同推論。

五、當 $r=1$ 時，長方形邊界不過任意頂點的問題，或是在 $r>1, r$ 整數條件下，正方形或長方形在斜面下相遇的機率，還有可以發展的空間。

柒、參考資料及其他

1.Steven J. Tedford, Combinatorial Interpretations of Convolutions of The Catalan Numbers, Department of Mathematics, Misericordia University, 2011.

2.D. R. French and P. J. Larcombe, The Catalan number k-fold self-convolution identity: the original formulation, J. Combin. Math. Combin. Comput., 46 (2003) 191–204.

3.Christian Krattenthaler, Counting Lattice Paths with a Linear Boundary I, Institut für Mathematik, Universität Wien. 1989.

4.張福春、曾介玫(2008)。一般生成函數之應用。數學傳播季刊，第 32 卷第 3 期，pp.12-35.

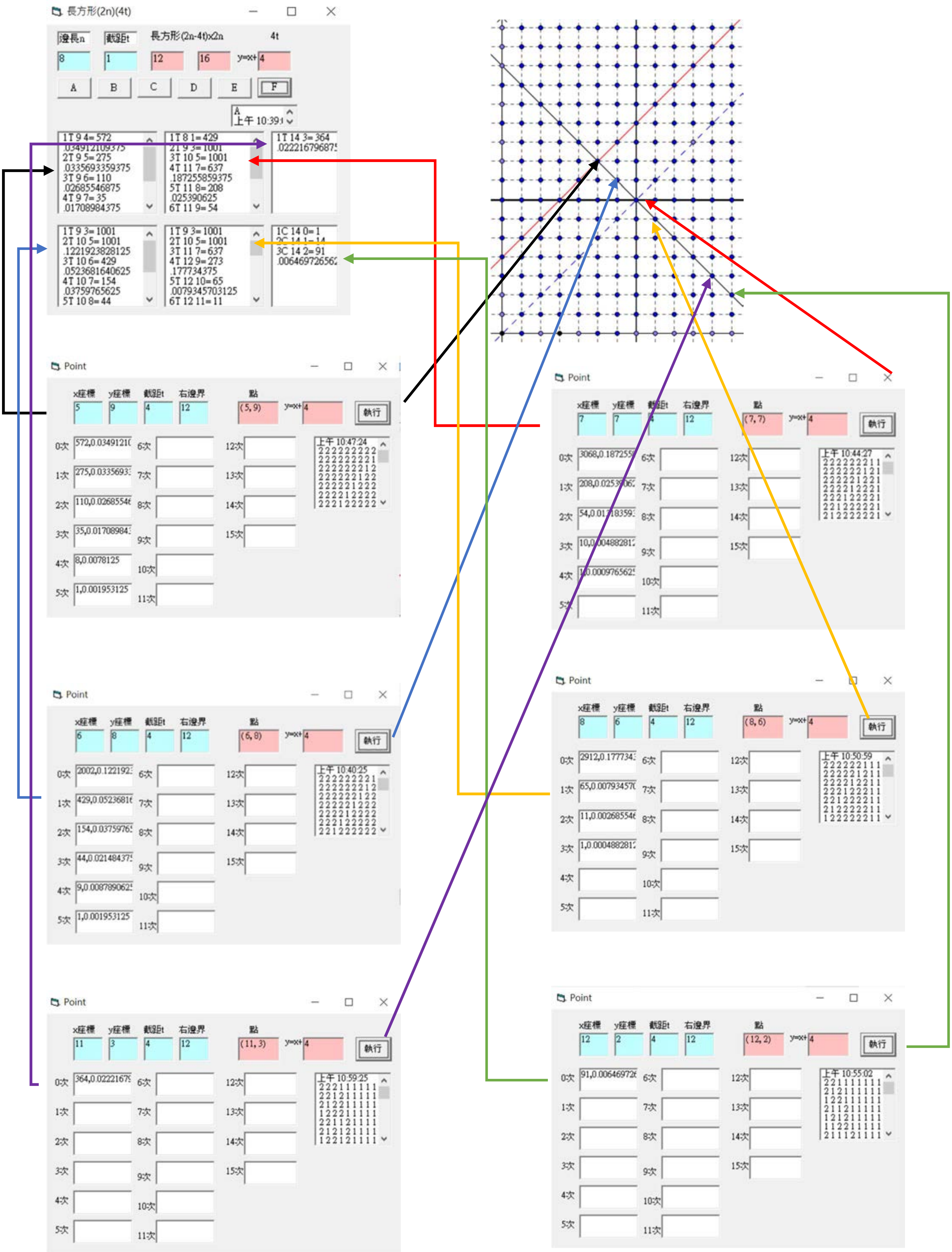
5.Feng Qi, Some properties and generalizations of the Catalan, Fuss, and Fuss-Catalan numbers, 2015.

6.Christian Krattenthaler, Lattice Path Enumeration. https://arxiv.org/pdf/1503.05930.pdf

捌、附錄

定理 6.07 驗證程式	實際路徑驗證程式

※A 區程式碼
For i = 4 * t To n + t
  tt = tt + 1
  x = n + t
  y = i
  cc = tnk(Int(x), Int(y))
  dd = cc * 0.5 ^ (2 * n + 2 * t - i)
  List1(1).AddItem Str(tt) + "T" + Str(x) + Str(y) + "=" + Str(cc)
  List1(1).AddItem Str(dd)
Next i
End Sub
※B 區程式碼
Private Sub Command2_Click()
For j = 1 To 2 * t - 1
ee = 0
For k = 1 To 2 * j
  tt = tt + 1
  x = n + t - j + k
  y = 4 * t - 2 * j + 2 * k - 1
  cc = tnk(Int(x), Int(y))
  dd = cc * 0.5 ^ (2 * n - 2 * t)
  List1(2).AddItem Str(tt) + "T" + Str(x) + Str(y) + "=" + Str(cc)
  ee = dd + ee
Next k
For i = 1 To n - 3 * t - j + 1
  tt = tt + 1
  x = n + t + j
  y = 2 * j + 4 * t - 1 + i
  cc = tnk(Int(x), Int(y))
  dd = cc * 0.5 ^ (2 * n - 2 * t - i)
  List1(2).AddItem Str(tt) + "T" + Str(x) + Str(y) + "=" + Str(cc)
  List1(2).AddItem Str(dd)
Next i
Next j
End Sub
※T(n,k)運算子程式
Function tnk(aa As Integer, bb As Integer) As Integer
ee = 1
ff = 1
For i = 1 To aa - 1
ee = (2 * aa - bb - i) * ee
ff = i * ff
Next i
tnk = bb / aa * ee / ff
End Function
	程式核心部分
	Select Case r
	'往右走
	    Case 1
	'檢查前一點是否碰撞
	      If y(n - 1) = x(n - 1) - intercept Then
	'若碰撞機率為 1
	        p = p * 1
	'若碰撞次數加 1
	        ccount = ccount + 1
	      Else
	'若未碰撞機率為 0.5
	        p = p * 0.5
	      End If
	'x 座標加 1
	  x(n) = x(n - 1) + 1
	'y 座標不變
	  y(n) = y(n - 1)
	'往上走
	    Case 2
	'檢查前一點是否出界
	      If y(n - 1) = x(n - 1) - intercept Then
	'若出界機率為 0
	        p = p * 0
	'檢查前一點是否在右邊界
	      Elseif x(n-1)=right then
	'若在右邊界機率為 1
	        P = p * 1
	'若未在上述條件
	      Else
	'若未出界且未在右邊界機率為 0.5
	        p = p * 0.5
	      End If
	'x 座標不變
	  x(n) = x(n - 1)
	'y 座標加 1
	  y(n) = y(n - 1) + 1
	End Select


長方形(2n)(4t)
邊長n
截距t
長方形(2n-4t)x2n
4t
8
1
12
16
y=x+
4
A
B
C
D
E
F
上午 10:39
1T 9 4= 572
.034912109375
2T 9 5= 275
.0335693359375
3T 9 6= 110
.02685546875
4T 9 7= 35
.01708984375
1T 8 1= 429
2T 9 3= 1001
3T 10 5= 1001
4T 11 7= 637
.187255859375
5T 11 8= 208
.025390625
6T 11 9= 54
1T 14 3= 364
.02221679687
1T 9 3= 1001
2T 10 5= 1001
.1221923828125
3T 10 6= 429
.0523681640625
4T 10 7= 154
.03759765625
5T 10 8= 44
1T 9 3= 1001
2T 10 5= 1001
3T 11 7= 637
4T 12 9= 273
.177734375
5T 12 10= 65
.0079345703125
6T 12 11= 11
1C 14 0= 1
3C 14 2= 91
.00646972656
Point
x座標
y座標
截距t
右邊界
點
y=x+
執行
(5, 9)
(7, 7)
(6, 8)
(8, 6)
(11, 3)
(12, 2)
上午 10:47:24
上午 10:44:27
上午 10:40:25
上午 10:50:59
上午 10:59:25
上午 10:55:02
572,0.03491210
275,0.03356933
110,0.02685546
35,0.01708984
8,0.0078125
1,0.001953125
3068,0.1872558
208,0.0253906
54,0.01318359
10,0.00488281
1,0.0009765625
2002,0.1221923
429,0.0523681
154,0.03759765
44,0.02148437
9,0.008789062
1,0.001953125
2912,0.1777343
65,0.00793457
11,0.00268554
1,0.000488281
364,0.0222167
91,0.00646972
0次
1次
2次
3次
4次
5次
6次
7次
8次
9次
10次
11次
12次
13次
14次
15次

【評語】050401

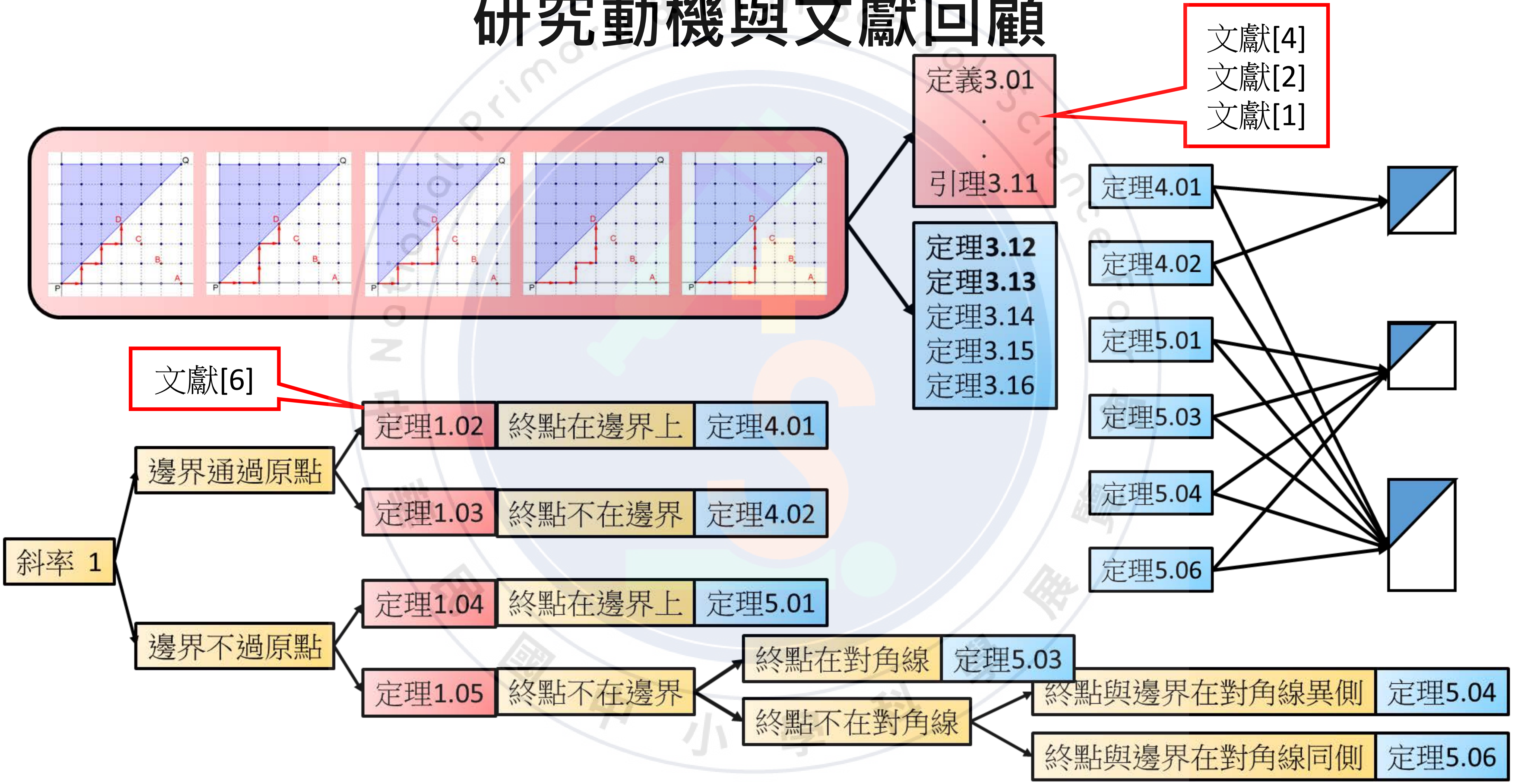
本文研究 lattice points 路徑數(Catalan number)並搭配一些機率的討論，很認真做也有一些結果，作者們針對各種案例作探討，可惜的是創意的部分較少，所用的數學並不夠深入，絕大部分的得到的結果都是硬算而得寫下來帶有和符號的式子，而且幾乎無法化簡．建議可以著墨在數值的部分，比較能突出作品的出色。

作品簡報

斜面下相遇的機率

組別：高級中等學校組
科別：數學科

研究動機與文獻回顧



文獻[4]
文獻[2]
文獻[1]
定義3.01
.
.
引理3.11
定理3.12
定理3.13
定理3.14
定理3.15
定理3.16
定理4.01
定理4.02
定理5.01
定理5.03
定理5.04
定理5.06
文獻[6]
斜率 1
邊界通過原點
邊界不過原點
定理1.02 終點在邊界上 定理4.01
定理1.03 終點不在邊界 定理4.02
定理1.04 終點在邊界上 定理5.01
定理1.05 終點不在邊界
終點在對角線 定理5.03
終點不在對角線
終點與邊界在對角線異側 定理5.04
終點與邊界在對角線同側 定理5.06

c(n,k)與T(n,k)

引理 3.11：$|W(n,k)|=|w|$，其中 $w\in W(n+k)$ 且滿足 $w_k=\underbrace{XX\ldots X}_{k個}$。即計算前 k 個是 X，之後有 n 個 X 且 $n+k$ 個 Y 的 proper words 個數。

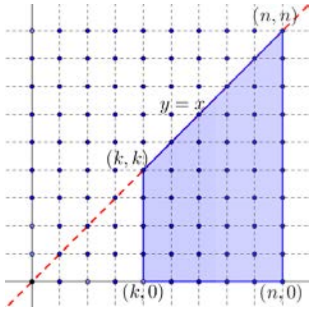
定理 3.12：$c(n,k)=\dfrac{k+1}{n+k+1}C_n^{2n+k}$

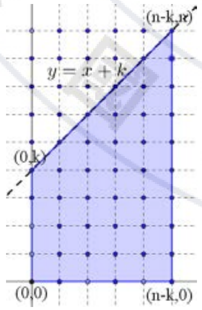
定理 3.13：令 $T(n,k)$ 表示從 $(0,0)\to(n,n)$ 與 $y=x$ 經過 k 次碰撞，則 $T(n,k)=\dfrac{k}{n}C_{n-1}^{2n-k-1}$。

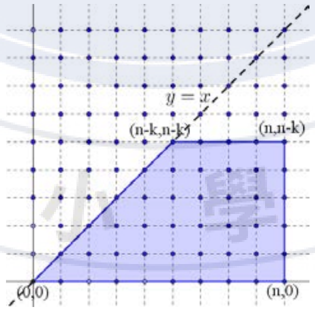
定理 3.14：已知 $T(n,k)=\dfrac{k}{n}C_{n-1}^{2n-k-1}$，試證：$T(n,k)=T(n+1,k+1)-T(n+1,k+2)$

定理 3.15：斧頭定理(Axe theorem) $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}T(n,i)=T(n+1,k+1)$

定理 3.16：$\left|L\big((k,0)\to(n,n);\{y\le x\}\big)\right|$、$\left|L\big((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\big)\right|$、$\left|L\big((0,0)\to(n,n-k);\{y\le x\}\big)\right|$ 三種情形的路徑數相等。







$c(n,k)$

碰撞	1	2	3	4	5	6
n \\ k	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	2	5	9	14	20	27
3	5	14	28	48	75	110
4	14	42	90	165	275	429
5	42	132	297	572	1001	1638
6	132	429	1001	2002	3640	6188

$T(n,k)$

n \\ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1							
3	2	2	1						
4	5	5	3	1					
5	14	14	9	4	1				
6	42	42	28	14	5	1			
7	132	132	90	48	20	6	1		
8	429	429	297	165	75	27	7	1	
9	1430	1430	1001	572	275	110	35	8	1

斧頭定理

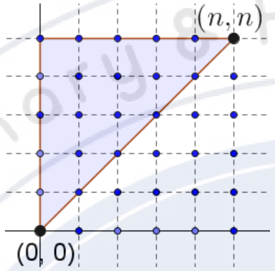
研究方法

邊界條件通過原點

(1)點在邊界線上

定理 4.01：$\left|L\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right)\right| = T(n+1,2)=\sum_{i=1}^{n}T(n,i)$

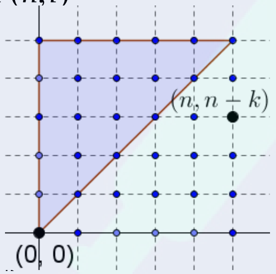
	k / n	1	2	3	…	…	n	終點
碰撞次數		1	2	3	…	…	n	(n,n)
路徑數		T(n,1)	T(n,2)	T(n,3)	…	…	T(n,n)	



(2)點不在邊界線上

定理 4.02：$\left|L\left((0,0)\to(n,n-k);\{y\le x\}\right)\right| = T(n+1,k+1)=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)$

	k / n	1	2	3	…	k	…	k+t	…	n	終點
碰撞次數						1	…	t+1	…	n-k+1	(n,n-k)
路徑數						T(n,k)	…	T(n,k+t)	…	T(n,n)	

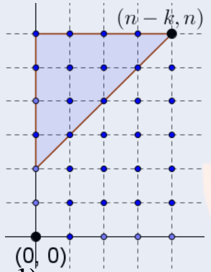


邊界條件未通過原點

(1)點在邊界線上

定理 5.01：$\left|L\left((0,0)\to(n-k,n);\{y\le x+k\}\right)\right| = T(n+1,k+1)=\sum_{i=k}^{n}T(n,i)$

	k / n	1	2	3	…	k	…	k+t	…	n	終點
碰撞次數	n					0	…	t	…	n-k	(n-k,n)
路徑數						T(n,k)	…	T(n,k+t)	…	T(n,n)	

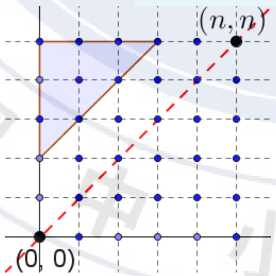


(2)點不在邊界線上

定理 5.03：終點在對角線上

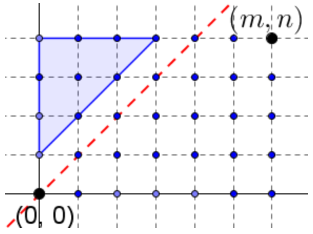
$$\left|L\left((0,0)\to(n,n);\{y\le x+t\}\right)\right| = \sum_{k=1}^{t}T(n+k,2k-1)+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(n+t,2t+i-1)$$

	k / n	1	2	3	4	5	6	7	…	2t-1	2t	…	n+t	邊界條件
碰撞次數	n	1	2	3	4	5	6	7	…			…		$y\le x$
路徑數		T(n,1)	T(n,2)	T(n,3)	T(n,4)	T(n,5)	T(n,6)	T(n,7)	…			…		
碰撞次數	n+1	0	1	2	3	4	5	6	…			…		$y\le x+1$
路徑數		T_1	T(n+1,2)	T(n+1,3)	T(n+1,4)	T(n+1,5)	T(n+1,6)	T(n+1,7)	…			…		
碰撞次數	n+2			0	1	2	3	4	…			…		$y\le x+2$
路徑數				T_2	T(n+2,4)	T(n+2,5)	T(n+2,6)	T(n+2,7)	…			…		
碰撞次數	n+3					0	1	2	…			…		$y\le x+3$
路徑數						T_3	T(n+3,6)	T(n+3,7)	…			…		
碰撞次數	n+t								…	0	1	…	n-t+1	$y\le x+t$
路徑數									…	T_t	T(n+t,2t)	…	T(n+t,n+t)	



定理 5.04：邊界與終點在對角線異側

$$\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\right)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{t}T(m+k,m-n+2k-1)+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,m-n+2t-1+i)$$

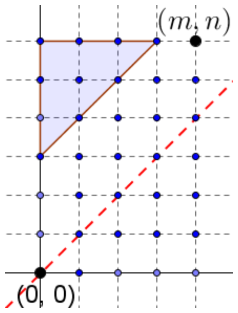


	k / n	m-n	m-n+1	m-n+2	m-n+3	m-n+4	m-n+5	…	m-n+2t-1	m-n+2t	…	m+t	邊界條件
碰撞次數	m	1	2	3	4	5	6						$y\le x$
路徑數		T(m,m-n)	T(m,m-n+1)	T(m,m-n+2)	T(m,m-n+3)	T(m,m-n+4)	T(m,m-n+5)	…			…		
碰撞次數	m+1		0	1	2	3	4						$y\le x+1$
路徑數			T_1	T(m+1,m-n+2)	T(m+1,m-n+3)	T(m+1,m-n+4)	T(m+1,m-n+5)	…			…		
碰撞次數	m+2				0	1	2						$y\le x+2$
路徑數					T_2	T(m+2,m-n+4)	T(m+2,m-n+5)	…			…		
碰撞次數	m+t							…	0	1	…	n-t	$y\le x+t$
路徑數								…	T_t	T(m+t, m-n+2t)	…	T(m+t,m+t)	

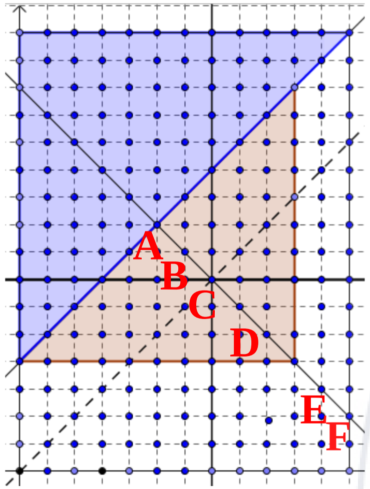
定理 5.06：邊界與終點在對角線同側

$$\left|L\left((0,0)\to(m,n);\{y\le x+t\}\right)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{t-(n-m)}T(n+k,n-m+2k-1)+\sum_{i=1}^{n-t+1}T(m+t,2t-n+m-1+i)$$

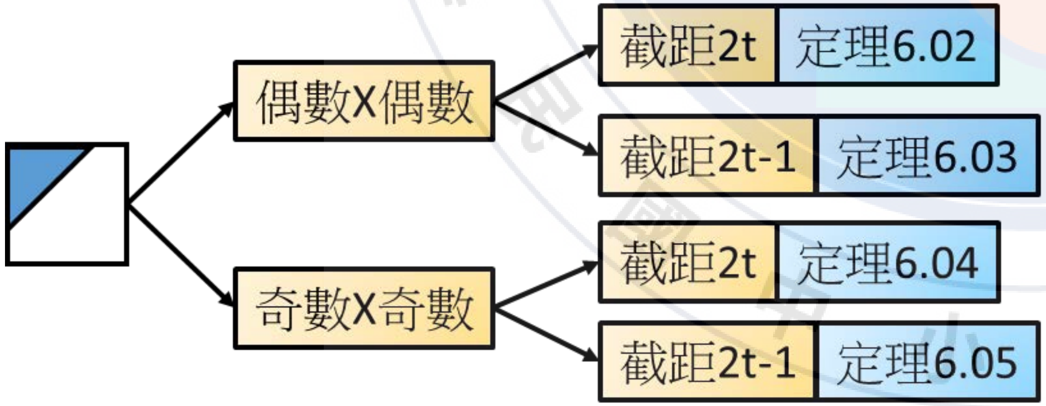
	k / n	n-m	n-m+1	n-m+2	n-m+3	n-m+4	n-m+5	…	2t-n+m-1	2t-n+m	…	m+t	邊界條件
碰撞次數	n	0	1	2	3	4	5						$y\le x+(n-m)$
路徑數		T(n,n-m)	T(n,n-m+1)	T(n,n-m+2)	T(n,n-m+3)	T(n,n-m+4)	T(n,n-m+5)	…			…		
碰撞次數	n+1		0	1	2	3	4						$y\le x+(n-m)+1$
路徑數			T_1	T(n+1,n-m+2)	T(n+1,n-m+3)	T(n+1,n-m+4)	T(n+1,n-m+5)	…			…		
碰撞次數	n+2				0	1	2						$y\le x+(n-m)+2$
路徑數					T_2	T(n+2,n-m+4)	T(n+2,n-m+5)	…			…		
碰撞次數	m+t							…	0	1	…	n-t+1	$y\le x+(n-m)+t$
路徑數								…	T_t	T(m+t, 2t-n+m)	…	T(m+t,m+t)	

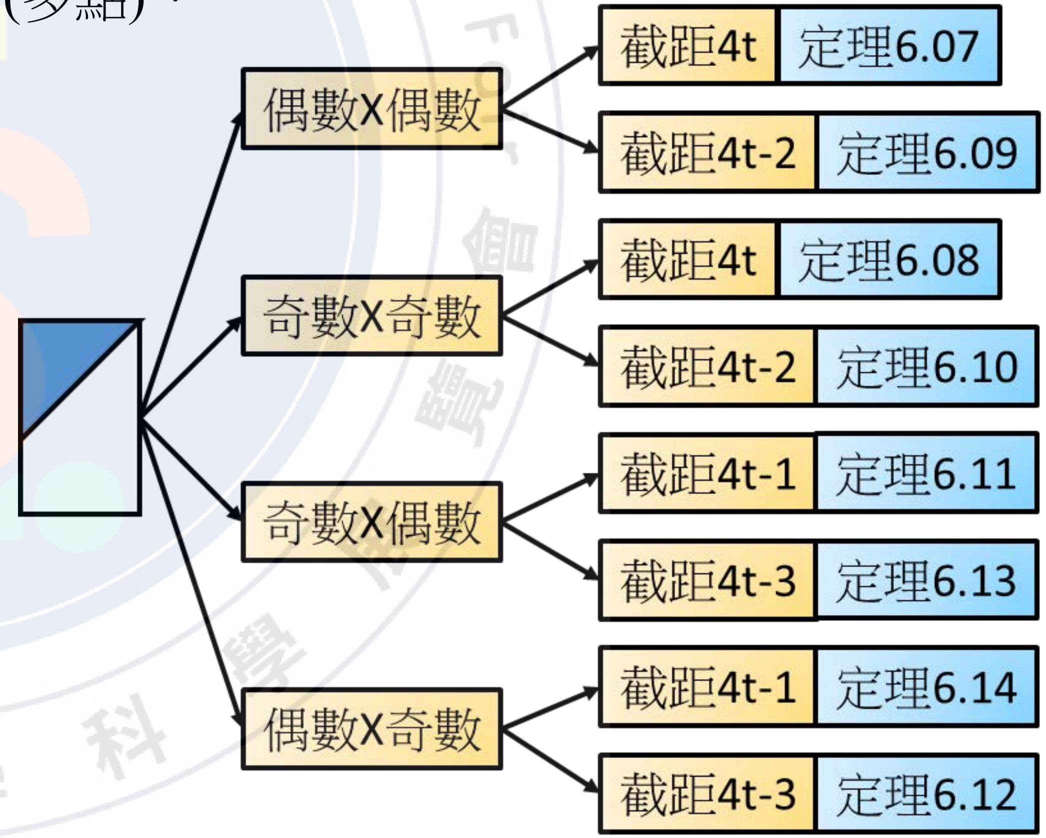


研究過程

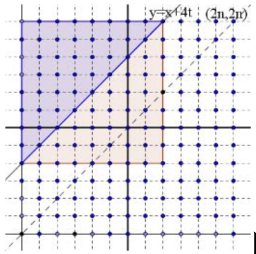


A 區：邊界上的點 A (單點)、
C 區：對角線上的點 C (單點)、
B 區：介於 A 與 C 之間的點 B_j (多點)、
D 區：C 之外且受邊界條件影響的點 D_j (多點)、
E 區：不受邊界條件影響的點 E_j (多點)、
F 區：右邊界上的點 F (單點)。

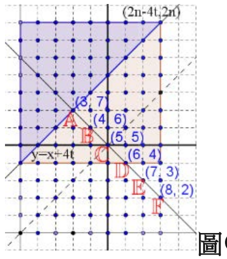




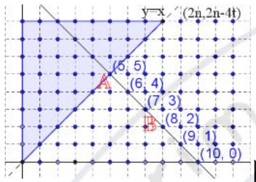
定理6.07



圖①



圖②



圖③

(1)由定理 5.01 可得甲至 $A(n-3t,n+t)$ 的機率為 $\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i}$ 。

由定理 4.01 可得乙至 $A'(n-t,n-t)$ 的機率為 $\sum_{i=1}^{n-t}T(n-t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}$ 。

故兩人相遇的機率為 $\left(\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-t}T(n-t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}\right)$

(2)由定理 5.06 可得甲至 $B_j(n-3t+j,n+t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{2j}T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-3t-j+1}T(n+t+j,4t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$

由定理 4.02 可得乙至 $B'_j(n-t+j,n-t-j)$ 的機率為 $\sum_{i=2j}^{n-t+j}T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}$ 。

故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{2t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j}T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\\+\sum_{i=1}^{n-3t-j+1}T(n+t+j,4t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=2j}^{n-t+j}T(n-t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t+2j-i-1}\right)$$

(3)由定理 5.03 可得甲至 $C(n-t,n-t)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t}T(n-t+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t+1}T(n+3t,8t+i-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-i}$$ 。

由定理 4.02 可得乙至 $C'(n+t,n-3t)$ 的機率為 $\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i-1}$ 。

故兩人相遇的機率為 $$\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t}T(n-t+k,2k-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t}+\\\sum_{i=1}^{n-5t+1}T(n+3t,8t+i-1)\times(\frac{1}{2})^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t-i-1}\right)$$

(4)由定理 5.04 可得甲至 $D_j(n-t+j,n-t-j)$ 的機率為

$$\sum_{k=1}^{4t}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-5t-j+1}T(n+3t+j,8t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}$$ 。

由定理 4.02 可得乙至 $D'(n+t+j,n-3t-j)$ 的機率為 $\sum_{i=4t+2j}^{n+t+j}T(n+t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-i-1}$ 。

故兩人相遇的機率為

$$\sum_{j=1}^{n-5t}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\\sum_{i=1}^{n-5t-j+1}T(n+3t+j,8t+2j-1+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\left(\sum_{i=4t+2j}^{n+t+j}T(n+t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{2n+2t+2j-i-1}\right)$$

(5)由捷徑問題，可得甲至 $E_j(2n-6t+j,4t-j)$ 的機率為 $C_{4t-j}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}$ 。

由定理 4.02 可得乙至 $E'(2n-4t+j,2t-j)$ 的機率為 $\sum_{i=2n-6t+2j}^{2n-4t+j}T(2n-4t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j-i-1}$

故兩人相遇的機率為 $\sum_{j=1}^{2t}\left(C_{4t-j}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\left(\sum_{i=2n-6t+2j}^{2n-4t+j}T(2n-4t+j,i)\times(\frac{1}{2})^{4n-8t+2j-i-1}\right)$

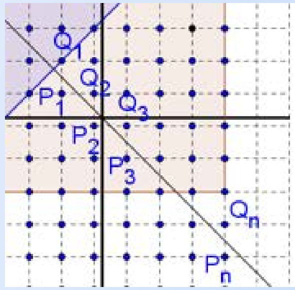
(6)右邊界 $F(2n-4t,2t)$ 是轉角問題，

由定理 6.06 可得甲至 $F(2n-4t,2t)$ 的機率為 $\sum_{j=0}^{2t}C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}$ ，

由定理 4.02 可得乙至 $F'(2n-2t,0)$ 的機率為 $(\frac{1}{2})^{2n-2t-1}$ 。

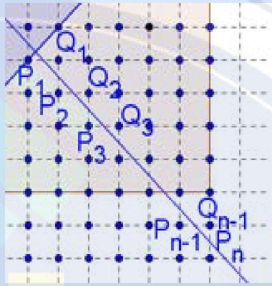
故二人相遇機率為 $\left(\sum_{j=0}^{2t}C_j^{2n-2t}(\frac{1}{2})^{2n-2t}\right)\left((\frac{1}{2})^{2n-2t-1}\right)$

定理6.11



定理 11 與 12 相遇點的機率為

$$\left(\frac{1}{2}P_1\times Q_1\right)+\left(\frac{1}{2}P_1\times\frac{1}{2}Q_2\right)+\left(\frac{1}{2}P_2\times\frac{1}{2}Q_2\right)+\dots+\left(\frac{1}{2}P_{n-1}\times\frac{1}{2}Q_n\right)+\left(P_n\times\frac{1}{2}Q_n\right)$$



定理 13 與 14 相遇點的機率為

$$\left(P_1\times\frac{1}{2}Q_1\right)+\left(\frac{1}{2}P_2\times\frac{1}{2}Q_1\right)+\left(\frac{1}{2}P_2\times\frac{1}{2}Q_2\right)+\dots+\left(\frac{1}{2}P_{n-1}\times\frac{1}{2}Q_{n-1}\right)+\left(P_n\times\frac{1}{2}Q_{n-1}\right)$$

(1) B 區相遇的機率分成第一個點為

$$\frac{1}{2}\left(T(n+t+k-1,4t+2k-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\sum_{i=1}^{n-3t+1}T(n+t,4t+i-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-t}T(n-t,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\right)$$

跟 B 區其他點相遇的機率

$$\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{2t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-3t-j+2}T(n+t+j-1,4t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=2j-2}^{n-t+j-1}T(n-t+j-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+2j-3-i}\right)$$

及

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2t-1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{2j-1}T(n+t-j+k,4t-2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-3t-j+2}T(n+t+j-1,4t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=2j}^{n-t+j}T(n-t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t+2j-i-1}\right)$$

(2) C 區相遇的機率為

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+k,2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t+2}T(n+3t-1,8t+i-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=4t}^{n+t-1}T(n+t-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t-i-3}\right)$$

及

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+k,2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t+2}T(n+3t-1,8t+i-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=4t}^{n+t}T(n+t,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t-i-1}\right)$$

(3) D 區相遇的機率為

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-5t+1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t-j+2}T(n+3t+j-1,8t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=4t+2j-2}^{n+t+j-1}T(n+t+j-1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t+2j-i-3}\right)$$

及

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-5t+1}\left(\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{4t-1}T(n-t+j+k,2j+2k-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}+\\ \sum_{i=1}^{n-5t-j+2}T(n+3t+j-1,8t+2j-3+i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-i}\end{array}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=4t+2j}^{n+t+j}T(n+t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2t+2j-i-1}\right)$$

(4) E 區相遇的機率為

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2t-1}\left(C_{4t-j-1}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=2n-6t+2j}^{2n-4t+j}T(2n-4t+j,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-8t+2j-i-1}\right)$$

及

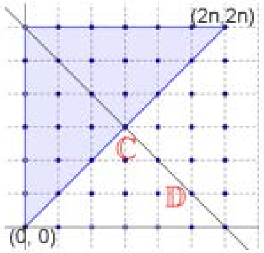
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2t-1}\left(C_{4t-j-1}^{2n-2t}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\times\frac{1}{2}\left(\sum_{i=2n-6t+2j+2}^{2n-4t+j+1}T(2n-4t+j+1,i)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-8t+2j-i+1}\right)$$

(5) F 區相遇機率為 $\left(\sum_{j=0}^{2t-1}C_j^{2n-2t}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t}\right)\times\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2t-1}\right)$

研究結果

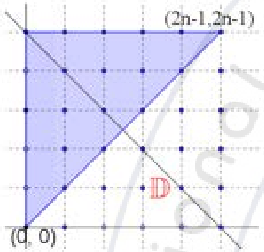
定理 6.01(1)

(偶數×偶數)



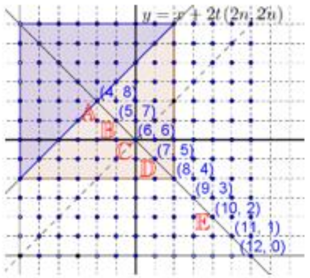
定理 6.01(2)

(奇數×奇數)



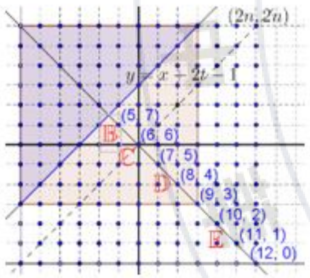
定理 6.02

(偶數×偶數)$y=x+2t$



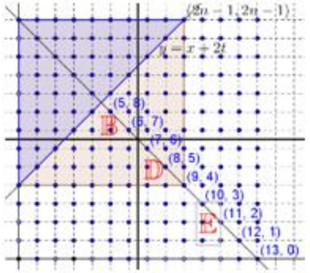
定理 6.03

(偶數×偶數)$y=x+2t-1$



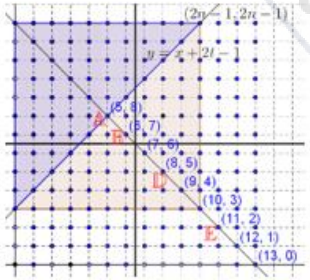
定理 6.04

(奇數×奇數)$y=x+2t$



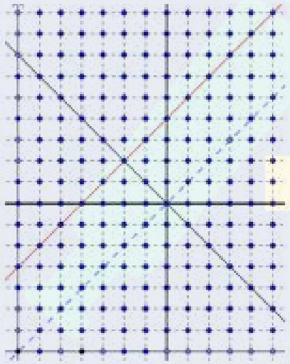
定理 6.05

(奇數×奇數)$y=x+2t-1$



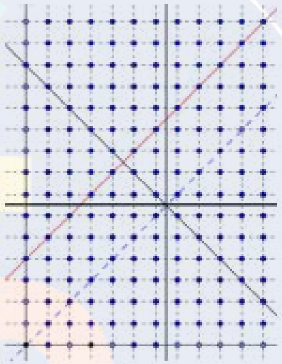
定理 6.07

(偶數×偶數)$y=x+4t$



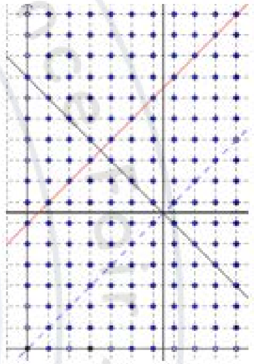
定理 6.08

(奇數×奇數)$y=x+4t$



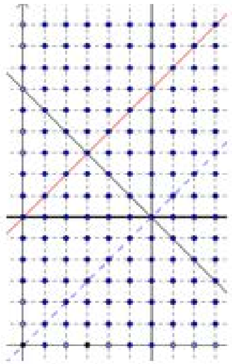
定理 6.09

(偶數×偶數)$y=x+4t-2$



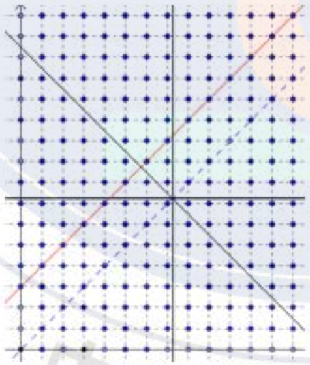
定理 6.10

(奇數×奇數)$y=x+4t-2$



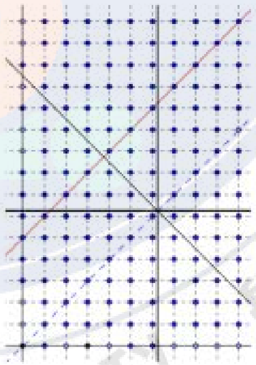
定理 6.11

(奇數×偶數)$y=x+4t-1$



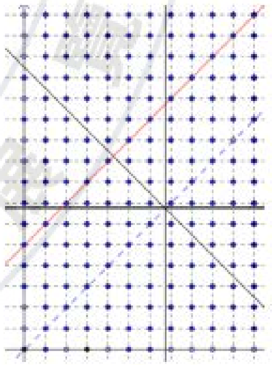
定理 6.12

(偶數×奇數)$y=x+4t-3$



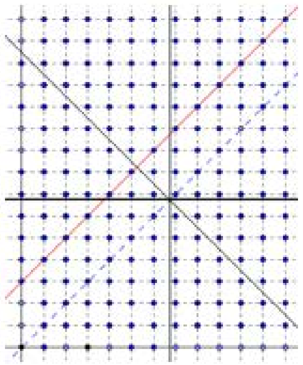
定理 6.13

(奇數×偶數)$y=x+4t-3$



定理 6.14

(偶數×奇數)$y=x+4t-1$



討論

定義 7.01：從 $(0,0)\to(n,nr+k)$ 不超過 $y=rx+k$ 直到終點 $(n,nr+k)$ 停止(碰一次)，其路徑數可由下列公式得到 $L(n,r,k)=\dfrac{k}{(r+1)n+k}C_n^{(r+1)n+k}$ (文獻[3])

定理 7.02：$L(n,1,k+1)=c(n,k)$

定理 7.03：$L(n-k,1,k)=T(n,k)$

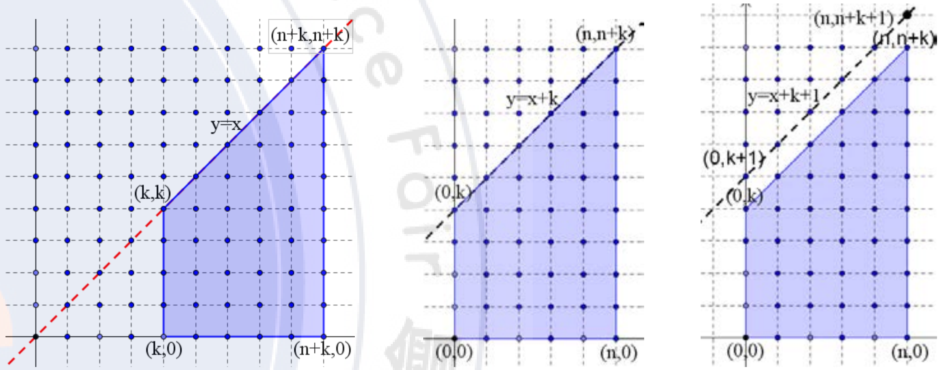
定理 7.04：$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,1,t)=L(n-1,1,2)$ 。

定理7.05：$L(n,2,2k)=L(n,2,2k+1)-L(n-1,2,2k+3)$

定理7.06：$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,2,2t)=L(n-1,2,3)$

定理7.07：$L(n,r,rk)=L(n,r,rk+1)-L(n-1,r,r(k+1)+1)$

定理7.08：$\sum_{t=1}^{n}L(n-t,r,rt)=L(n-1,r,r+1)$



結論

一、當斜率為 1 時，我們製作 $T(n,k)$ 表，可得邊界條件的碰撞次數。

二、以表列方式呈現定理 4.01、4.02、5.01、5.03、5.04、5.06。

三、對截距加以限制，以達最大分區，代入定理可將問題一般化。

四、當斜率為大於 1 的整數時，利用 $|L(n,r,k)|=\dfrac{k}{(r+1)n+k}C_n^{(r+1)n+k}$，

可得 $(0,0)\to(n,rn)$ 在邊界 $y\le rx$ 條件下與 $y=rx$ 碰撞的次數。

五、k 模 r 有 r 個同餘類 $[0],[1],[2],\ldots,[r-1]$，對每個 $[i],0\le i\le r-1$，亦存在斧頭定理。

六、$|L(n,r,k)|=\dfrac{k}{(r+1)n+k}C_n^{(r+1)n+k}$ 與 Fuss-Catalan numbers 定義

(文獻[5]) $A_n(p,r)=\dfrac{r}{np+r}C_n^{np+r}$ 相似，其對應關係為

$$\begin{cases} n\Rightarrow n \\ p-1\Rightarrow r \\ r\Rightarrow k \end{cases}$$

，可得四、五相同推論。

$|L(n,3,k)|$ 且 k 為 3 的倍數

k	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	15	39	72	114	165	225	294	372	459	555
3	91	272	570	1012	1625	2436	3472	4760	6327	8200
4	612	1995	4554	8775	15225	24552	37485	54834	77490	106425
5	4389	15180	36855	75516	139128	237762	383838	592368	881199	1E+06
6	32890	118755	302064	649264	1E+06	2E+06	4E+06	6E+06	1E+07	1E+07
7	254475	949344	3E+06	6E+06	1E+07	2E+07	4E+07	6E+07	1E+08	2E+08
8	2E+06	8E+06	2E+07	5E+07	1E+08	2E+08	4E+08	6E+08	1E+09	2E+09

$|L(n,3,k)|$ 及斧頭定理

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	9	15	22	30	39	49	60	72	85	99	114
3	22	52	91	140	200	272	357	456	570	700	847	1012
4	140	340	612	969	1425	1995	2695	3542	4554	5750	7150	8775
5	969	2394	4389	7084	10626	15180	20930	28080	36855	47502	60291	75516
6	7084	17710	32890	53820	81900	118755	166257	226548	302064	395560	510136	649264
7	53820	135720	254475	420732	647280	949344	1E+06	2E+06	3E+06	3E+06	4E+06	6E+06
8	420732	1E+06	2E+06	3E+06	5E+06	8E+06	1E+07	2E+07	2E+07	3E+07	4E+07	5E+07
9	3E+06	9E+06	2E+07	3E+07	4E+07	6E+07	9E+07	1E+08	2E+08	2E+08	3E+08	4E+08

$|L(n,3,k)|$ 且 $k\equiv 1 \pmod 3$ 及斧頭定理

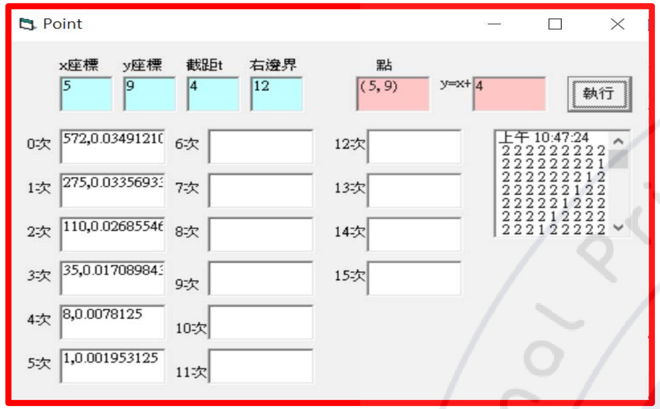
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	9	15	22	30	39	49	60	72	85	99	114
3	22	52	91	140	200	272	357	456	570	700	847	1012
4	140	340	612	969	1425	1995	2695	3542	4554	5750	7150	8775
5	969	2394	4389	7084	10626	15180	20930	28080	36855	47502	60291	75516
6	7084	17710	32890	53820	81900	118755	166257	226548	302064	395560	510136	649264
7	53820	135720	254475	420732	647280	949344	1E+06	2E+06	3E+06	3E+06	4E+06	6E+06
8	420732	1E+06	2E+06	3E+06	5E+06	8E+06	1E+07	2E+07	2E+07	3E+07	4E+07	5E+07

$|L(n,3,k)|$ 且 $k\equiv 2 \pmod 3$ 及斧頭定理

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n\r	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	9	15	22	30	39	49	60	72	85	99	114
3	22	52	91	140	200	272	357	456	570	700	847	1012
4	140	340	612	969	1425	1995	2695	3542	4554	5750	7150	8775
5	969	2394	4389	7084	10626	15180	20930	28080	36855	47502	60291	75516
6	7084	17710	32890	53820	81900	118755	166257	226548	302064	395560	510136	649264
7	53820	135720	254475	420732	647280	949344	1E+06	2E+06	3E+06	3E+06	4E+06	6E+06
8	420732	1E+06	2E+06	3E+06	5E+06	8E+06	1E+07	2E+07	2E+07	3E+07	4E+07	5E+07
9	3E+06	9E+06	2E+07	3E+07	4E+07	6E+07	9E+07	1E+08	2E+08	2E+08	3E+08	4E+08

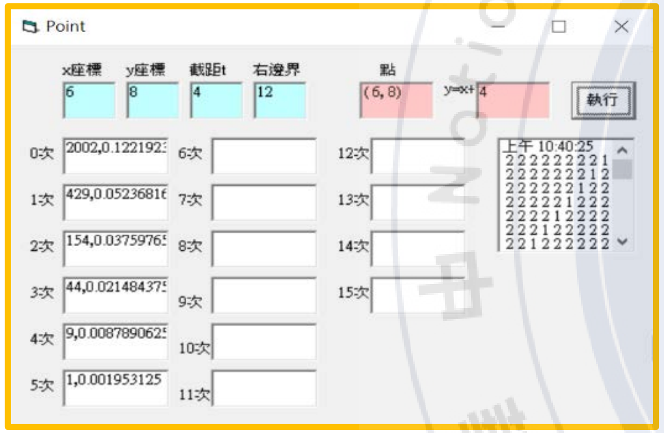
附錄

A



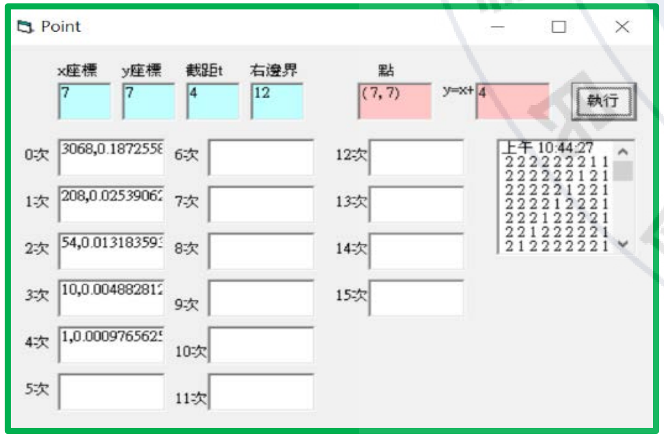
Point
x座標 y座標 截距t 右邊界 點
5 9 4 12 (5, 9) y=x+4
執行
0次 572,0.0349121
1次 275,0.0335693
2次 110,0.0268554
3次 35,0.01708984
4次 8,0.0078125
5次 1,0.001953125
上午 10:47:24

B

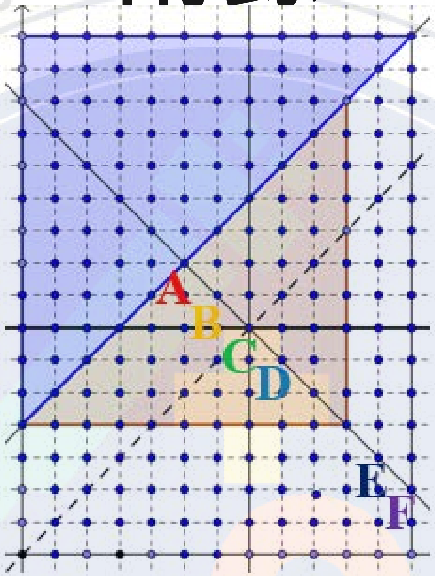


Point
x座標 y座標 截距t 右邊界 點
6 8 4 12 (6, 8) y=x+4
執行
0次 2002,0.122192
1次 429,0.05236816
2次 154,0.0375976
3次 44,0.0214843
4次 9,0.00878906
5次 1,0.001953125
上午 10:40:25

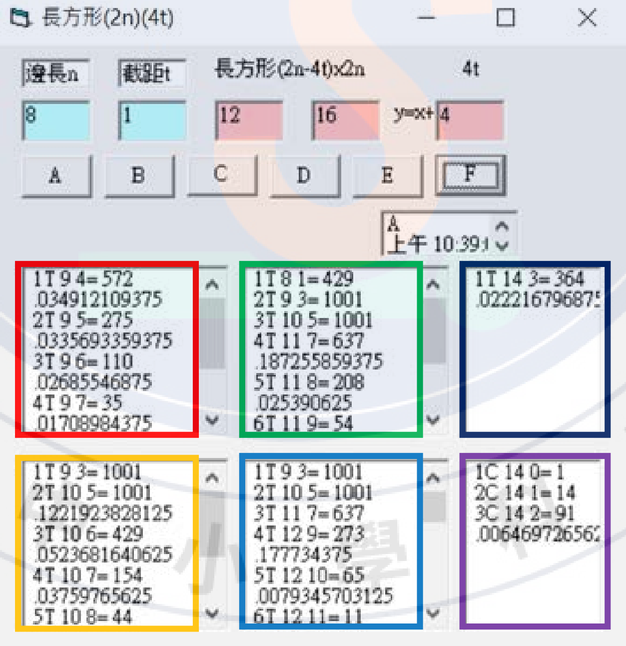
C



Point
x座標 y座標 截距t 右邊界 點
7 7 4 12 (7, 7) y=x+4
執行
0次 3068,0.187255
1次 208,0.0253906
2次 54,0.0131835
3次 10,0.0048828
4次 1,0.000976562
上午 10:44:27

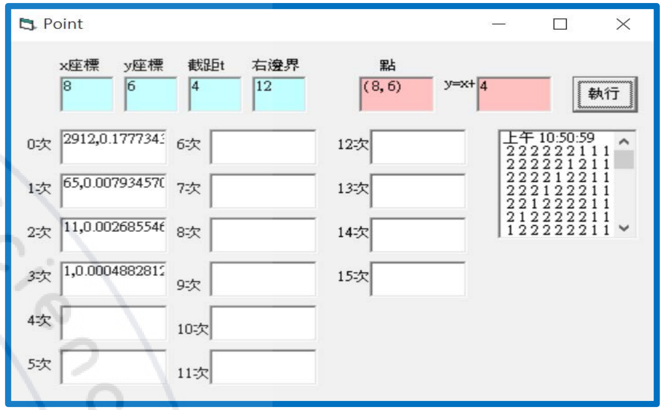


A
B
C
D
E
F



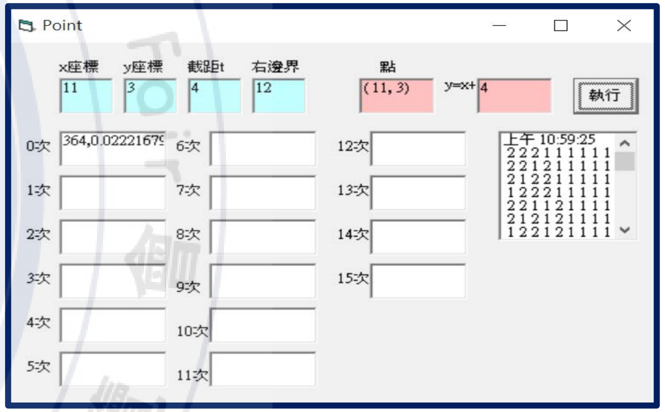
長方形(2n)(4t)
邊長n 截距t 長方形(2n-4t)x2n 4t
8 1 12 16 y=x+ 4
A B C D E F
上午 10:39
1T 9 4= 572
.034912109375
2T 9 5= 275
.0335693359375
3T 9 6= 110
.02685546875
4T 9 7= 35
.01708984375
1T 8 1= 429
2T 9 3= 1001
3T 10 5= 1001
4T 11 7= 637
.187255859375
5T 11 8= 208
.025390625
6T 11 9= 54
1T 14 3= 364
1T 9 3= 1001
2T 10 5= 1001
.1221923828125
3T 10 6= 429
.0523681640625
4T 10 7= 154
.03759765625
5T 10 8= 44
1T 9 3= 1001
2T 10 5= 1001
3T 11 7= 637
4T 12 9= 273
.177734375
5T 12 10= 65
.0079345703125
6T 12 11= 11
1C 14 0= 1
2C 14 1= 14
3C 14 2= 91

D



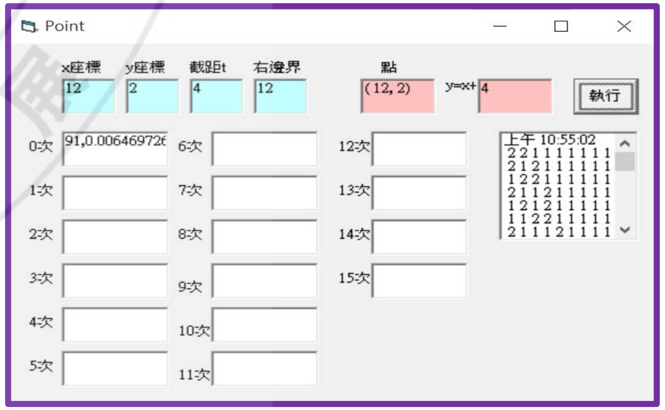
Point
x座標 y座標 截距t 右邊界 點
8 6 4 12 (8, 6) y=x+4
執行
0次 2912,0.177734
1次 65,0.00793457
2次 11,0.00268554
3次 1,0.000488281
上午 10:50:59

E



Point
x座標 y座標 截距t 右邊界 點
11 3 4 12 (11, 3) y=x+4
執行
0次 364,0.0222167
上午 10:59:25

F



Point
x座標 y座標 截距t 右邊界 點
12 2 4 12 (12, 2) y=x+4
執行
0次 91,0.00646972
上午 10:55:02

參考資料

1.Steven J. Tedford, Combinatorial Interpretations of Convolutions of The Catalan Numbers, Department of Mathematics, Misericordia University, 2011.

2.D. R. French and P. J. Larcombe, The Catalan number k-fold self-convolution identity: the original formulation, J. Combin. Math. Combin. Comput., 46 (2003) 191–204.

3.Christian Krattenthaler, Counting Lattice Paths with a Linear Boundary I, Institut für Mathematik, Universität Wien. 1989.

4.張福春、曾介玫(2008)。一般生成函數之應用。數學傳播季刊，第 32 卷第 3 期，pp.12-35.

5.Feng Qi, Some properties and generalizations of the Catalan, Fuss, and Fuss-Catalan numbers, 2015.

6.Christian Krattenthaler, Lattice Path Enumeration. https://arxiv.org/pdf/1503.05930.pdf