

# 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051818

實驗探究轉動液體的遲滯現象

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者：  高二 王勁皓  高二 陳家容  高二 林品妤	指導老師：  林芳妃
---	------------------

關鍵詞：遲滯現象、轉動液體、黏滯係數

## 摘要

U 形管繞著鉛直軸轉動時，如果鉛直軸和管的對稱軸未重疊，管中流動的液體會發生遲滯(Hysteresis)現象；利用三叉管、方形盒、圓柱筒和方形筒做實驗，發現液體在五種不同形狀的容器中都會發生遲滯現象。

U 形管、三叉管、和方形盒轉動時，旋轉盤的轉速由慢漸快時，液柱高度在特定轉速時會大幅度的升高，旋轉盤的轉速由快漸慢時，液柱高度在特定轉速時會小幅度的下降，作液柱高度和轉速的關係圖，會呈現遲滯曲線。

圓柱筒和方形筒繞鉛直軸轉動時，遲滯現象會隨著鉛直軸轉盤中心點距離而異，液面觸底後乾燥區會呈現圓、橢圓、三角形和部分橢圓等不同圖樣。

## 壹、研究動機

U 形管繞鉛直軸轉動時，若鉛直軸和管的對稱軸未重疊，管中液體會發生遲滯(Hysteresis)現象〔1,2〕。容器換成三叉管、方形盒、圓柱筒和方形筒結果會如何?我們實驗探究轉軸位置、液體的高度、黏滯力和轉速對於液體遲滯現象的影響。

## 貳、研究目的

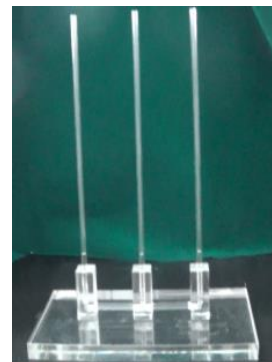
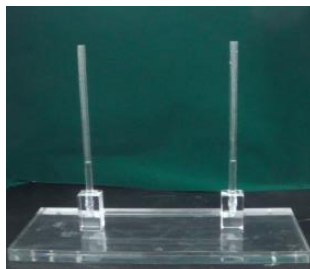
- 一、探討轉動 U 形管內液體的遲滯現象
- 二、探討轉動三叉管內液體的遲滯現象
- 三、探討轉動方形盒內液體的遲滯現象
- 四、探討轉動圓柱筒和方形筒內液體的遲滯現象

## 參、研究過程或方法

### 一、研究器材和設備

#### (一)、U 形管、三叉管和方形盒實驗:

- 1.重 56 公斤的拉坯機改裝步進馬達，轉盤轉速可達 1700rpm。
- 2.U 形管，內徑 4mm 的壓克力管一組底部長 12.5cm 高 25cm，附有底座可固定在轉盤上。
- 3.三叉管: 內徑 4mm 的壓克力管，底部長 12.5cm 三個鉛直管高 30cm，附有底座可固定在轉盤上。
- 4.方形盒:長 12.5cm，寬 4mm，高 30cm 的壓克力盒，附有底座可固定在轉盤上。
- (4)攝影機。
- (5)轉速器。



圖一:U 形管和三叉管



圖二:轉速器、三叉管和尺。



圖三:圓柱筒實驗裝置。

#### (二)、圓柱筒和方形筒實驗:

- 1.內徑 12.5cm 高 20cm 圓柱筒且底部貼方格紙。
- 2.長和寬各 12.5cm 高 20cm 方形筒底部貼方格紙。
- 3.攝影機攝影時，由筒正上方往下拍攝。
- 4.染料、水。

## 二、原理

### (一)、U形管繞鉛直軸轉動

圖四所示:U形管的截面積  $A$  盛密度  $\rho$  的液體，底部液柱長度  $L$ ，兩側液柱高度  $h$ ，繞著  $Y$  軸(鉛直軸)以角速度  $\omega$  轉動， $Y$  軸和近軸管距離  $a$ ，

$$1. a = \frac{L}{2} \left( \frac{2a}{L} = 1 \right)$$

大氣壓力  $P_0$ ， $(P_0 + \rho gy)A = \frac{L}{4} \omega^2 \frac{L}{2} A \rho$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{8(P_0 + \rho gy)}{L^2} \dots (1)$$

$$2. a < \frac{L}{2} \left( \frac{2a}{L} < 1 \right)$$

(1)近軸管尚有液柱高度  $c$  時( $c \geq 0$ )，

$$\rho g(y - c)A = \frac{(L - a)\omega^2}{2} (L - a)\rho A - \frac{a\omega^2}{2} aA\rho$$

$$y + c = 2h, c = 2h - y > 0 \rightarrow y \leq 2h$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{4g(y - h)}{(L - a)^2 - a^2} \dots (2) \quad (h \leq y \leq 2h)$$

$y = 2h$ 時，容器的轉速達臨界值  $\omega_c$

$$\omega_{max}^2 = \frac{4gh}{(L - a)^2 - a^2} \dots (3)$$

$$\rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{4gh}{(L - a)^2 - a^2}}$$

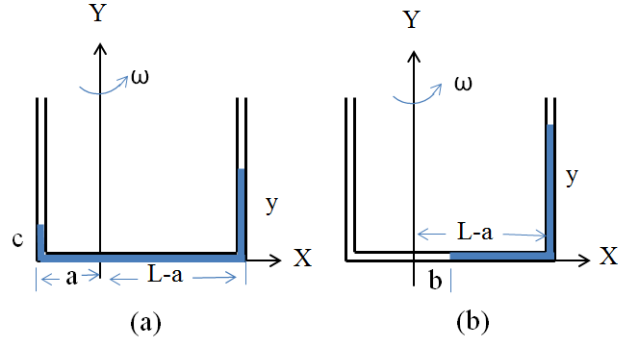
(2)近軸管沒有液柱時，( $y > 2h, \omega \geq \omega_c$ )

$$\rho gyA = \frac{b\omega^2 + (L - a)\omega^2}{2} (L - a - b)A\rho, \quad b = y - a - 2h$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{2gy}{(y + L - 2a - 2h)(L + 2h - y)} \dots (4) \quad [2h \leq y < (L + 2h)]$$

$\frac{d\omega}{dy} = 0$ 得液柱的極小值

$$y_{min} = \sqrt{(L + 2h)(-L + 2a + 2h)} \dots (5)$$



圖四: U形管繞著  $Y$  軸轉動，(a) 近軸管尚有液柱，(b)近軸管沒有液柱。

(3)將公式(3)代入公式(4)成為  $y$  的二次方程式，若有兩個實數解，且  $[h < y < (L + 2h)]$ ，則液體有遲滯現象。

## (二)、三叉管繞 Y 軸轉動

三叉管的截面積  $A$  盛密度  $\rho$  的液體，底部液柱長度  $L$ ，三管液柱高度均為  $h$ ，繞著  $Y$  軸角速度  $\omega$  轉動，

$$1. a = \frac{L}{2} \left( \frac{2a}{L} = 1 \right)$$

(1)中央管尚有液柱高度  $c$  時，

$$\rho g(y - c)A = \frac{L}{2} \omega^2 \frac{L}{2} A \rho$$

$$2y + c = 3h$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{24g(y - h)}{L^2} \dots (6) [h \leq y \leq 1.5h]$$

$$y = 1.5h \text{ 時, } \omega_{max}^2 = \frac{12gh}{L^2} \dots (7)$$

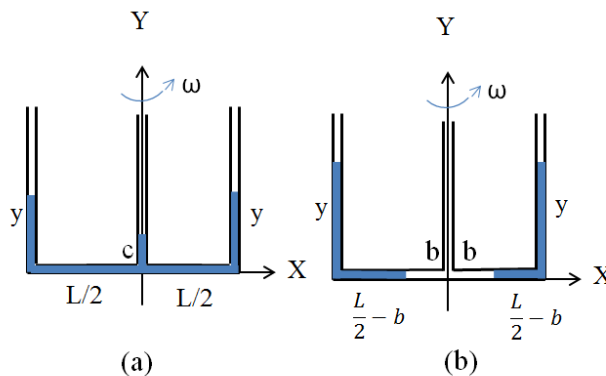
(2)中央管沒有液柱時， $y > \frac{3}{2}h$

$$\rho g y A = \frac{b\omega^2 + \frac{L}{2}\omega^2}{2} \left( \frac{L}{2} - b \right) A \rho$$

$$b = y - \frac{3}{2}h$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{2gy}{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}h\right)^2} \dots (8) \left( y > \frac{3}{2}h \right)$$

(3)將公式(7)代入公式(8)得  $y_1 = \frac{3h}{2}$ ， $y_2 = \frac{3h}{2} - \frac{L^2}{6h}$ (不合)，液體沒有遲滯現象。



圖五：三叉管繞著中央軸轉動，(a)中央管尚有液柱，(b)中央管沒有液柱。

$$2.a < \frac{L}{2} \left( \frac{2a}{L} < 1 \right)$$

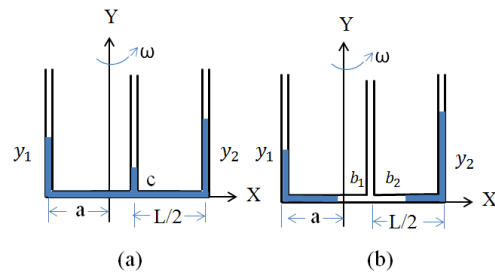
(1)中央管尚有液柱高度  $c$  時，

$$A\rho g(y_1 - c)$$

$$= \frac{a^2\omega^2}{2} A\rho - \frac{\left(\frac{L}{2}-a\right)\omega^2}{2} \left(\frac{L}{2}-a\right) A\rho$$

$$\rightarrow y_1 - c = \frac{a^2 - \left(\frac{L}{2}-a\right)^2}{2g} \omega^2$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{2g(y_1 - c)}{a^2 - \left(\frac{L}{2}-a\right)^2} \dots (9)$$



圖六：三叉管繞著距離近軸管  $a$  的  $Y$  軸轉動，(a)中央管尚有液柱，(b)中央管沒有液柱。

#### (四)、帕穗定律(Poiseuille's law)

密度  $\rho$  的液體流速  $v$  流過長度  $l$  半徑  $r$  的圓管，液體的黏滯係數  $\mu$  流量  $Q$ ，形成管

$$\text{的兩端壓力差 } \Delta p = \frac{8\mu l Q}{\pi r^4} = \frac{8\mu l v}{r^2} \dots (10), \quad Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Av = \pi r^2 v$$

### 三、實驗步驟

#### (一). U 形管實驗:

1. U 形管，裝在轉盤上，盛入水高度  $h=5\text{cm}$ ，鉛直軸到近軸管距離  $a=2.25\text{cm}$ ；打開攝影機及啟動拉壞機馬達，轉盤轉速緩緩增加，直到遠軸管水位高度  $y$  約  $20\text{cm}$ ，然後緩緩減速到停。攝錄的影片資料輸入電腦，直接利用 KMplayer 軟體讀取  $y$  隨轉速  $\omega$  的變化。改變鉛直軸到近軸管距離  $a=3.25\text{cm}$ ， $4.25\text{cm}$ ， $5.25\text{cm}$  依序重作上述實驗。
2. U 形管盛入水高度  $h=7\text{cm}$ ，重作上述實驗。
3. U 形管盛入乙二醇高度  $h=5\text{cm}$ ， $a=5.25\text{cm}$  重作上述實驗。
4. U 形管改盛入甘油高度  $h=5\text{cm}$ ， $a=5.25\text{cm}$  重作上述實驗。

#### (二). 三叉管實驗:

1. 三叉管盛入水高度  $h=5\text{cm}$ ，鉛直軸到近軸管距離  $a=6.25\text{cm}$ (即:鉛直軸通過轉盤中心點)；打開攝影機及啟動拉壞機馬達，轉盤轉速緩緩增加，到遠軸管水位高度  $y$  約  $12\text{cm}$ ，緩緩減速到停。攝錄的影片資料輸入電腦，直接利用 KMplayer 軟體讀取  $y$  隨轉速  $\omega$  的變化。
2. 改變鉛直軸到近軸管距離  $a=5.25\text{cm}$  重作上述實驗。

### (三). 方形盒實驗:

1. 方形盒盛入水高度(1)  $h=1\text{cm}$ ，鉛直軸到盒的一側距離  $a=6.25\text{cm}$ (即:鉛直軸通過轉盤中心點)；啟動拉坏機馬達，打開攝影機從側面攝影；轉盤轉速緩緩增加，直到底部出現長度約  $6\text{cm}$  的乾燥區(Dry region) [ 3 ]，然後緩緩減速到停。攝錄的影片資料輸入電腦，直接利用 KMplayer 軟體讀取乾燥區長度  $y$  隨轉速  $\omega$  的變化。
- (2).改變水的高度  $h=2\text{cm}$  重作上述實驗。(3).改變水的高度  $h=3\text{cm}$  重作上述實驗。
- 2.重作上述實驗，但鉛直軸到盒的一側距離改變為(1)  $a=5.25\text{cm}$ (2)  $a=4.25\text{cm}$ (3)  $a=3.25\text{cm}$ (4)  $a=2.25\text{cm}$  等四種情況。

### (四). 圓柱筒實驗:

1. 圓柱筒底部貼方格紙，固定在轉盤上，盛入混有藍色染料的水高度  $h=3\text{cm}$ ，圓柱筒中央軸和轉盤中心點重疊( $a=6.25\text{cm}$ )；打開攝影機及啟動拉坏機馬達，轉盤轉速緩緩增加，到底部的乾燥區圓形直徑約  $5\text{cm}$ ，然後緩緩減速到停。攝錄的影片資料輸入電腦，直接利用 KMplayer 軟體擷取不同的轉速  $\omega$  下液面圖樣的變化 [ 4, 5 ]。
2. 改變圓柱筒中央軸和筒壁距離(1)  $a=5.25\text{cm}$ (2)  $a=4.25\text{cm}$ (3)  $a=3.25\text{cm}$ (4)  $a=2.25\text{cm}$  等四種情況重作上述實驗。
3. 改用乙二醇， $a=2.25\text{cm}$ ，重作上述實驗。

### (五). 方形筒實驗:

改用方形筒重作實驗(四)。

## 四、結果和討論

### (一). U 形管實驗:

$L=12.5\text{cm}$ ， $h=5\text{cm}$ ，公式 (2) 變成  $\omega^2 = \frac{313.6(y-5)}{12.5-2a} \dots (2-1)(5 \leq y \leq 10)\text{cm}$

$$\text{公式 (3) 變成 } \omega_{max}^2 = \frac{1568}{12.5-2a} \dots (3-1)$$

$$\text{公式 (4) 變成 } \omega^2 = \frac{1960y}{(y-2a+2.5)(22.5-y)} \dots (4-1) (5 \leq y < 22.5)\text{cm}$$

$$\text{公式 (5) 變成 } y_{min} = \sqrt{22.5(2a-2.5)} \dots (5-1)$$

$$h=7\text{cm}，\text{公式 (2) 變成 } \omega^2 = \frac{313.6(y-7)}{12.5-2a} \dots (2-2)(7 \leq y \leq 14)$$

公式 (3) 變成  $\omega_{max}^2 = \frac{2195}{12.5-2a} \dots (3-2)$

公式 (4) 變成  $\omega^2 = \frac{1960y}{(y-2a-1.5)(26.5-y)} \dots (4-2) (14 \leq y < 26.5)cm$

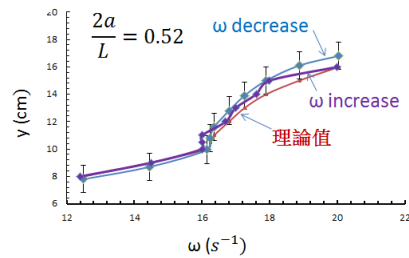
公式 (5) 變成  $y_{min} = \sqrt{26.5(2a + 1.5)} \dots (5-2)$

1.圖七為 a=3.25cm 正以 111.78rpm 轉動的 U 形管，遠軸管水柱高度 8.36cm；實驗的結果取三位有效數字，(1)液體的轉彎點(管和管相接的地方)，都成 90°，管的內半徑 0.2cm，液體在通過轉彎處，會有氣泡伴隨進入管中，影響液柱高度，大一點的可見氣泡可以扣除高度，但小氣泡會使測量的結果偏高；若改用內徑較小的管，會較難灌入液體，(2)因虛設力作用，遠軸管液面傾斜，量取液柱高度時採取斜面的中點的高度(3)液體移動速度慢，黏滯力的影響可忽略。



圖七:旋轉中的 U 形管,轉速 111.78rpm。

2.轉軸距離近軸管  $a=3.25cm(\frac{2a}{L} = 0.52)$ ， $h=5cm$  的 U 形管裝水轉動時， $y = 10cm$ 時， $\omega_{max}^2 = 261.3s^{-2}$ ，代入公式(4-1)得 $y = 10cm$ ，沒有遲滯現象。圖八為實驗值和理論值得比較。液體移動



圖八: U 形管 a=3.25cm，液柱高度(y)隨轉速(omega)的變化。

速度小，黏滯的影響可忽略，水柱因轉彎時有氣泡進入管內，使得水柱高度的測量值偏大。

3.表一之 1:轉速漸增至  $\omega = 19.8s^{-1}$ 時，水柱由 10.0cm 跳升到 13.5cm

y(cm)	7.00	8.00	9.00	10.0	11.0	12.0	13.5	14.0	15.0
$\omega(s^{-1})$	12.5	15.3	17.7	19.8			19.8	20.1	20.9

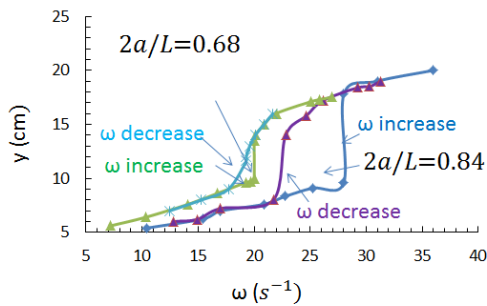
表一之 2:轉速漸減  $\omega = 19.3s^{-1}$ 時，水柱由 11.6cm 降低到 9.75cm

y(cm)	15.0	14.0	13.0	12.0	11.6	10.0	9.75	8.00	7.00
$\omega(s^{-1})$	20.9	20.1	19.9	19.5	19.3		19.3	15.3	12.5

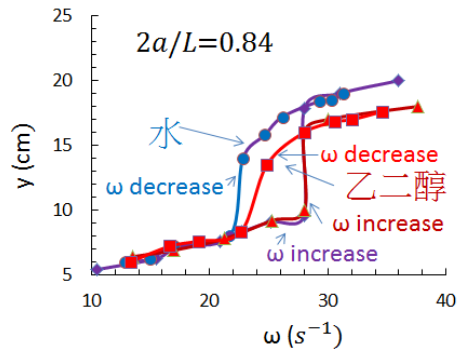
表一為  $a=4.25cm(\frac{2a}{L} = 0.68)$ ， $h=5cm$  U 形管水柱高度隨轉盤轉速的變化，(1)轉速漸增時，近軸管水柱高度由 5cm 漸減，遠軸管水柱高度(y)由 5cm 漸增，在轉速  $\omega = 19.8s^{-1}$ 遠軸管水柱  $y=10.0cm$ (左管  $c=0cm$ )突然跳升到  $y=13.5cm$ 。(2)轉速漸減時，遠軸管水柱高度漸減，在轉速  $\omega = 19.3s^{-1}$ 遠軸管水柱由  $y=11.6cm$  降低到



$y=9.75\text{cm}$ 。(3)水柱高度隨轉速的變化顯現出顯著的遲滯現象。



圖九: U 形管  $a=5.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.84$ ) 的遲滯曲線面積比  $a=4.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.68$ ) 形成的遲滯曲線面積大。



圖十:水和乙二醇液柱高度隨轉速的變化，乙二醇的黏滯係數大，液柱上升的高度小。

4. 圖九為:  $h=5\text{cm}$  兩個轉軸位置不同的 U 形管  $a=4.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.68$ ) 和  $a=5.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.84$ ) 的水柱高度隨轉速變化關係圖，(1)  $a=5.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.84$ ) 在轉速  $\omega = 28.0\text{s}^{-1}$  遠軸管水柱  $y=10.0\text{cm}$  突然跳升到  $y=18.0\text{cm}$ ; 在轉速  $\omega = 23.2\text{s}^{-1}$  遠軸管水柱  $y=13.4\text{cm}$  降低到  $y=8.56\text{cm}$ 。

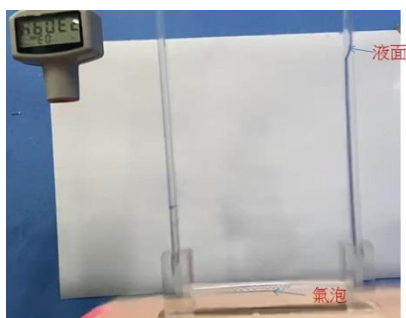
(2)  $\frac{2a}{L}$  愈大遲滯曲線面積愈大。

5.  $a=6.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 1$ ) 旋轉盤的轉速必須超過  $25400\text{rpm}$ ，兩管水柱才會上升。

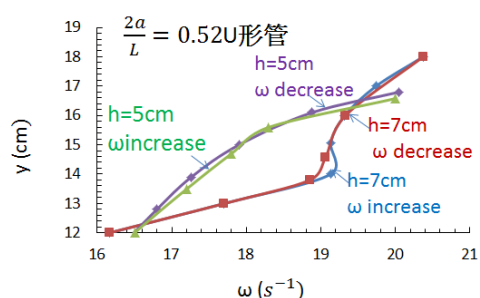
6. 圖十為:  $a=5.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.84$ ) 的 U 形管分別盛  $h=5\text{cm}$  的水(黏滯係數  $\mu = 0.89\text{cp}$ ) 和乙二醇( $\mu = 16.1\text{cp}$ ) 液柱高度隨轉速的變化關係圖:(1)利用 KMplayer 軟體算出水柱跳升  $8\text{cm}$  的平均速度為  $v=52.8\text{cm/s}$ ，管內水的總長度  $\ell = 22.5\text{cm}$ ，管的半徑  $r=0.2\text{cm}$  由黏滯形成的壓力差  $\Delta p = \frac{8\mu\ell v}{r^2} = \rho gh$ ，得到高度差  $h=0.02\text{cm}$ 。(2) 乙二醇跳升  $6.02\text{cm}$  的平均速度為  $v=40.6\text{cm/s}$ ，高度差  $h=2.12\text{cm}$ 。(3)黏滯力只影響液柱跳升的高度(以及遲滯曲線面積)，液柱發生跳升和降低的位置不受影響。

7. 圖十一為:  $a=5.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.84$ ) 的 U 形管，裝甘油轉動轉速最高為  $\omega = 40.8\text{s}^{-1}$ ，旋轉盤轉速漸降到  $\omega = 34.64\text{s}^{-1}$  時，擷取的畫面。因甘油的黏滯係數高達  $2000\text{cp}$  所以液柱沒有跳升、突降的遲滯現象，移動過程中，黏著管壁，大量空氣進入

管中形成氣泡。



圖十一:甘油的液面傾斜，底部管中充滿著氣泡。



圖十二:U形管盛水高度(h)不同，h=5cm 沒有遲滯現象，h=7cm 發生遲滯現象。

8. 轉軸距離近軸管  $a=3.25\text{cm}$  ( $\frac{2a}{L} = 0.52$ )， $h=7\text{cm}$  的 U 形管裝水轉動時， $y = 14\text{cm}$  時， $\omega_{max}^2 = 365.9\text{s}^{-2}$ ，代入公式(2-2)得  $y = 15.10\text{cm}$ ，公式(5-2)  $y_{min} = 14.56\text{cm}$  發生遲滯現象。h=5cm 則未發生遲滯現象。

## (二).三叉管實驗:

1.  $L=12.5\text{cm}$ ， $h=5\text{cm}$ ， $a=6.25\text{cm}$ ，公式 (6)

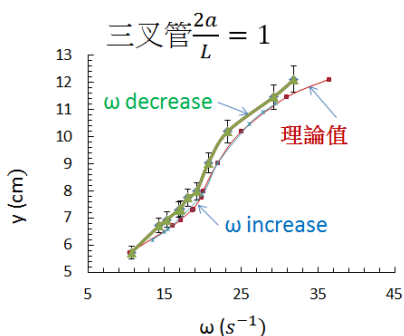
變成  $\omega^2 = 150.5(y - 5) \cdots (6 - 1)(5 \leq y \leq 7.5)\text{cm}$

公式 (7) 變成  $\omega_{max}^2 = 376.25 \cdots (7 - 1)$

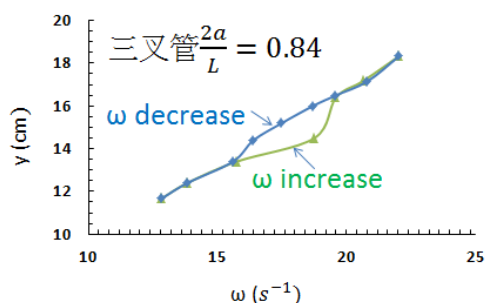
公式 (8) 變成  $\omega^2 = \frac{1960y}{(y-1)(13.75-y)} \cdots (8 - 1) (7.5 \leq y < 13.75)\text{cm}$

將  $\omega_{max}^2 = 376.25$  代入公式(8-1)得  $y = 7.5\text{cm}$ ，換言之，三叉管繞中央軸轉動，液體沒有遲滯現象。

2. 三叉管轉軸距中央管  $1\text{cm}$  ( $a = 5.25\text{cm}$ ， $\frac{2a}{L} = 0.84$ ) 轉動時，遲滯現象甚為顯著。

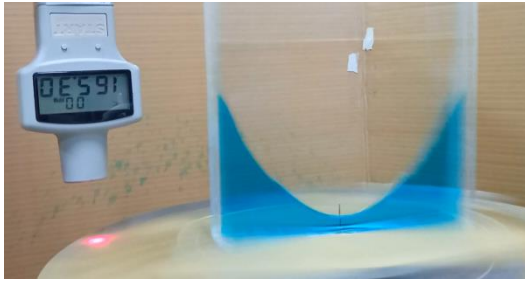


圖十三:三叉管盛水繞中央軸轉動時，沒有遲滯現象。

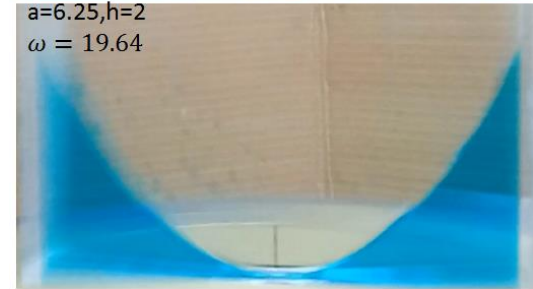
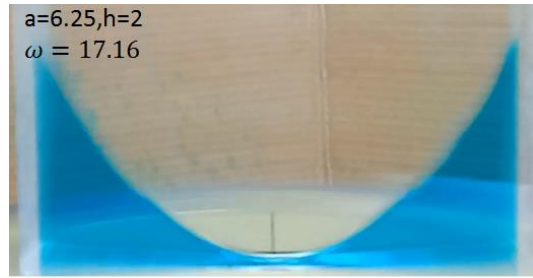


圖十四: 三叉管盛水  $a=5.25\text{cm}$ ，遲滯現象甚為顯著。

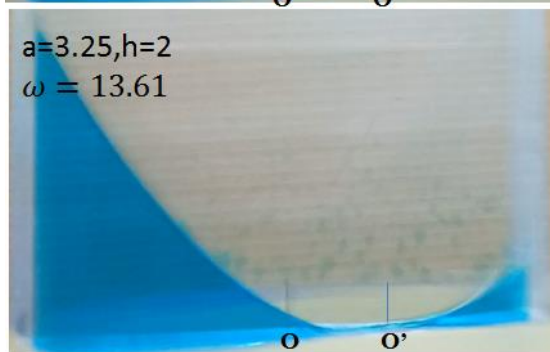
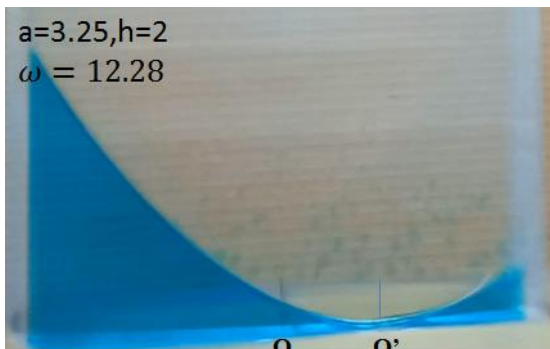
(三).方形盒實驗:



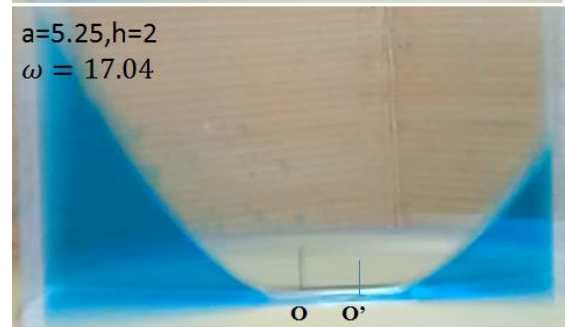
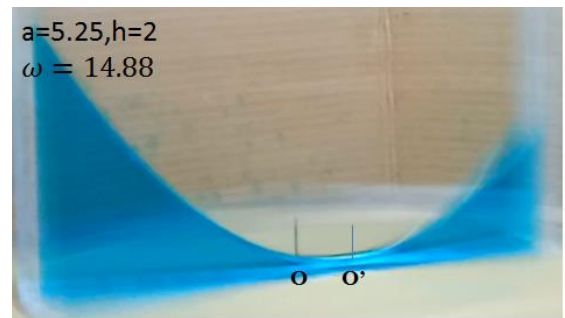
圖十五:方形盒盛水  $a=6.25\text{cm}$  ,  
轉盤的轉速  $165.3\text{rpm}$  。



圖十六:方形盒盛水  $a=6.25\text{cm}$  , 上圖  $\omega=17.16\text{s}^{-1}$  時, 水面觸底, 下圖  $\omega=19.6\text{s}^{-1}$  , 兩側對稱的拉開。



圖十七:方形盒盛水  $a=3.25\text{cm}$  , 上圖  $\omega=12.28\text{s}^{-1}$  時, 水面觸底, 下圖  $\omega=13.61\text{s}^{-1}$  , 發生乾燥區擴大的遲滯現象。O 和 O' 分別為方形盒中央線和旋轉盤中心點(O 和 O' 距離 3 公分)。



圖十八:方形盒盛水  $a=5.25\text{cm}$  , 上圖  $\omega=14.88\text{s}^{-1}$  時, 水面觸底, 下圖  $\omega=17.04\text{s}^{-1}$  , 發生乾燥區擴大甚多的遲滯現象(O 和 O' 距離 1 公分)。

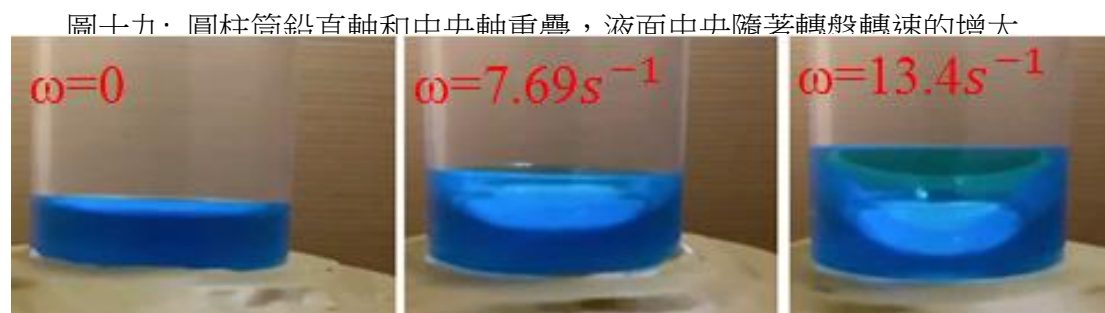
1.圖十五及圖十六為盛水  $h=2\text{cm}$ ， $a=6.25\text{cm}$  的方形盒，轉盤轉動時，由側面攝影，擷取的畫面。轉速漸增，液面呈現拋物線，沒有遲滯現象。 $h=1\text{cm}$  及  $h=3\text{cm}$  也都沒有遲滯現象。

2.圖十七為盛水  $2\text{cm}$  的方形盒， $a=3.25\text{cm}$ ，方形盒中央線(O)和旋轉盤中心點(O') 距離 3 公分，在  $\omega=12.28\text{s}^{-1}$  時，水面觸底，O' 點左側的液體受虛設力  $F_c = \sum m_i r_i \omega^2 = 150 \sum m_i r_i$  大於右側液體受虛設力，液體被拉開呈乾燥區的長度比  $b_1:b_2 = 6:1$  ( $b_1, b_2$  如圖六所示)，發生乾燥區擴大和三菱管  $a=3.25\text{cm}$  情形相似的遲滯現象。

3. 圖十八為盛水  $2\text{cm}$  的方形盒， $a=5.25\text{cm}$ ，方形盒 O 和 O' 距離 1 公分，在  $\omega=14.88\text{s}^{-1}$  時，水面觸底，O' 點左側的液體受虛設力  $F_c = \sum m_i r_i \omega^2 = \omega^2 \sum m_i r_i$  右側液體受虛設力較小，(但比圖十七的右側液體受力大很多)，液體被拉開呈乾燥區的長度比  $b_1:b_2 = 3:1$ 。因 O' 點兩側的虛設力作用，發生乾燥區擴大甚多的遲滯現象。

#### (四).圓柱筒實驗:

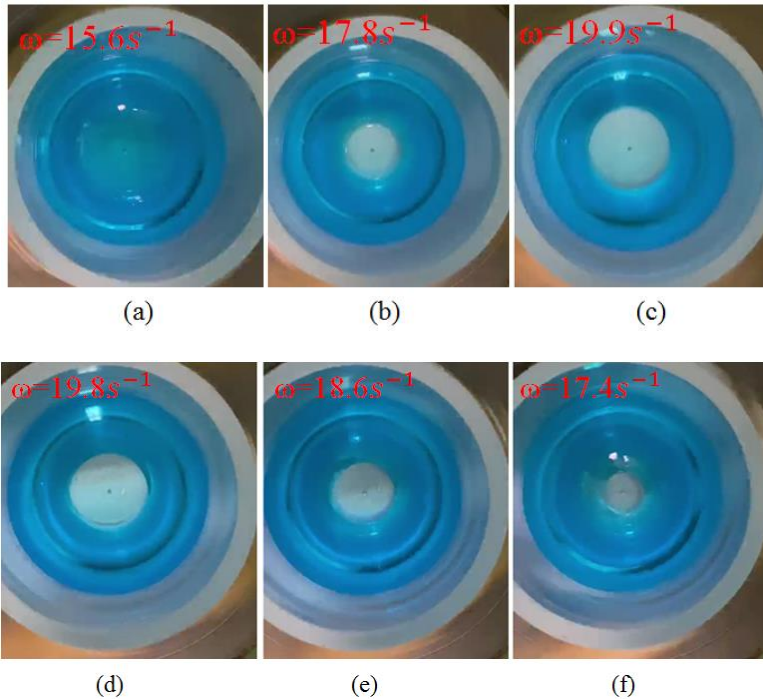
1. 圓柱筒盛水  $3\text{cm}$  高，加入藍色染料，轉軸和旋轉盤中心點重疊，類似三菱管 ( $a = 6.25\text{cm}$ ,  $\frac{2a}{L} = 1.00$ )。旋轉盤轉動時由側面攝影，擷取畫面成圖十九；從正



上方向下攝影，旋轉盤轉速漸增時成圖二十-1，旋轉盤轉速漸減時成圖二十-2。

- (1)圖十九顯現:轉速加快時，圓柱筒中央的水位下降，液面成拋物面。
- (2)圖二十-1 顯現: 轉速漸增時，(a)容器底部隱約出現圓柱筒所附方格紙，(b) 轉速  $\omega = 17.8\text{s}^{-1}$  時，容器底部出現圓形乾燥區域，(c)轉速加大，圓形乾燥區面積增大。
- (3)圖二十-2 顯現: 轉速漸減時，圓形面積漸減，轉速減到  $\omega = 17.4\text{s}^{-1}$  時，圓形面積乾燥區減少到極小值，然後消失，沒有遲滯現象。
- (4)乾燥區的直徑(d)隨轉盤轉速( $\omega$ )的變化如圖二十一所示。

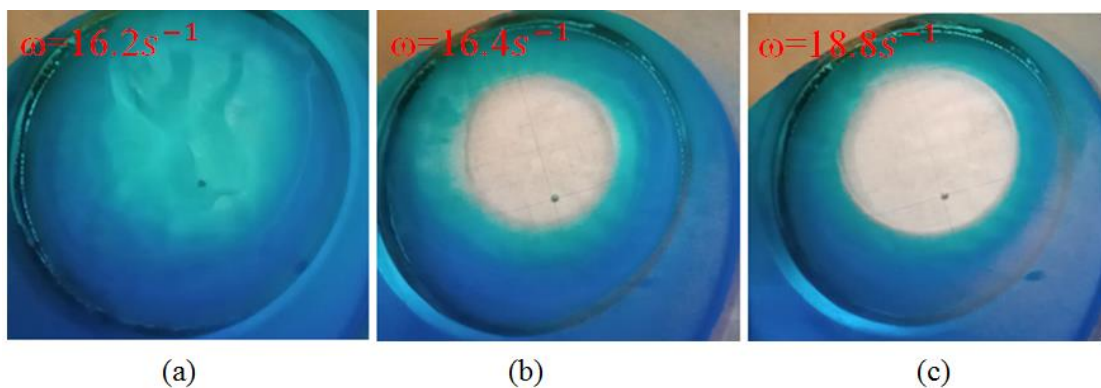




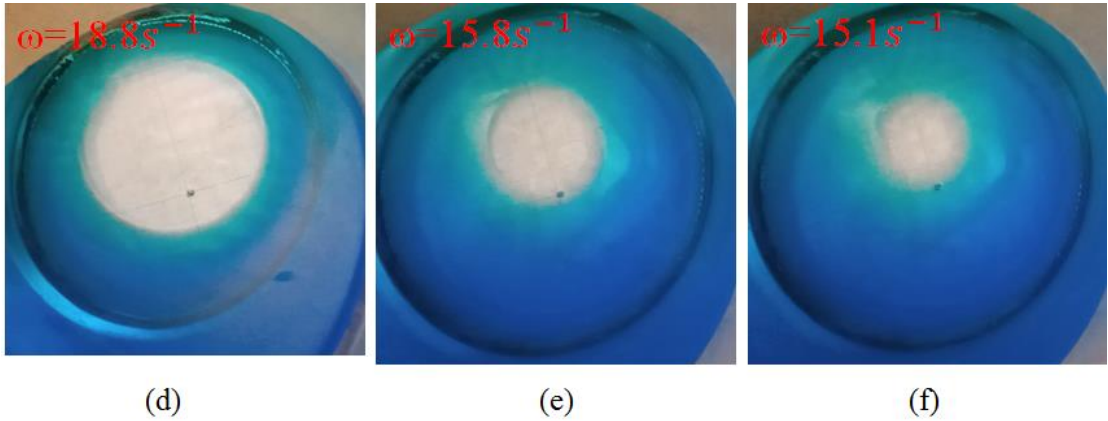
圖二十:(a) 轉速漸增時，容器底部隱約出現圓柱筒所附方格紙，(b) 轉速  $\omega = 17.4s^{-1}$  時，出現圓形乾燥區域，(c)轉速加大，圓形乾燥區面積增大。(d)至(e) 轉速漸減，轉速減到  $\omega = 17.4s^{-1}$ 時，乾燥區面積減少到極小值，然後消失。

2.圓柱筒盛水 3cm 高，加入藍色染料，轉軸和旋轉盤中心點距離 1cm，類似三叉管( $a = 5.25cm, \frac{2a}{L} = 0.84$ )。旋轉盤轉動時由正上方向下拍攝，擷取畫面成圖二十一。

- (1)圖二十一-1 顯現: 轉速漸增時，(a)容器底部隱約出現轉盤所附方格紙，(b)轉速達  $\omega = 17.1s^{-1}$ 時，容器底部液體突然出現橢圓形乾燥區，(c)轉速加大，橢圓形乾燥區面積增大，O 和 O' 分別為圓柱筒底部和旋轉盤的中心點。
- (2) 圖二十一-2 顯現: 轉速漸減時，圓形乾燥區面積漸減，轉速減到  $\omega = 13.8s^{-1}$  時，橢圓形乾燥區面積減少到極小值，然後消失。
- (3) 圓柱筒轉動的遲滯現象類似於三叉管  $a=5.25cm$  轉動；轉速增大到  $\omega_{max}$ 時，容器底部的水大量的水平跳躍，轉速漸減時，底部的水只有少量的跳躍。



圖二十一-1: 轉速漸增， $\omega = 16.4s^{-1}$ 時，容器底部液體突然出現橢圓形乾燥區域，轉速加大，橢圓形乾燥區面積增大，O 和 O' 分別為圓柱筒底部和旋轉盤的中心點。



圖二十一-2: 轉速漸減, 轉速減到 $\omega = 14.1s^{-1}$ 時, 橢圓形乾燥區面積減少到極小值, 然後消失。

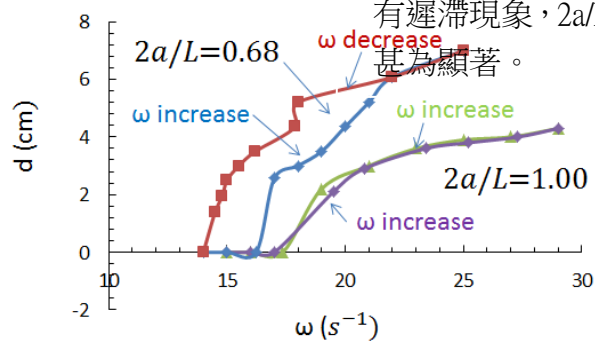
3. 圓柱筒盛水高度 $h=3cm$ ,

(1) 繞中央軸轉動

( $2a/L=1.00$ ), 轉盤轉速 $\omega = 17.3s^{-1}$ , 角速度達臨界, 底面出現的乾燥區為圓形, 由其直徑( $d$ )隨角速度( $\omega$ )的變化, 沒有遲滯現象。

(2)  $2a/L=0.68$ , 轉盤轉速 $\omega = 16.23s^{-1}$ , 角速度達臨界, 底面出現的乾燥區為橢圓形, 由其長軸( $d$ )隨角速度( $\omega$ )的變化, 有顯著的遲滯現象。

圖二十二: 圓柱筒盛水  $2a/L=1.00$ , 沒有遲滯現象,  $2a/L=0.68$ , 遲滯現象, 甚為顯著。

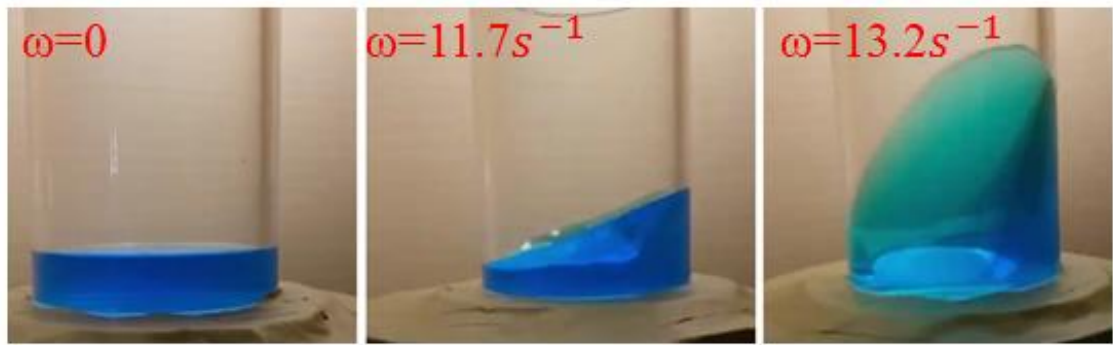


4. 圓柱筒盛水 3cm 高, 加入藍色染料, 轉軸和旋轉盤中心點距離 3cm, 類似 U 形管( $a = 3.25cm, \frac{2a}{L} = 0.52$ )。旋轉盤轉動時由正上方向下拍攝, 擷取畫面成圖二十二, 側面拍攝成圖二十三(a)~(c)。

(1) 圖二十四-1 顯現: 轉速漸增(b)轉速達 $\omega = 14.4s^{-1}$ 時, 容器底部液體突然出現橢圓形(部分)乾燥區域, (c)轉速加大, 橢圓形乾燥區面積增大。

(2) 圖二十四-2 顯現: 轉速漸減時, 橢圓形(部分)乾燥區面積漸減, 轉速減到 $\omega = 12.1s^{-1}$ 時, 橢圓形桿遭區面積減少到極小值, 然後消失。

(3) 圓柱筒轉動的遲滯現象類似於 U 形管  $a=3.25cm$  轉動; 轉速增大到 $\omega_{max}$ 時, 容器底部的水大量的水平跳躍, 轉速漸減時, 底部的水只有少量的跳躍。



(a)

(b)

(c)

圖二十三: (a)~(c)圓柱筒鉛直軸和中央軸相距 3cm，轉速漸增時，近軸管液體下降，遠軸管液體上升，(d)液面如同 U 形管的液體跳升。



(a)

(b)

(c)

圖二十四-1: 轉速漸增時，(a)容器底部隱約出現轉盤所附方格紙，(b)轉速達  $\omega = 19.8s^{-1}$ 時，容器底部液體突然出現橢圓形(部分)乾燥區域，(c)轉速加大，橢圓形(部分)乾燥區面積增大。



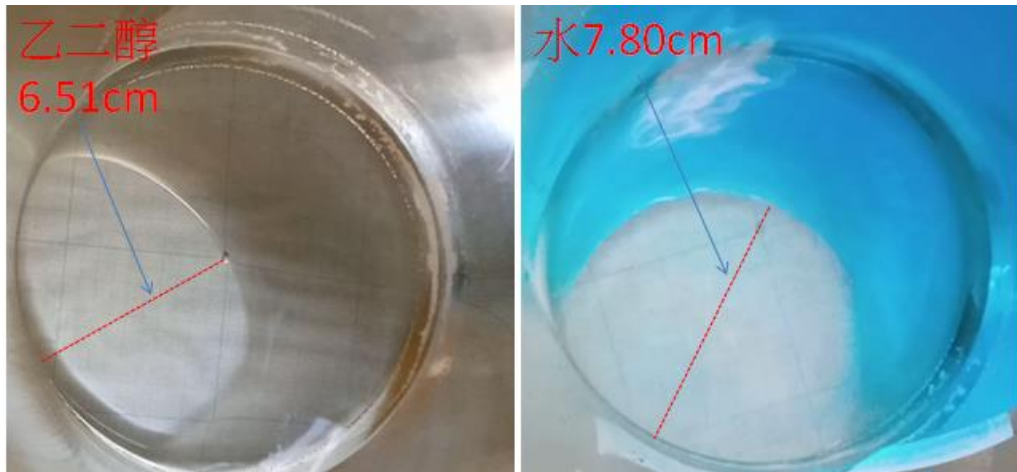
(d)

(e)

(f)

圖二十四-2: 轉速漸減，轉速減到  $\omega = 12.5s^{-1}$ 時，橢圓形乾燥區面積減少到極小值，然後消失。





(a)

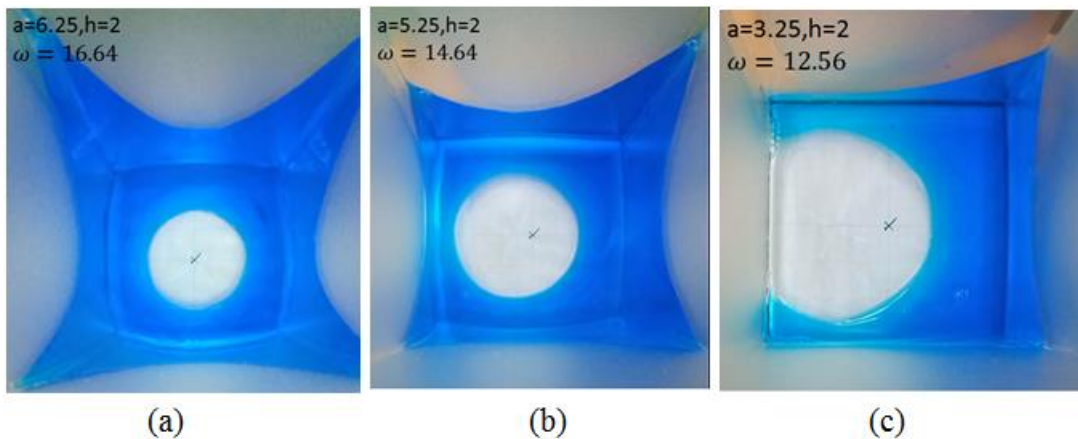
(b)

圖二十五:圓柱筒轉軸和旋轉盤中心點距離 $\frac{2a}{L} = 0.52$  (a)盛乙二醇(b)盛水，

$h=3\text{cm}$ ，轉速 $\omega = 16.8\text{s}^{-1}$ 形成的橢圓(部分)乾燥區。

5.圖二十五: 圓柱筒盛入乙二醇高度 $h=3\text{cm}$ ， $a=3.25\text{cm}$ ，轉盤轉速  $\omega = 16.8\text{s}^{-1}$ 時，圓柱筒底部乾燥區為部份的橢圓，距離筒緣 6.51cm，相同轉速的水形成的橢圓距離筒緣 7.80cm。25°C 的水和乙二醇的黏滯係數分別為 0.89cp 和 16.1cp，相差 18.1 倍，液體貼著筒底流動，顯現黏滯的影響比在管中流動大。

### (五).方形筒實驗:



(a)

(b)

(c)

圖二十六: 方形筒中心點和筒緣距離  $a$  不同時，液面出現不同的形狀；

(a) $a=6.25\text{cm}$  類似圓，(b) $a=5.25\text{cm}$  類似橢圓，(c) $a=3.25\text{cm}$  類似部分橢圓。

1.  $a=6.25\text{cm}$ ，轉盤轉速漸大時，筒中央出現小圓，轉速漸增乾燥區面積漸大，轉速漸減時，乾燥區面積減少；沒有遲滯現象。



2.a=5.25cm，轉盤轉速漸大時，筒中央突然出現類似橢圓乾燥區，轉速漸增乾燥區面積漸大，轉速漸減時，乾燥區面積減少；遲滯現象十分顯著。

3.a=3.25cm 出現類似部分橢圓的乾燥區，遲滯現象十分顯著。

## 肆、展望

三叉管和方形盒發生遲滯現象的理論推導，值得進一步研究。

## 伍、結論

U形管和三叉管轉動由慢漸快時，管內液柱高度在特定轉速時會大幅度的升高，轉速由快漸慢時，液柱高度會小幅度的下降的遲滯現象，黏滯力只影響液柱升降高度，不影響液柱發生跳升或降低的位置；方形盒轉動時，盒的底部出現乾燥區也顯現遲滯現象。

圓柱筒和方形筒轉動也有遲滯現象，隨著轉軸的位置不同，乾燥區出現圓形、橢圓形和部分的橢圓。

## 陸、參考資料

1. Bruce Denardo, Brad Barber, Chris Folley, and William Wright, 1989, *Am. J. Phys.* **57**, 1126-1130
2. Bruce Denardo, Brad Barber, Chris Folley, and William Wright, 1990, *Am. J. Phys.* **58**, 631-635
3. Paul Menker, and Andrzej Herczynski, 2020, *Am. J. Phys.* **88**, 475-482
4. Thomas R.N. Jansson, Martin P. Haspang, and Tomas Bohr, 2006, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 174502
5. Keita Iga, Sho Yokota, Shunichi Watanabe, 2014, *Fluid Dyn. Res.* **46**, 1-10

## 【評語】 051818

相同實驗、理論、討論已有多篇報告，本作品主題未見自創思維或實驗設計或現象。實驗設計及流程，雖能顯現探討議題，但實驗環境與物理條件控制較少創新設計。應思考以新穎流程與分析，揭露物理圖像與機制。



## 壹、研究動機

U形管繞鉛直軸轉動時，管中液體會發生遲滯(Hysteresis)現象 [1,2]。容器換成三叉管、方形盒、圓柱筒和方形筒結果會如何?我們實驗探究轉軸位置、液體的高度、黏滯力和轉速對於液體遲滯現象的影響。

## 貳、研究目的

- 一、探討轉動U形管內液體的遲滯現象
- 二、探討轉動三叉管內液體的遲滯現象
- 三、探討轉動方形盒內液體的遲滯現象
- 四、探討轉動圓柱筒和方形筒內液體的遲滯現象。

## 參、研究過程或方法

### 一、研究器材和設備

#### (一)、U形管、三叉管和方形盒實驗:

1. 重56公斤的拉坏機改裝步進馬達，轉盤轉速可達1700rpm。
2. U形管，內徑4mm的壓克力管底部長12.5cm 高25cm。
3. 三叉管，內徑4mm的壓克力管，底部長12.5cm 三個鉛直管高30cm。
4. 方形盒:長12.5cm，寬4mm，高30cm的壓克力盒。
5. 染料、水。

#### (二)、圓柱筒和方形筒實驗:

1. 內徑12.5cm 高20cm 圓柱筒且底部貼方格紙。
2. 長和寬各12.5cm 高20cm 方形筒底部貼方格紙。
3. 攝影機攝影時，由筒正上方往下拍攝。

## 二、原理

### (一)、U形管繞Y軸轉動

U形管的截面積A盛密度 $\rho$ 的液體，底部液柱長度L，兩側液柱高度 h，繞著Y軸以 $\omega$ 轉動，Y軸和近軸管距離a，

1. 近軸管尚有液柱高度c時，

$$\omega^2 = \frac{4g(y-h)}{(L-a)^2 - a^2} \dots (1) \quad (h \leq y \leq 2h)$$

$$y = 2h \text{ 時, } \omega_{max}^2 = \frac{4gh}{(L-a)^2 - a^2} \dots (1-1)$$

2. 近軸管沒有液柱時，

$$\omega^2 = \frac{2gy}{(y+L-2a-2h)(L+2h-y)} \dots (2)$$

$$y_{min} = \sqrt{(L+2h)(-L+2a+2h)} \dots (2-1)$$

(3)將公式(1-1)代入公式(2)成為二次方程式，有兩個根y，若  $[2h < y < (L+2h)]$ ，則液體有遲滯現象。

### (二)、三叉管繞中央軸轉動

1. 中央管尚有液柱高度c時，

$$\omega^2 = \frac{24g(y-h)}{L^2} \dots (3)$$

2. 中央管沒有液柱時，

$$\omega^2 = \frac{2gy}{(\frac{L}{2})^2 - (y - \frac{3}{2}h)^2} \dots (4)$$

### (三)、三叉管繞Y軸轉動

中央管尚有液柱高度c時，

$$\omega^2 = \frac{2g(y_1-c)}{a^2 - (\frac{L}{2}-a)^2} \dots (5)$$

### (四)、帕穗定律(Poiseuille's law)

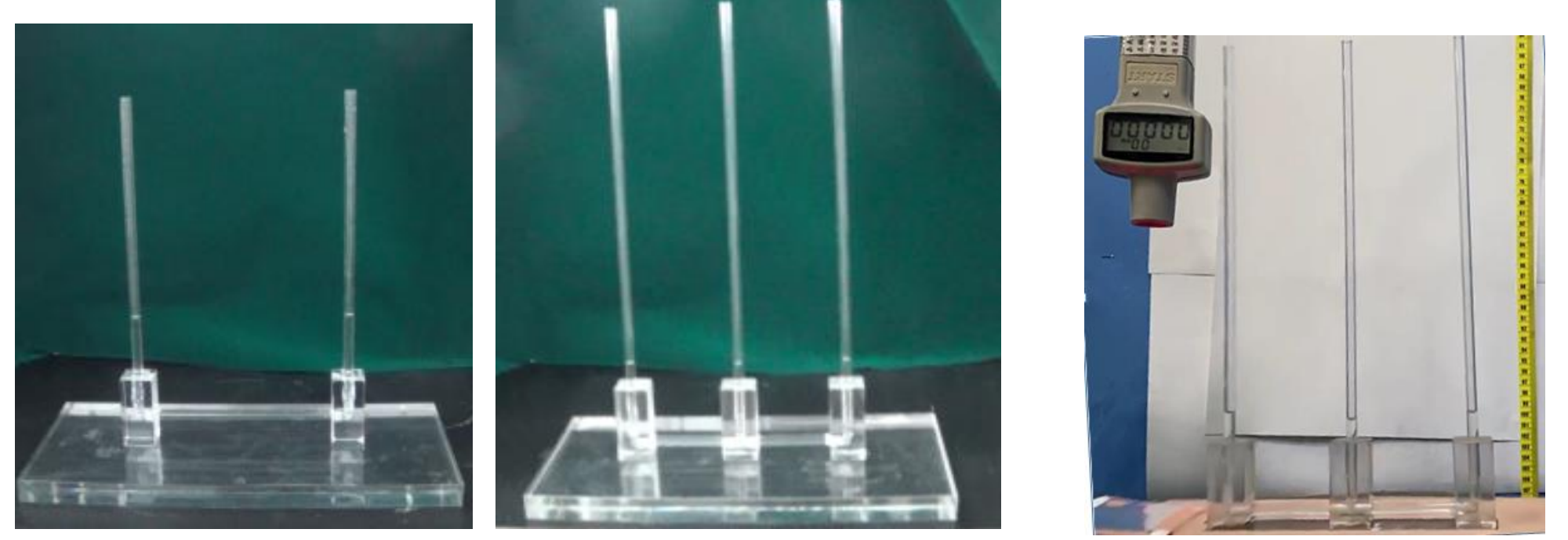
密度 $\rho$ 的液體流速v流過長度 $l$ 半徑 $r$ 的圓管，液體的黏滯係數 $\mu$ 流量 $Q$ ，形成管的兩端壓力差

$$\Delta p = \frac{8\mu l Q}{\pi r^4} = \frac{8\mu l v}{r^2} \dots (6), \quad Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Av = \pi r^2 v$$

## 三、實驗步驟

### (一). U形管、三叉管和方形盒實驗:

1. U形管和三叉管分別，裝在轉盤上，盛入水  $h=5\text{cm}$ ，Y軸到近軸管距離 $a=2.25\text{cm}$ ；打開攝影機及啟動拉坏機馬達，轉盤轉速緩緩增加，到遠軸管水位高度 $y$ 約20cm，緩緩減速到停。攝錄的影片資料輸入電腦，直接利用KMplayer 軟體讀取 $y$ 隨轉速 $\omega$ 的變化。改變Y軸到近軸管距離 $a=3.25\text{cm}$ ， $4.25\text{cm}$ ， $5.25\text{cm}$ 重作上實驗。

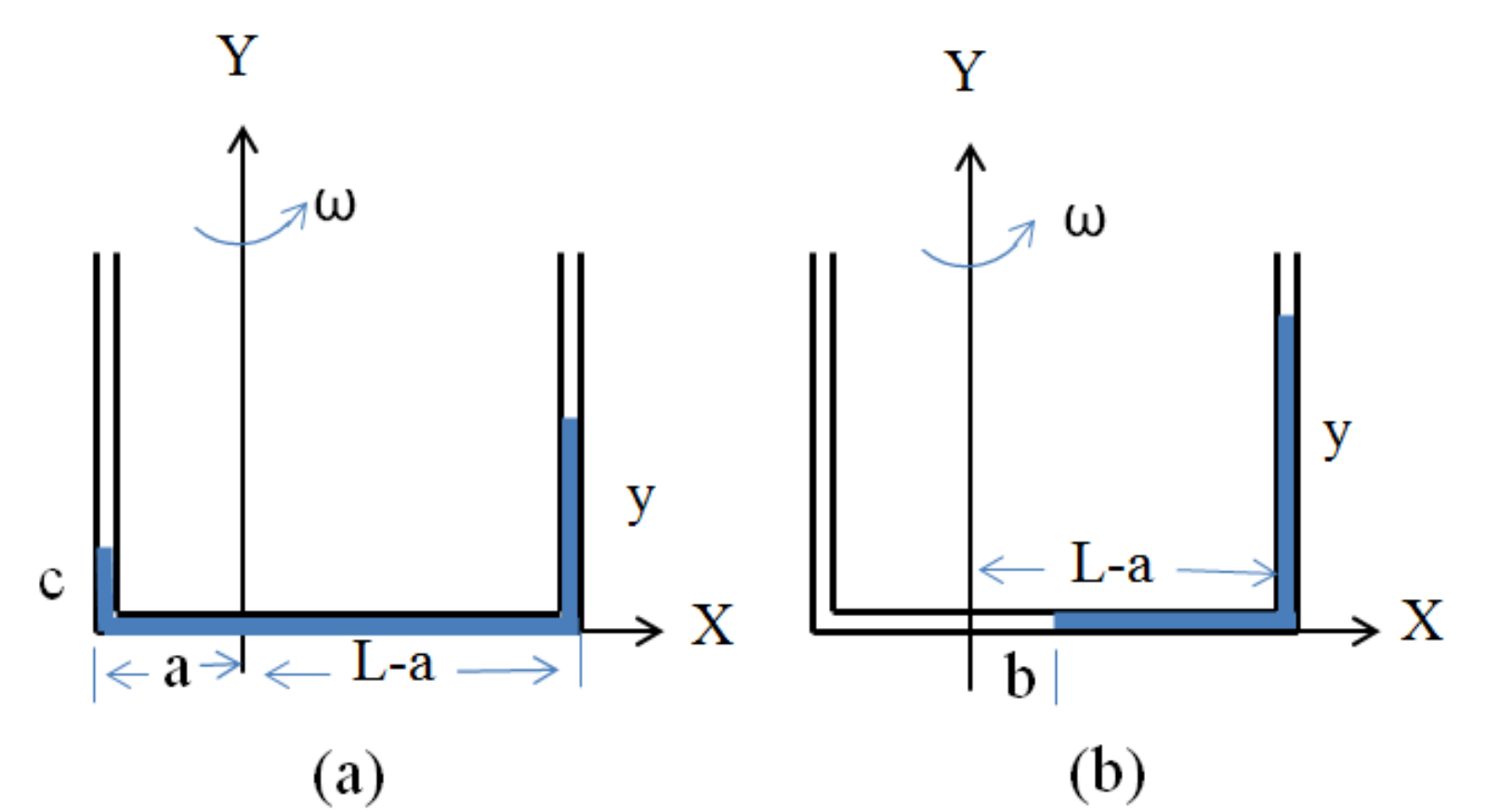


圖一:U形管(左)和三叉管(右)。

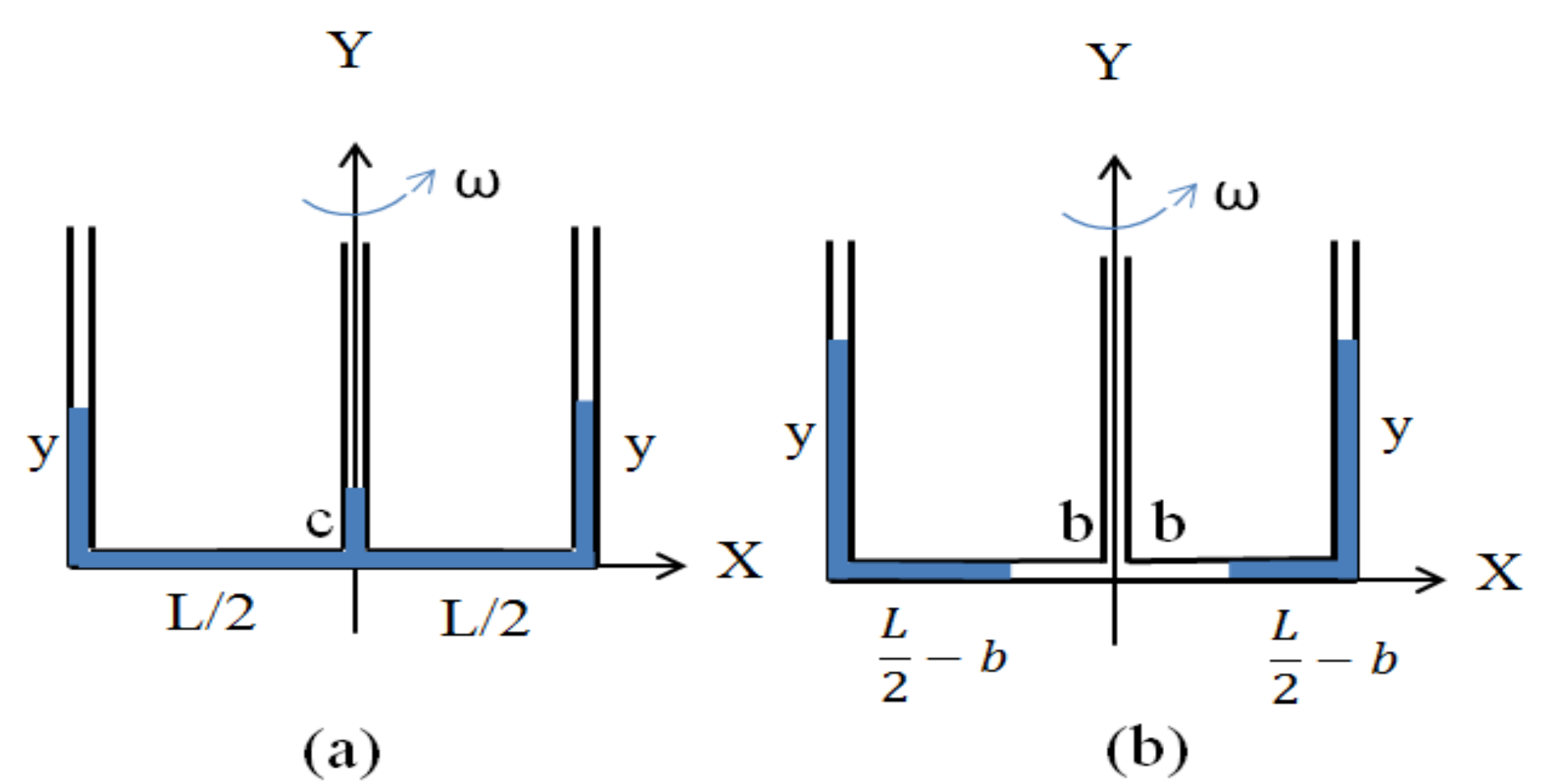
圖二:三叉管實驗裝置。



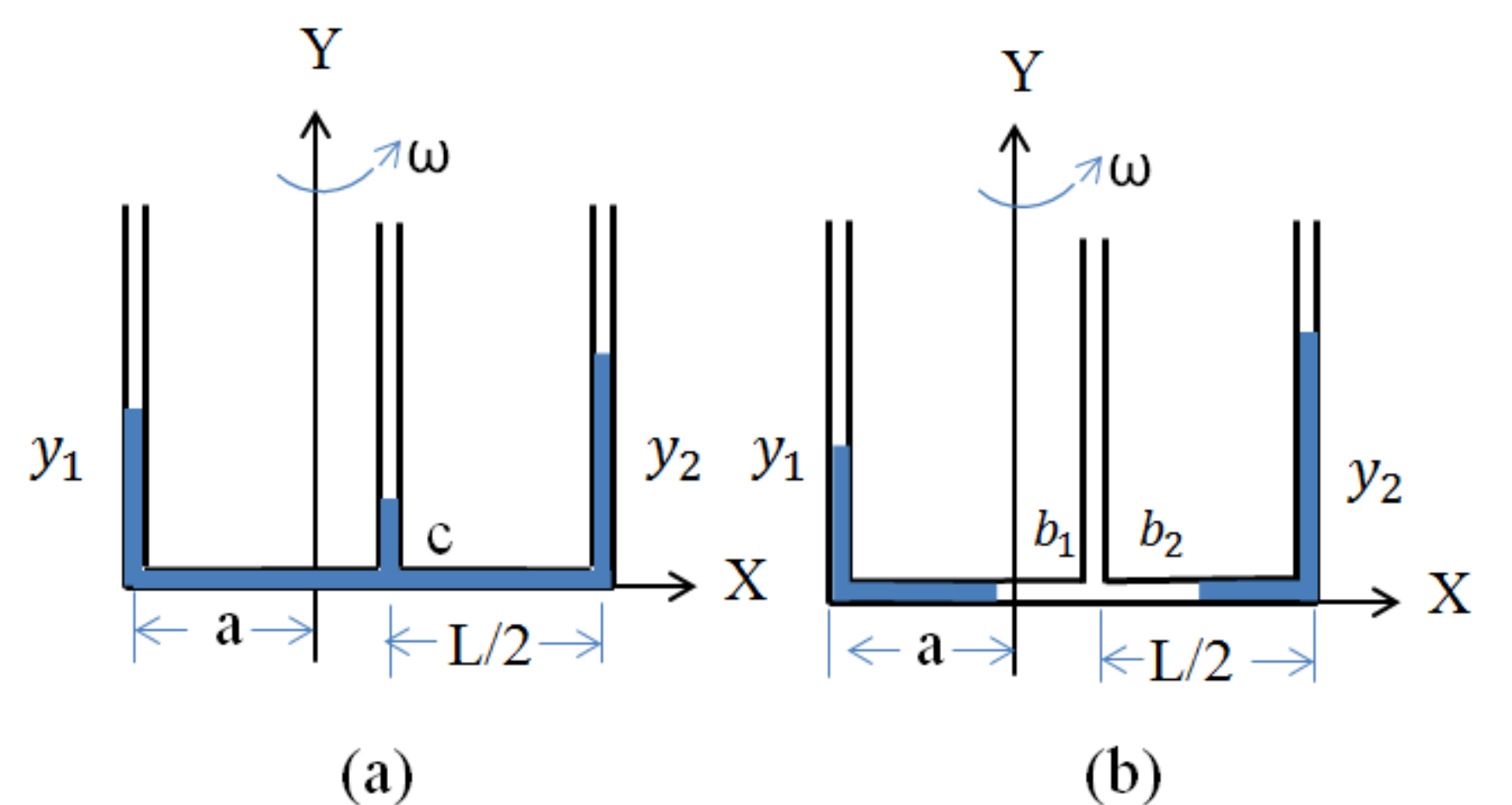
圖三:圓柱筒(左)及方形筒(右)實驗裝置。



圖四:(a)U形管繞著Y軸轉動，近軸管尚有液柱，(b)近軸管沒有液柱



圖五:三叉管繞著中央軸轉動，(a)中央管尚有液柱，(b)中央管沒有液柱。



圖六:三叉管繞著距離近軸管a的Y軸轉動，(a)中央管尚有液柱，(b)中央管沒有液柱。



2. 方形盒盛入水 $a=(1)6.25\text{cm}(2)5.25\text{cm}(3)4.25\text{cm}(4)3.25\text{cm}(5)a=2.25\text{cm}$ 等五種情況，打開攝影機從側面攝影，攝錄的影片資料輸入電腦，直接利用KMplayer 軟體讀取乾燥區長度 $y$ 隨轉速 $\omega$ 的變化。

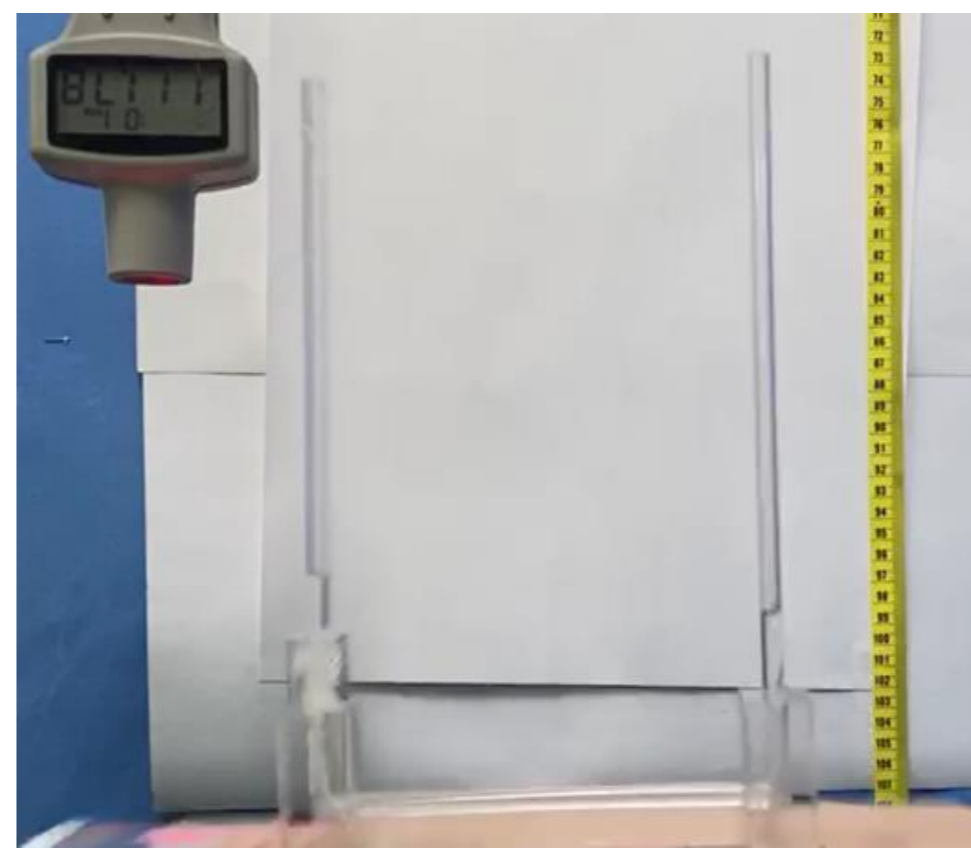
## (二). 圓柱筒和方形筒實驗:

盛入水 $a=(1)6.25\text{cm}(2)5.25\text{cm}(3)4.25\text{cm}(4)3.25\text{cm}(5)a=2.25\text{cm}$ 等五種情況，打開攝影機從上方向下攝影，攝錄的影片資料輸入電腦，直接利用KMplayer 軟體讀取乾燥區長度 $y$ 隨轉速 $\omega$ 的變化。

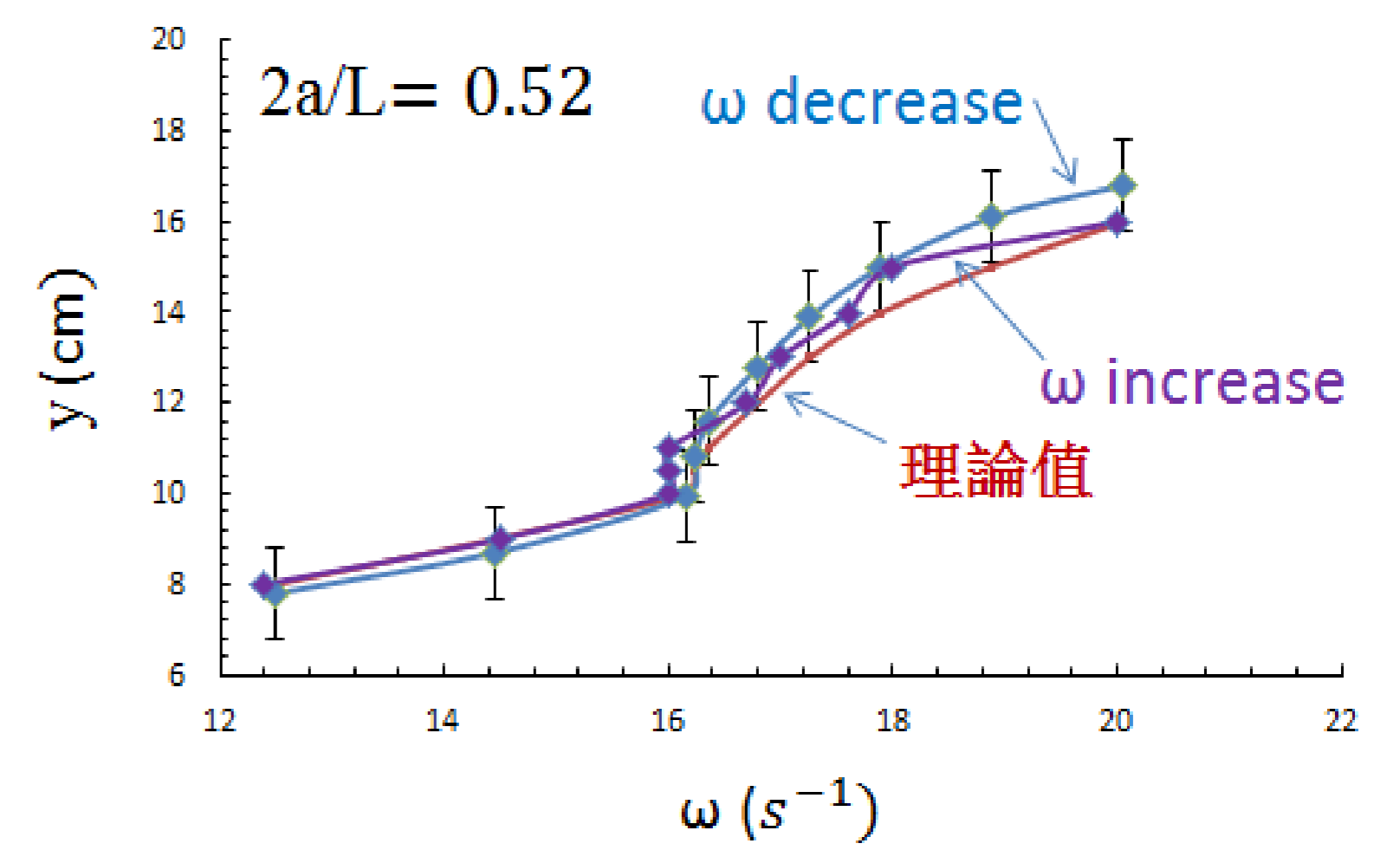
## 肆、結果與討論

### 一、U形管和三叉管實驗:

1. 圖七為(1)正以 $111.8\text{rpm}$ 轉動的U形管，右管液柱高度 $8.36\text{cm}$ ；實驗的結果取三位有效數字。(2)液體的轉彎點(管和管相接的地方)，都成 $90^\circ$ ，管的內半徑 $0.2\text{cm}$ ，液體在通過轉彎處，會有氣泡伴隨進入管中，影響液柱高度；量取液柱高度時採取斜面的中點的高度。



圖七:旋轉中的U形管，轉速 $111.8\text{rpm}$ 。

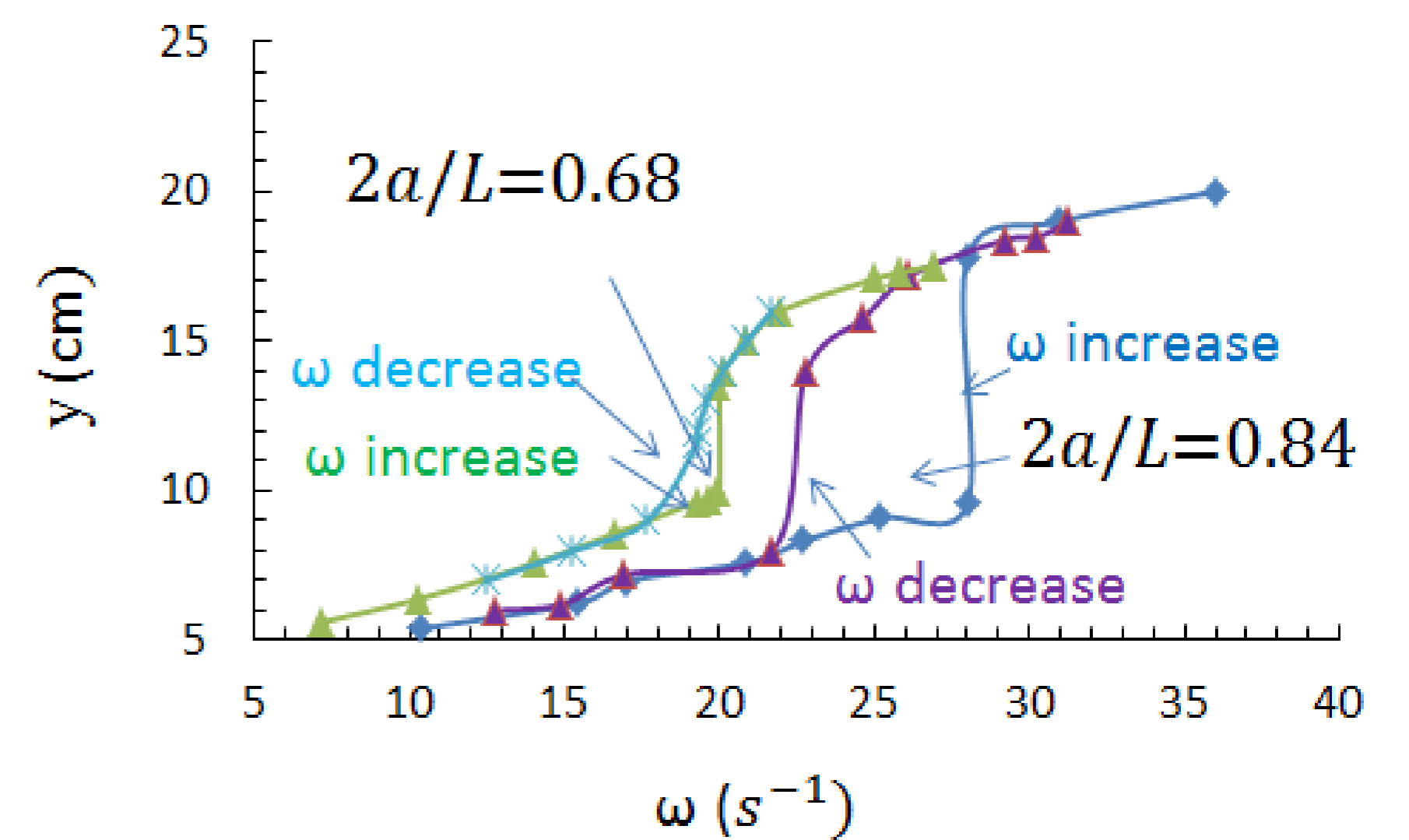


圖八:U形管 $a=3.25\text{cm}$ ，液柱高度 $(y)$ 隨轉速 $(\omega)$ 的變化。

2. 圖八為底部長度 $L=12.5\text{cm}$ ， $h=5\text{cm}$ ，管 $a=3.25\text{cm}$ ( $2a/L = 0.52$ )的U形管，裝水轉動時，液柱高度 $(y)$ 隨旋轉盤轉速 $(\omega)$ 的變化。

(1)轉速 $\omega = 16.16\text{s}^{-1}$ 時，水柱跳升 $1.8\text{cm}$ ，(2)液體移動速度小，黏滯的影響可忽略，(3)水柱跳升時氣泡進入管內，使得水柱高度的測量值偏大。

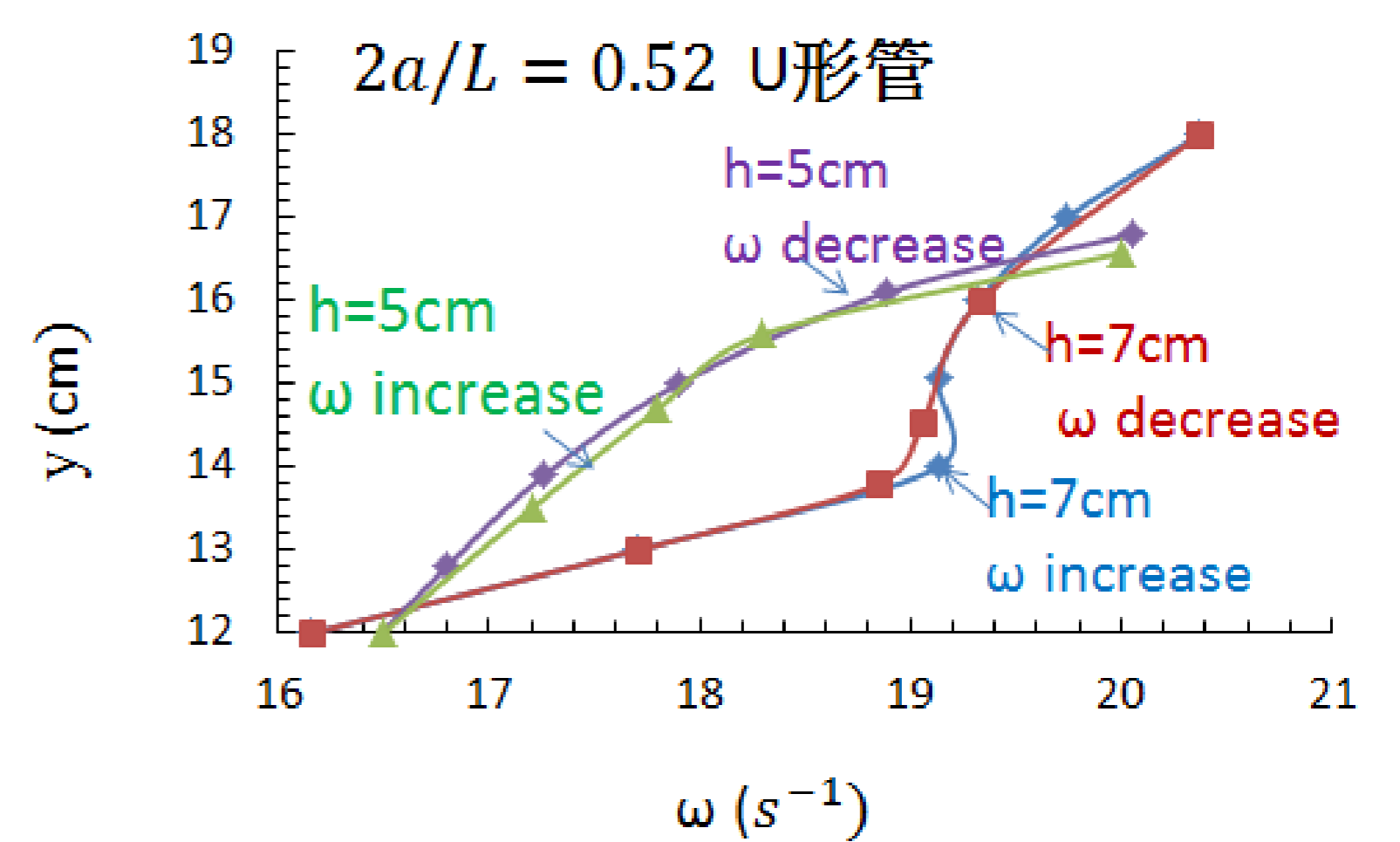
3. 圖九: $h=5\text{cm}$ 的U形管水柱高度 $(y)$ 隨轉盤轉速 $(\omega)$ 的變化，(1) $a=4.25\text{cm}$ ( $2a/L = 0.68$ )轉速漸增時，近軸管水柱高度由 $5\text{cm}$ 漸減，遠軸管水柱高度 $(y)$ 由 $5\text{cm}$ 漸增，在轉速 $\omega_c = 19.8\text{s}^{-1}$ 時，遠軸管水柱 $=10.0\text{cm}$ (近軸管 $y=0\text{cm}$ )突然跳升到 $y=13.5\text{cm}$ ；轉速漸減時，遠軸管水柱高度漸減，在轉速 $\omega = 19.3\text{s}^{-1}$ 時遠軸管水柱由 $y=11.6\text{cm}$ 降低到 $y_{min} = 9.75\text{cm}$ 。(2)  $a=5.25\text{cm}$ ( $2a/L = 0.84$ )， $\omega_c = 28.0\text{s}^{-1}$ 時，遠軸管水柱 $=10.0\text{cm}$ 突然跳升到 $y=18.0\text{cm}$ ；在轉速 $\omega = 23.2\text{s}^{-1}$ 時遠軸管水柱由 $y=11.6\text{cm}$ 降到 $y_{min} = 8.56\text{cm}$ 。水柱高度隨轉速的變化顯現出顯著的遲滯現象。(3) $2a/L$ 的值愈大，遲滯曲線的面積愈大。



圖九:U形管 $a=5.25\text{cm}$ 形成的遲滯曲線面積比 $a=4.25\text{cm}$ 遲滯曲線面積大。

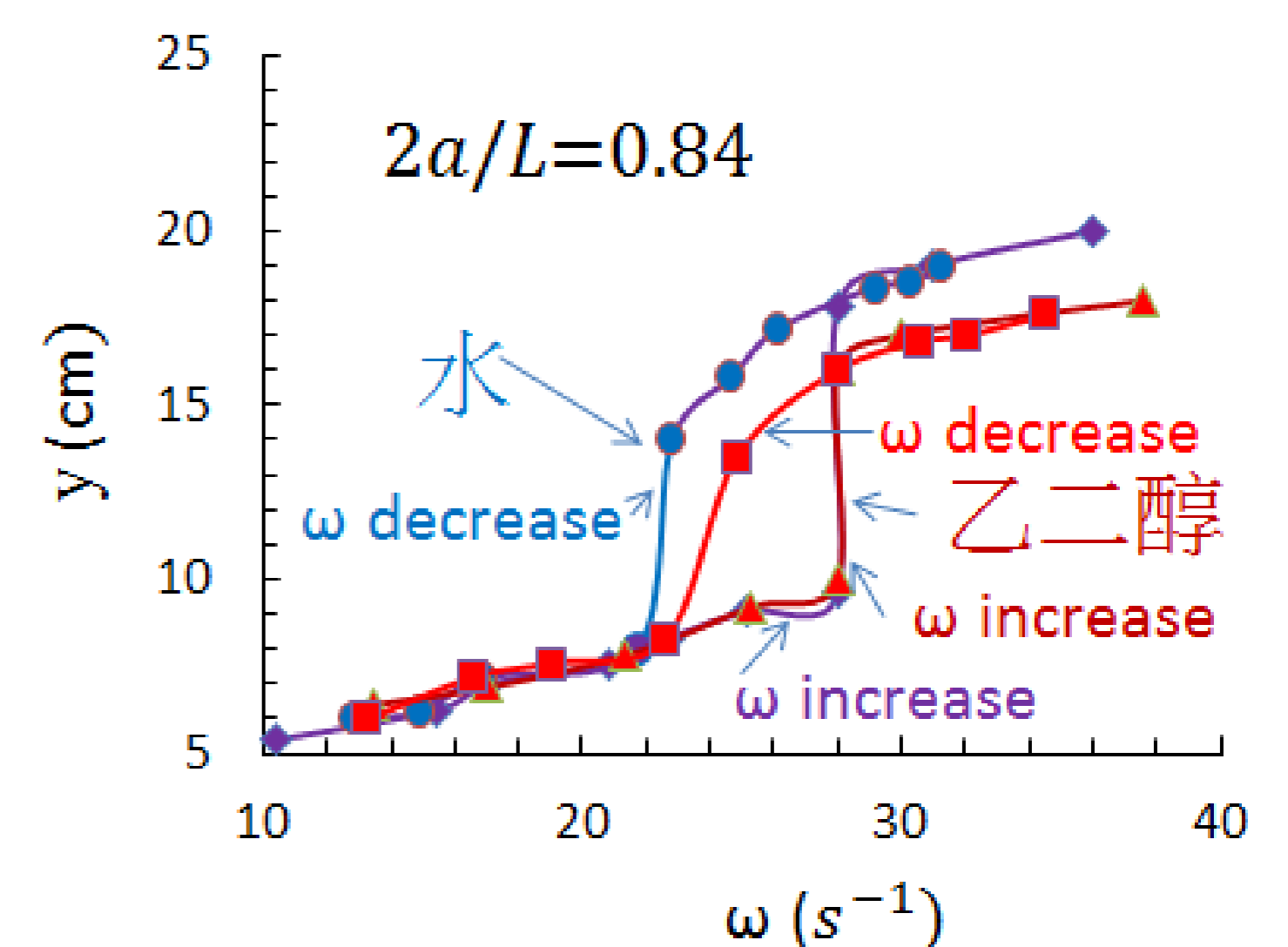
4.  $a=6.25\text{cm}$ ( $2a/L = 1.0$ )因大氣壓力作用，旋轉盤的轉速必須超過 $25400\text{rpm}$ ，兩管水柱才會上升。

5. (1)圖十: $a=3.25\text{cm}$ ( $2a/L = 0.52$ )， $h=7\text{cm}$ 的U形管裝水轉動時， $y = 14\text{cm}$ 時， $\omega_{max}^2 = 365.9\text{s}^{-2}$ ，代入公式(2)得 $y = 15.10\text{cm}$ ，公式(2-1)  $y_{min} = 14.56\text{cm}$ ，發生遲滯現象。 $h=5\text{cm}$ 則未發生遲滯現象。(2)液體的高度 $(h)$ 愈大，臨界轉速 $(\omega_c)$ 愈大，愈容易發生遲滯現象。



圖十:U形管盛水高度 $h=5\text{cm}$ 沒有遲滯現象， $h=7\text{cm}$ 發生遲滯現象。

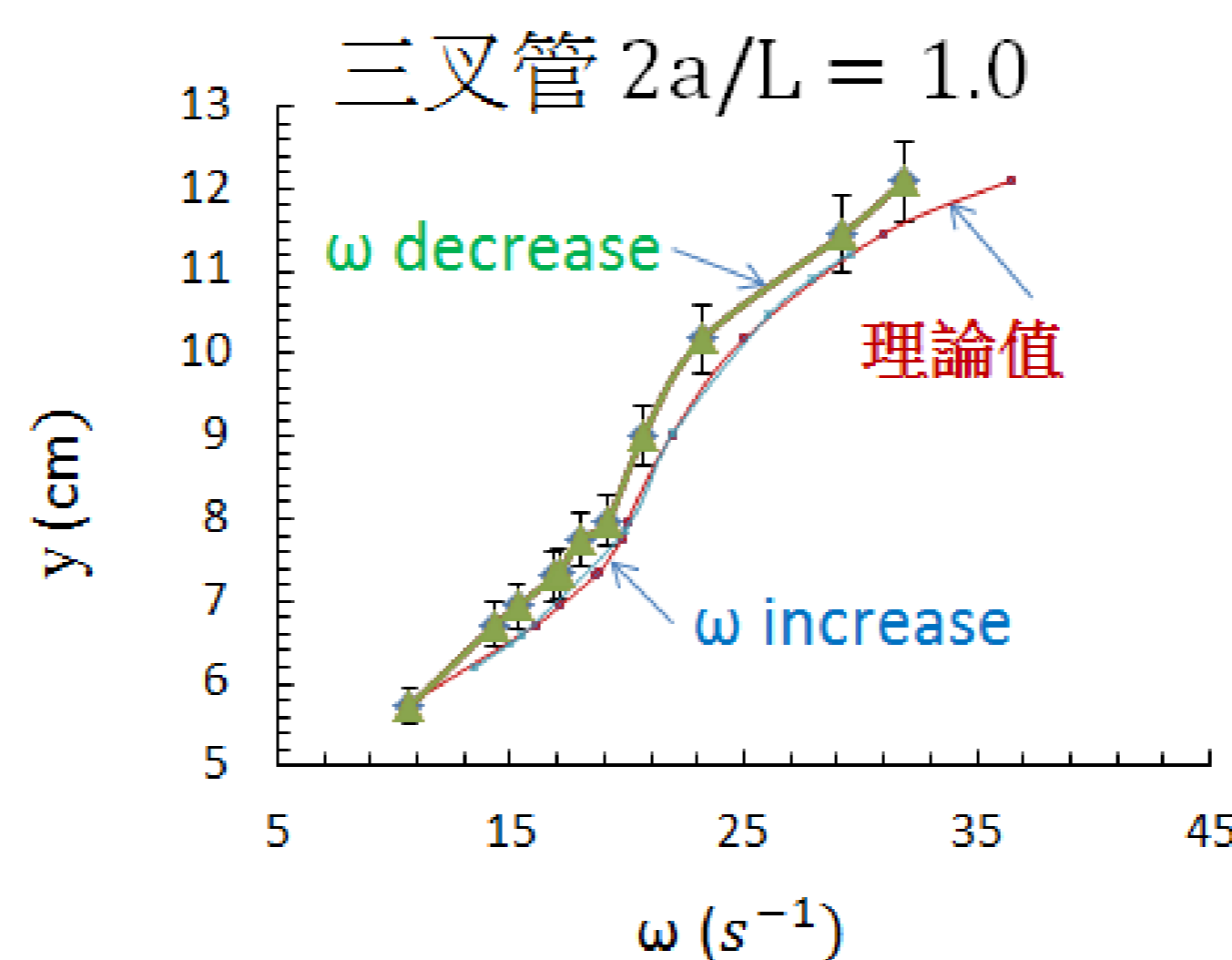
6. 圖十一為: $a=5.25\text{cm}$ 的U形管分別盛 $h=5\text{cm}$ 的水(黏滯係數 $\mu = 0.89\text{cp}$ )乙二醇( $\mu = 16.1\text{cp}$ )液柱高度隨轉速的變化。(1)水柱跳升 $8\text{cm}$ 的平均速度為 $v=52.8\text{cm/s}$ ，管內水的總長度 $\ell = 22.5\text{cm}$ ，管的半徑 $r=0.2\text{cm}$ 由帕穗定律計算，黏滯形成的水柱高度差 $0.02\text{cm}$ 。(2)乙二醇跳升 $6.02\text{cm}$ 的平均速度為 $v=40.6\text{cm/s}$ ，形成的液柱高度差 $h=2.12\text{cm}$ 。(3)甘油的黏滯係數高達 $2000\text{cp}$ 所以液柱沒有跳升、突降的遲滯現象，移動過程中，黏著管壁，大量空氣進入管中形成氣泡。(4)黏滯力只影響液體跳升或突降的高度，對發生跳升或突降的位置，沒有影響。



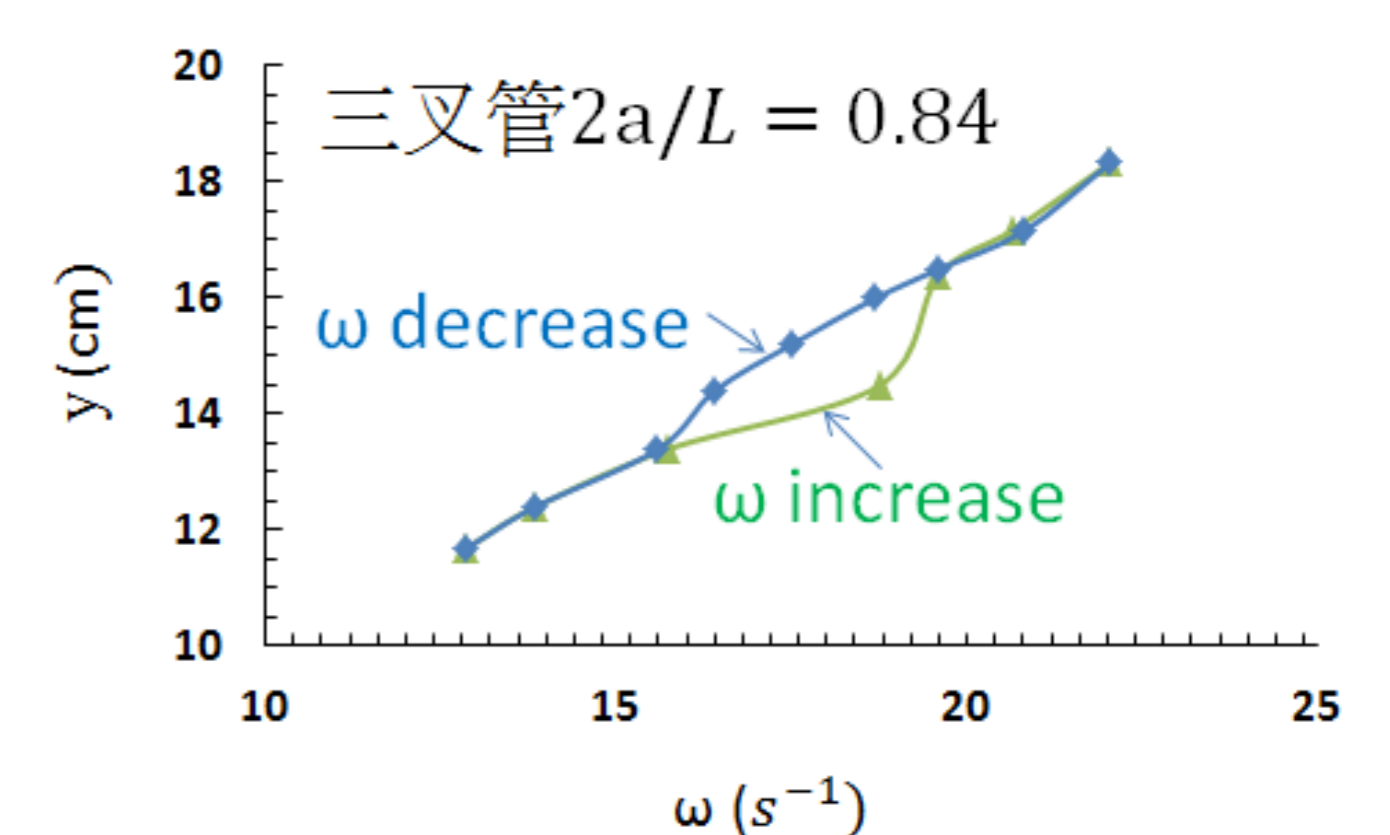
圖十一:水和乙二醇液柱高度隨轉速的變化。

7. 圖十二:底部長 $12.5\text{cm}$ 的三叉管繞中央軸( $2a/L = 1.0$ )轉動， $h=5\text{cm}$ ， $\omega = 21.95\text{s}^{-1}$ 時，水柱略為跳升，遲滯現象較不顯著。

8. 圖十三:三叉管轉軸距中央管 $1\text{cm}$ ( $a = 5.25\text{cm}$ ,  $2a/L = 0.84$ )轉動時，遲滯現象甚為顯著。



圖十二:三叉管盛水繞中央軸轉動，遲滯現象較不顯著



圖十三:三叉管盛水 $a=5.25\text{cm}$ ，遲滯現象甚為顯著。

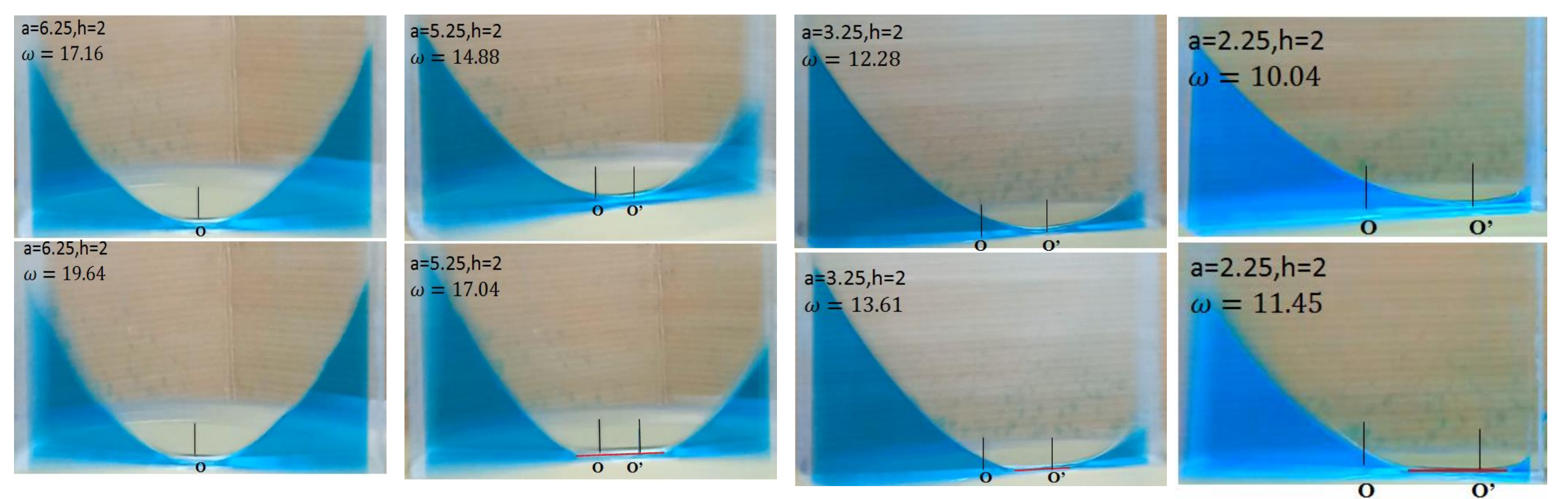
### 二、方形盒實驗:

1. 圖十四為盛水 $h=2\text{cm}$ ， $a$ 分別為(a) $6.25\text{cm}$ 、

(b) $5.25\text{cm}$ 和(c) $3.25\text{cm}$  (d) $2.25\text{cm}$ 的方形盒，轉盤轉動時，由側面攝影，擷取的畫面。



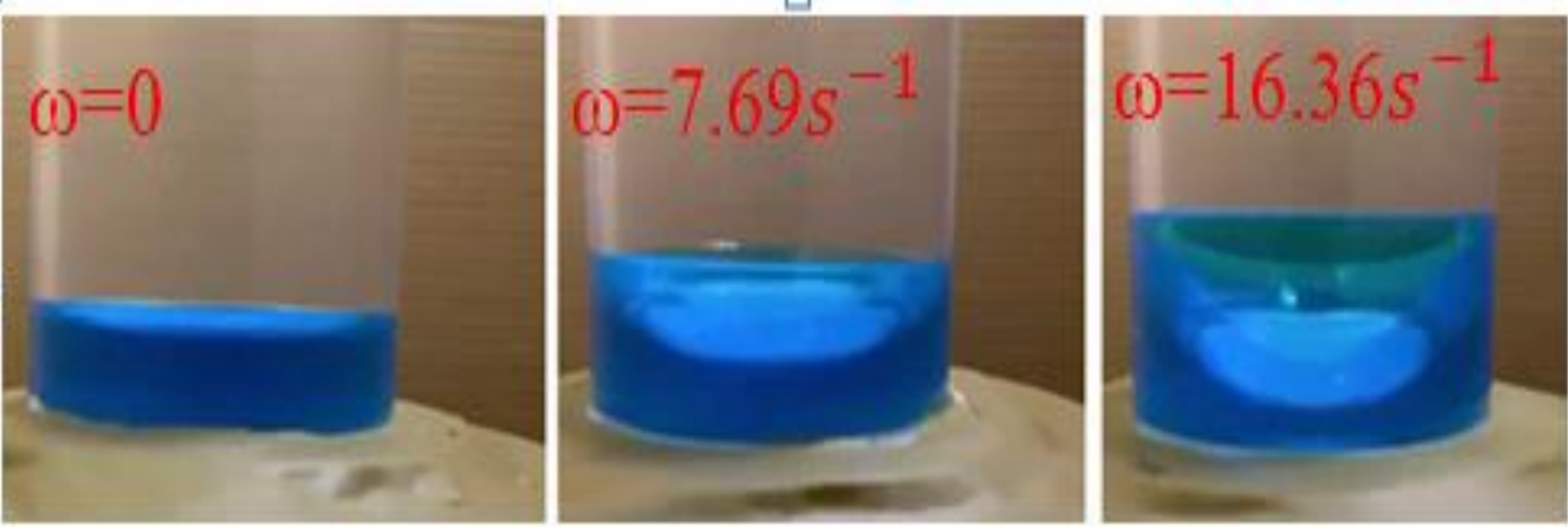
2. 方形盒盛水高度 $h=2\text{cm}$ ，轉速增加14%時，(a) $2a/L=1.0$ ，兩側對稱拉開，(b) $2a/L=0.84$ ，乾燥區 $r=3.25\text{cm}$ ，(c) $2a/L=0.52$ ，乾燥區 $r=2.43\text{cm}$ ，(d) $2a/L=0.36$ ，乾燥區 $r=3.69\text{cm}$ 。



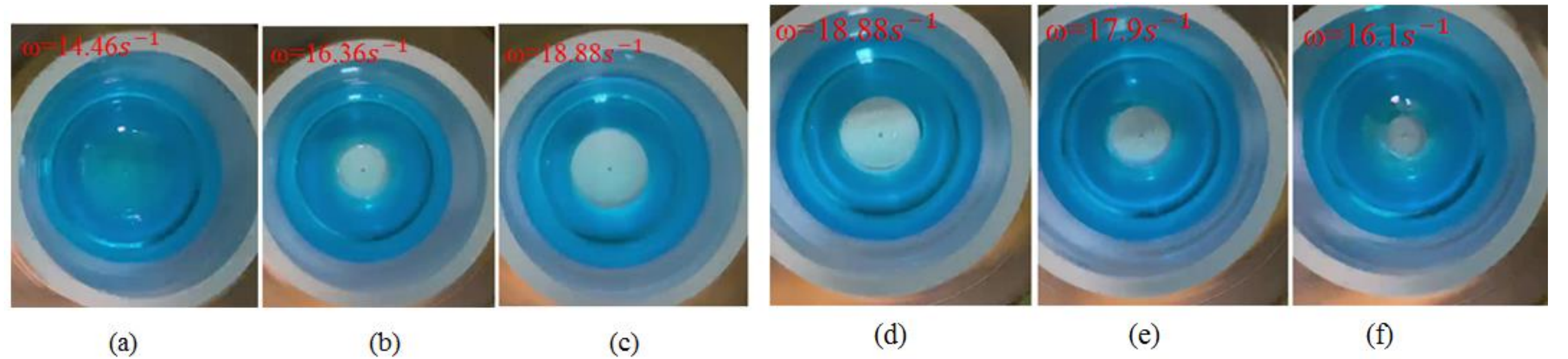
3.  $2a/L$ 值越接近0.50，乾燥區的長度越小，遲滯曲線的面積愈小。

圖十四:0和0' 分別為方形盒中央線和旋轉盤中心點， $2a/L$ (a)1.0,(b)0.84,(c)0.52,(d)0.36。

### 三、圓柱筒實驗:



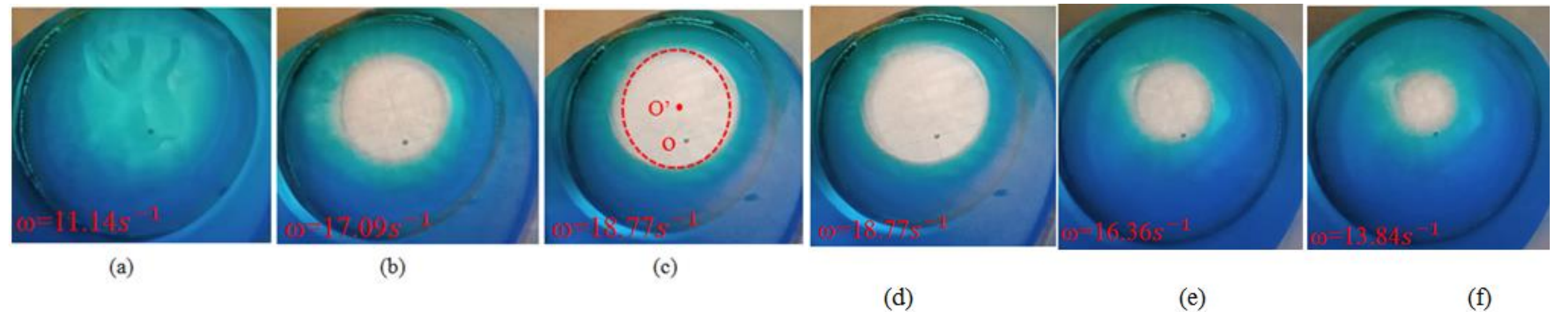
圖十五之1:圓柱筒繞中央軸轉動時，液面的變化。



圖十五之2: $a=6.25\text{cm}$ ，(a)~(c)轉速漸增時，圓柱筒底部乾燥區，出現圓形區域；(d)~(f)轉速漸減，乾燥區減少到極小值。



圖十六之1:圓柱筒 $a=2.25\text{cm}$ ，轉動時，液面的變化。

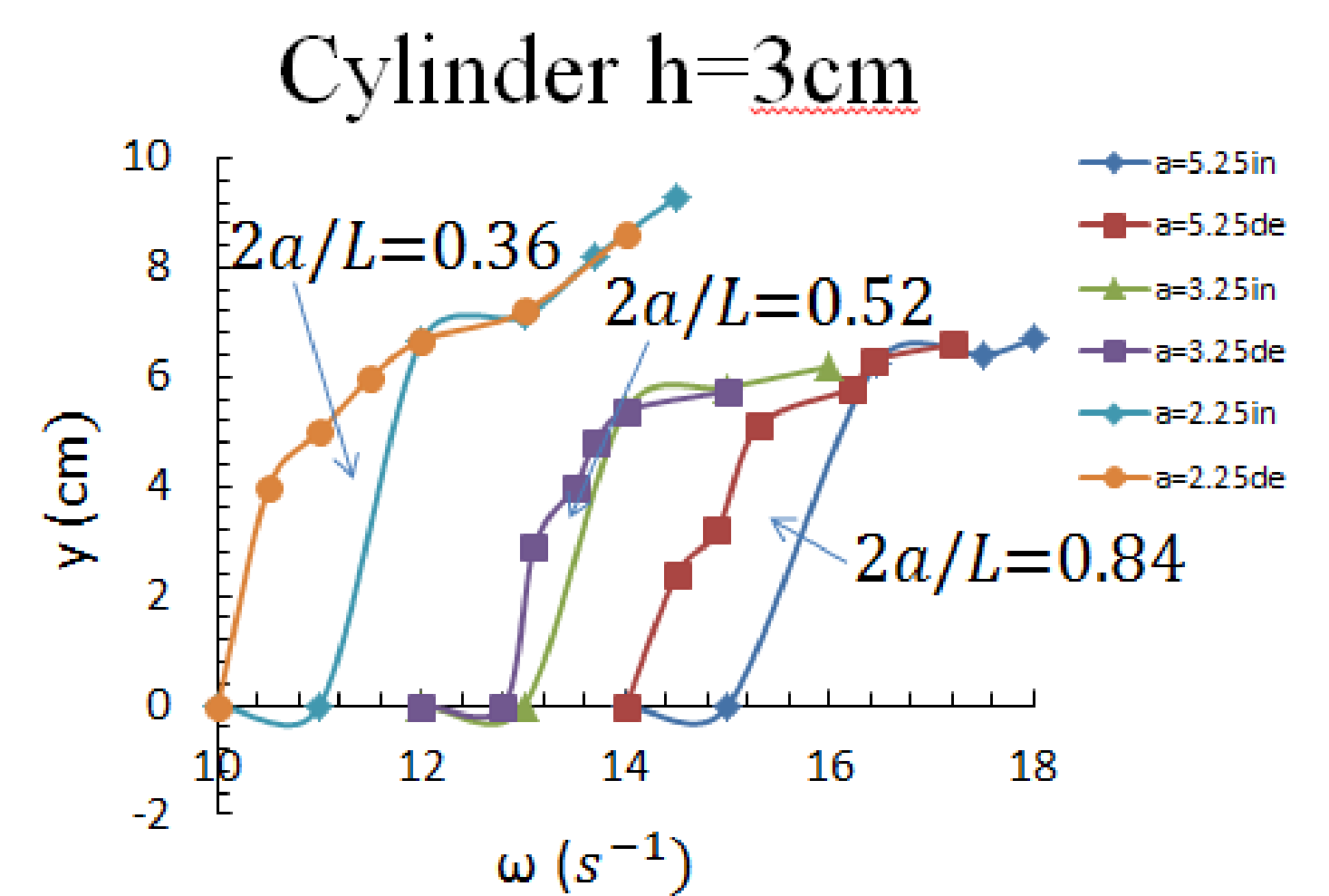


圖十六之2: $a=5.25\text{cm}$  (a)~(c)轉速漸增時，圓柱筒底部乾燥區，出現橢圓形；(d)~(f)轉速漸減時，橢圓形面積減到極小值。

1. 圖十五:水深3cm，旋轉盤轉速漸增 $\omega=16.16\text{s}^{-1}$ 時，容器底部液體突然向外擴增，出現圓形區域；轉速漸減時，圓形面積減少到極小值，然後消失，沒有遲滯現象。

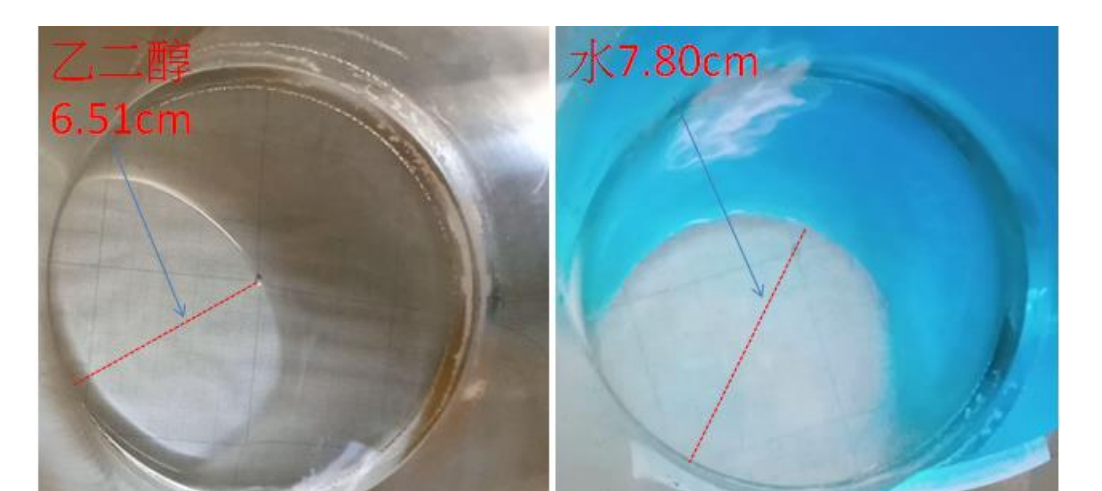
2. 圖十六:轉速漸增時，容器底部液體突然向外擴增，出現橢圓形乾燥區；轉速漸減時，橢圓形面積漸減，遲滯現象類似於方形盒 $a=5.25\text{cm}$ 的轉動 [3, 4]。

3. 圖十七:圓柱筒盛水3cm高， $2a/L$ 值愈接近0.50，遲滯曲線的面積愈小。



圖十七:圓柱筒 $2a/L=0.52$ ，遲滯曲線的面積最小。

4. 圖十八:圓柱筒轉軸和旋轉盤中心點距離 $\frac{2a}{L}=0.52$  (a)盛乙二醇 (b)盛水， $h=3\text{cm}$ ，轉速 $\omega=16.8\text{s}^{-1}$ 形成的橢圓(部分)乾燥區，乙二醇黏滯係數為水的18.1倍，液體貼著筒底流動，顯現黏滯的影響比在管中流動大。

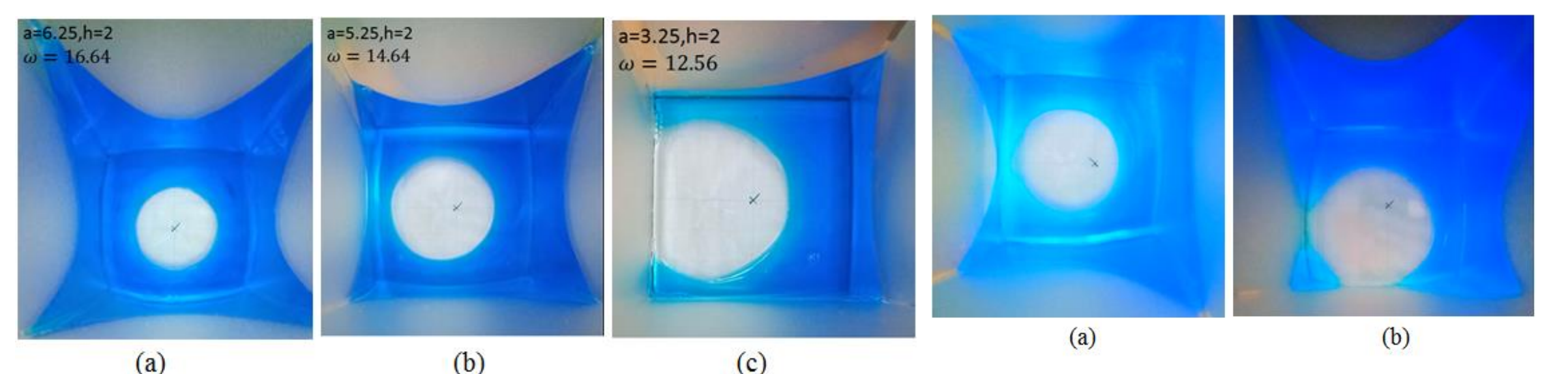


圖十八 (a)乙二醇(b)水，乾燥區面積不同。

### 四、方形筒實驗:

1. 圖十九:(a)~(c) $a=6.25\text{cm}$ 、 $5.25\text{cm}$ 和 $3.25\text{cm}$ ，乾燥區以及遲滯曲線的變化和圓柱筒相同。

2. 圖二十:(a)方形筒中心點向右方移動2cm，(b)方形筒中心點向右上 $30^\circ$ 方向移動2cm；兩者乾燥區以及遲滯曲線的變化相同。



圖十九:方形筒的乾燥區圖樣和圓柱筒相同。

圖二十:方形筒移動的方位不同。

### 伍、結論

1. U形管和三叉管轉動由慢漸快時，管內液柱高度在特定轉速時會大幅度的升高，轉速由快漸慢時，液柱高度會小幅度的下降的遲滯現象，黏滯力只影響液柱升降高度，不影響液柱發生跳升或降低的位置；方形盒轉動時，盒的底部出現乾燥區也顯現遲滯現象。

2. 圓柱筒和方形筒轉動也有遲滯現象，隨著轉軸的位置不同，乾燥區出現圓形、橢圓形和部分的橢圓。

2. 方形筒轉動也有遲滯現象，轉軸的位置不同，液面出現圓形、橢圓形和部分的橢圓。

### 陸、參考資料

1. Bruce Denardo, Brad Barber, Chris Folley, and William Wright, 1989, *Am. J. Phys.* **57**, 1126-1130
2. Bruce Denardo, Brad Barber, Chris Folley, and William Wright, 1990, *Am. J. Phys.* **58**, 631-635
3. Paul Menker, and Andrzej Herczynski, 2020, *Am. J. Phys.* **88**, 475-482
4. Thomas R.N. Jansson, Martin P. Haspang, and Tomas Bohr, 2006, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 174502
5. Keita Iga, Sho Yokota, Shunichi Watanabe, 2014, *Fluid Dyn. Res.* **46**, 1-10