

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051814

聲壓懸浮 PM2500—探討聲壓懸浮器可穩定漂
浮物體之條件

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者： 高二 黃智笙 高二 賴城諭 高二 莊翔鈞	指導老師： 洪于晟
---	------------------

關鍵詞：聲壓懸浮、穩定

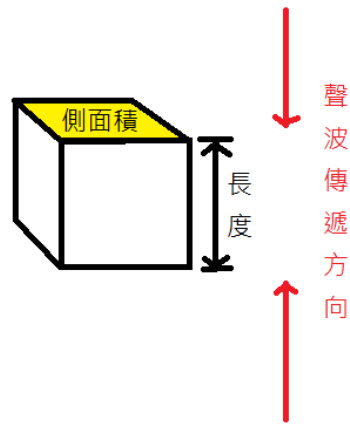
摘要

聲壓懸浮(Acoustic levitation)是利用聲波產生的壓力，使物體懸浮在空中，而物體是否能飄浮在空中受到物體質量、物體密度、聲波波長、聲場強度等影響，本實驗利用實際實驗、Python 程式模擬、等效位能理論推導，以冀求出物體成功懸浮在空中的準確條件。



壹、前期研究與研究動機

我們在網路上看到一個影片，內容是關於聲壓懸浮，幾滴液體在有重力的情況下，靠著許多喇叭產生的聲波，而憑空飄浮，我們覺得很神奇，便上網採購需要的材料，並依照網路上的圖示組裝。首先，我們嘗試懸浮日常生活中常見的各種物品，包括米粒、蝦米甚至螞蟻，我們列出了一些可能影響物體懸浮穩定的參數，物體的參數包括質量、側面積、長度、初速度；聲壓的參數包括波長、頻率、聲壓振幅；環境的參數包括重力場、空氣阻力係數，我們猜想在物體側面積極大、質量極小、長度不等於 0、初速度等於 0 時，由於物體受聲壓場的作用極大、受環境影響極小，故物體一定可以穩定，並以此為依據進行之後的理論計算、模擬、實驗。



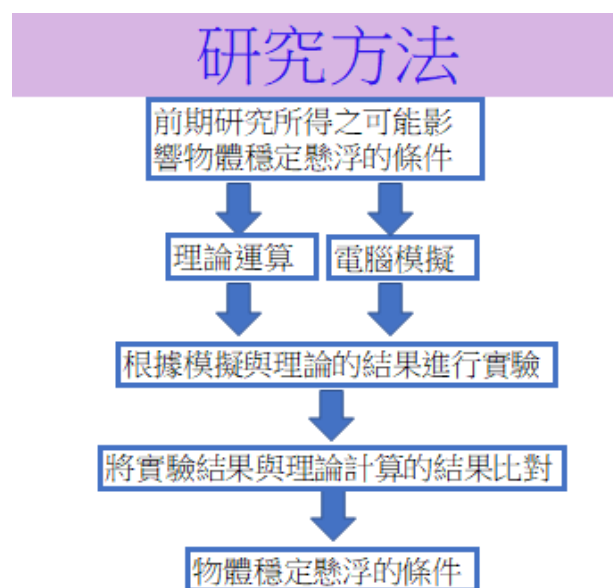
圖一、 物體側面積、長度簡圖

貳、 研究目的

以理論、模擬及實驗探討聲壓懸浮器可穩定漂浮物體之條件

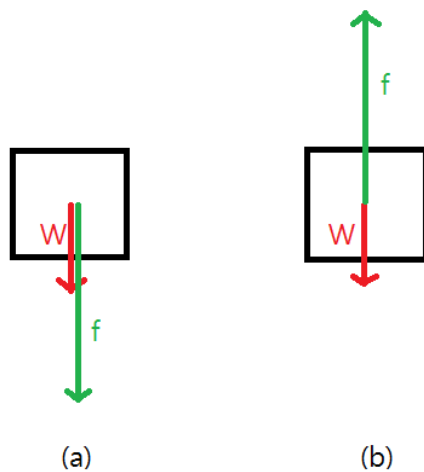
參、 研究方法、結果及討論

一、理論與模擬(核心的想法-物理模型)



圖二、 研究方法

我們使用了理論、模擬及實驗進行我們的研究，首先我們解釋漂浮的物理意義，為了要讓物體漂浮，在我們的聲壓場中有一高頻震盪的力作用在物體上以抵銷重力，其簡圖如下。



圖三、物體受力簡圖。W 為重力，f 為聲壓場對物體產生的高頻震盪力，物體受力情形在(a)(b)間快速變換

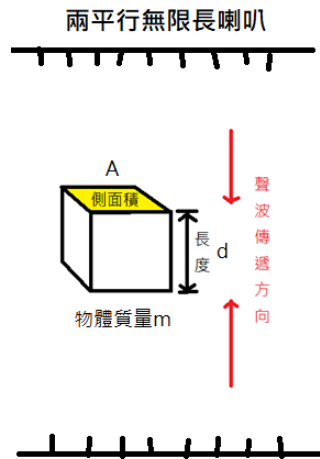
(一) 重要參數(直觀上整個系統有哪些參數，各自扮演的角色)

推導過程使用到之已知參數，包括物體質量 m 、物體側面積 A 、物體長度 d 、聲波

波長 λ 、聲波頻率 f 、物體位置 x 、時間 t 、聲速= v 、 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 為角波數、 $\omega =$

$2\pi f$ 為角頻率

還有假設的參數，聲壓場壓力振幅 P_0 。



圖四、各種參數示意圖

(二) 理論推導(理論分析與討論)

列出物體在聲場中的運動方程式並嘗試用積分求得物體位置對時間的關係式，但推導時發現其為一橢圓積分，不可積，故考慮忽略其中的一些微小項。

列出聲場中的壓力對位置、時間的函數

$$P(x, t) = P_0 \cos(kx - \omega t) + P_0 \cos(kx + \omega t + \pi) \quad (1)$$

(註:理論推導過程中所使用之壓力場，是用兩邊無限大平面振動所造成的聲壓場，來近似儀器中間區域的壓力場，下面聲壓場模擬結論(2)會有詳細分析及證明)

物體在聲場中的受力為物體兩端壓力差可寫為

$$F(x, t) = A \cdot \left[P\left(x - \frac{d}{2}, t\right) - P\left(x + \frac{d}{2}, t\right) \right] \quad (2)$$

其中 d 為物體長度

考慮重力位能 U 和聲場產生的力 $F(x, t)$ ，物體的運動方程式如(4)

$$U = mgx \quad (3)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{dU}{dx} + F(x, t) \quad (4)$$

其中 $g = 9.8(m/s^2)$ 為地表重力加速度

假設物體的移動是由平穩的運動 X 和高頻振動 ξ 所組合成的，即

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \quad (5)$$

$\xi(t)$ 是週期 T 為 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的週期性運動，又 $X(t)$ 在這段時間內的改變極小，故

$$\bar{x} = X(t) \quad (6)$$

將(5)代入(4)可得

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{d(X+\xi)} + F(X + \xi, t) \quad (7)$$

將(7)對 ξ 做泰勒展開至一階項可得

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \cancel{\xi \frac{d^2U}{dX^2}} + F(X, t) + \xi \frac{\partial F(X, t)}{\partial X} \quad (8)$$

其中重力位能 U 對 X 微分兩次後=0

把和振動有關的項(以下稱振動項)從(8)分離出來，其中 $\xi \frac{\partial F(X, t)}{\partial X}$ 包含微小量 ξ 為高階微小量，故省略，而 $\ddot{\xi}$ 正比於 ω^2 ，因此不是高階微小量，故只需寫

$$m\ddot{\xi} = F(X, t) \quad (9)$$

將(9)對時間積分可得

$$\xi = -\frac{F(X, t)}{m\omega^2} \quad (10)$$

將(8)對時間平均，即

$$\frac{\int_0^t (m\ddot{X} + m\ddot{\xi}) dt}{t} = \frac{\int_0^t \left[-\frac{dU}{dX} + F(X, t) + \xi \frac{\partial F(X, t)}{\partial X} \right] dt}{t} \quad (11)$$

因為振動項的週期 $T \ll 1(s)$ ，所以 t 可視為正整數倍的 T

$$t = nT, n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

$m\ddot{\xi} = F(X, t)$ 對時間平均後可視為零，將(11)寫為

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi \frac{\partial F(X, t)}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} \overline{F(X, t) \frac{\partial F(X, t)}{\partial X}} \quad (13)$$

觀察(13)發現，其中各項皆為對 X 一次微分的形式，和虎克定律的形式相同，故假設有效位能 U_{eff} 並將(13)重新寫成

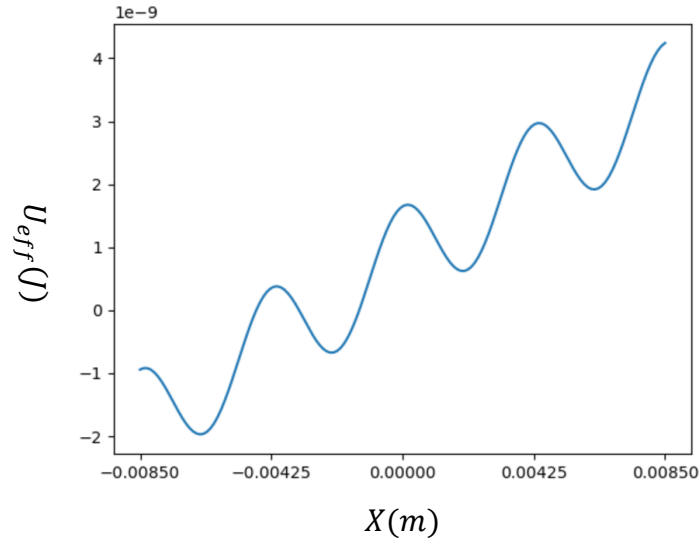
$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} \overline{F(X, t) \frac{\partial F(X, t)}{\partial X}} \quad (14)$$

將(14)對 X 積分後可得

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2m\omega^2} \overline{[F(X, t)]^2} \quad (15)$$

$$U_{eff} = U + \frac{A^2 P_0^2}{2m\omega^2} (2 - \cos(2kX - kd) - \cos(2kX + kd) - 2 \cos(kd) + 2 \cos(2kX)) \quad (16)$$

即可得物體的 $U_{eff} - X$ 圖



圖五、 $U_{eff} - X$ 圖

$$\frac{dU_{eff}}{dX} = 0 \quad (17)$$

其中滿足(17)的位置，即為物體可以穩定懸浮物體的位置，將(16)帶入(17)可得

$$\sin(2kX) = \frac{m^2 g \pi f^2 \lambda}{A^2 P_0^2 [1 - \cos(kd)]} \quad (18)$$

可知物體穩定條件為

$$\frac{m^2 g \pi f^2 \lambda}{A^2 P_0^2 [1 - \cos(kd)]} \leq 1 \quad (19)$$

將 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $f = \frac{v}{\lambda}$ 代入(19)中

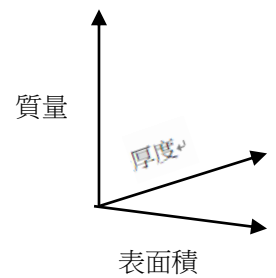
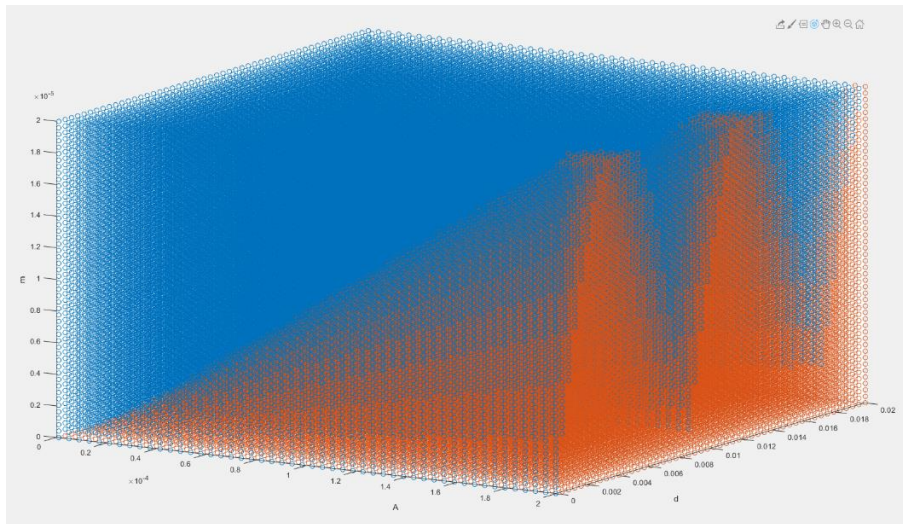
$$\frac{m^2 g \pi v^2}{\lambda A^2 P_0^2 [1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda} d)]} \leq 1 \quad (20)$$

由圖五可知，理論假設的氣壓場在其駐波的腹點附近對物體產生了一個位能低點，因此物體可以被限制在氣壓場中的腹點附近做簡諧運動，甚至固定不動。

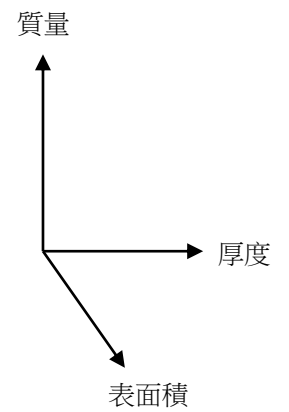
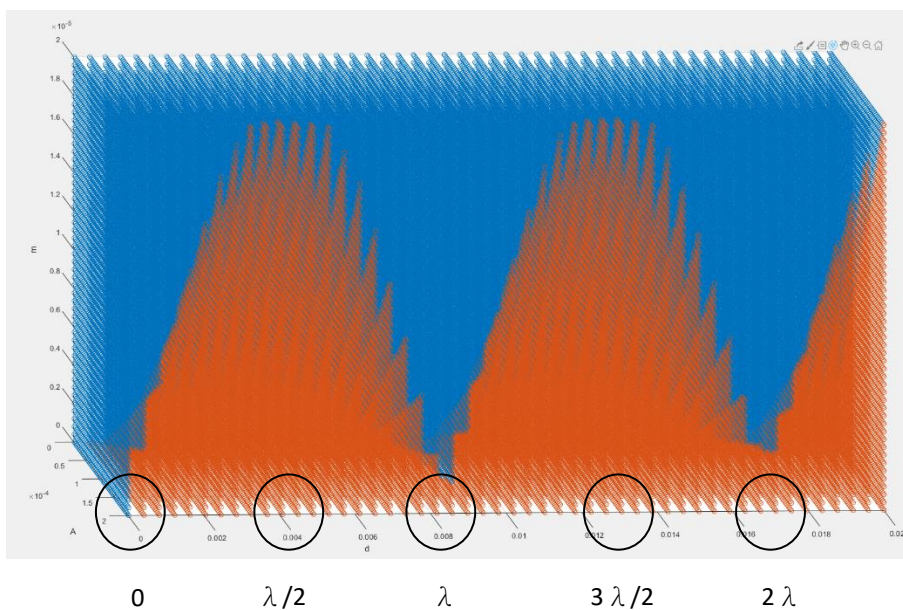
(三) 理論位能計算

將資料陣列輸入 Matlab 繪製 3D 圖

橘色為穩定懸浮，藍色為不穩定懸浮



圖六、 資料陣列輸入 Matlab 繪製 3D 圖(1)



圖七、 資料陣列輸入 Matlab 繪製 3D 圖(λ 為聲波長)(2)

由圖七我們可以觀察到，物體長度 $d = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ ， $n \in \mathbb{N}$ 時，理論上會出現比較容易穩定的現象。

(四) 解析解討論

1. 側面積-質量截面上斜率

由(20)可推得，

$$m = \left(\frac{P_0}{v} \sqrt{\frac{\lambda(1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda}d))}{g\pi}}\right) \cdot A \quad (21)$$

即圖五、圖六中，側面積-質量截面上，穩定及不穩定的邊界之遞增趨勢為線性。

其斜率為

$$\left(\frac{P_0}{v} \sqrt{\frac{\lambda(1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda}d))}{g\pi}}\right) \quad (22)$$

2. 物體長度(d)等於特定值時

(1) $d=n\lambda$ ， $n \in \mathbb{N}$ 時

此時(20)式分母中有一項 $(1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda}d))=0$ ，因此無解。

所以當物體長度等於正整數倍波長時，物體將不會懸浮

(2) $d=(n + \frac{1}{2})\lambda$ ， $n \in \mathbb{N}$

此時(22)式根號裡 $(1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda}d))$ ，有最大值 2，若其他數值為定值，此斜

率將有最大值，而斜率越大，物體懸浮的容易度越高。

3. 何種物體容易懸浮?

由(20)式可觀測出

(1) 在同一聲場中物體質量和穩定懸浮的容易度呈負相關。

(2) 在同一聲場中物體側面積、聲壓振幅和穩定懸浮的容易度呈正相關。

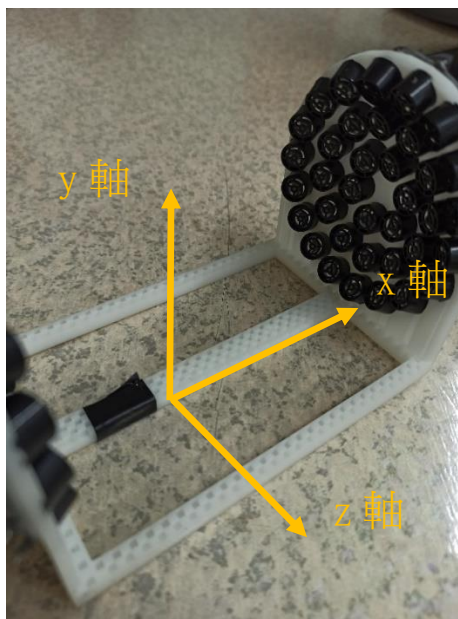
(我們在實驗時以(1)、(2)為基準挑選實驗樣品，選擇質量輕、表面積大之物體)

(五) 聲場空間分布模擬(跟理論假設的差異，在整個設備的中心可以近似理論的假設)

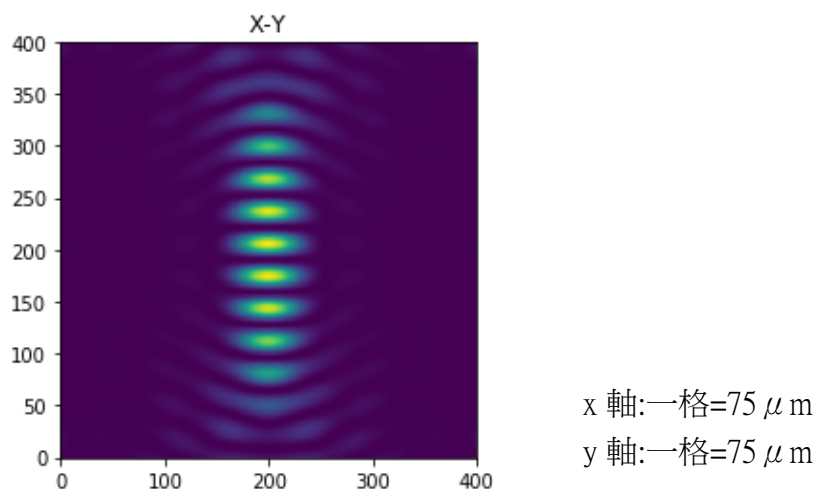
1. 聲場模擬—模擬想法

- (1) 我們將 TinyLev 正中間座標定為(0,0,0)，接著利用程式，把兩邊共 72 個麥克風的 x.y.z 座標定出。
- (2) 將 72 個喇叭對物體造成之壓力相加，計算出空間中每一個點的壓力值
- (3) 輸入時間，畫出位置-壓力圖

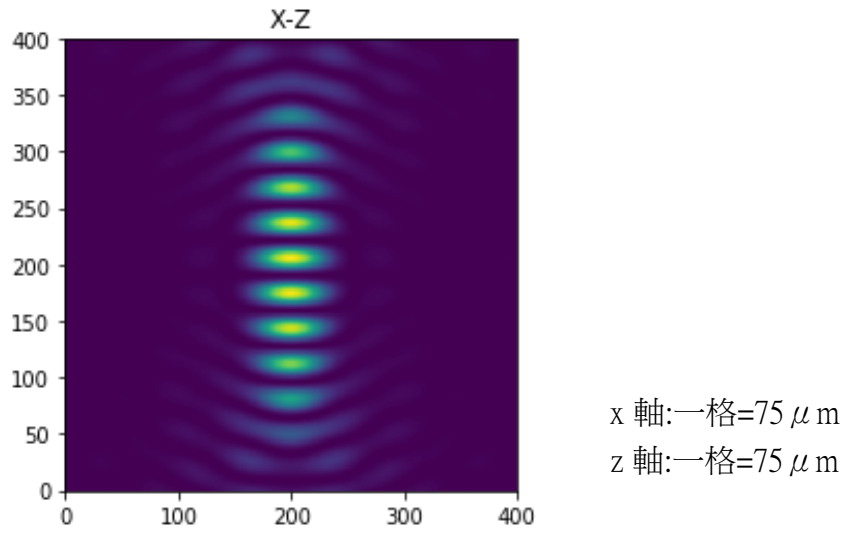
2. 模擬結果



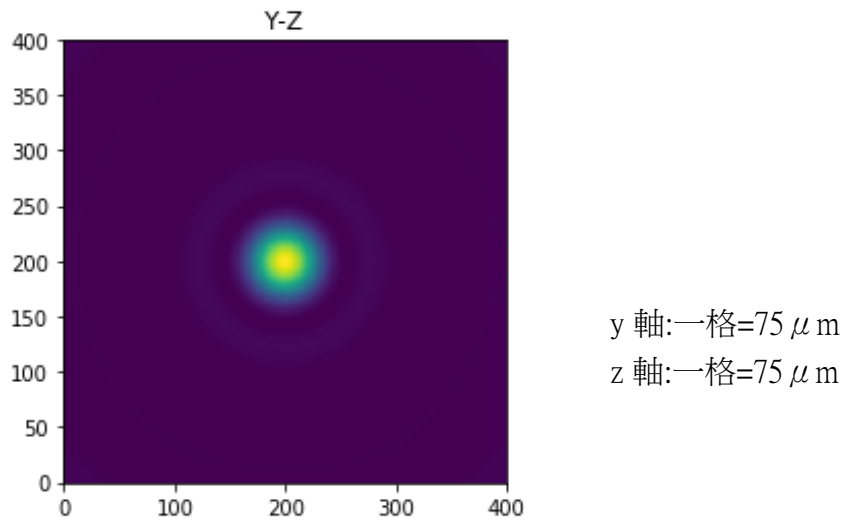
圖八、 模擬使用之座標軸



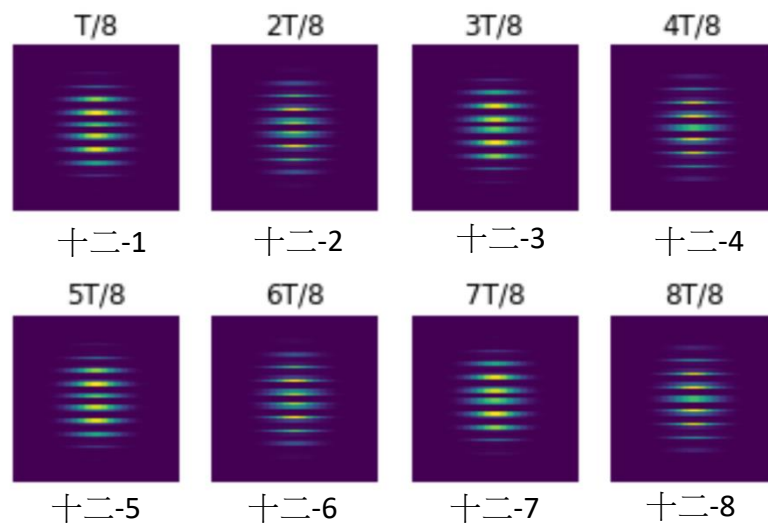
圖九、 x-y 截面壓力場模擬結果(z=0)



圖十、 x-z 截面壓力場模擬結果(y=0)



圖十一、 y-z 截面壓力場模擬結果(x=0)



圖十二、 氣壓場模擬結果(T=1/40000s)

(此八張小圖 X、Y 軸皆相同，故省略)

3. 模擬分析與結論

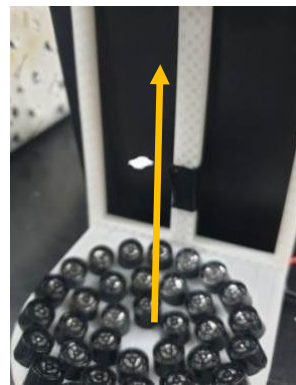
- (1) 觀察模擬中的氣壓場我們發現它是一個沿著 x 方向傳遞的駐波(standing wave)，為了方便觀察其駐波腹點(anti-node)的位置，我們將原始的駐波平方後，即可同時看出週期變化和節點位置，由上圖可以看出氣壓場隨時間的變化，其中十二-1 和十二-5、十二-2 和十二-6、十二-3 和十二-7、十二-4 和十二-8，看起來相同，是我們把氣壓場平方後的結果，實際上其波峰和波谷是對調的。
- (2) 由圖九、圖十可看出，我們的實驗儀器中間壓力場均勻分布可以近似成理論假設之兩邊無限大平面振動所造成的聲壓場。

(六) 物體運動軌跡模擬

1. 運動軌跡模擬—模擬想法

- (1) 帶入物體初位置、初速度及時間，運算出其某時刻的加速度
(註:此壓力場與上述不同，但與理論相同(皆將中間壓力場近似於兩邊無限大平面振動所造成的聲壓場，以方便運算。))
- (2) 運用 rk4 原理計算二階微分方程
(rk4 方法:將一個步驟分成四個，並將四個步驟中求得之斜率，加權平均後再進行運算)
- (3) 將模擬所得資料繪成 t-x 圖

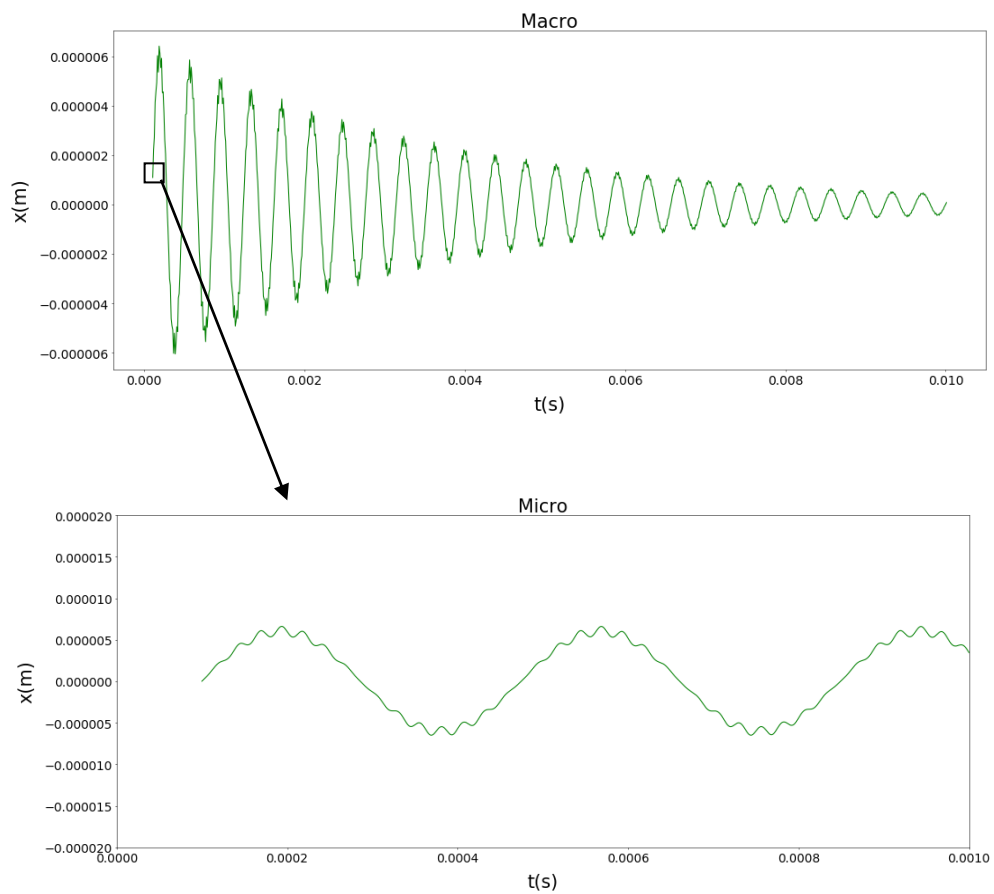
2. 模擬結果



X 軸:位置

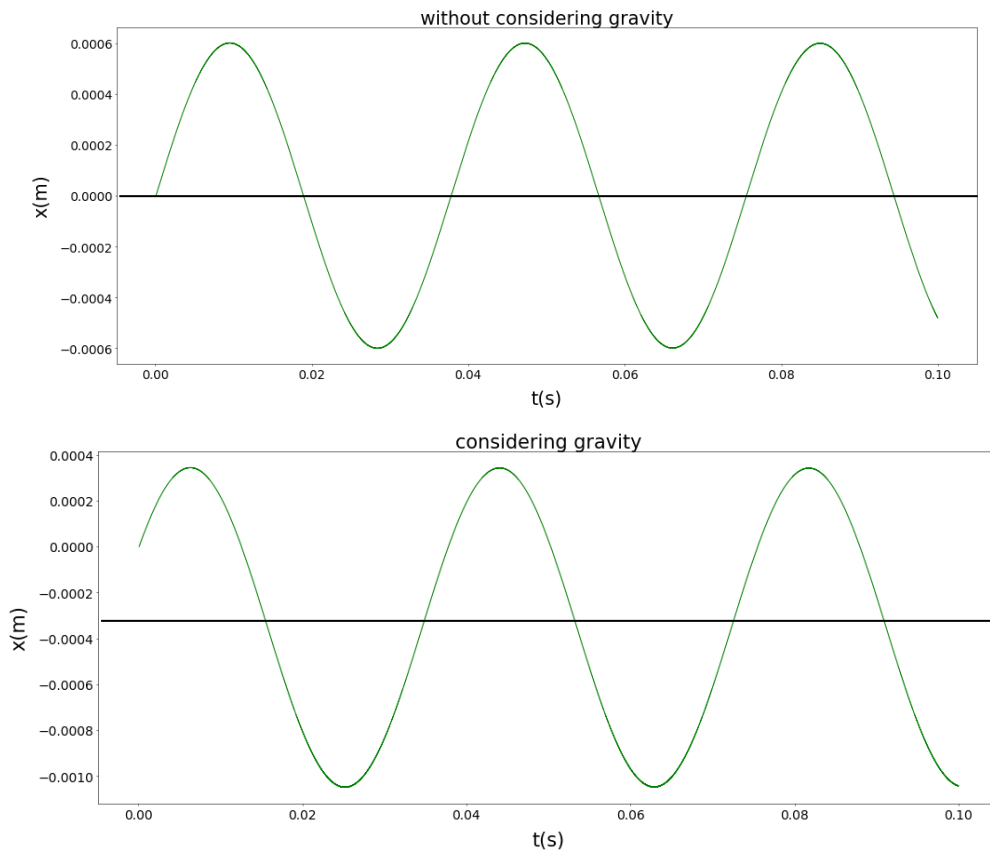
圖十三、 物體位置變化模擬 x 軸位置

(1) 模擬觀察—巨觀與微觀之比較



圖十四、 物體之巨觀與微觀位置

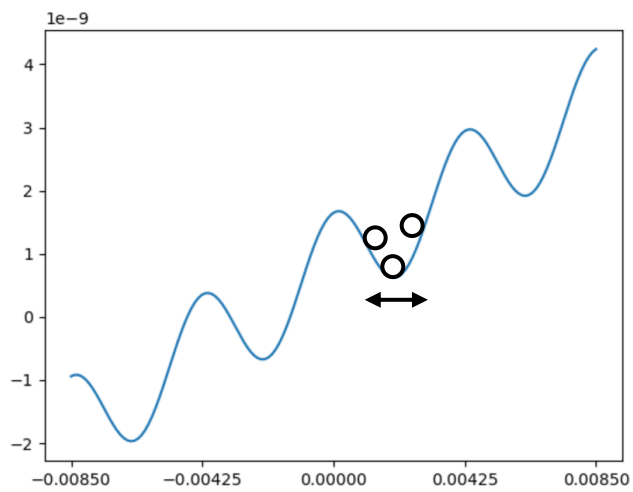
(2) 模擬觀察—有無重力之比較



圖十五、 重力對物體位置之影響

3. 模擬分析與討論

(1) 巨觀、微觀之比較



圖十六、 物體巨觀位置與理論位能關係

與理論符合，會進行上下震盪，且因有阻力因素，震盪幅度越來小，但在微觀上因為壓力場會隨時間快速變換，因此會造成物體微小震盪，但在理論推導時我們忽略此微小貢獻，因此理論圖上看不出來，電腦模擬圖形更貼近事實。

(2) 有無重力之比較

圖十五在沒有重力場的情況下，平衡位置為 0

而在有重力場的情況下，平衡位置約下移了 0.3mm

此即位移所增加之壓力抵銷重力的結果(剛好對應最上方圖一研究方法之圖形)

(3) 綜合觀察

綜合來看可以觀察到(圖十五模擬之重量為圖十四之十倍)，質量較大的物體，受到重力影響較大，而質量較輕的物體，受到阻力影響較大。

因此我們嘗試證明這項結論，我們已知阻力正比於物體之截面積

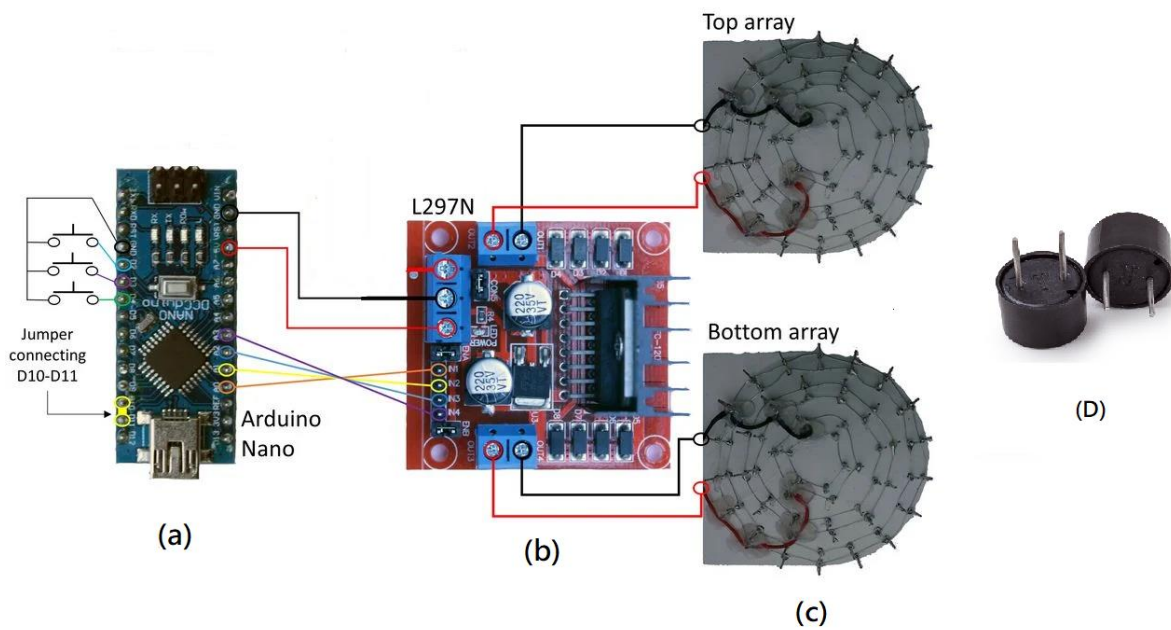
$$\frac{F_{\text{阻}}}{mg} \propto \frac{L^2}{\rho L^3} \propto \frac{1}{\rho L} \quad (23)$$

其中 L 為正方形物體邊長、 ρ 為物體密度

由(23)式可得知，邊長越長，密度越大的物體，重力造成之影響越大。

二、實驗

(一) 實驗設備



圖十七、 研究設備

(a)Arduino Nano—

產品尺寸：4.2x1.7x0.5 公分

工作電壓（邏輯電平）：5V

8 個模擬輸入連接埠：A0 ~ A7

14 數字輸入/輸出端口：TX,RX,D2 ~ D13

6 PWM 連接埠：D3、D5、D6、D9、D10、D11

1 對 TTL 級串行收發器端口 RX / TX

支持 USB 下載和電源

支持外部 5V ~ 12V 直流電源

支持 9V 電池供電

(b) L298N Dual Motor Drive Board(電機驅動器控制器板)—

運作模式：H 橋（雙線）

控制芯片：L298N

邏輯電壓：5V

驅動電壓：5V-35V

邏輯電流：0mA-36mA

驅動電流：2A (最大單橋)

儲存溫度：(-20 °C)-(+135 °C)

最大功率：25W

重量：27 公克

外圍尺寸：43 x 43 x 27 公釐 (長 x 寬 x 高)

(c) 3D print the base for the levitator—

基座透過 3D 印刷，尺寸為 14 x 7.86 x 8.31cm

(d) Ultrasonic Sensor(超聲波換能器)—

頻率：40.0±1.0 kHz

SPL：≥110 分貝

工作溫度：-20~+ 70°C

電壓-電源：≤40Vrms

使用方法：發射器或接收器

尺寸：10 毫米

我們使用的氣體懸浮儀是 TinyLev，TinyLev 是由國外研究團隊設計的簡易氣體懸浮器，它包含 Arduino nano、L298N 電機驅動器控制器板、上蓋下蓋、72 個喇叭，將官網所提供之 Arduino 程式碼輸入，使 Arduino 提供此實驗所需電流訊號，並將此提供給 L298N，L298N 再將電壓放大分別傳至曲率半徑為 12.75cm 的上蓋及下蓋，在上蓋及下蓋上，分別有 36 個並聯的喇叭，這 72 個喇叭透過所獲得之電流訊號轉換成超聲波，在儀器中形成駐波，物體便能依靠駐波飄浮在空氣中。

(二) 實驗構想

1. 如何驗證理論計算及模擬

(1) 控制樣本的密度、長度，改變其側面積得到密度、長度固定下，觀察樣本

側面積不同時的個別懸浮情形

- (2) 嘗試在形狀不變的狀況下改變其質量，觀察樣本的個別懸浮情形。
- (3) 改變樣本的長度，重複(1)(2)。
- (4) 將得到的數據點與理論計算與模擬比對。

2. 實驗樣品製備原則

為了達到驗證理論的目的，我們選用了保麗龍作為我們的懸浮材料，其原因如下

- (1) 方便切割
- (2) 銅絲可以在不改變保麗龍樣本的形狀下插入其中，以改變樣本質量

(三) 實驗流程

保麗龍樣本

1. 用保麗龍切出 2mm、3mm、4mm 的薄片
2. 分別在薄片上切下 3mm*3mm、4mm*4mm、5mm*5mm 的樣本
3. 分別放上 TinyLev 並記錄是否成功穩定漂浮
4. 在樣本上插上銅絲以改變質量，並重複步驟 3.
5. 製作截面積-質量圖，並標記是否穩定

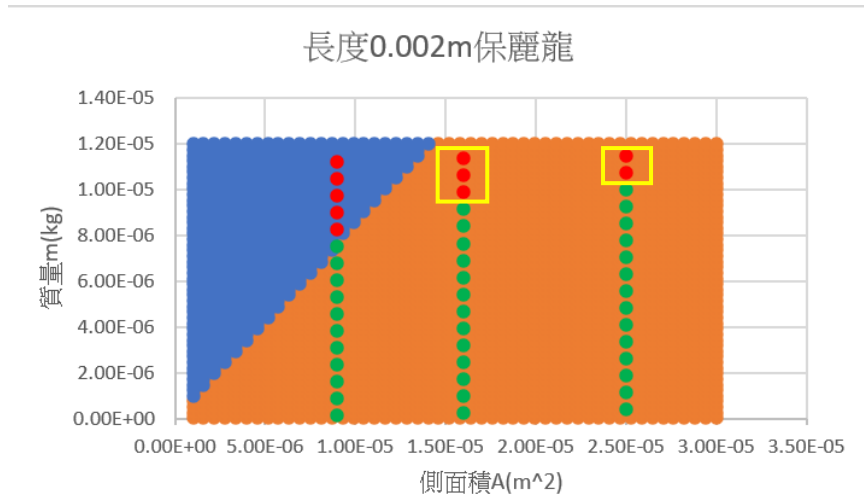


(四) 實驗結果(繪製成截面積-質量圖)

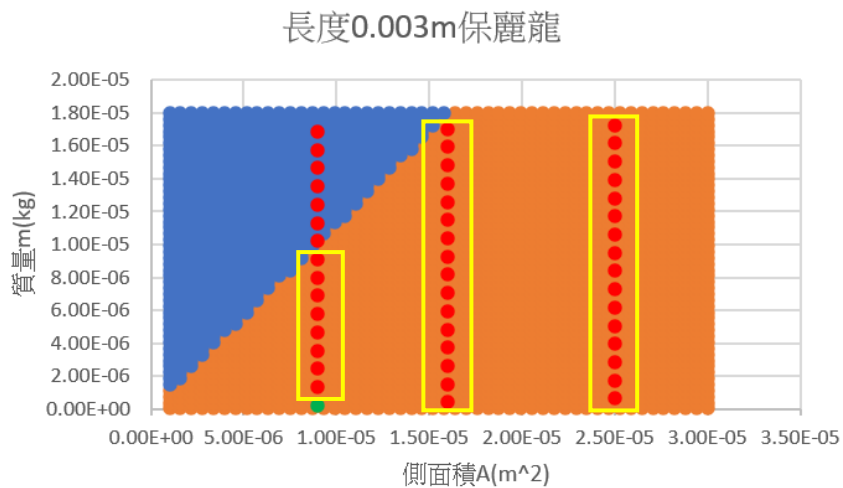
將實驗所得的資料點，點在模擬所得的截面上，發現會出現實驗可以穩定，而理論無法穩定的狀況。我們回到最原始假設的喇叭產生的壓力振幅，由於它是

唯一被我們假設的初始條件，因此我們可以合理的把喇叭產生的氣壓振幅調大，使理論模擬出的穩定條件包含實驗所得之事實。

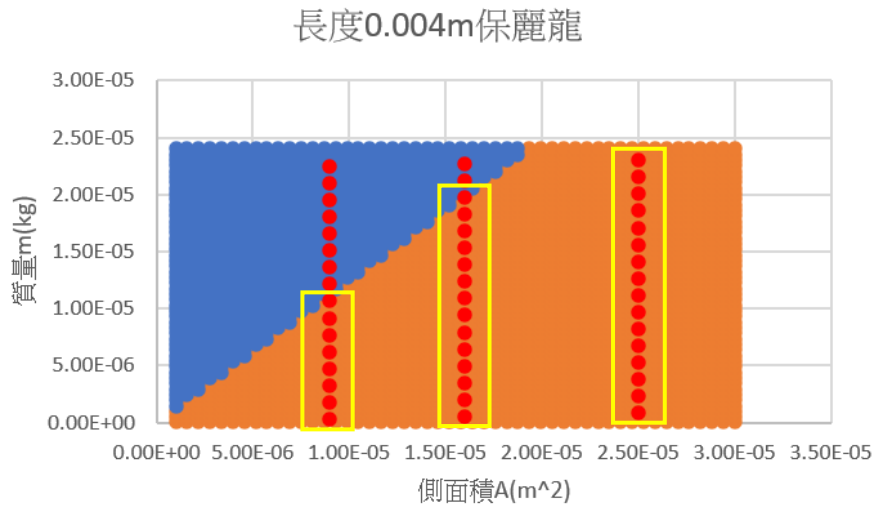
經過上述修正後，我們得到以下幾張圖，圖中標示的綠點為實驗穩定懸浮，紅點為實驗不穩定懸浮。



圖十八、 $d=0.002\text{m}$ 之截面加上長度 0.002m 之保麗龍樣本資料點



圖十九、 $d=0.003\text{m}$ 之截面加上長度 0.003m 之保麗龍樣本資料點

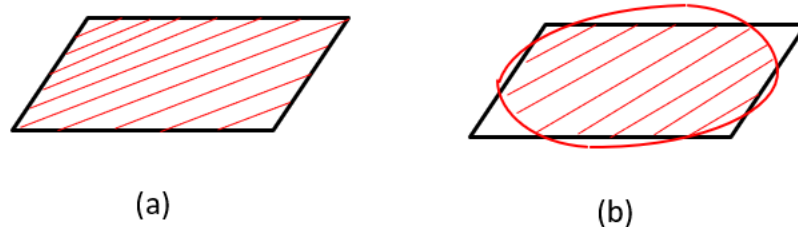


圖二十、 $d=0.004\text{m}$ 之截面加上長度 0.004m 之保麗龍樣本資料點

(五) 實驗結果分析與討論

1. 物體截面積超出實驗中理論有效範圍

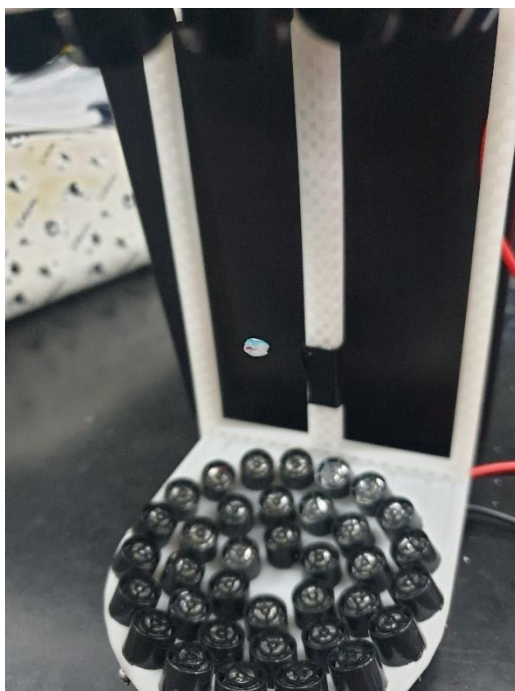
實驗中理論有效範圍：觀察壓力場模擬(圖十一)，壓力場對物體造成的影響集中在兩端喇叭的中點，因此，若物體側面積超出圖十一理論有效範圍(約為直徑 0.00425m 的圓)，多出的面積將不會受到聲場壓力差，造成實際有受力的側面積不等於物體在聲場中的側面積，理論計算可懸浮物體的最大質量大於實驗可懸浮物體的最大質量。



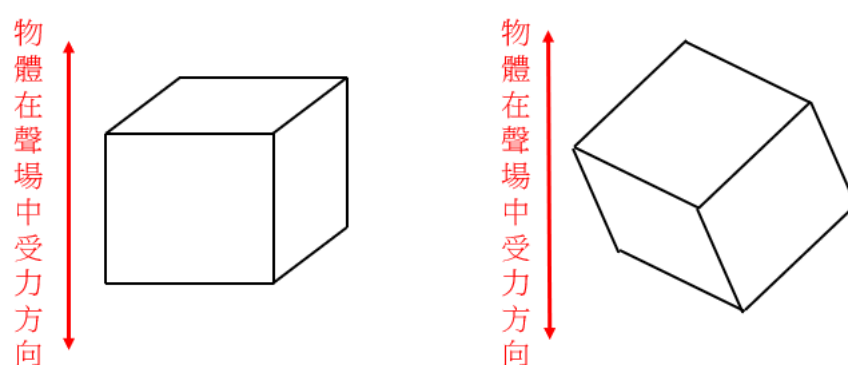
圖二十一、 實驗及理論受聲場壓力差的面積比較(a)理論計算(b)實驗

2. 實驗時物體的傾斜情形

實驗時，我們發現物體有傾斜的情形，如圖二十二，物體傾斜時，垂直喇叭的截面積會變大，與此同時，物體在聲場中的受力情形會變得不同於理論時假設的立方體，如圖二十三，若要計算物體傾斜後在目前理論下的情形，必須再次計算物體在聲場中所受的力，並帶入理論有效位能方程式，方可得正確的理論計算結果。



圖二十二、 物體懸浮傾斜情形



圖二十三、 物體懸浮傾斜後和理論假設差異(a)理論假設(b)實驗

(六) 實驗結論

依據目前的理論及模擬的立方體模型進行實驗時，會因為物體傾斜而造成實驗和理論、模擬不同，而無法用目前理論解釋實驗結果。

肆、 結論

綜觀來看，模擬比理論推導更貼近現實，但與實驗還有一小段差距，目前雖無法準確做定量分析，但可以定性的知道一些特性。

- 一、從理論畫出的 3D 圖中可以發現，物體在某個特定長度 d 時，會比較容易穩定懸浮，而這個特定長度和聲波的波長有關，其關係為 $d=(n+1/2)\lambda$ 。
- 二、由理論計算所得之解析解，可看出側面積-質量截面上穩定與不穩定之邊界線呈線性，因此 $m \propto A$ ，而又因為物體厚度為定值，則 $m \propto A*d \propto V$ ，可推得位於此界線的物體密度為某一定值。
- 三、 $\frac{F_{阻}}{mg} \propto \frac{1}{\rho L}$ ，其中 L 為正方形物體邊長、 ρ 為物體密度，邊長越長、密度越大的物體，重力造成之影響越大，反之則阻力影響越大。
- 四、實驗時，物體懸浮時會略為傾斜，是否有利於物體穩定懸浮本研究中尚未探討。
- 五、壓力場模擬發現，實驗中物體的側面積會受到理論有效範圍的限制，造成理論可懸浮之最大質量小於實驗所得。

伍、 未來展望

- 一、將目前理論及模擬假設的立方體改成球體，並利用球體再做一次實驗，以排除物體傾斜所造成實驗和理論、模擬的不同。
- 二、修改懸浮立方體的理論，使其能夠解釋物體傾斜的原因，甚至傾斜的程度，並利用實驗佐證。
- 三、建構理論假設之平面聲壓懸浮器，懸浮截面積更大的物體。

四、相比磁浮，聲壓懸浮的優點是可以飄浮非導體，也可以應用上化學上，如一些極具危險性或需極高純度的反應，就可以用聲壓懸浮來完成。

陸、參考資料

Mechanics : Volume 1 (1995) 。 L. D. Landau , E. M. Lifshitz 。

<https://www.instructables.com/id/Acoustic-Levigator/> 聲壓懸浮器組裝教學 (2020/3/19)

<https://zh.wikipedia.org/wiki/龙格-库塔法> (2020/4/16)

附錄(一)

理論位能之程式碼

1. 輸入所需基本參數

```
B=18150 #喇叭輸出氣壓振幅(單位:Pa)
f=40000 #喇叭輸出頻率(單位:Hz)
k=2*math.pi/0.0085 #角波數
A=0.000009 #物體側面積(單位:m^2)
d=0.00425 #物體長度(單位:m)
m=0.000001 #物體質量(單位:kg)
```

2. 將理論推出之方程式定義為一函數，回傳物體位能

```
def g(x, m, A, d, B):
    return m*9.8*x+((A*B)**2/(2*m*(2*PI*f)**2))*(2-math.cos(2*k*x-k*d)-2*math.cos(k*d)
        +2*math.cos(2*k*x)-math.cos(2*k*x+k*d))
```

3. 將解析解定義為一函數，回傳解析解值

```
def C(m, A, d, B):
    return (m**2*9.8*PI*f**2*0.0085)/(A**2*B**2*(1-math.cos(k*d)))
```

4. 測試資料

```

for i in tqdm(np.linspace(0.0001,0.01,pixel)):
    for j in np.linspace(0.00000001,0.000024,pixel):
        for s in np.linspace(0.000001,0.00003,pixel):
            d = i
            m = j
            A = s
            D.append(i)
            M.append(j)
            a.append(s)
            if C(m, A, d, B)<=1:
                TF.append(1)
            else:
                TF.append(0)

```

#利用迴圈測試資料並輸入陣列

5. 將陣列轉成 csv 檔

```

np.savetxt('d.csv',np.array(D), delimiter=',')
np.savetxt('m.csv',np.array(M), delimiter=',')
np.savetxt('A.csv',np.array(a), delimiter=',')
np.savetxt('TF.csv',np.array(TF), delimiter=',')

```

6. 將 csv 檔匯入 Matlab 中繪製成 3D 圖

附錄(二)

模擬壓力場之程式碼

1. 輸入我們需要的基本參數

```

#定義初始值
R=0.06375          #R為TinyLev的長度，以中間為0，左右各0.06375m
pixel=100          #Pixel為我們所選取的空間之像素
freq=40000         #freq為TinyLev發出的超聲波之頻率，單位Hz
v=340              #v為聲音在空氣中傳播之速率，單位m/s
P=101316           #P為海拔0公尺時之大氣壓力，單位 Pa
k=2*np.pi*freq/v #k為角波速
w=2*np.pi*freq    #w為角頻率

```

2. 將 72 個麥克風定位


```

#將72個麥克風定位
sources=np.array([[0.0,0.0,0.0,0.0]for i in range(72)])
for i in range(6):
    sources[2*i]=np.array([np.cos(2*np.pi*10/360),np.sin(2*np.pi*10/360)*np.cos(2*np.pi/6.0*i)
        ,np.sin(2*np.pi*10/360)*np.sin(2*np.pi/6.0*i),0.0])
    sources[2*i+1]=-sources[2*i]
for i in range(12):
    sources[12+2*i]=np.array([np.cos(2*np.pi*20/360),np.sin(2*np.pi*20/360)*np.cos(2*np.pi/12.0*i)
        ,np.sin(2*np.pi*20/360)*np.sin(2*np.pi/12.0*i),0.0])
    sources[12+2*i+1]=-sources[12+2*i]
for i in range(18):
    sources[36+2*i]=np.array([np.cos(2*np.pi*30/360),np.sin(2*np.pi*30/360)*np.cos(2*np.pi/18.0*i)
        ,np.sin(2*np.pi*30/360)*np.sin(2*np.pi/18.0*i),0.0])
    sources[36+2*i+1]=-sources[36+2*i]
sources*=R
#我們將TinyLev正中間座標定為(0,0,0)，接著利用程式，把兩邊共72個麥克風的x.y.z座標定出

```

我們將 TinyLev 正中間座標定為(0,0,0)，接著利用程式，把兩邊共 72 個麥克風的 x.y.z 座標定出。

3. 將 72 個喇叭對物體造成之壓力相加

```

#Pressure(位置,時間)函數表示某位置在某時間所受壓力總和(假設物體為一質點)
def pressure(pos,time):
    count=0
    for i in range(72): #將72個喇叭對物體造成的壓力相加
        r=((pos[0]-sources[i][0])**2)+((pos[1]-sources[i][1])**2)+((pos[2]-sources[i][2])**2)**(1/2)
        if i%2==0:
            count+=P*(np.cos(k*r-w*time)/r)
        elif i%2==1:
            count+=P*(np.cos(k*r+w*time)/r)
    return count**2 #稍後畫圖時，使波峰、波谷皆呈現亮色

```

4. 輸入時間，畫出位置-壓力圖

```

#取x軸由-3cm~3cm,y軸由-3cm~3cm作圖，觀看其壓力場分布
for a in np.linspace(-0.03,0.03,pixel):
    for b in np.linspace(-0.03,0.03,pixel):
        img[i,j]=pressure([a,b,0],t)
        j+=1
    i+=1
    j=0
return plt.imshow(img,origin='lower')

```

附錄(三)

利用 Python 模擬物體位置變化之程式碼

1. 設定個初始值

```

m=0.00001          #質量=0.01g          #設定各個初始值
A=0.000009        #表面積=9mm^2          x=0.0
freq=40000         #超聲波頻率          v=0.1
L=0.1275          #機器長度為12.75cm        t=0.0001
d=0.0085/2        #厚度為半個波長          dt=0.00001
p0=1000000        #空氣壓力之震幅          rx=[]
k=2*np.pi*freq/340 #角波數          rv=[]
w=2*np.pi*freq    #角頻率          ra=[]
pixel=100         #Pixel為我們所選取的空間之像素  rt=[]

```

2. 帶入物體初位置、初速度及時間，運算出某時刻的加速度

```

#帶入物體初位置、初速度及時間，運算出其某時刻的加速度
def Acceleration(x,v,t):
    global a
    r1=L/2+x+d/2
    r2=L/2+x-d/2
    r3=L/2-x+d/2
    r4=L/2-x-d/2
    p=p0*((np.cos(k*r1+w*t)/r1)+(np.cos(k*r2+w*t)/r2)+(np.cos(k*r3-w*t)/r3)+(np.cos(k*r4-w*t)/r4))
    if v>=0:
        a=(A/m)*((p-(0.5*0.8*1.29*v*v))-9.8
    elif v<0:
        a=(A/m)*((p+(0.5*0.8*1.29*v*v))-9.8
    return a

```

3. 運用 rk4 原理計算二階微分方程

```

#運用rk4原理計算二階微分方程
while t<0.1:
    kx1=v*dt
    kv1=Acceleration(x,v,t)*dt
    kx2=(v+kv1/2)*dt
    kv2=Acceleration(x+kx1/2,v+kv1/2,t+dt/2)*dt
    kx3=(v+kv2/2)*dt
    kv3=Acceleration(x+kx2/2,v+kv2/2,t+dt/2)*dt
    kx4=(v+kv3)*dt
    kv4=Acceleration(x+kx3,v+kv3,t+dt)*dt
    x+=(kx1+2*kx2+2*kx3+kx4)/6
    v+=(kv1+2*kv2+2*kv3+kv4)/6
    t+=dt
    rx.append(x)
    rv.append(v)
    ra.append(Acceleration(x,v,t))
    rt.append(t)

```

4. 將模擬所得資料繪成 T-X 圖

```

#將模擬所得資料繪成t-x圖
plt.figure(figsize=(25,10),dpi=50,linewidth = 1)
plt.title("Position",size=30)
plt.plot(rt,rx,'-',color = 'g')
plt.xticks(fontsize=20)
plt.yticks(fontsize=20)
plt.xlabel("t(s)", fontsize=30, labelpad = 15)
plt.ylabel("x(m)", fontsize=30, labelpad = 15)
plt.show()

```

【評語】 051814

本作品是利用聲波之駐波產生壓力聲壓懸浮(Acoustic levitation)，使物體懸浮在空中。有關壓力聲壓懸浮可參照：
https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_levitation。

作品之優點在實作重現經典實驗，不過實驗主要器材是購買自現成的 TinyLev 氣體懸浮儀。若能更清楚地闡釋相關之物理原理與機制，當使作品更具意義。

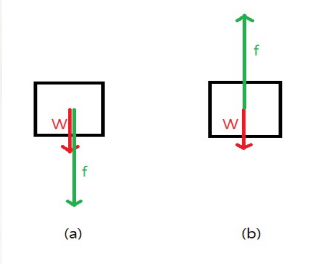
前期研究

我們首先嘗試懸浮日常生活中常見的各種物品，例如米粒、蝦米甚至螞蟻，並列出一些可能影響物體懸浮穩定的參數，物體參數包含質量、側面積、長度、初速度；聲壓參數包括波長、頻率、聲壓振幅；環境參數包括重力場、空氣阻力係數，此外，我們猜想在物體側面積極大、質量極小、長度不等於0、初速度等於0時，由於物體受聲壓場作用極大、受環境影響極小，故物體一定可以穩定懸浮，並以此為依據做更進一步的研究。



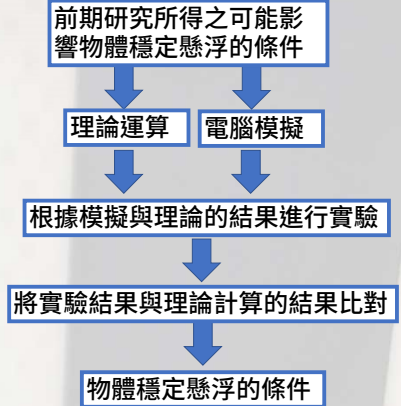
原理

器材兩端的超聲波頻喇叭，在儀器中會形成壓力駐波，當物體置於此壓力駐波中，利用受到的高頻震盪力，可以使物體克服重力而穩定懸浮在空中。



物體將在(a)(b)兩種狀況下快速轉換

研究方法



研究過程

理論計算:

考慮外界的常數場 U (重力...)和聲場產生的高頻振動力 f

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} + f(x, t) \quad (1)$$

我們假設物體的移動由平穩的運動 x 和高頻的震動 ξ 所組成，即

$$x = X + \xi \quad (2)$$

將(2)帶入(1)，並對 ξ 做泰勒展開後可得

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X} \quad (3)$$

(3)右式中包含小量 ξ 的兩項因為是高階小量故可省略，我們接著把跟高頻振動項分離出來並積分可得

$$\xi = -\frac{f(X, t)}{m\omega^2} \quad (4)$$

接著將(3)對時間平均，因高頻振動項的 $T \ll 1$ ，因此高頻振動項對時間平均後可視為0

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \xi \frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} f \frac{\partial f}{\partial X} \quad (5)$$

假設有效位能 U_{eff} 並將(5)重新寫成

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} f \frac{\partial f}{\partial X} \quad (6)$$

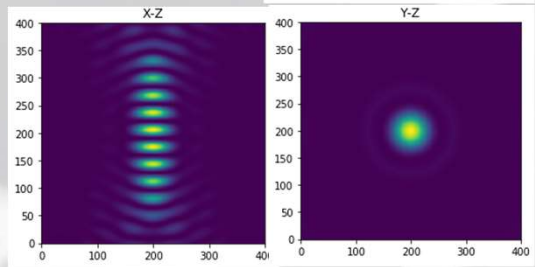
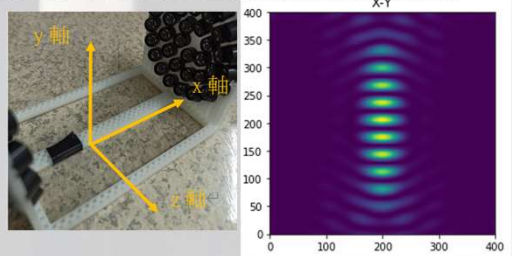
將(6)積分後可得

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2m\omega^2} f^2 \quad (7)$$

藉由此有效位能即可知道物體在聲壓場的穩定位置，並探討物體穩定懸浮的條件

電腦模擬:

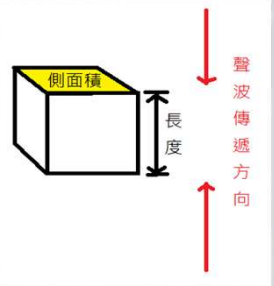
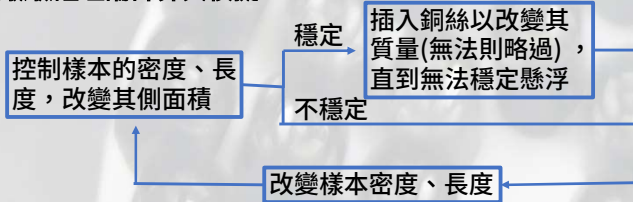
首先模擬聲壓場中的壓力圖(單位皆為 $75\mu m$)



接著模擬將一物體置於聲壓場中物體位置的變化，這裡和理論計算不同處在於不忽略微小項，且假設物體有初速度，並藉由模擬物體位置的變化，探討

物體穩定懸浮的條件

實驗驗證理論計算與模擬:



將得到的數據點與理論計算與模擬比對

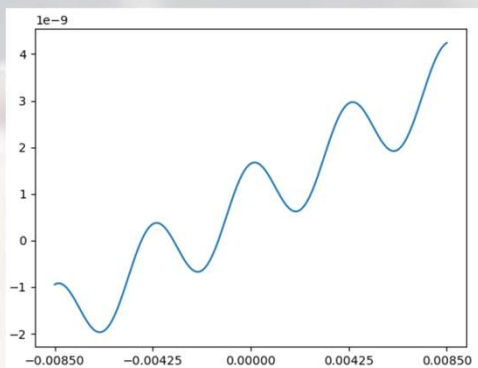
實驗樣品備製:

為了達到驗證理論的目的，選用保麗龍作為懸浮材料，其原因如下

1. 方便切割
2. 銅絲可以在不改變保麗龍樣本的形狀下插入其中，以改變樣本質量

研究結果

理論計算:



物體之理論位能圖

在理論位能圖上，若存在對位置微分為零的點

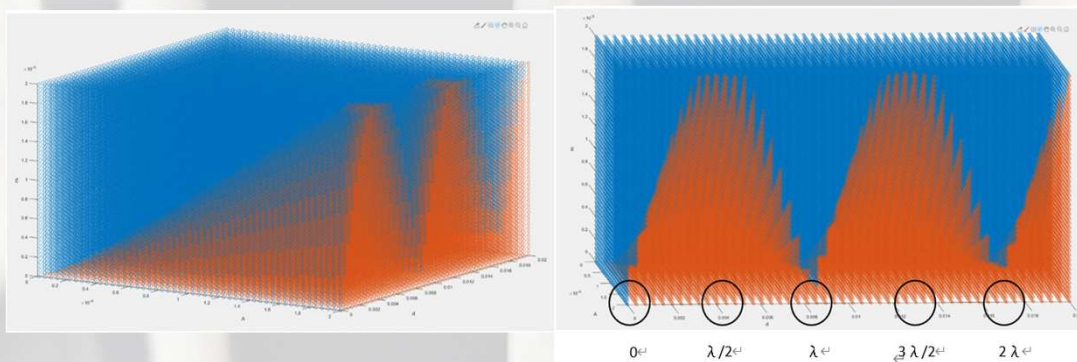
即：

$$\frac{dU_{eff}}{dX} = 0$$

則此物體條件在理論上能夠穩定懸浮，可以藉此

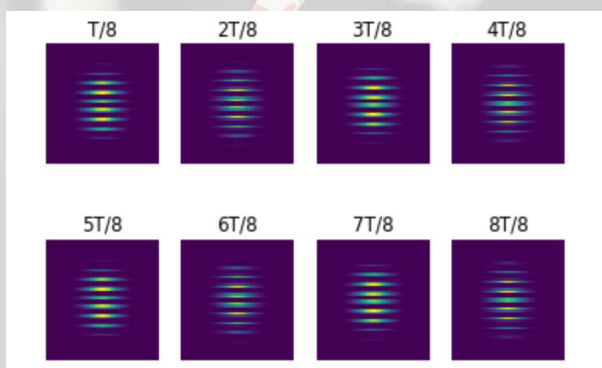
推得理論解析解為

$$\frac{m^2 g \pi v^2}{\lambda A^2 P_0^2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) \right]} \leq 1$$

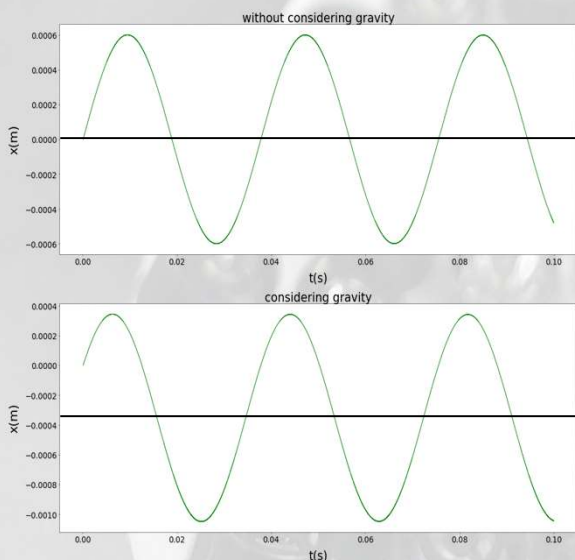


理論物體穩定情況側面積-長度-質量圖
(橘色為穩定懸浮，藍色為不穩定懸浮)

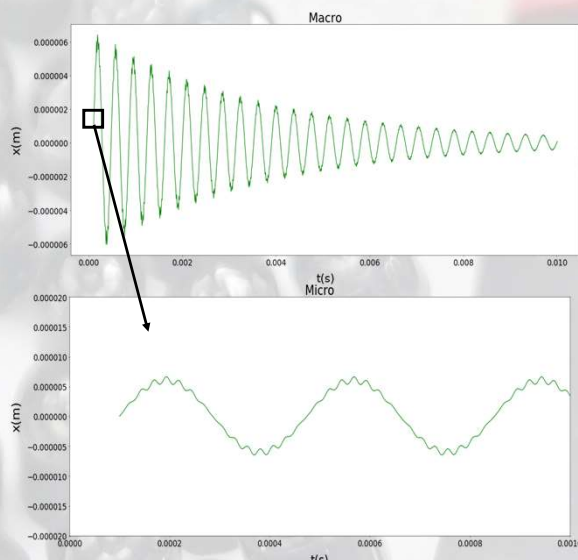
電腦模擬:



聲場聲壓隨時變之強度分布圖
(平方處理後最亮橫線可為波峰或波谷)



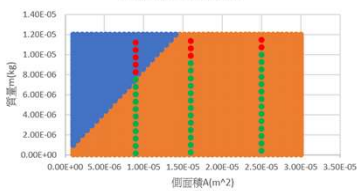
考慮(上)不考慮(下)重力物體位置變化圖



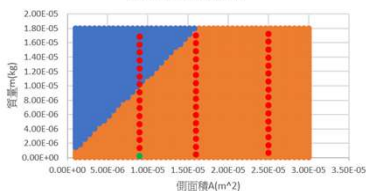
微觀(上)巨觀(下)之電腦模擬物體位置變化圖

實驗:

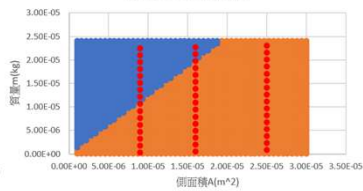
長度0.002m保麗龍



長度0.003m保麗龍



長度0.004m保麗龍



長度為2mm、3mm、4mm之保麗龍樣本實驗與理論比較圖

(橘色為理論穩定懸浮, 藍色為理論不穩定懸浮)

(綠色為實驗穩定懸浮, 紅色為實驗不穩定懸浮)

討論

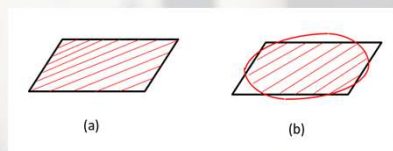
實驗結果與理論計算異同分析:

一. 物體截面積超出實驗中理論有效範圍

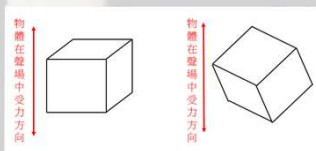
實驗中理論有效範圍: 觀察壓力場模擬圖, 壓力場對物體造成的影響集中在兩端喇叭的中點, 因此, 若物體側面積超出理論有效範圍(約為直徑0.00425m的圓), 多出的面積將不會受到聲場壓力差, 造成實際有受力的側面積不等於物體在聲場中的側面積, 因此理論計算可懸浮物體的最大質量, 大於實驗可懸浮物體的最大質量。

二. 實驗時物體的傾斜情形

實驗時, 我們發現物體有傾斜的情形, 物體傾斜時, 垂直喇叭的截面積會變大, 與此同時, 物體在聲場中的受力情形會變得不同於理論時假設的立方體(如右下圖), 若要計算物體傾斜後在目前理論下的情形, 必須再次計算物體在聲場中所受的力, 並帶入理論有效位能方程式, 方可得正確的理論計算結果。



實驗中理論有效範圍



實驗時物體的傾斜情形

依據目前的理論及模擬的立方體模型進行實驗時, 會因為以上兩點而造成實驗和理論、模擬不同, 而因此實驗結果和理論無法完全吻合。

結論

綜觀來看, 模擬比理論推導更貼近現實, 但與實驗還有一小段差距, 目前雖無法準確做定量分析, 但可以定性的知道一些特性。

- 由理論計算所得之解析解, 物體在特定長度 d 時, 較容易穩定懸浮, 而此特定長度和聲波波長有關, 其關係為 $d=(n+1/2)\lambda$ 。
- 由理論計算所得之解析解, 可看出長度固定時, 穩定與不穩定之邊界線呈線性, 因此 $m \propto A$, 且物體厚度為定值, 則 $m \propto A \cdot d \propto V$, 可推得位於此界線的物體密度為某一定值。
- 物體位移模擬中發現 $\frac{F_{阻}}{mg} \propto \frac{1}{\rho L}$, 其中 L 為正方形物體邊長、 ρ 為物體密度, 邊長越長、密度越大的物體, 重力造成之影響越大, 反之則阻力影響越大。
- 實驗時, 物體懸浮時會略為傾斜, 是否有利於使物體穩定懸浮, 本研究中尚未探討。
- 壓力場模擬發現, 實驗中物體的側面積會受到理論有效範圍的限制, 造成理論可懸浮之最大質量大於實驗所得。

未來展望

- 將目前理論及模擬假設的立方體改成球體, 並利用球體再做一次實驗, 以排除物體傾斜所造成實驗和理論、模擬的不同。
- 修改懸浮立方體的理論, 使其能夠解釋物體傾斜的原因, 甚至傾斜的程度, 並利用實驗佐證。
- 建構理論假設之平面聲壓懸浮器, 懸浮側面積更大的物體。
- 相比磁浮, 聲壓懸浮的優點是可以飄浮非導體, 也可以應用在化學上, 如一些極具危險性或需極高純度的反應, 就可以用聲壓懸浮來完成。

參考資料

Mechanics : Volume 1 (1995) 。L. D. Landau , E. M. Lifshitz 。

<https://www.instructables.com/id/Acoustic-Levigator/> 聲壓懸浮器組裝教學 (2020/3/19)

<https://zh.wikipedia.org/wiki/龍格-庫塔法> (2020/4/16)