

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

佳作

051816

共振下竟然不會振----探討反共振的成因

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者： 高二 張恆齊 高二 張勻敬 高二 陳立珩	指導老師： 陳萬城 吳旭峯
---	-----------------------------

關鍵詞：反共振、自然頻率、強迫振動

摘要

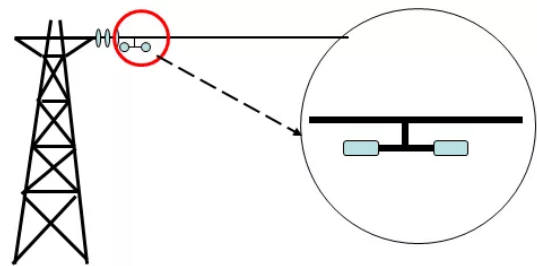
藉由我們自行設計的主振動系統與吸收器，來探討兩者頻率一樣時，在外加驅動力下，是否外加頻率等於主系統原先的自然頻率時，會出現主系統不振動，因為我們實驗的驅動力並不是直接作用在主系統上，造成我們的實驗結果與預期有差異，而且這個反共振頻率的偏移量與兩者之間的質量比值有密切的關係，主系統與吸收器的質量差距越大，反共振頻率越會接近原先的自然頻率。又由於原先是單一自然頻率，變成兩個物體的系統此時自然頻率由原先的一個變成兩個，而且兩者頻率的間距也與兩者的質量比有密切關係，兩者質量比(吸收器 m_1 與主系統質量 m_2 比)， $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 比值若越大，兩個自然頻率離得更遠。

壹 研究動機

日常生活中常看到電線桿上有此裝置(如圖一)，請教台電人員，我們發現這個叫防震錘(如圖二)，目的是防止電纜線在強風中因上下震動而損害，造成纜線壽命變短或變質，因為想知道其中原理，我們上網查資料，發現它是應用"反共振"原理來減振的。



圖一：高壓電纜線



圖二：防震錘

所謂的反共振，就是當吸收器(防震錘)的頻率跟主系統(電纜線)的頻率一致時，會造成振幅減小的現象。乍聽之下，直覺根據所學兩者頻率一樣，應該會共振，因此沒有阻止纜線震動功能，纜線會振得更厲害，怎麼可能會有防震效果？此外，101大樓為避免因為風產生的晃動或為減少地震照成的晃動，所以安裝阻尼球，也是設計球的擺動頻率與大樓的自然頻率一致，所以我們決定對這個現象做一探討。



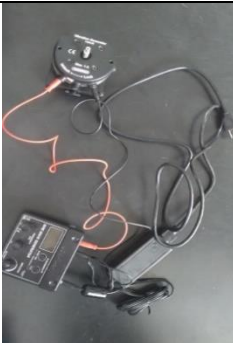
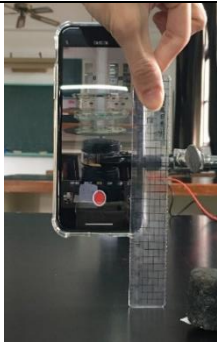
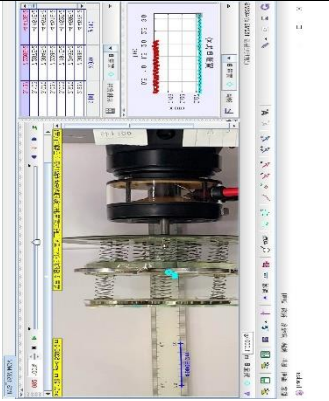





另外，根據反共振原理做成的元件稱為動力吸振器，常常用在減振方面，比如汽車的動力系統中，解決這一問題的方案之一就是安裝動力吸振器，由於動力吸振器是一個輔助的部件，因此當系統出現"共振"問題時，不需要重新設計和測試系統，既節約費用，又省時省

力。我們希望藉由此次科展來了解”反共振”，並期許能找出更多在日常生活中可以運用上此原理的地方。

貳 研究目的

1. 建立單一系統(稱為主系統)，找出自然頻率
2. 在主系統與次系統(稱為吸收器)有相同頻率前提下，改變吸收器的質量，探討驅動力施不同頻率，主系統與吸收器的運動行為。
3. 將主系統與吸收器在相同頻率下，探討兩者質量比值不同下，系統自然頻率的間距與反共振頻率與質量比值是否有關或其關係為何？

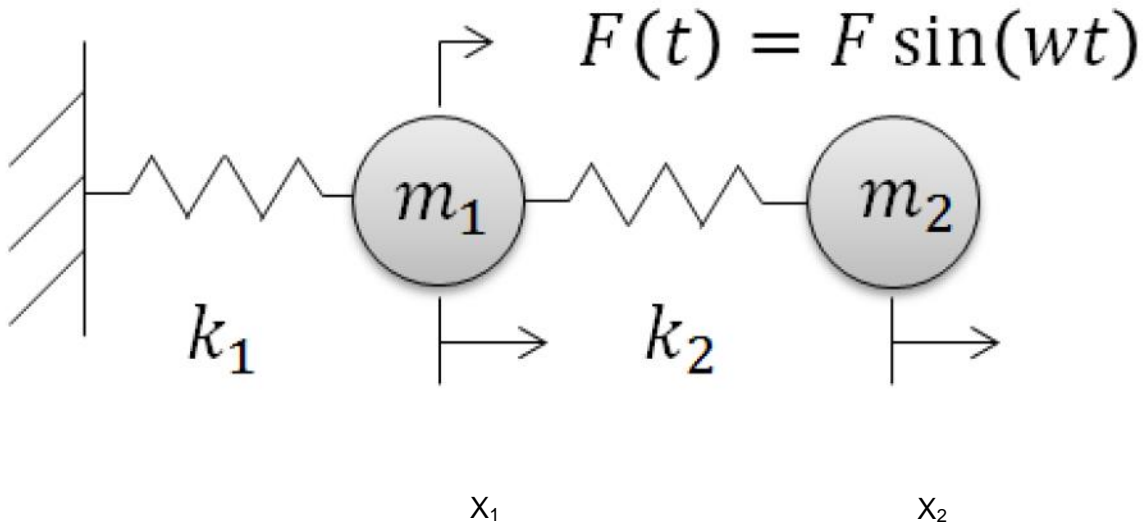
參、研究設備及器材

彈簧	砝碼	弦上駐波起波器 (當驅動力)	攝影器材
			
Tracker 軌跡追蹤軟體	架高鐵架	電腦	電子秤
			
主系統(CD+彈簧+砝碼)	吸收器(CD+彈簧+砝碼)		
			

肆、研究過程及方法

一、反振動理論：

忽略阻力下，在主系統 m_1 施加驅動力強迫驅動，在某一時刻 t ，考慮主系統 m_1 與吸收系統 m_2 的兩個物體其位移分別如圖



由 $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$ ，知道有以下之方程式

對於主系統有

$$-k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_0\sin(\omega t) = m_1a = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$\Rightarrow m_1x_1'' + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0\sin(\omega t) \dots \dots \dots (1)$$

對於吸收系統有

$$k_2(x_1 - x_2) = m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + k_2(x_2 - x_1) = 0 \dots \dots (2)$$

因為振動為簡諧運動，所以假設其解為下列型式

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin(\omega t) \\ x_2 = X_2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

表示系統均以角頻率 ω 振動。

將假設解帶入(1)(2)中，並化簡成下列兩個式子

$$(K_1 + K_2 - \omega^2 m_1)X_1 - K_2 X_2 = F_0$$

$$-K_2 X_1 + (-m_2 \omega^2 + K_2)X_2 = 0$$

解上兩式可以得出

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2)}{[m_1 m_2 \omega^4 - \{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\} \omega^2 + k_1 k_2]}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{[m_1 m_2 \omega^4 - \{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\} \omega^2 + k_1 k_2]}$$

如果施加的角頻率 $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ，則上式中 $X_1 = 0$ 且 $X_2 = -\frac{F_0}{k_2}$

則可看出主系統的位移 $x_1 = X_1 \sin(\omega t) = 0$

$$\text{吸收系統的位移 } x_2 = X_2 \sin(\omega t) = -\frac{F_0}{k_2} \sin(\omega t)$$

因為吸收系統只用 k_2 彈簧連結，所以吸收系統受力為 $-k_2 x_2 = F_0 \sin(\omega t)$

主系統受到驅動的外力 $F_0 \sin(\omega t)$ 以及 k_2 彈簧的反作用力 $-F_0 \sin(\omega t)$ ，其合力為零，所以就不動。

又令 X_1 或 X_2 的分母為零，代表此時為共振頻率

在我們刻意調整吸收系統的頻率使兩個系統的頻率一致

$$\text{即 } \omega_n = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \text{ 且令 } \mu = \frac{m_2}{m_1}$$

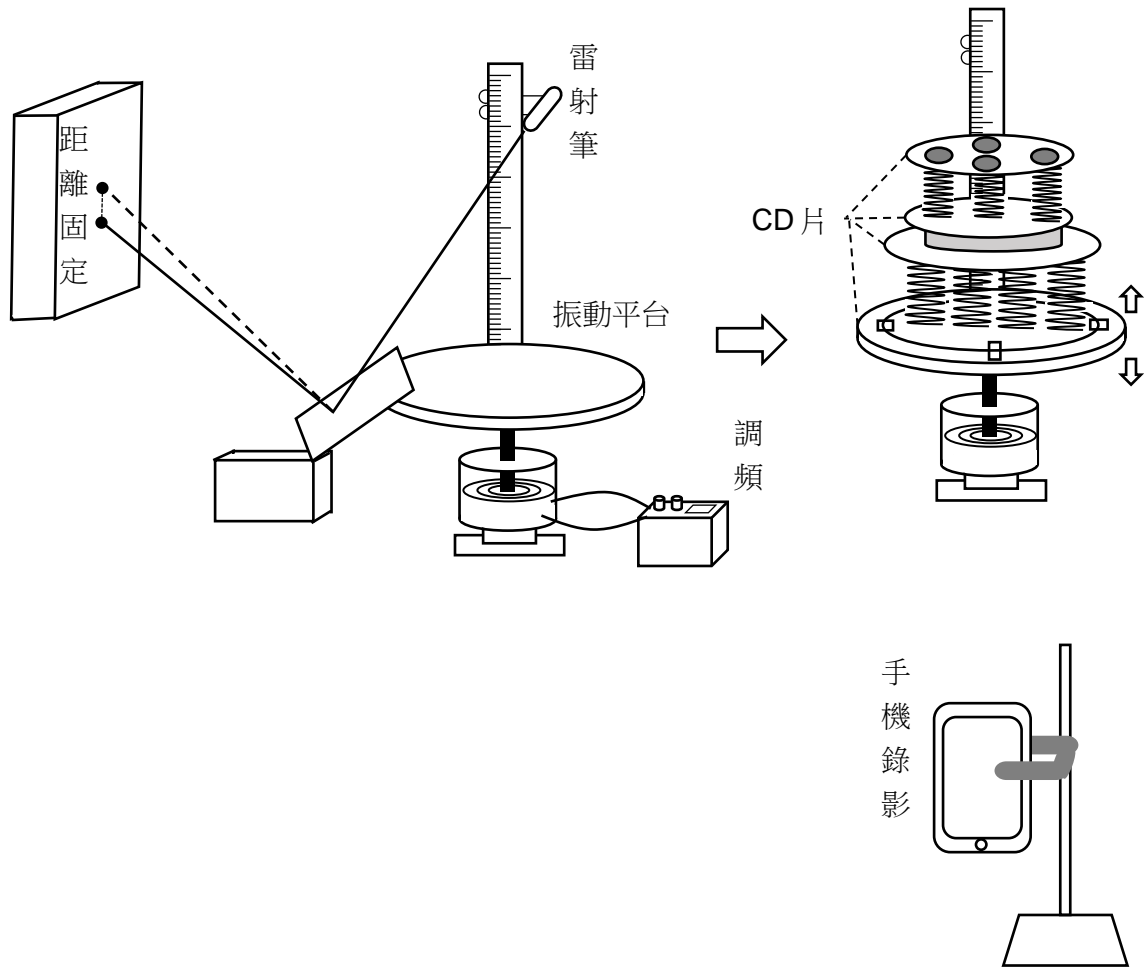
則 X_1 的分母變成 $\omega^4 - (2 + \mu)\omega_n^2 \omega^2 + \omega_n^4 = 0$

可以得出 $\omega^2 = \omega_n^2 [1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu}]$ 代表此時系統自然頻率會由一個變成兩個

且 $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 值越大，兩個自然頻率會愈分開


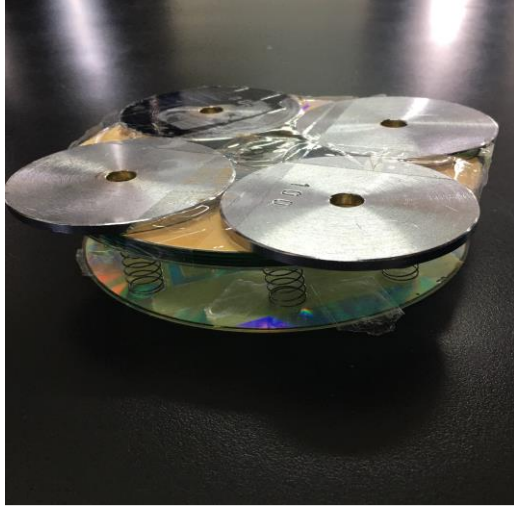
伍、研究結果

(一)為確保在不同頻率下振源提供的振幅都一致，我們利用雷射光打到反射鏡上，利用光槓原理，在遠距離處置一屏幕，觀察雷射光形成的振幅都維持一定，實驗簡圖如下左圖所示，然後將整個儀器至於震動平台上面並用錄影機錄影分析(如右下圖)。

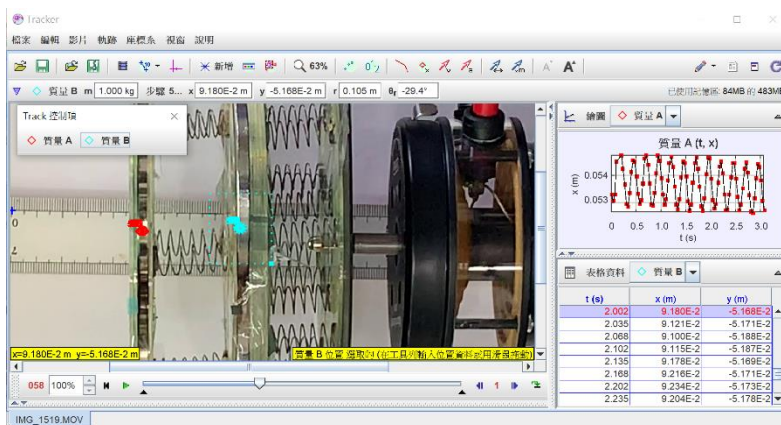


(二) 第一代反共振器材

1. 實驗器材

	主系統(12根彈簧與光碟片及砝碼所組成)	吸收器(6根彈簧與光碟片及砝碼組成)
質量	507g	252g
自然頻率	7.2Hz	7.2Hz
圖示		

1. 把主系統與吸收器分別放在共振平台上，由振源處施不同頻率，觀察振幅最大時的頻率即為自然頻率。
2. 將主系統與吸收器組合，由振源處從頻率 4.0Hz 開始，然後每次頻率增加 0.2Hz 輸入，看整個設備的振動情形，並錄影起來，然後用追蹤軟體分析主振動系統與吸收系統的振幅情形(如圖三)，得出如下表的情形：(圖中藍色為共振區域情形，因為整個結構大幅振動，彈簧會出現左右晃，致系統不穩，數字非真實數字)

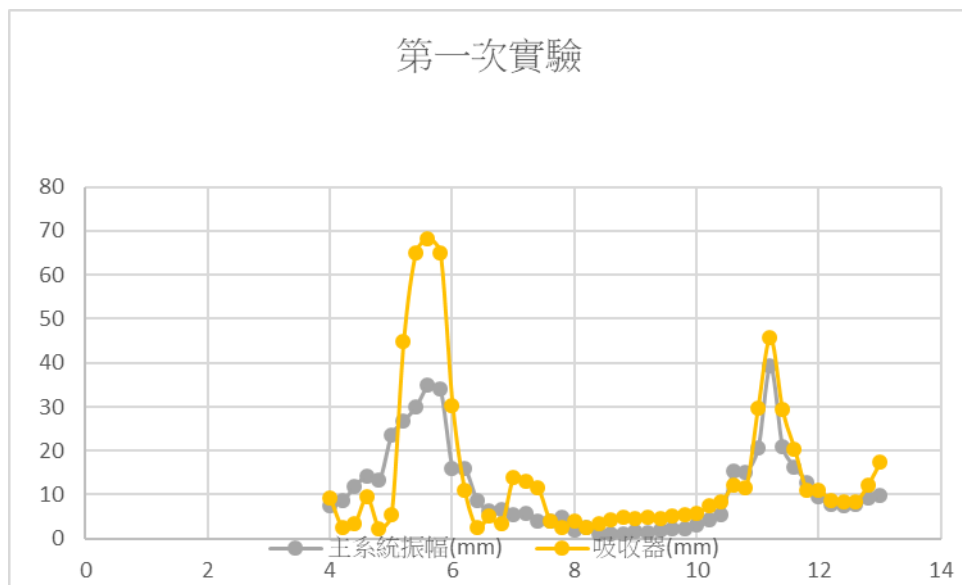


圖三:追蹤軟體分析

振源頻率(Hz)	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0
主系統振幅(相對單位)	7.66	8.55	11.90	14.25	13.25	23.50	26.80	30.00	34.80	34.00	16.10	16.00	8.80	6.45	6.60	5.50
吸收器(相對單位)	9.25	2.60	3.55	9.45	2.35	5.45	45.00	65.00	68.30	65.00	30.40	11.10	2.60	5.10	3.40	14.00

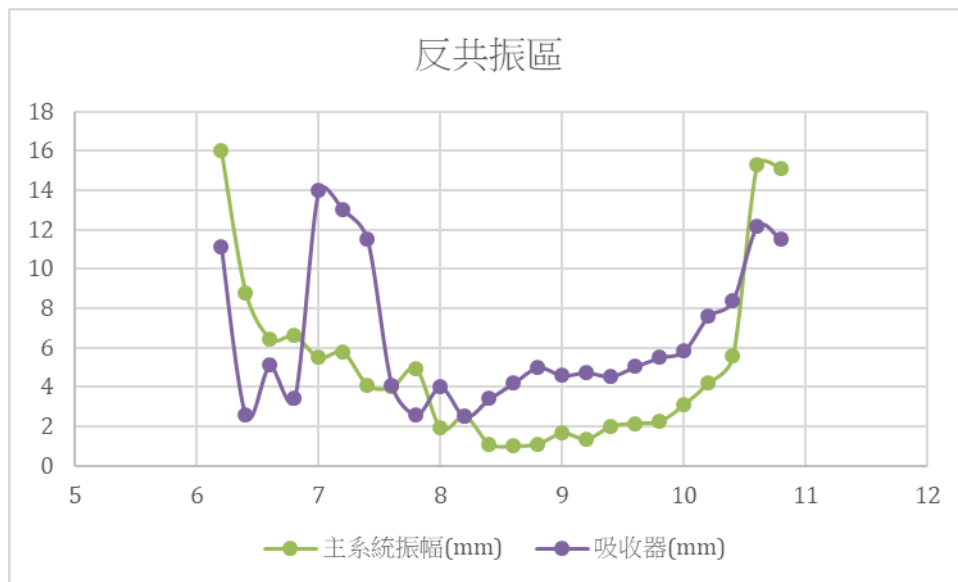
振源頻率(Hz)	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	10.0	10.2
主系統振幅(相對單位)	5.75	4.10	4.00	4.90	1.90	2.50	1.10	1.00	1.10	1.65	1.35	2.00	2.15	2.25	3.10	4.20
吸收器(相對單位)	13.00	11.50	4.10	2.60	4.00	2.50	3.40	4.20	5.00	4.60	4.75	4.55	5.05	5.50	5.85	7.60

振源頻率(Hz)	10.4	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	-	-
主系統振幅(相對單位)	5.55	15.30	15.10	20.55	39.20	20.90	16.30	12.90	9.50	7.70	7.40	7.70	9.20	9.80	-	-
吸收器(相對單位)	8.40	12.15	11.50	29.80	45.60	29.40	20.30	11.00	11.00	8.80	8.50	8.50	12.30	17.40	-	-



實驗中發現：

1. 系統有兩個區域會大幅振動，此時就是共振現象，因我們是固定喇叭的振幅，所以在靠近系統共振的地方，就會大幅振動，系統也會出現左右晃動情形，因此無法找到真正共振頻率的值。
2. 如果將共振區的振幅拿掉，專注在主系統原先自然頻率(7.2Hz)附近的振動情形，會變成下圖




此結果與預期的結果有很大的差異性，我們希望在輸入頻率為 7.2Hz 時，主系統不會振動，或相對的最不會振動，但整個頻率跑掉，是在 8.6Hz 附近時主系統才是最不振動的情形。

- 我們推測上述實驗與理論不吻合的原因是因為理論建立在忽略系統的重量且沒有阻力的情形，單一物體在鉛直方向雖然有受重力，其振動亦為簡諧運動，可以想成光滑水平面般的運動，但是我們吸收系統與主系統兩者的重量比為 1:2，當擺上吸收器時，主系統的彈簧又會額外再多受吸收器的重量，導致彼此關係變成複雜，為了解決這個問題，我們盡量增加主系統的重量且用彈力常數較大的彈簧，使得擺上吸收器時，主系統的彈簧幾乎不會再壓縮，而且也盡量用質量較小的吸收器。

第二代反共振器材

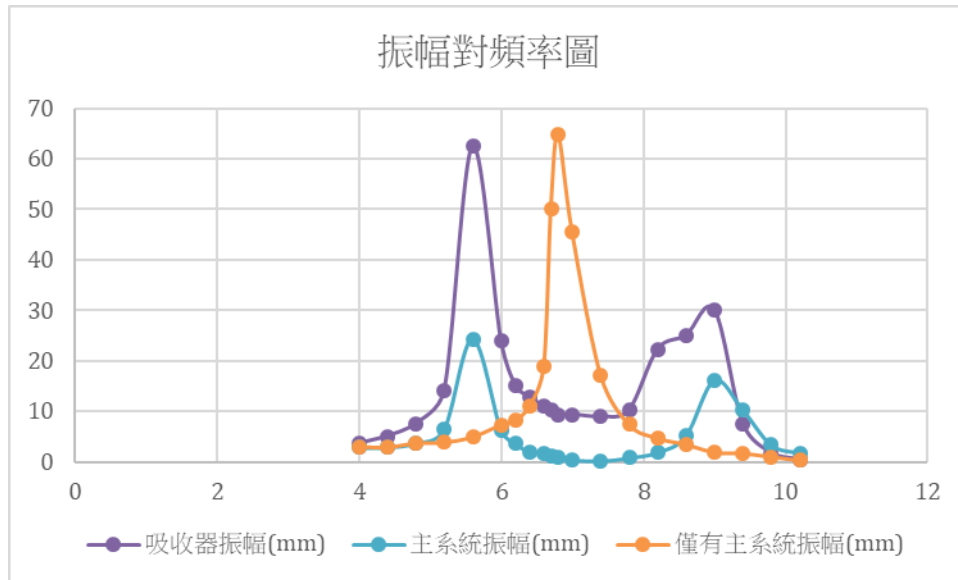
1. 實驗器材

	主系統(以較硬的彈簧 12 根並聯)	吸收器(較軟的彈 4 根並聯)
質量	1085g	217g
自然頻率	6.8Hz	6.8Hz
圖示	 <p>(下方為主系統，上方為吸收器)</p>	

1. 仿之前實驗方法，找出主系統的自然頻率並找出整個實驗器材的自然頻率與反共振頻率。
2. 我們將輸入的頻率分為「非共振區時」與「共振區時」，在非共振區時以固定喇叭振幅的方式看其振動情形，在共振區時因為吸收能量關係，而且我們發現壓縮彈簧是用來壓縮的不能讓它伸長，會有不一樣的彈力常數，所以我們盡量調小輸入的振幅，找出共振頻率。
3. 仿之前方式畫出不同頻率下主系統與吸收器的振幅對頻率關係圖，資料與圖形如下圖。

振源頻率(Hz)	4.0	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.2	6.4	6.6	6.7	6.8	7.0	7.4	7.8
吸收器振幅(相對單位)	3.65	5.08	7.60	14.08	62.46	23.89	15.09	12.84	11.01	10.20	9.33	9.35	8.93	10.25
主系統振幅(相對單位)	2.80	2.90	3.70	6.40	24.30	6.30	3.65	2.00	1.75	1.15	0.80	0.45	0.20	0.85
僅有主系統振幅(相對單位)	3.00	2.90	3.70	3.85	4.95	7.35	8.30	11.05	18.95	50.00	64.80	45.45	17.20	7.40

振源頻率(Hz)	8.2	8.6	9.0	9.4	9.8	10.2
吸收器振幅 (相對單位)	22.23	25.00	30.00	7.53	1.75	0.40
主系統振幅 (相對單位)	1.90	5.15	16.15	10.30	3.40	1.75
僅有主系統 振幅(相對 單位)	4.70	3.45	1.90	1.70	1.00	0.30



(共振區與非共振區因為喇叭振幅不一致，所以此圖無法比較共振區與非共振區振幅)

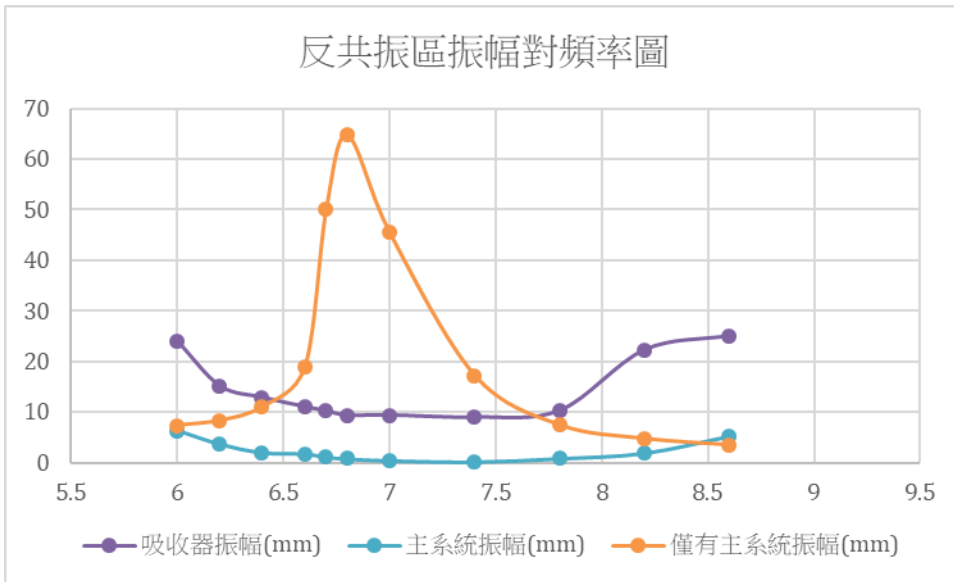
從圖中可看出系統有兩個共振頻率分別在 5.6Hz 與 9.0Hz 附近，兩者之間的頻率間距變得比較小。

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 值越大，兩個自然頻率會愈分開

現在的 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{217}{1085} = 0.2$ ，自然頻率為 5.6Hz 與 9.0Hz

第一次實驗 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{252}{507} = 0.5$ ，自然頻率為 5.6Hz 與 11.2Hz

4. 如果只看反共振區域附近的情形, 則如下圖



主系統在 7.4Hz 附近最不會振動此時吸收器的運動方向剛好與振源輸入的方向相反達到抵銷主系統的運動, 雖然不是剛好如理論所推導的在 6.8Hz, 但比(二)中的效果來的好, 如果我們能在加大主系統與吸收系統的質量比, 相信會得到更好的結果。

在兩次實驗中, 我們發現整個系統振動頻率在共振區的時候, 會導致大幅震動, 甚至出現明顯的左右晃動情形。為了能讓共振區振幅減小, 使圖表能夠呈現出真實數據, 並避免共振平台承受不住共振區的巨大振幅而導致系統解體, 因此我們想利用電磁感應原理模仿阻尼器吸收能量, 將吸收器改裝, 在總質量不變, 用強力磁鐵使其在鋁管內上下振動, 藉由法拉第感應定律下讓振幅減小。設計圖如下 :



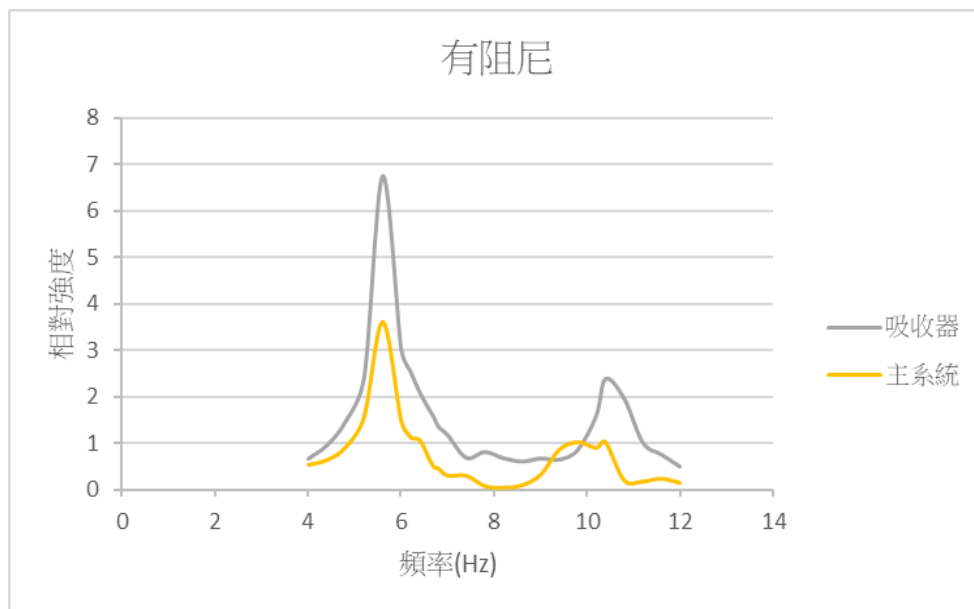
但是我們發現利用法拉第感應定律產生的阻力太小，無法產生明顯的阻尼效果，只好改成吸收器運動時與鋁管摩擦產生阻力，以下為有阻尼的情形所做的實驗：

我們固定與實驗二不考慮阻尼時一樣的喇叭振幅(因阻尼效果減低系統共振區能量，所以不必減低喇叭在共振區時輸入的振幅)

仿之前方式畫出不同頻率下主系統與吸收器的振幅對頻率關係圖，資料與圖形如下

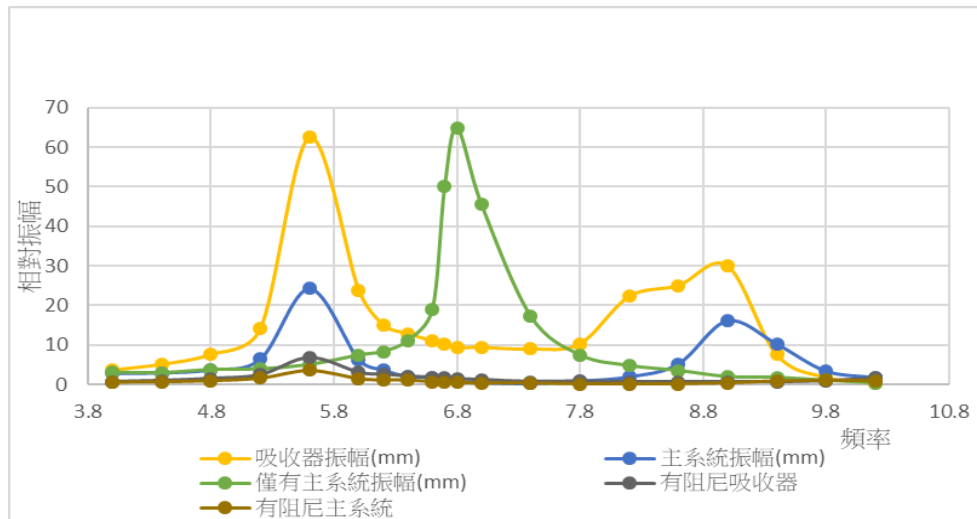
振源頻率(Hz)	4.0	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.2	6.4	6.6	6.7	6.8	7.0	7.4	7.8
吸收器振幅 (相對單位)	0.665	0.955	1.465	2.415	6.75	3	2.54	2.085	1.725	1.56	1.355	1.17	0.685	0.81
主系統振幅 (相對單位)	0.52	0.625	0.9	1.565	3.61	1.46	1.12	1.05	0.65	0.475	0.44	0.285	0.285	0.06

振源頻率(Hz)	8.2	8.6	9	9.4	9.8	10.2	10.4	10.8	11.2	11.6	12
吸收器振幅 (相對單位)	0.675	0.605	0.67	0.645	0.855	1.595	2.385	1.96	1.015	0.755	0.495
主系統振幅 (相對單位)	0.025	0.08	0.305	0.845	1.01	0.885	1.01	0.185	0.16	0.22	0.13



我們發現在共振區的地方因為受到明顯的阻力，所以振幅不會太大，一樣的系統有兩個自然頻率，且也會有反共振的位置。

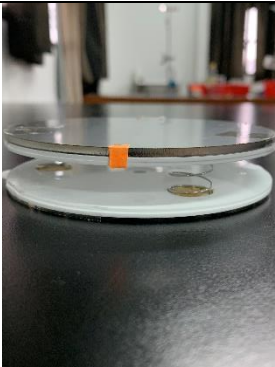
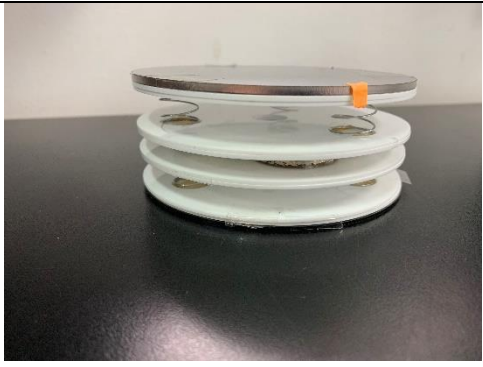
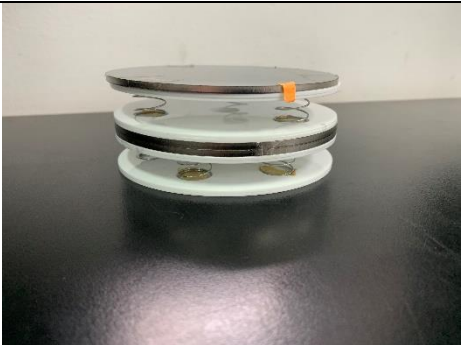
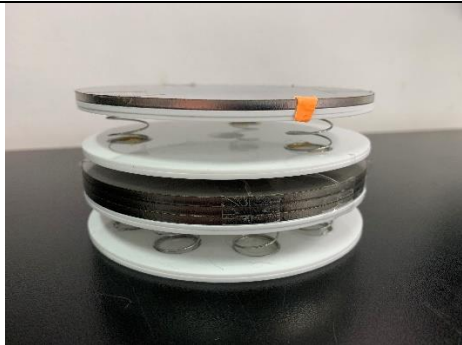
將有無阻尼實驗之結果作疊圖分析

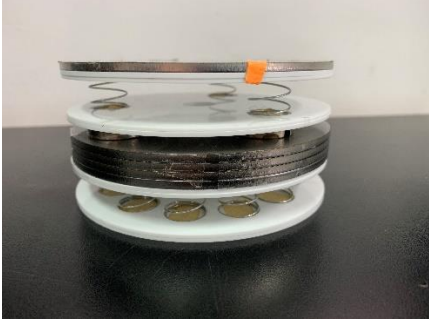


振幅對頻率的趨勢圖和第二次實驗結果大致相同，而且我們觀察到在原本的共振區，有阻尼效果吸收器的系統振幅大幅下降，且較不會左右晃動導致數據失真。

第三代反共振器材

為了確定主系統(質量 m_1)與吸收器(質量 m_2)，其質量比 $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 對整個實驗的自然頻率與反共振頻率的影響，特別是反共振頻率，我們的實驗明顯的與理論推導不吻合，所以我們選取不同的質量比 $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 來看實驗會出現何種現象，因為系統不能太重，否則驅動源無法推動整個系統，這樣就須使用彈力常數小一點的彈簧，但通常這樣的彈簧又太長，會導致系統不穩，所以系統質量與彈簧兩者都要兼顧，最後不論主系統或吸收器都採用同樣彈簧，用固定吸收器質量 m_2 ，讓主系統的質量 $m_1 = m_2$ 、 $m_1 = 2m_2$ 、 $m_1 = 3m_2$ 、 $m_1 = 4m_2$ 比較質量對實驗影響。

	吸收器(由 3 根彈簧組成)	主系統器 1(由 3 根彈簧組成)
質量	301.6g	301.6g
自然頻率	8.1Hz	8.1Hz
圖示		
	主系統 2(由 6 根彈簧組成)	主系統器 3(由 9 根彈簧組成)
質量	603.2g	904.8g
自然頻率	8.1Hz	8.1Hz
圖示		

	主系統 4(由 12 根彈簧組成)
質量	1206.4g
自然頻率	8.1Hz
圖示	

1. 仿之前的實驗方法，由振源處輸入不同頻率，看整個設備的振動情形，並錄影起來，然後用追蹤軟體分析主振動系統與吸收系統的振幅情形，得出結論如下表

2. 我們的實驗在加入吸收器後，系統所呈現的自然頻率由一分為二，且與兩者的質量比

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 有密切關係(如下表)， $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 比值若越大，兩個自然頻率離得更遠，在實驗上也呈

現一樣的結果，但是反共振頻率顯然與原先理論模型恆為定值有落差，實驗上顯示當

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 的比值越小，反共振的頻率會越往吸收器的頻率靠近，我們認為這是我們的實驗裝

置圖與理論模型有差異，這個差異在於理論模型是驅動力直接施在 m_1 上，且彈簧的一端是固定在牆壁上，但我們是驅動力去驅動彈簧，並沒有直接在 m_1 上施力，所以造成實驗上反

共振頻率的值與 $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 有關係。

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 比值	自然頻率(理論值)		自然頻率(實驗值)		反共振(實驗值)
	$\omega^2 = \omega_n^2 [1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu}]$				
$\mu = \frac{1}{1}$	5.0Hz	13.1Hz	5.3Hz	14.3Hz	10.1Hz
$\mu = \frac{1}{2}$	5.7Hz	11.5Hz	5.8Hz	12.5Hz	9.6Hz
$\mu = \frac{1}{3}$	6.1Hz	10.8Hz	6.4Hz	11.8Hz	9.4Hz
$\mu = \frac{1}{4}$	6.3Hz	10.4Hz	6.6Hz	11.6Hz	9.1Hz

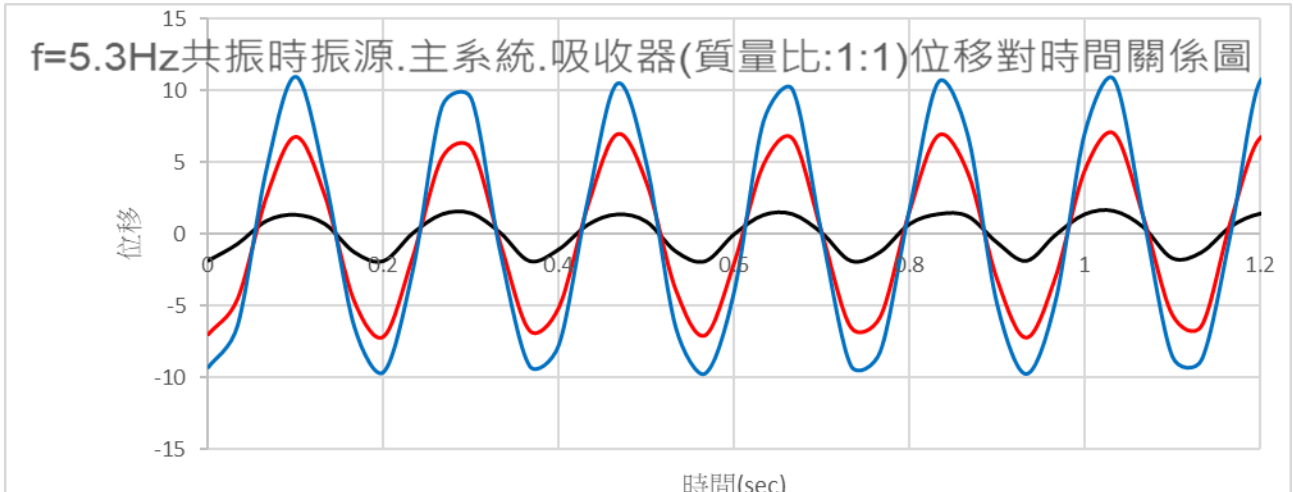
3. 分共振區與反共振區討論

(1) 系統兩個自然頻率與振源共振時，振源、主系統、吸收器三者位移與時間關係情形

我們以 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = 1$

(a). 在 $f=5.3\text{Hz}$ 共振時，看振源(下圖中黑線)、主系統(下圖中紅線)、吸收器(下圖中藍線)

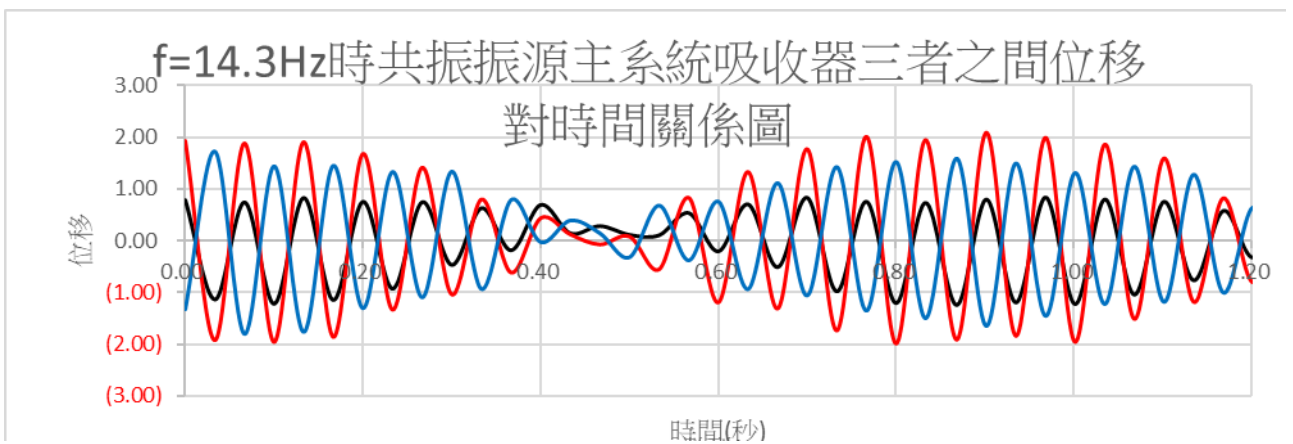
三者位移對時間關係圖



可以發現三者在此低頻共振時運動相位一致

(b). 在 $f=14.3\text{Hz}$ 共振時，振源(下圖中黑線)、主系統(下圖中紅線)、吸收器(下圖中藍線)

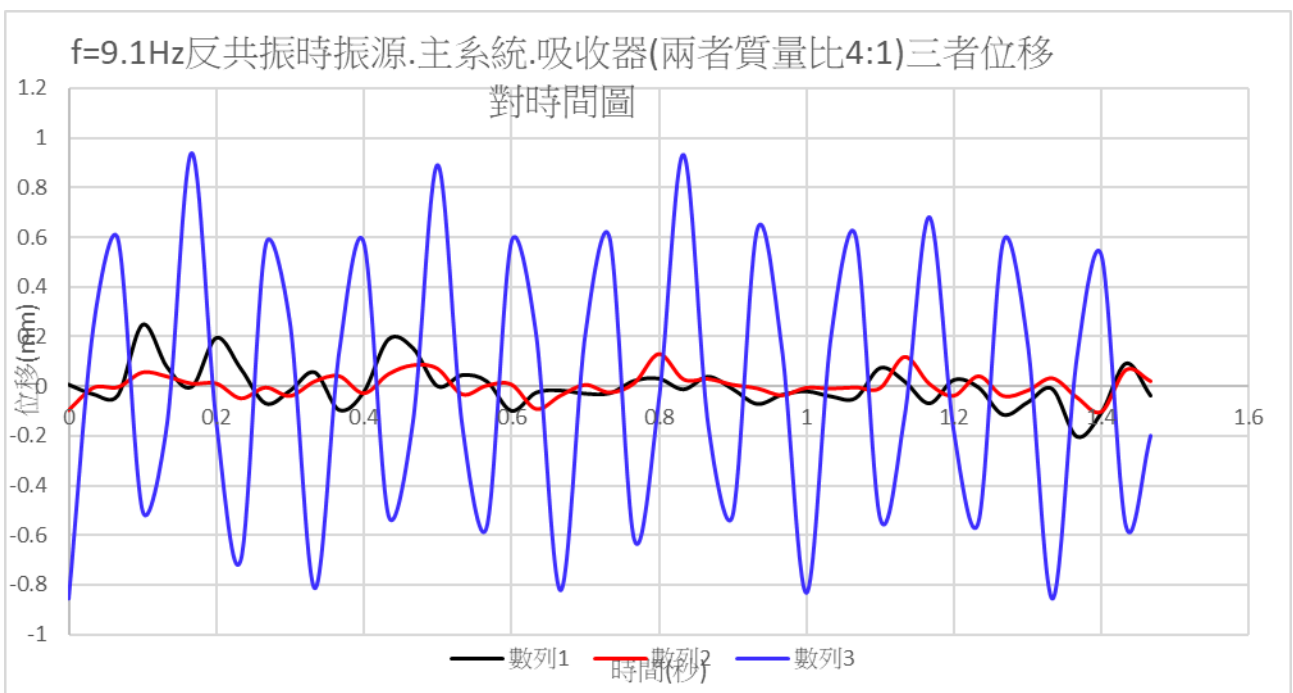
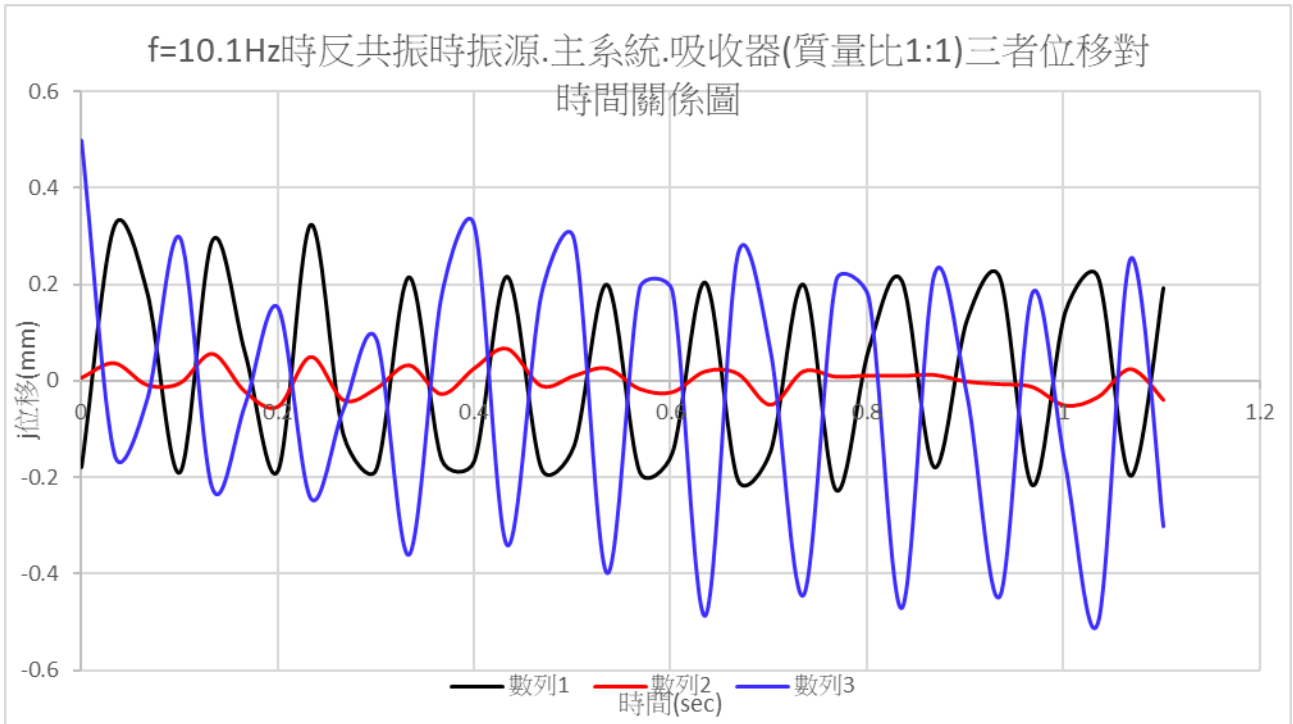
三者位移對時間關係圖



可看出高頻共振時振源與主系統同步但是吸收器剛好與主系統運動方向相反主系統與吸收器的振幅會忽高忽低，這是因為振源輸入的頻率受限於最小刻度，極為接近自然頻率，所產生的拍音現象。

(2)反共振區時振源(下圖中黑線)、主系統(下圖中紅線)、吸收器(下圖中藍線)

三者位移對時間關係圖，以 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = 1$ 與 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$ 比較說明



可看出反共振時吸收器與振源運動方向剛好相反，如此方能使主系統不動，而且吸收器的振幅與質量比有很大的關係，質量比差距愈大, 吸收器在反共振時其振幅愈大，且主系統振幅越小。

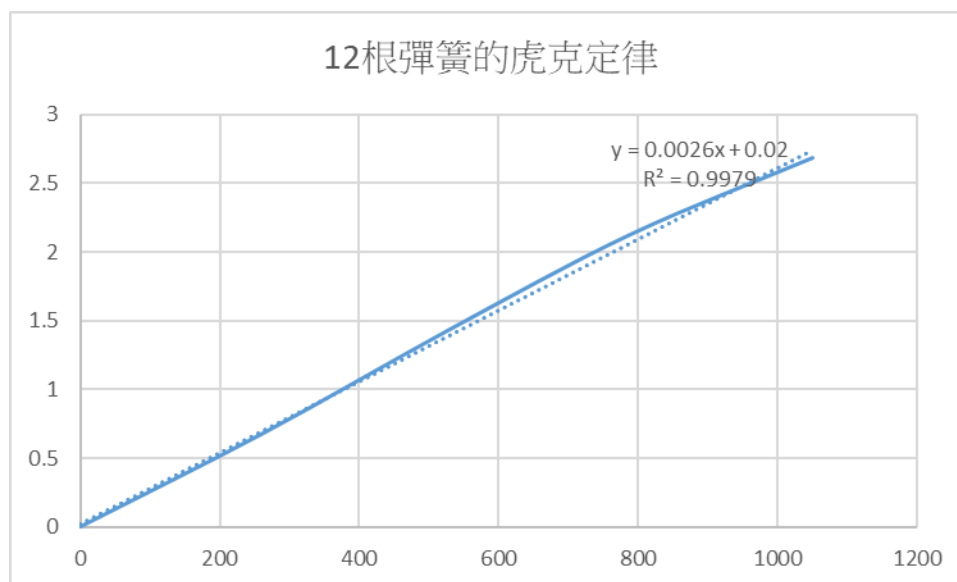
4. 系統的彈力常數為何?我們採用三種方法來比較

(1) 利用靜力平衡的方式，根據虎克定律 $F=k \times \Delta x$

先讓主系統(12 根彈簧)壓縮些許，然後依序加入砝碼，利用游標尺量取系統的壓縮量資料如下

重量(gw)	0	262.5	525.0	787.5	1050
壓縮量(mm)	0	0.68	1.42	2.12	2.68

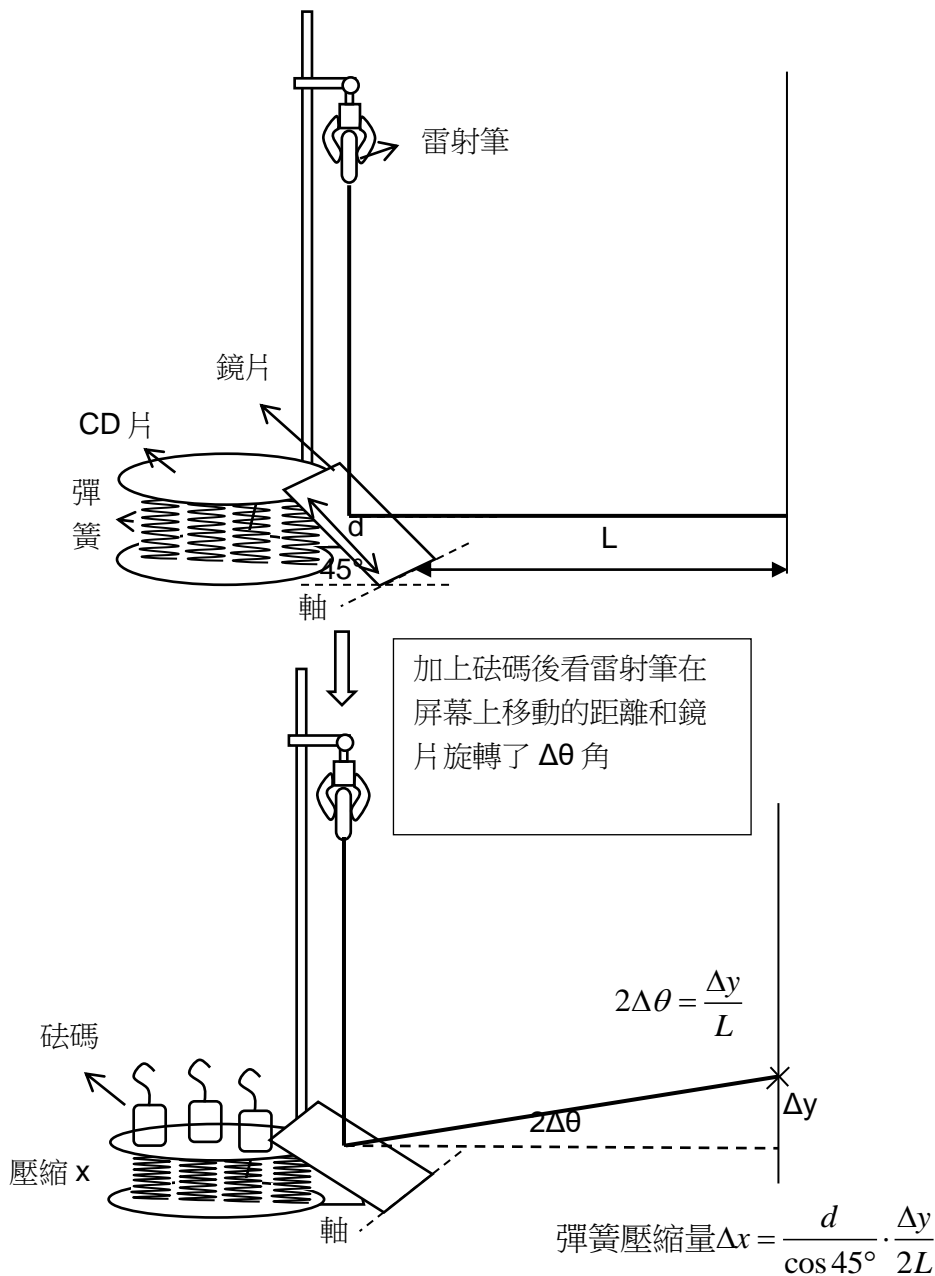
畫出所加重量與壓縮量圖形如下



由 $F=k \times \Delta x$

$$\text{知 } k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{1}{0.0026} \left(\frac{gw}{mm} \right) = 3769.2 \left(\frac{N}{m} \right)$$

(2). (1)的方法因為彈簧的壓縮量很小，為避免測量彈簧壓縮量誤差造成彈力常數測量的不準量, 我們改用光槓桿原理，其簡圖如下圖



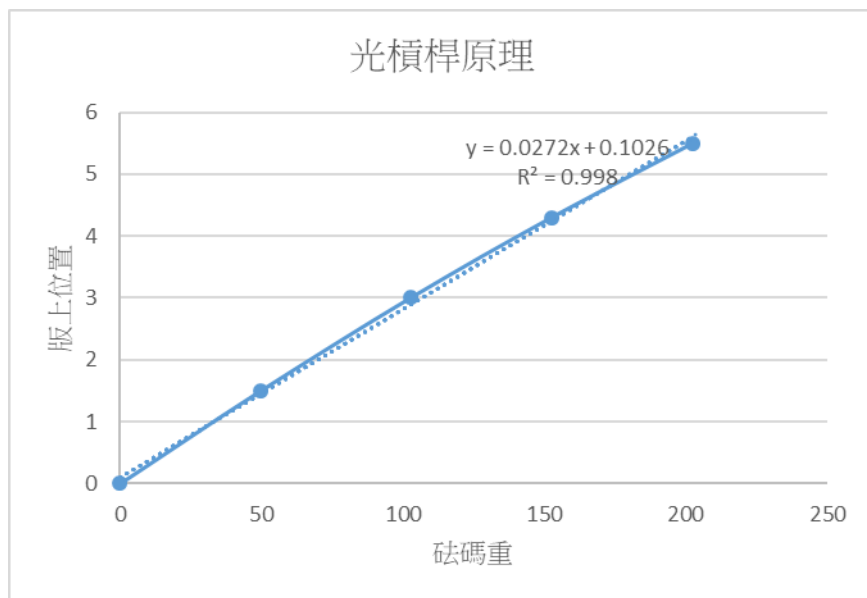
讓雷射光垂直打到傾斜角為 45° 的鏡片，使反射光改成水平射到牆壁上，實驗上要達到雷射光垂直往下打，也不容易辦到，請教有經驗的人，才知道桌上擺一小平面鏡讓雷射光反射，在光源與鏡子之間擺上載玻片，調到入射光點與反射光點為同一點，即可確定光是垂直往下打，如何讓鏡片傾斜角 45° ？我們調鏡片傾斜角，使反射光打到牆壁上光點時的高度與光打到鏡子時光點的高度一樣，這樣就可確定鏡片傾斜角 45° 。我們所加的砝碼 ΔF 所

產生的壓縮量 Δx 很小，鏡面轉動的角度 $\Delta\theta = \frac{\Delta x \times \cos 45^\circ}{d}$ 極小但是經由光槓桿原理，光打到鏡片上的光點與牆壁的距離 $\ell = 310.3\text{cm}$ 遠大於軸承到測量系統的距離 $d = 4.0\text{cm}$ ，雖然鏡面轉動的角度 $\Delta\theta$ 極小，反射線就會轉 $\Delta 2\theta$ ，也是很小角度，但可明顯發現雷射光上移量

$$\Delta y, \text{ 如此可推算出彈簧壓縮量 } \Delta x = \frac{d}{\cos 45^\circ} \times \Delta\theta = \frac{d}{\cos 45^\circ} \times \frac{\Delta y}{2\ell}$$

實驗數據如下表：

重量 F(gw)	位置 y(cm)
0	0
49.67	1.5
102.58	3
152.48	4.3
202.5	5.5



$$\text{由 } \Delta F = k\Delta x, \text{ 得 } k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{2\ell \cos 45^\circ}{d} \left(\frac{\Delta F}{\Delta y} \right) = \frac{2 \times 310.3 \times \cos 45^\circ}{4.1} \left(\frac{1}{0.0272} \right) \text{gw/mm} = 3953.3 \text{N/m} =$$

(3) 對應到用理論推導中的 $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，算出的

$$k = 4\pi^2 f^2 m = 4 \times 3.14^2 \times 8.1^2 \times 1.206 = 3120.6 \text{N/m}。$$

這裡的 k 值明顯比上面兩種測出的方法都來的小，我們認為這是受到阻尼的影響，根據

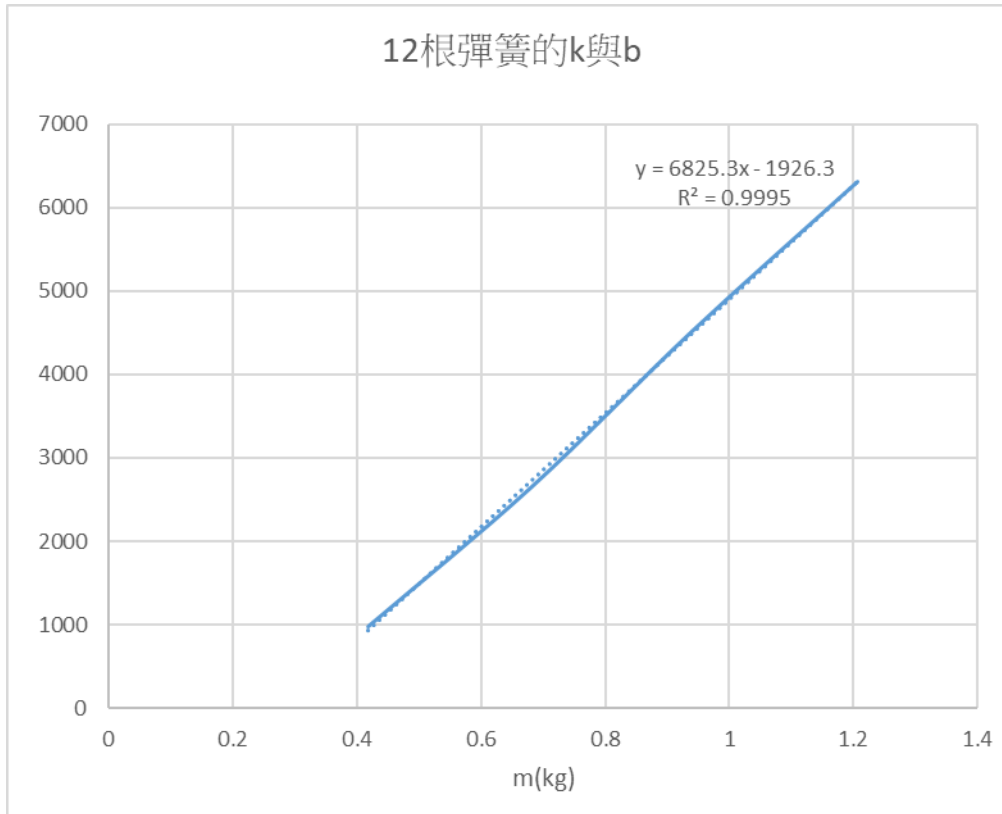
大學工程數學中強迫振動中若有阻尼時，共振頻率將改為 $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} \dots (A)$ ，我

們固定彈簧數為 12 根，改變質量，利用振動源看其對應的共振頻率 f ，得到資料如下

質量(Kg)	0.4189	0.6814	0.9414	1.2064
共振頻率(Hz)	11.1	10.0	9.0	8.1

將(A)式改寫成 $2m^2\omega^2 = 2km - b^2$

將 $2m^2\omega^2$ (y軸) 對 m (x軸) 作圖得到: 斜率即為 $2k$, 截距為 b^2 ,



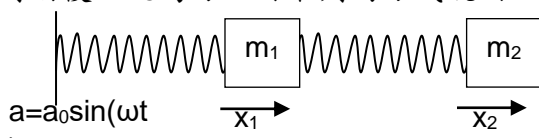
從圖可得到 $K=3412.7(N/m)$, $b^2=1926.3$

三者之間的 k 值有比較接近, 但仍值得深入探討。

陸、討論

1. 實驗中我們才發現原來除非是特製的壓縮彈簧否則將此彈簧拉長，會比壓縮來的困難，也就是壓縮彈簧是用來壓縮用的，不適合拿來實驗上的伸長。
2. 我們後來仔細思考理論模型是不考慮物體重量，物體重量到底會不會影響系統的自然頻率，經過老師的指導與推論，我們發現物體重量並不會影響自然頻率，整個模型可以調整新的彈力就如同不考慮重量的結論一樣(見附錄)。
3. 有相同自然頻率的物體，結合再一起，系統的自然頻率會有兩個，且外加頻率等於此兩者自然頻率時，會有共振現象，且在低頻共振時兩個物體的運動會同相且呈現的振幅較大，在高頻共振時時兩個物體的運動會反相且呈現的振幅較小。
4. 實驗上顯示當 $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 的比值越小，反共振的頻率會越往吸收器的頻率靠近，我們認為這是我們的實驗裝置圖與理論模型有差異，這個差異在於理論模型是驅動力直接施在 m_1 上，且彈簧的一端是固定在牆壁上，但我們是驅動力去驅動彈簧並沒有直接在 m_1 上施力，所以造成實驗上反共振頻率的值與 $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 有關係。
5. 為了解決這個問題，我們可以用假力來解決，假設觀察者站在振動源上，如此就好像彈簧不動，但是整個系統質心要受假力，當主系統質量愈大於吸收器的質量，質心就越靠近主系統，所以主系統就愈會如同理論推導的直接受驅動力，所以反共振的頻率就會越靠近本來的自然頻率了。

與老師討論後，認為可以用下列的方式說明



振動點的加速度 $a = a_0 \sin(\omega t)$ ，取觀察者和振動點同步運動，則見振動點靜止，而 m_1 、 m_2 兩者受一假力作用則

$$-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - m_1 a = m_1 \ddot{x}_1$$

$$k_2 (x_1 - x_2) - m_2 a = m_2 \ddot{x}_2$$

設 $x_1 = A_1 \sin(\omega t)$ 、 $x_2 = A_2 \sin(\omega t)$ 代入上式分別得

$$-k_1 A_1 - k_2 A_1 + k_2 A_2 - m_1 a_0 = -m_1 \omega^2 A_1$$

$$\Rightarrow (m_1 \omega^2 - k_1 - k_2) A_1 + k_2 A_2 = m_1 a_0 \text{ ----- (1)}$$

$$\text{及 } k_2 A_1 - k_2 A_2 - m_2 a_0 = -m_2 \omega^2 A_2$$

$$\Rightarrow k_2 A_1 + (m_2 \omega^2 - k_2) A_2 = m_2 a_0 \text{ ----- (2)}$$

將(1)乘 $m_2\omega^2 - k_2$ ，將(2)乘 k_2 ，然後兩式相減則

$$\{m_2\omega^4 - [m_1k_2 + m_2(k_1 + k_2)]\omega^2 + k_1k_2\}A_1 = [m_1m_2\omega^2 - (m_1 + m_2)k_2]a_0$$

$$A_1 = \frac{m_1m_2\omega^2 - (m_1 + m_2)k_2}{m_1m_2\omega^4 - [m_1k_2 + m_2(k_1 + k_2)]\omega^2 + k_1k_2} a_0$$

$$\text{因此當 } \omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k_2}{m_1m_2}} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot \omega_n = \sqrt{1 + \mu} \cdot \omega_n$$

由此觀點，反共振頻率會提高為原先預測的 $\sqrt{1 + \mu}$ 倍

μ 值越小(就是主系統與吸收器的質量差距越大)，反共振頻率越會接近原先的自然頻率。

用這個結論來看第三代反共振器材的實驗結果，兩者非常接近。

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 比值	反共振頻率(理論值) $\sqrt{1 + \mu} \times f = \sqrt{1 + \mu} \times 8.1$	反共振(實驗值)
$\mu = \frac{1}{1}$	11.46Hz	10.1Hz
$\mu = \frac{1}{2}$	9.92Hz	9.6HZ
$\mu = \frac{1}{3}$	9.35Hz	9.4Hz
$\mu = \frac{1}{4}$	9.06Hz	9.1Hz

柒、未來展望

1. 改進實驗方法，直接在物體上施驅動力，可與本實驗比較兩者的差異性。
2. 用好一點的彈簧，減輕系統的重量，然後再利用法拉第感應定律讓吸收器運動時出現明顯阻尼情形，讓吸收器吸收能量，如此方能看出為何 101 大樓的阻尼球要設計自然頻率與大樓頻率相當，不然當加入吸收器時，會有兩個自然頻率，如此增加自然頻率的數量，不是讓大樓更容易與地震產生共振的機率嗎？
3. 在吸收器總質量不變下，且都是與主系統一樣的頻率下：用兩個小吸收器與一個吸收器比較其效果有何不同？

捌、參考資料

1. <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/absorber/DynamicAbsorber.html>
2. <https://www.academia.edu/31862742/>
3. <https://wenku.baidu.com/view/4ba76c0603d8ce2f00662337.html>
4. <http://ezphysics.nchu.edu.tw/prophys/basicexp/expnote/damping/exp8.pdf>

附錄：

對象是 m_1 、 m_2 ：

有 $k_1 x_1^0 = (m_1 + m_2)g \dots (1)$ 關係

對象是 m_2 ：

有 $k_2(x_2^0 - x_1^0) = m_2 g \dots (2)$ 關係

某瞬間 m_1 離開平衡位置為 x_1 、 m_2 離開平衡位置為 x_2

分析 m_1 受力有如下方程式

$$(-m_1 g) + (k_1(x_1^0 + x_1)) + (k_2(x_1 - x_2 + x_1^0 - x_2^0)) = m_1 a_1$$

將 (1) (2) 帶入上式

可得 $k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = m_1 a_1 \dots (3)$

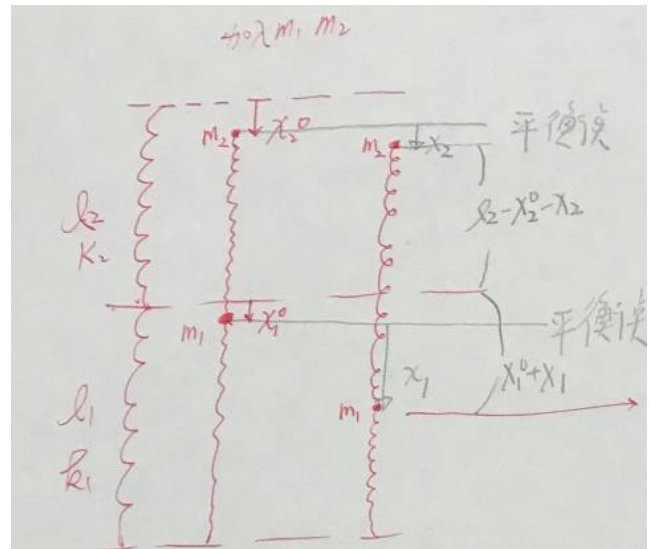
分析 m_2 受力有有如下方程式

$$(-m_2 g) + (-k_2(x_1 - x_2)) + (-k_2(x_1^0 - x_2^0)) = m_2 a_2$$

將 (2) 帶入上式

$k_2(x_2 - x_1) = m_2 a_2 \dots (4)$

(3) 與 (4) 如同理論推導的運動方程式



【評語】 051816

本作品自行設計主振動系統與吸收器，探討當兩者頻率趨於一致時，並在外加週期性之驅動力下，且外加頻率等於主系統原先的自然頻率時，會出現主系統振動大幅轉移至吸收器之情形。工作原理為耦合之震盪子。若能調整吸收器之阻尼，探討系統在不同 Q 值下的振動吸收與能量轉移，可更凸顯作品的精神與價值。

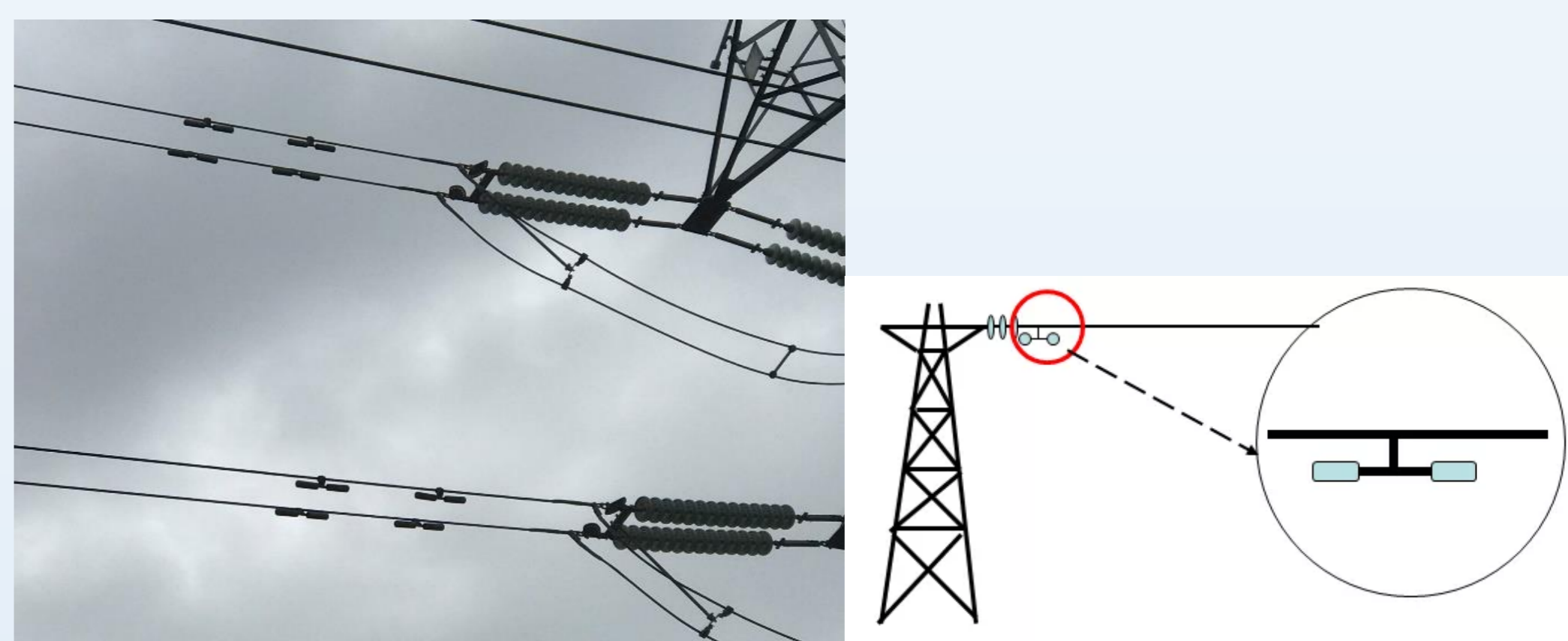
震動吸收器已經是即成熟的實驗，特別是只有兩個物體之吸收器，其能探討的空間較為有限。本作品在實驗設計、流程分析上，雖能顯現探討之議題，但並未有創新的作法，較接近是重複類似的實驗。

摘要

藉由我們自行設計的主振動系統與吸收器，來探討反共振，因為我們實驗的驅動力並不是直接作用在主系統上，造成我們的實驗結果與預期有差異，而且這個反共振頻率的偏移量與兩者之間的質量比值有密切的關係，主系統與吸收器的質量差距越大，反共振頻率越會接近原先的自然頻率，而且此時自然頻率變成兩個，兩者頻率的間距也與兩者的質量比有密切關係，主系統與吸收器的質量差距越大，兩個自然頻率間距越小。

研究動機

設計防震錘的頻率跟電纜線的頻率一致時，會造成纜線振幅減小的現象，稱為反共振。



圖一：高壓電纜線

圖二：防震錘

理論架構

可以得出兩個運動方程式：

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_0 \cos(\omega t) \dots (1)$$

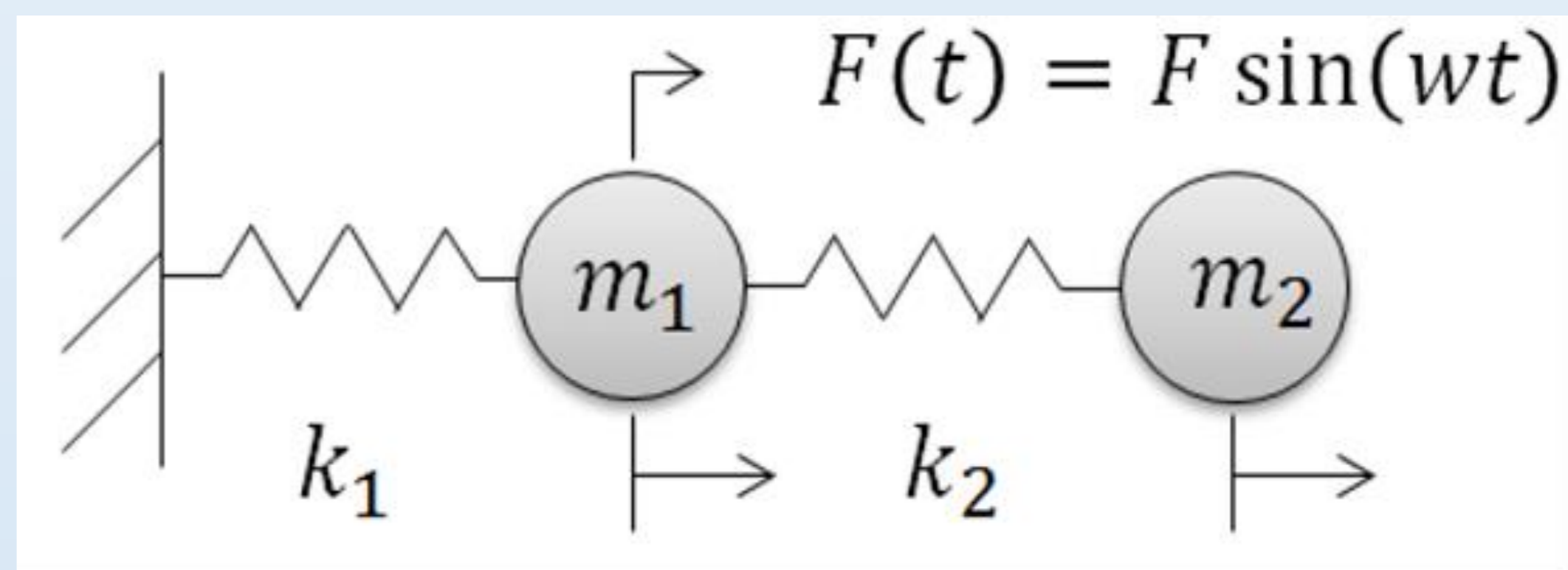
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \dots (2)$$

假設其解為下列型式 $\begin{cases} x_1 = A \sin(\omega t) \\ x_2 = B \sin(\omega t) \end{cases}$

在我們刻意調整吸收系統的頻率使兩個系統的頻率一致即 $\omega_n = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ，且外加頻率亦為此值時，則得到 m_1 不動，此現象稱為反共振，此時的頻率為反共振頻率。

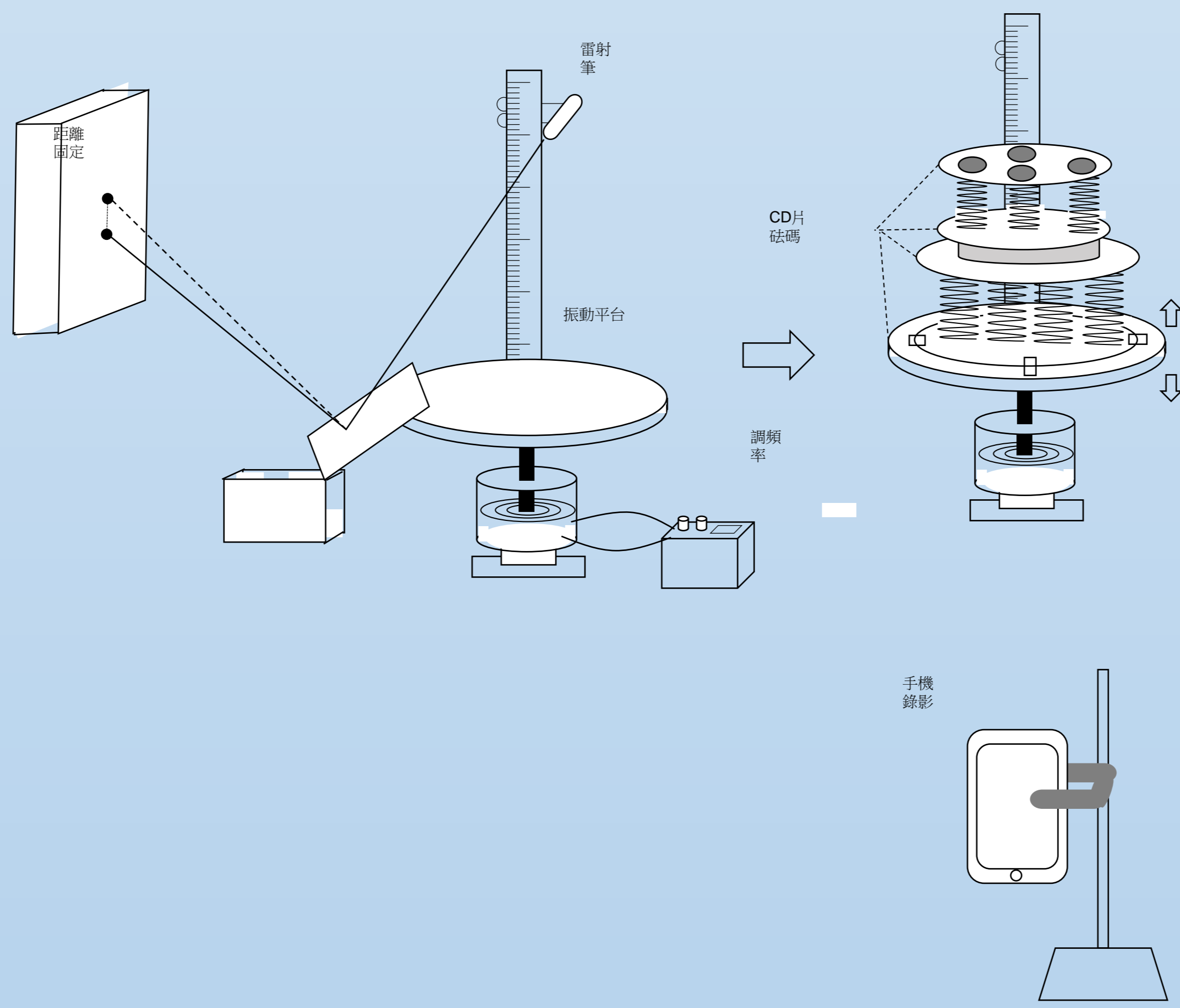
又若訂 $\mu = \frac{m_2}{m_1}$

可以得出 $\omega^2 = \omega_n^2 [1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu}]$ 代表此時系統兩個自然頻率的值。



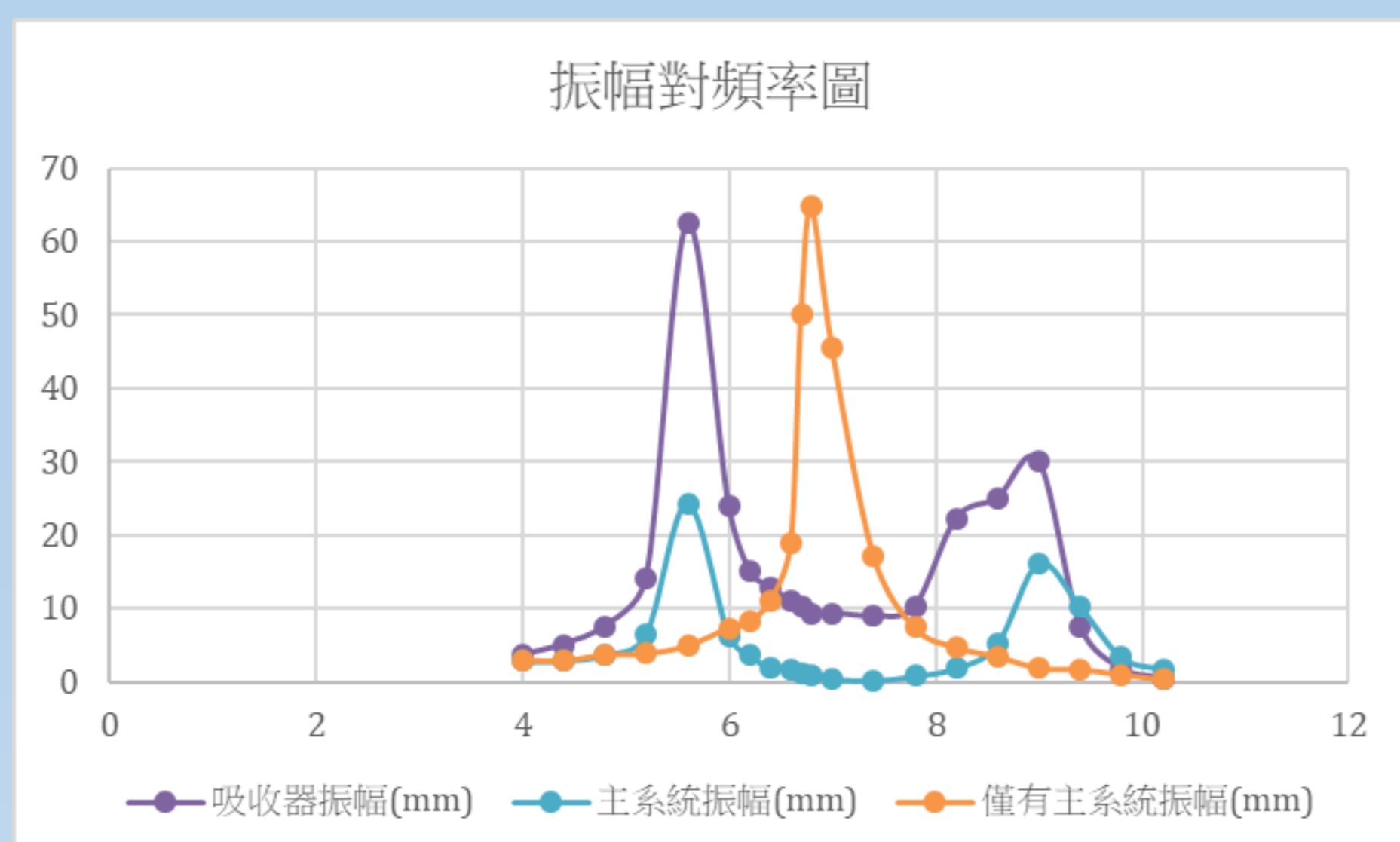
研究方法

一、確保在不同頻率下振源提供的振幅都一致，實驗簡圖如圖，然後在振動平台上放上主系統與吸收器，以外加不同頻率強迫系統振動，觀察兩者振動情形並錄影分析，實驗簡圖如右下圖。

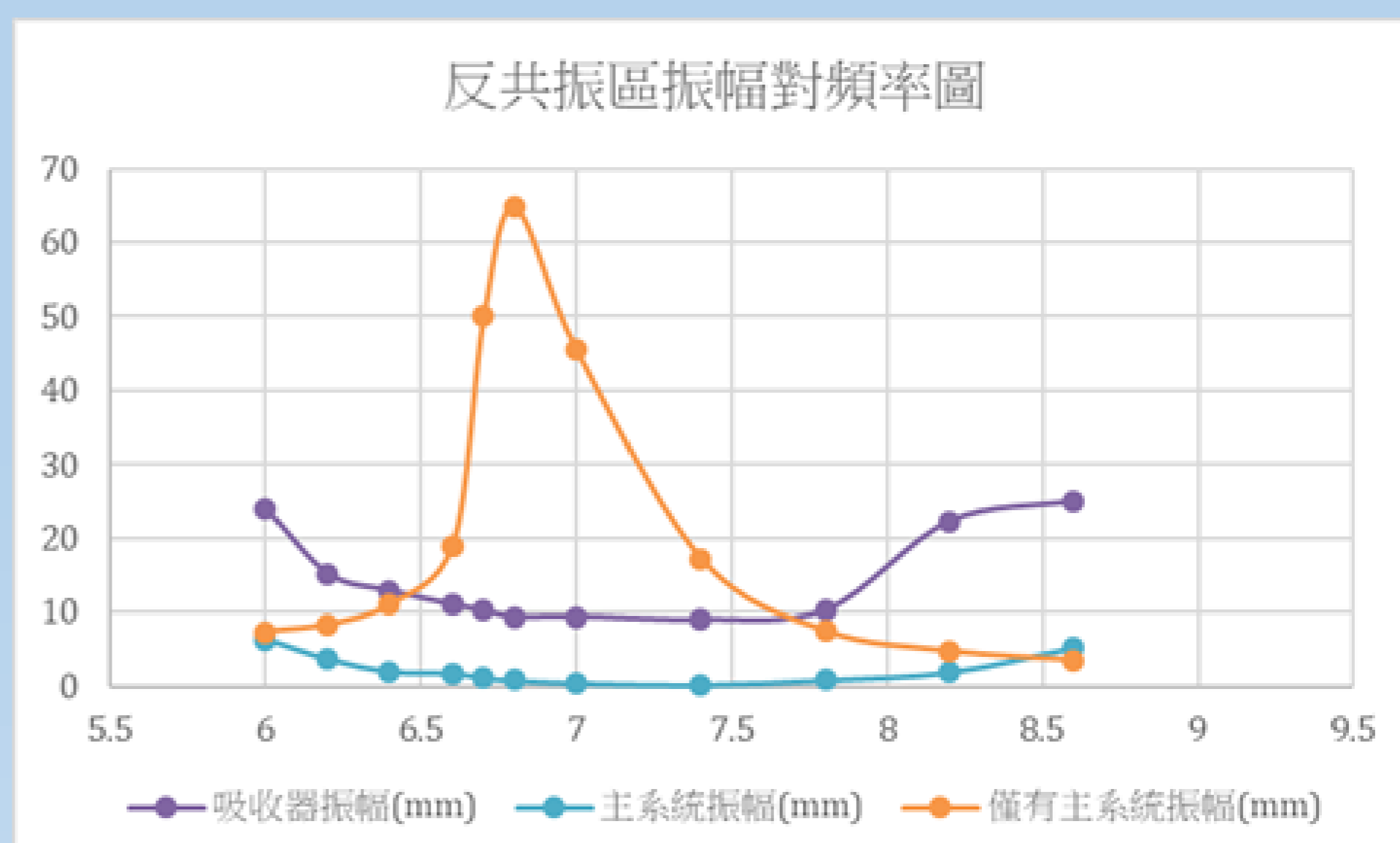


二、實驗結果：

1. 以 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{217}{1085} = 0.2$ 為例，得到外加頻率與整個系統的振幅關係圖



(共振區與非共振區因為喇叭振幅不一致，所以此圖無法比較共振區與非共振區振幅)

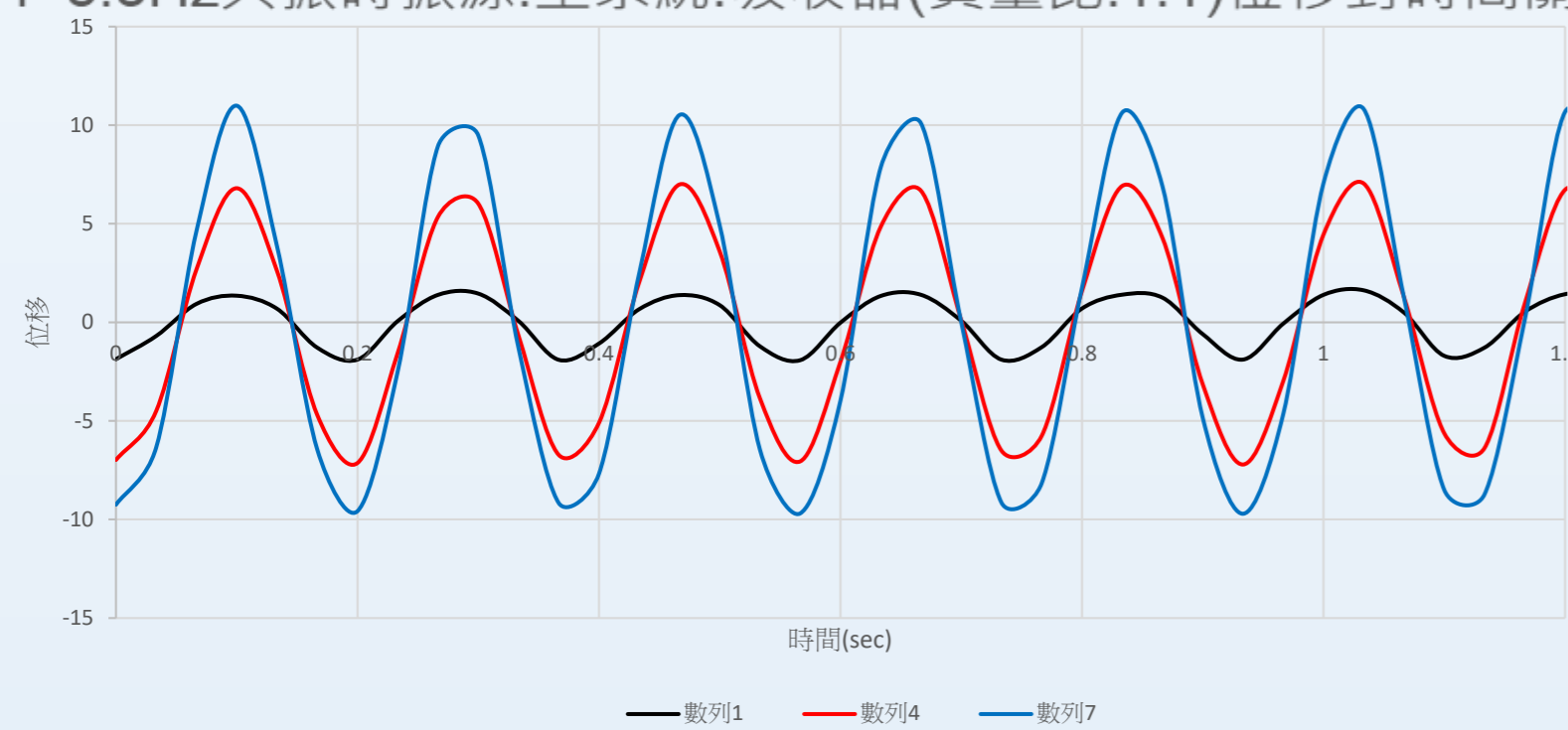


2. 分共振區與反共振區討論

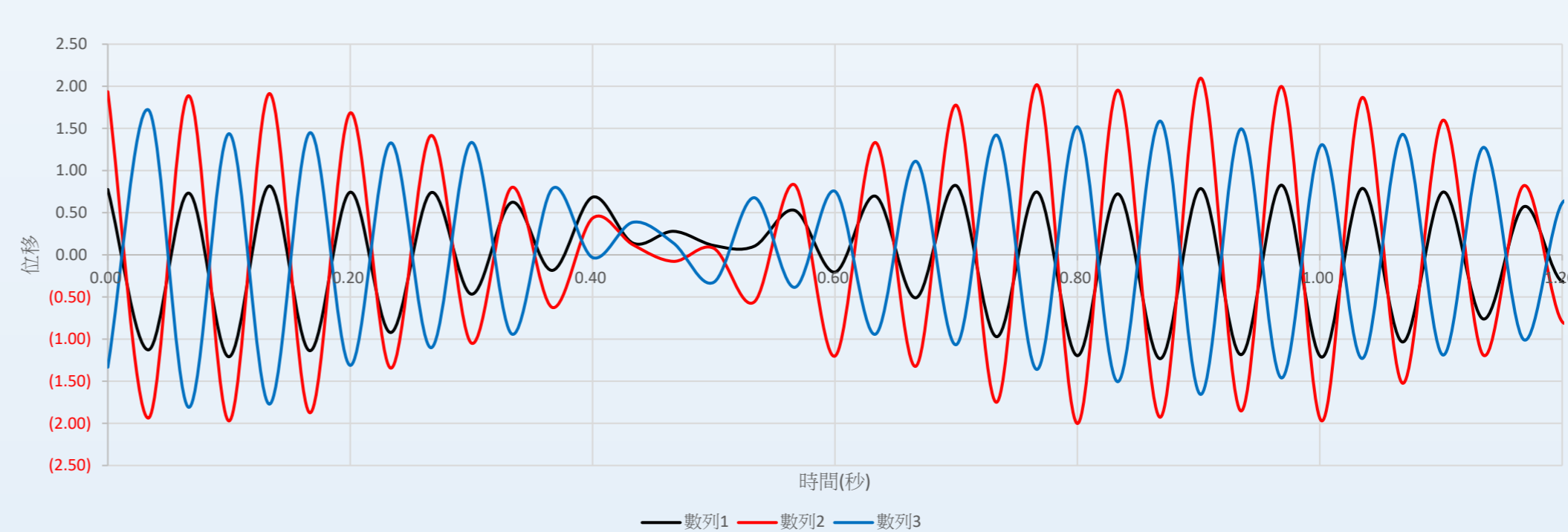
(1) 系統兩個自然頻率與振源共振時，振源、主系統、吸收器三者位移與時間關係情形

以 $\mu = \frac{m_2}{m_1} = 1$ 來說明

f=5.3Hz共振時振源、主系統、吸收器(質量比:1:1)位移對時間關係圖



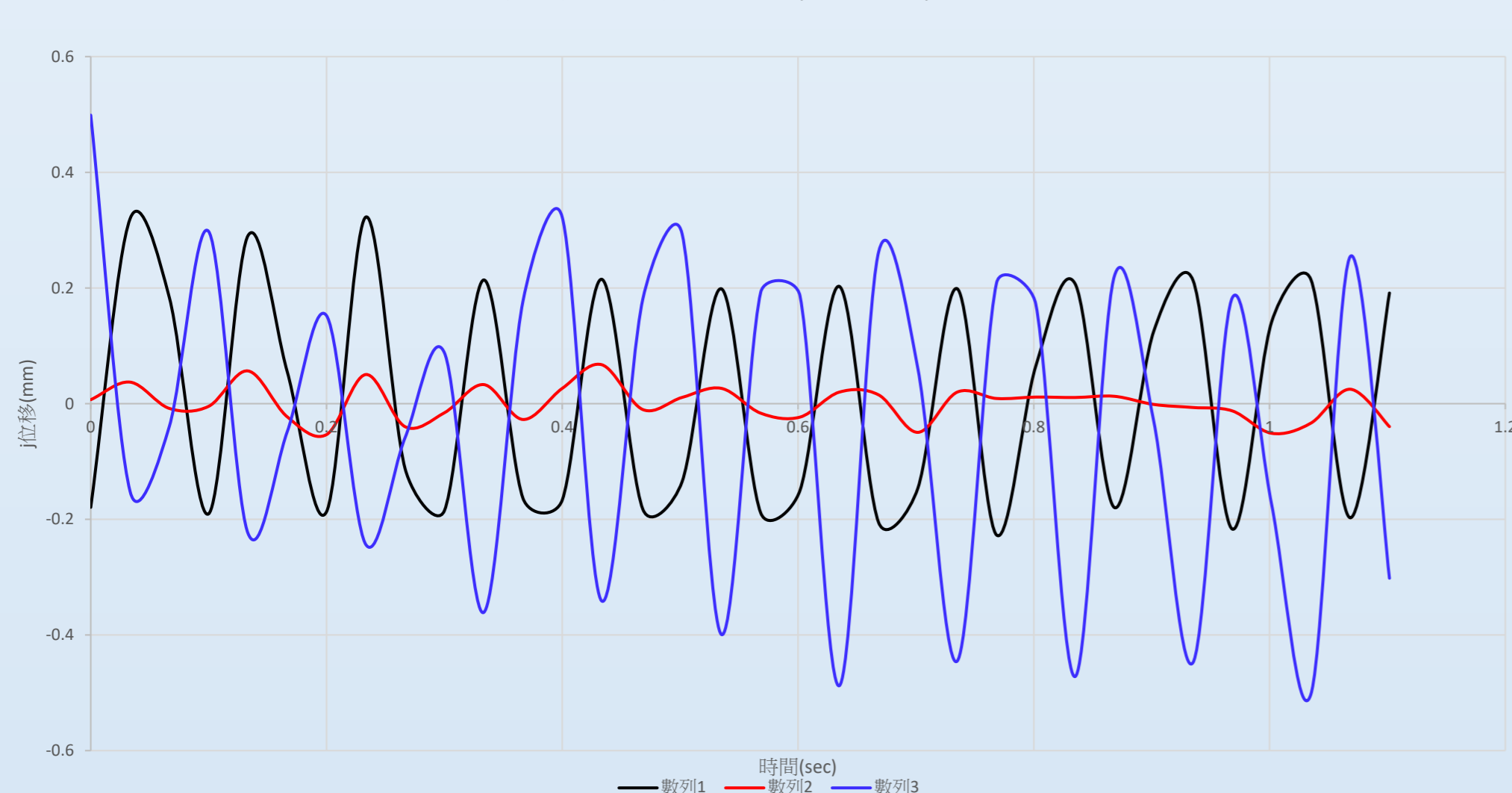
f=14.3Hz時共振振源、主系統、吸收器三者之間位移對時間關係圖



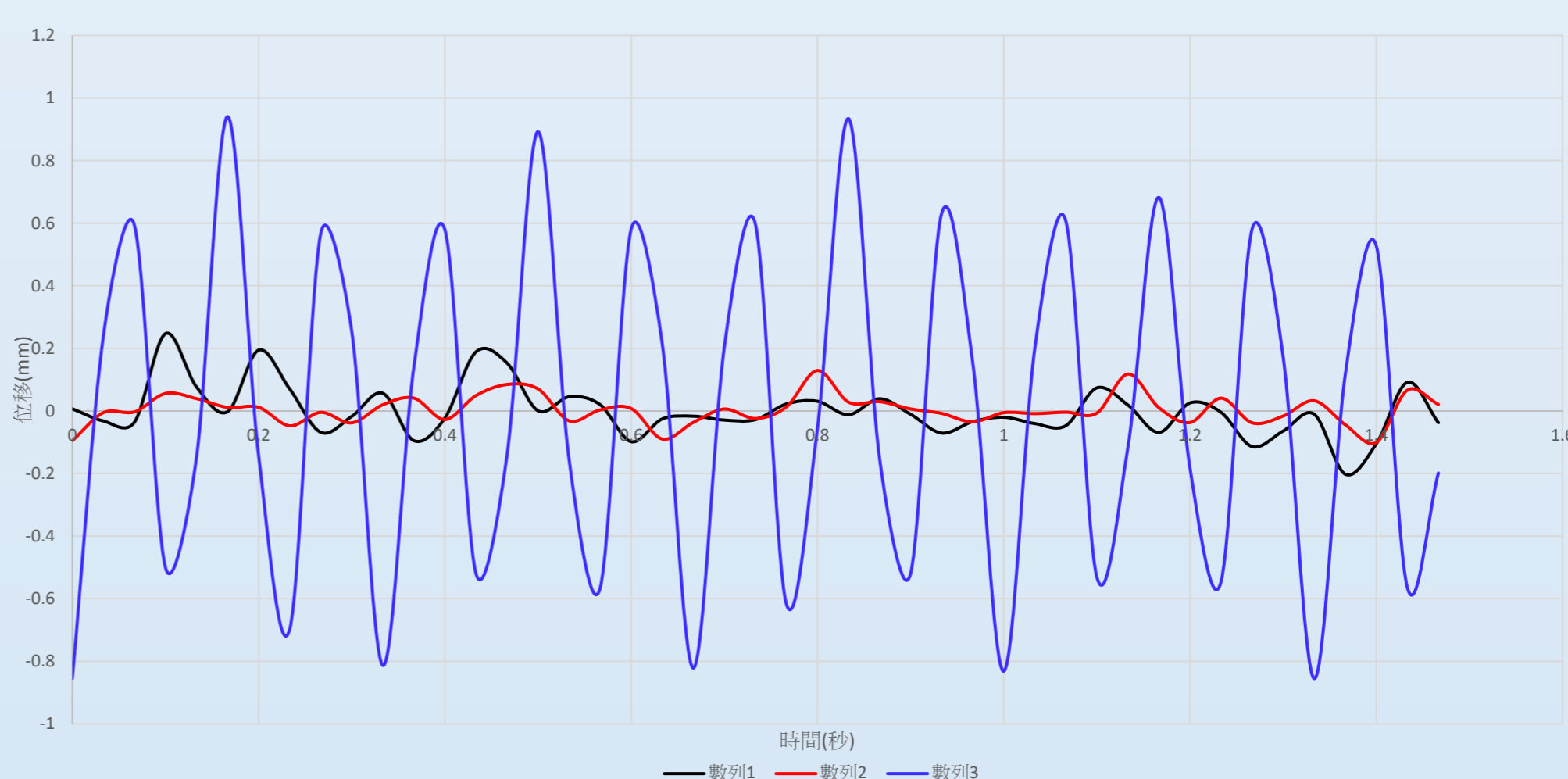
可看出低頻共振時三者同步, 高頻共振時振源與主系統同步但是吸收器剛好與主系統運動方向相反

(2) 反共振區時振源、主系統、吸收器三者位移與時間關係情形

f=10.1Hz時反共振時振源、主系統、吸收器(質量比1:1)三者位移對時間關係圖



f=9.1Hz反共振時振源、主系統、吸收器(兩者質量比4:1)三者位移對時間圖



可看出反共振時吸收器與振源運動方向剛好相反，如此方能使主系統不動，而且吸收器的振幅與質量比有很大的關係，質量比差距愈大，吸收器在反共振時其振幅愈大。

3. 不同質量比與自然頻率與反共振頻率的關係

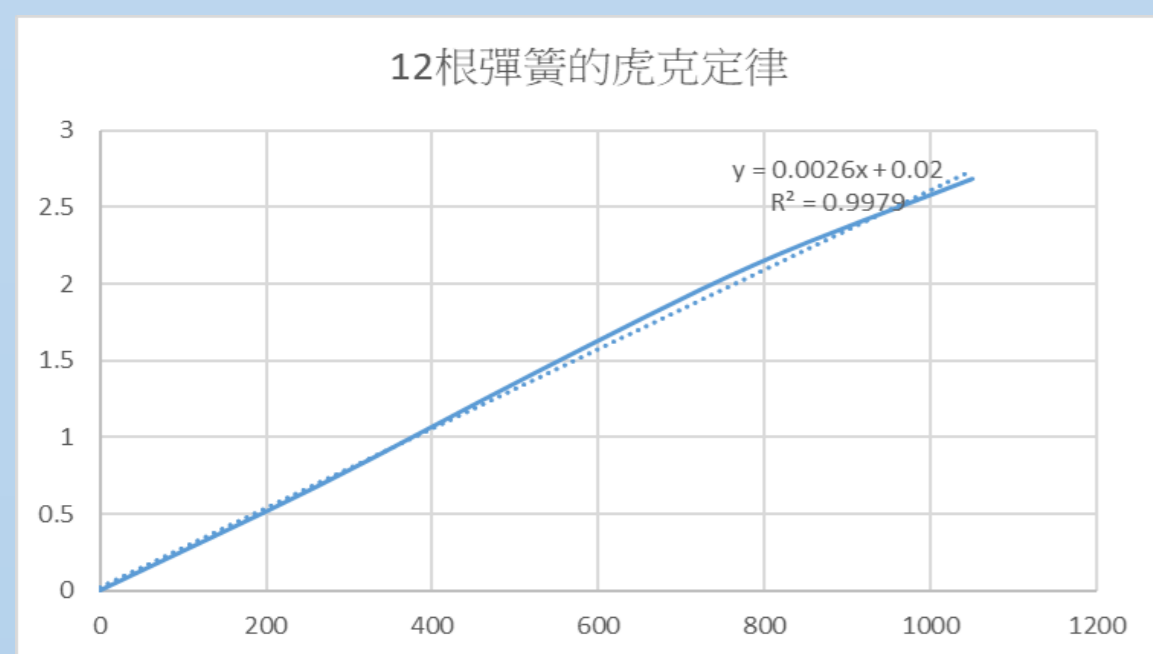
吸收器(由3根彈簧組成)		主系統器1(由3根彈簧組成)	
質量	301.6g	301.6g	
自然頻率	8.1Hz	8.1Hz	
圖示			
主系統器2(由6根彈簧組成)		主系統器3(由9根彈簧組成)	
質量	603.2g	904.8g	
自然頻率	8.1Hz	8.1Hz	
圖示			

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 比值	自然頻率(理論值)		自然頻率(實驗值)		反共振(實驗值)
	$\omega^2 = \omega_n^2 [1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \mu}]$				反共振頻率 8.1Hz
$\mu = \frac{1}{1}$	5.0Hz	13.1Hz	5.3Hz 誤差: 6%	14.3Hz 誤差: 9.2%	10.1Hz 偏離程度: 24.7%
$\mu = \frac{1}{2}$	5.7Hz	11.5Hz	5.8Hz 誤差: 1.8%	12.5Hz 誤差: 8.7%	9.6Hz 偏離程度: 18.5%
$\mu = \frac{1}{3}$	6.1Hz	10.8Hz	6.4Hz 誤差: 5%	11.8Hz 誤差: 9.3%	9.4Hz 偏離程度: 16.0%
$\mu = \frac{1}{4}$	6.3Hz	10.4Hz	6.6Hz 誤差: 4.8%	11.6Hz 誤差: 11.5%	9.1Hz 偏離程度: 12.3%

可看出主系統與吸收器質量差距愈大, 系統本身兩個自然頻率的間距愈小, 反共振頻率偏離程度愈小。

4. 系統的彈力常數：以主系統質量1206.4g為例

(1) 虎克定律



由 $F = k \times \Delta x$

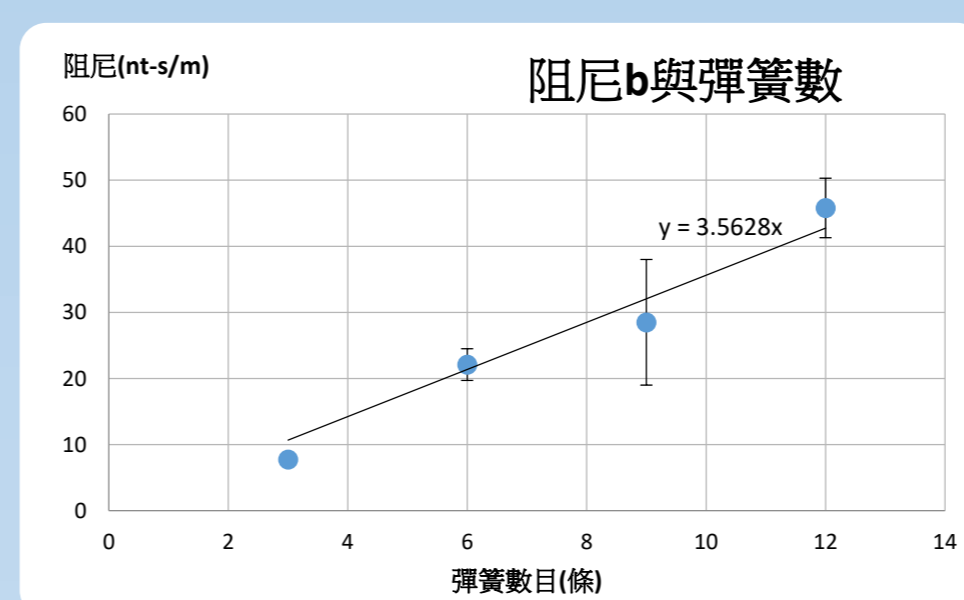
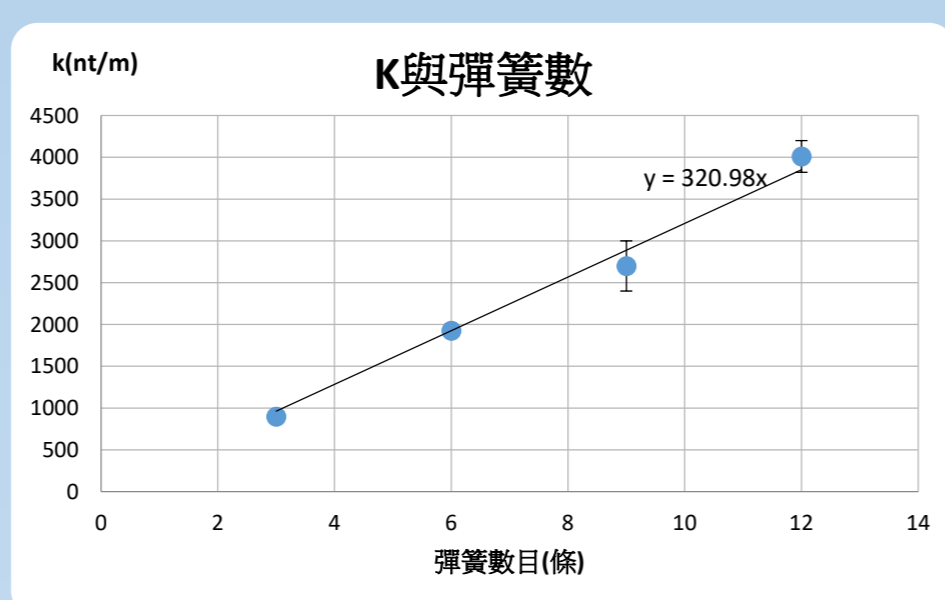
$$\text{知 } k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{1}{0.0026} \left(\frac{gw}{mm} \right) = 3769.2 \left(\frac{N}{m} \right)$$

(3) 有阻尼時 $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m}}$

改為 $2m^2\omega^2 = 2km - b^2$

將 $2m^2\omega^2$ (Y軸) 對 m (X軸) 作圖可得

彈簧數	k	Δk	b	Δb
3	898	25	7.75	0.98
6	1925	85	22.1	2.4
9	2700	300	28.5	9.5
12	4010	190	45.8	4.5



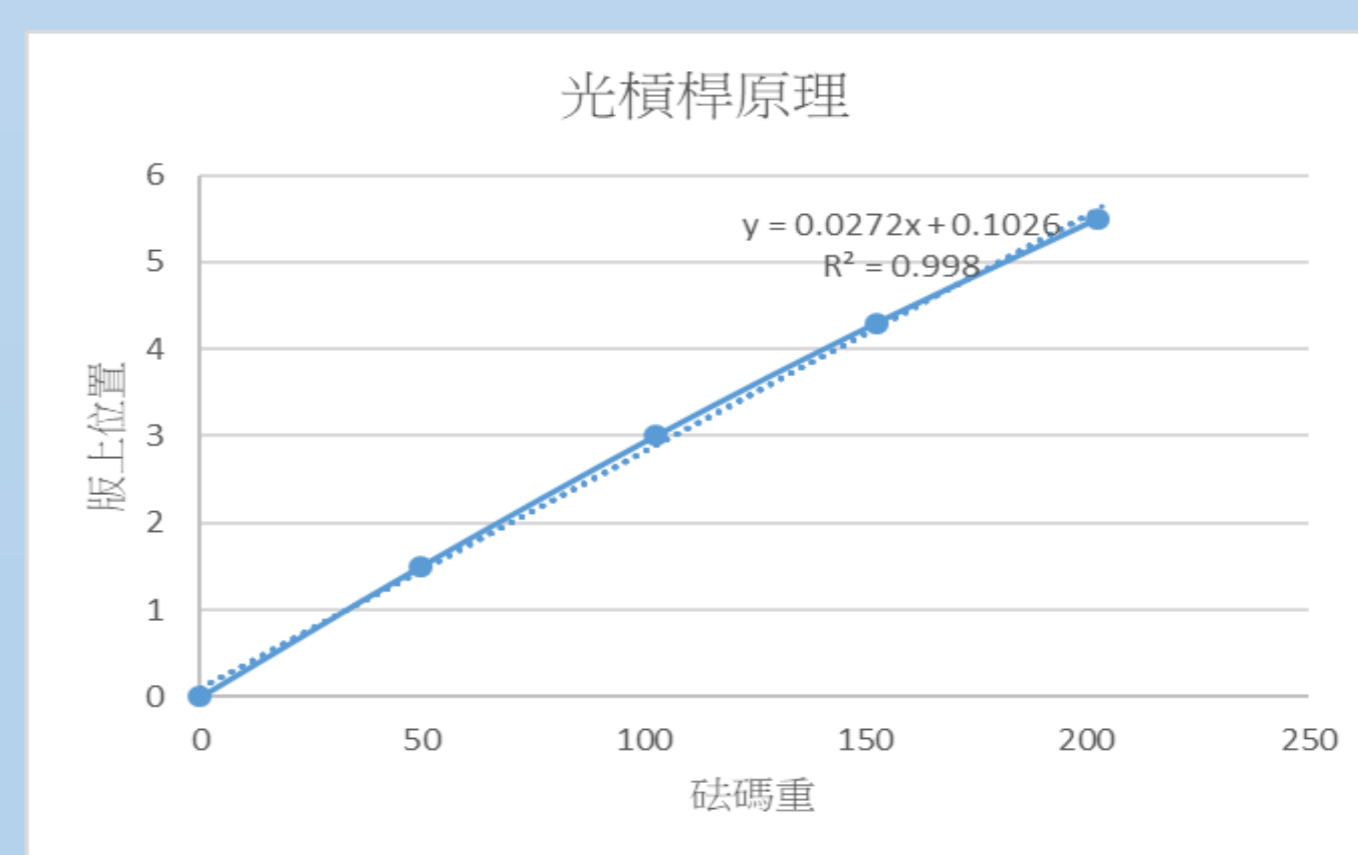
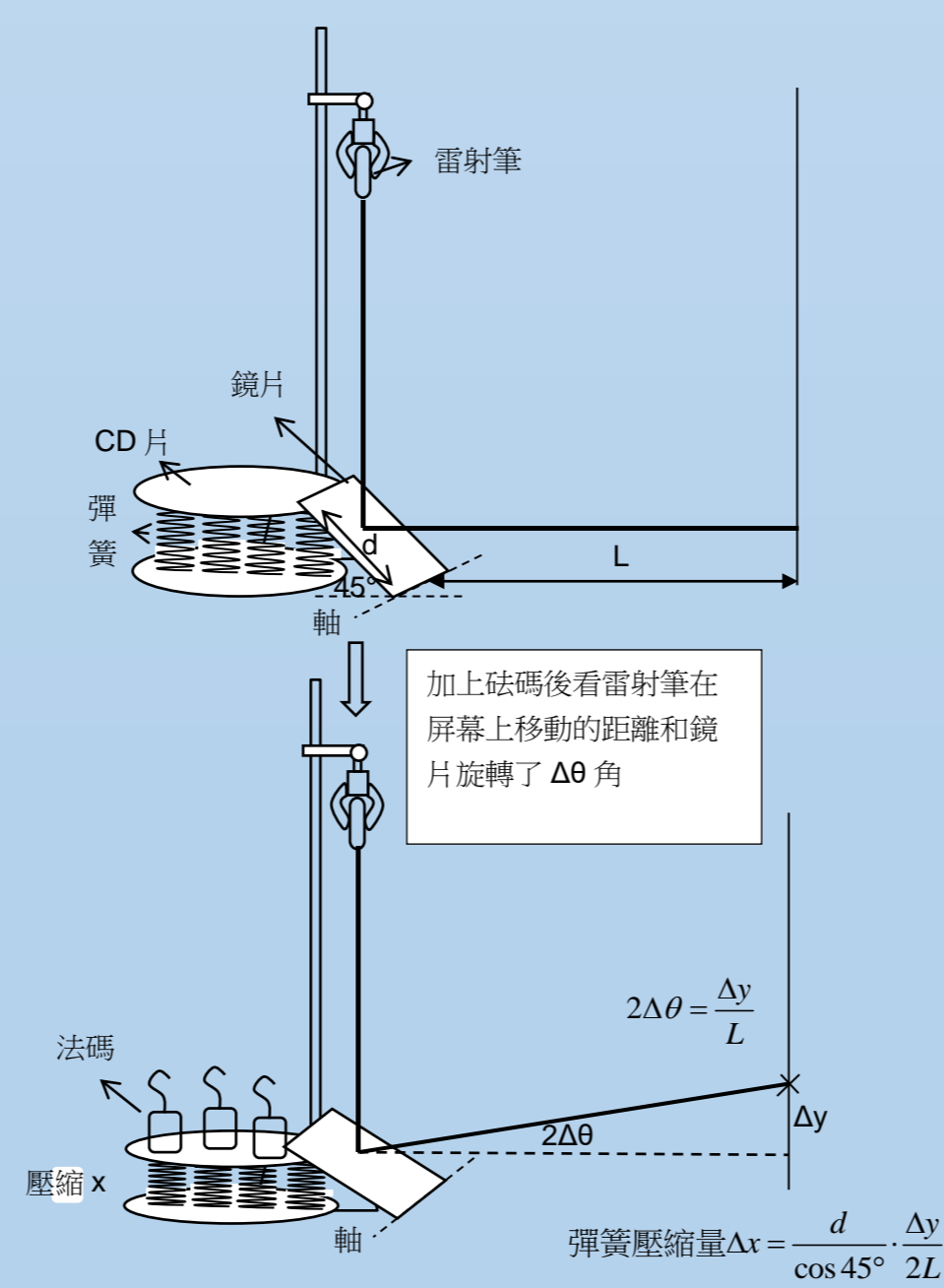
平均一條 $k = 321.0 \frac{N}{m}$ 、 $\sigma_k = 9.0$

$b = 3.56 \frac{N \cdot s}{m}$ 、 $\sigma_b = 0.20$

12條並聯 $k = 3850 \frac{N}{m}$ 、 $\sigma_k = 110$

$b = 42.8 \frac{N \cdot s}{m}$ 、 $\sigma_b = 2.4$

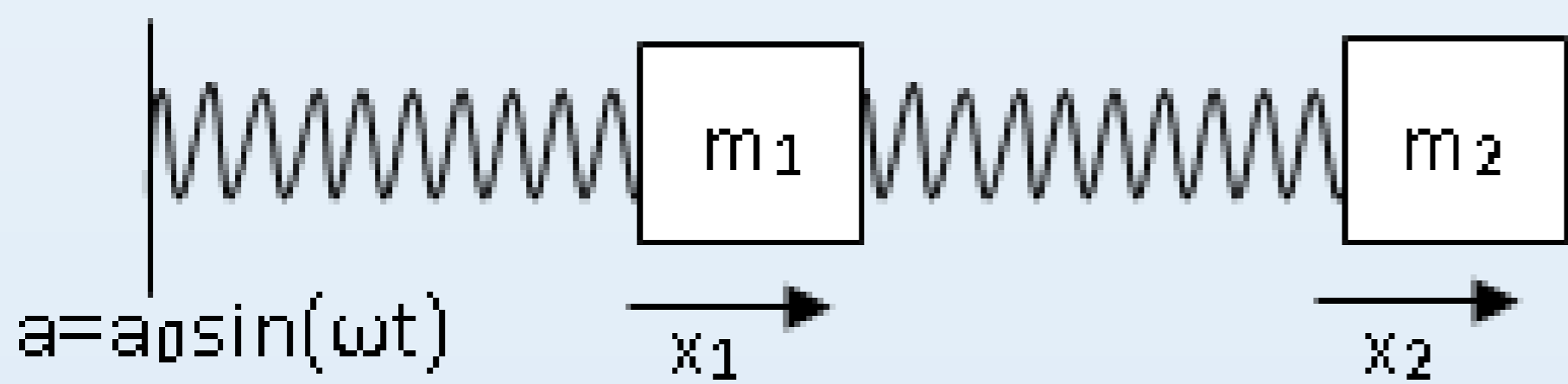
(2) 光槓桿原理



$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{2l \cos 45^\circ}{d} \left(\frac{\Delta F}{\Delta y} \right) = \frac{2 \times 310.3 \times \cos 45^\circ}{4.1} \left(\frac{1}{0.0272} \right) \frac{gw}{mm} = 3953.3 \frac{N}{m}$$

討論

1. 壓縮彈簧是用來壓縮用的，不適合拿來實驗上的伸長。
2. 物體雖然有重量，但可以調成如同沒有重量般的受力型式，整個模型可以好像如同水平面上的結論。
3. 本實驗系統的自然頻率會有兩個，且外加頻率等於此兩者自然頻率時，會有共振現象，且在低頻共振時兩個物體的運動會同相且呈現的振幅較大，在高頻共振時兩個物體的運動會反相且呈現的振幅較小。
4. 我們的實驗裝置圖與理論模型有差異，這個差異在於理論模型是驅動力直接施在 m_1 上，且彈簧的一端是固定在牆壁上，但我們是驅動力去驅動彈簧並沒有直接在 m_1 上施力，所以造成實驗上反共振頻率的值與兩質量比值有很大的關係。
5. 如果用下列的方式說明



振動點的加速度 $a=a_0\sin(\omega t)$ ，取觀察者和振動點同步運動，則見振動點靜止，而 m_1 、 m_2 兩者受一假力作用，兩者運動方程式變成下面兩式

$$-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - m_1 a = m_1 x_1''$$

$$k_2 (x_1 - x_2) - m_2 a = m_2 x_2''$$

$$\text{設 } x_1 = A_1 \sin(\omega t) \cdot x_2 = A_2 \sin(\omega t)$$

$$\text{當 } \omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k_2}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot \omega_n = \sqrt{1 + \mu} \cdot \omega_n$$

由此觀點，反共振頻率會提高為原先預測的 $\sqrt{1 + \mu}$ 倍 時 $A_1=0$

主系統與吸收器的質量差距越大，反共振頻率越會接近原先的自然頻率。

用這個結論來看實驗結果，兩者非常接近。

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$ 比值	反共振頻率(理論值) $\sqrt{1 + \mu} \times f = \sqrt{1 + \mu} \times 8.1$	反共振(實驗值)
$\mu = \frac{1}{1}$	11.46Hz	10.1Hz
$\mu = \frac{1}{2}$	9.92Hz	9.6HZ
$\mu = \frac{1}{3}$	9.35Hz	9.4Hz
$\mu = \frac{1}{4}$	9.06Hz	9.1Hz

未來展望

1. 改進實驗方法，直接在物體上施驅動力，可與本實驗比較兩者的差異性。
2. 讓吸收器運動時出現明顯阻尼情形，吸收器吸收能量，如此方能看出為何101大樓的阻尼球要設計自然頻率與大樓頻率相當，不然當加入吸收器時，會有兩個自然頻率，如此增加自然頻率的數量，不是讓大樓更容易與地震產生共振的機率嗎？
3. 有無阻尼對系統自然頻率的影響程度有必要做詳細的探討。

參考資料

1. <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/absorber/DynamicAbsorber.html>
2. <https://www.academia.edu/31862742/>
3. <https://wenku.baidu.com/view/4ba76c0603d8ce2f00662337.html>