

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第二名

051813

配重圓盤與其倒轉時間的探討

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者： 高二 林蕙芬	指導老師： 蘇郁茜 李瑋舒
---------------	---------------------

關鍵詞：轉動慣量、倒轉陀螺、自轉

摘要

本實驗研究重心偏移的圓盤經旋轉發射後，其重心上翻與轉速的關係。實驗發現偏心圓盤在旋轉的過程中，重心有反覆上翻而又下降的現象，其重心位於上方的持續時間會逐次減少。從歐拉角轉動方程式、摩擦力與能量關係得出角度變化率的關係式，特殊條件下上翻條件為自轉角速度 $n > n_c$ （臨界角速度），但 n_c 會因進動變快而上升，且 n 因進動變快及摩擦力損耗而下降，使 n 低於 n_c 導致重心下翻。另，重心上翻時並無特定自轉角速度，取而代之的是初自轉角速度愈大愈快上翻，即初自轉角速度愈大上翻時自轉角速度亦愈大；而重心偏心率越大能有較穩定的旋轉，也就是重心在上半部的維持時間較長；厚度愈厚其旋轉較不穩定，推測因其無穩定接觸點使摩擦力作用不連續。

壹、研究動機

一、動機

有次在社群媒體無意間看到的玩具，如圖 1(a)，由一個圓盤及兩個半球組成，其中半球等質量且在圓盤左右對稱處。影片中的兩個半球原本位於圓盤下半部，在開始自轉後半球會在旋轉的過程中上升，如圖 1(b)。我嘗試做了一個簡單的模型來測試看看，如圖 1(c)，利用雷射切割機製造一個側邊有洞的圓形密集板，並將彈珠塞入圓形的洞中。結果只有在少數施力比較大的狀況下，彈珠才有上轉的狀況。



圖 1(a) 市售配重偏心圓盤
初始狀態[1]



圖 1(b) 市售配重偏心圓盤
重心上翻[1]



圖 1(c) 初期測試模型

二、改良

為使左右質量對稱，我設計另一款偏心圓盤，如下圖 2(a)。由一個配重盤及一個挖

洞圓盤組合而成，如圖 2(b) 與圖 2(c)，其中配重盤的材質密度大於挖洞圓盤，後續實驗將此重心偏離圓心的圓盤簡稱「偏心圓盤」，而偏心率 $\equiv \left(\frac{\text{質心與圓心距離}}{\text{大圓半徑}} \right)$ 。

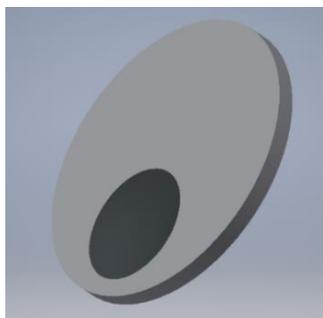


圖 2(a) 配重偏心圓盤



圖 2(b) 配重盤
(密度較大)

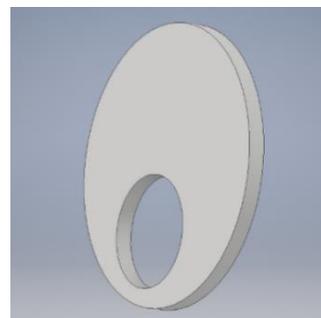


圖 2(c) 挖洞圓盤
(密度較小)

三、實驗原理

再更深入的查尋資料過後，發現偏心圓盤與以下兩種裝置有幾點相似：

(一) 旋轉硬幣

旋轉硬幣一般有三種階段的運動[3]：

1. 第一階段：自轉軸通過硬幣直徑並垂直於桌面，銅板與桌面的接觸點是固定的。
2. 第二階段：含「滾動運動」及「自轉運動」
 - (1) 滾動運動：銅板邊緣沿著桌面滾動，且繞著圈圈滾動。
 - (2) 自轉運動：自轉軸與銅板表面垂直，並通過銅板中心。
3. 第三階段：銅板傾斜度增加，銅板與桌面撞擊產生的聲音頻率越來越快（但是自轉速度變慢），最後停止運動。

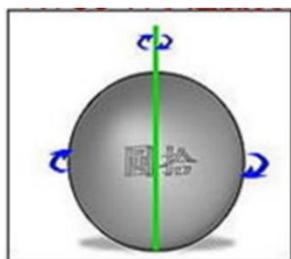


圖 3(a) 第一階段[3]

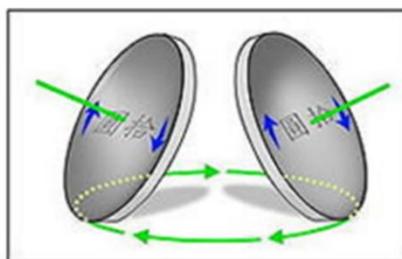


圖 3(b) 第二階段[3]

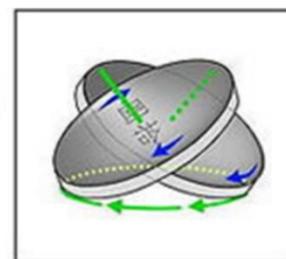


圖 3(c) 第三階段[3]

(二) 倒轉陀螺

倒轉陀螺發射前重心偏低，如圖 4。旋轉的過程中會有重心上翻並以根狀物支撐旋轉的現象。推測其原理可能與偏心圓盤相關。



圖 4 倒轉陀螺[6]

貳、研究目的

- 一、探討偏心圓盤的重覆性與運動階段。
- 二、探討偏心圓盤的運動軌跡與重心上翻的關係。
- 三、探討偏心圓盤重心反覆上翻下降的現象。
- 四、同樣品中，不同初自轉角速度如何影響上翻的現象。
- 五、探討偏心率與重心上翻維持時間的關係。
- 六、平板厚度對旋轉的影響。
- 七、探討偏心圓盤重心上翻至最高點的週期性。

參、研究設備及器材

表 1 詳細器材及工具

編號	名稱	數量	型號、備註
1	壓克力板	詳見表 2	
2	萬用黏土		
3	電腦	一台	使用軟體： Tracker, Excel
4	攝影機	兩台	SONY hdr-cx450*1(60fps) SONY hdr-as300*1(60fps)
5	白紙	一張	4K

表 2 偏心圓盤規格表（對照圖 5）

編號	厚度 (mm)	2R (mm)	2r (mm)	Δd (mm)	a (mm)	a/R 偏心率	挖洞圓盤 重量 (gw)	配重盤 重量 (gw)	總重 (gw)
1	5.0	40.0	20.0	5.0	1.47	0.0735	5.442	3.015	8.457
2	3.0	40.0	20.0	5.0	1.46	0.0730	2.981	1.634	4.615
3	3.0	40.0	10.0	5.0	0.90	0.0450	3.704	0.389	4.093
4	3.0	40.0	10.0	7.5	0.67	0.0335	3.704	0.389	4.093
5	3.0	40.0	10.0	10.0	0.45	0.0225	3.704	0.389	4.093
6	3.0	60.0	25.0	2.5	3.26	0.109	8.128	2.726	10.584
7	3.0	80.0	30.0	5.0	4.03	0.101	15.503	4.559	20.602

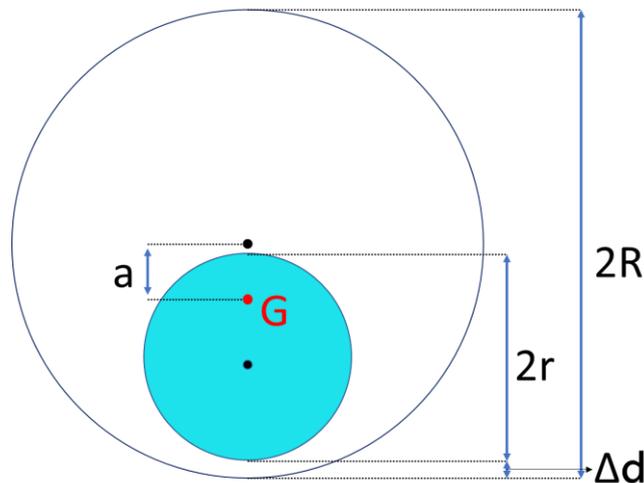


圖 5 表 2 圖示

肆、研究過程或方式

我分別嘗試利用馬達、高斯炮發射偏心圓盤（詳細實驗過程請參見附錄 A、B），不過上述兩種方式發射的偏心圓盤，其運動穩定度不如用手發射的方式。所以實驗採取用手發射的方式，過程如下：

一、確保 Tracker 分析正確性：

用電腦控制馬達轉速，並在其上方架設攝影機拍攝。再由 Tracker 及 Excel 分析轉速，確認分析轉速與電腦控制的轉速一致。代表利用攝影分析的方式是可信的。

二、用手發射相同的偏心圓盤，並在其上方及側邊架設攝影機錄製。

三、用 Tracker 及 Excel 算出偏心圓盤在重心上翻時的轉速，並觀察其上翻情形。

四、使用不同偏心率的圓盤（編號：3、4、5）重複步驟二、三。

五、使用不同厚度的圓盤（編號：1、2）重複步驟二、三。



圖 6 實驗裝置

伍、研究結果

偏心圓盤定義 θ 角為重心與圓心連線和鉛直線夾角，如圖 7(a)。當翻到最高 $\theta=180^\circ$ ，如圖 7(b)。

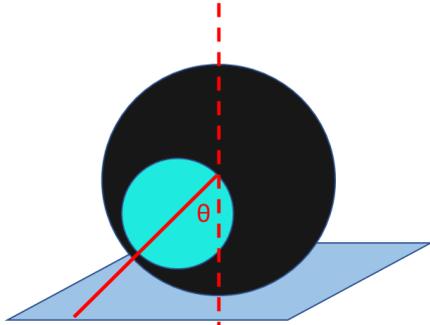


圖 7(a) θ 標示圖

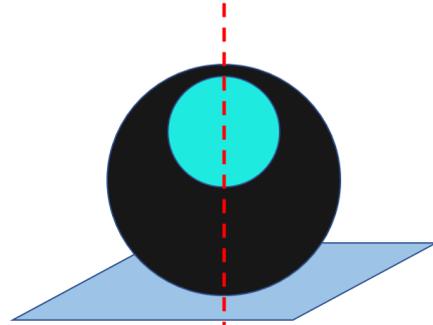


圖 7(b) 圓盤重心翻轉達最高點($\theta=180^\circ$)

一、偏心圓盤的重覆性

編號 2 偏心圓盤的不同次發射，其自轉角速度隨時間變化如圖 8(a)、圖 8(b)。黃色區塊代表 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ；黃色點代表 $\theta=180^\circ$ ，即重心在最高點。從實驗圖中發現趨勢大致相同，且與旋轉硬幣有相似的模式，代表實驗大體具重覆性。

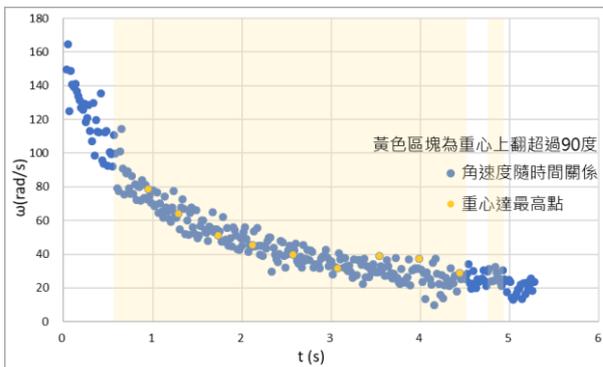


圖 8(a) 編號 2 偏心圓盤-第一次發射
角速度隨時間變化關係圖

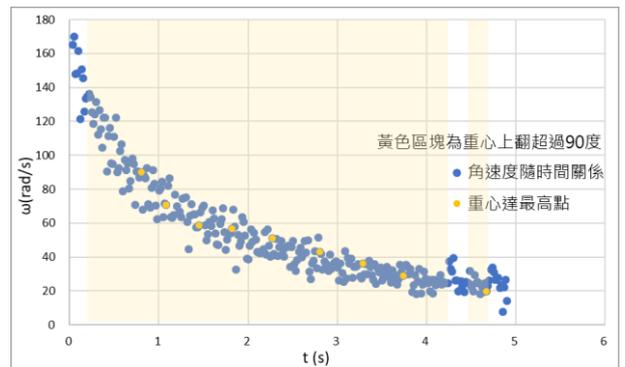


圖 8(b) 編號 2 偏心圓盤-第二次發射
角速度隨時間變化關係圖

二、偏心圓盤的運動軌跡與重心上翻的關係

圖 8(c) 為圖 8(a) 的圓盤俯視軌跡圖，紅色的點代表偏心圓盤的重心開始上翻（即圖 8(a)中進入第一個黃色區塊的瞬間）。可以明顯的發現到，偏心圓盤重心開始上翻瞬間，其運動軌跡的曲率半徑明顯變小，並由影片中發現此刻圓盤開始傾斜運動。

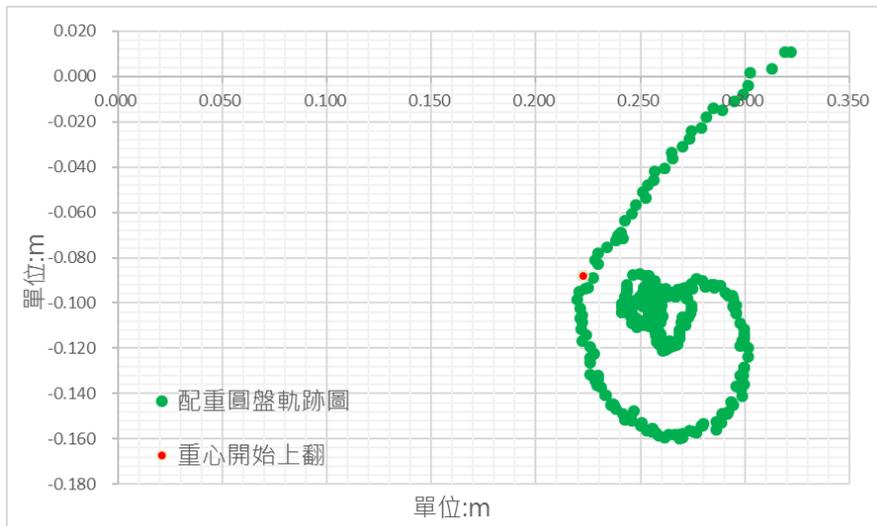


圖 8(c) 編號 2 偏心圓盤-第一次發射
圓盤俯視軌跡圖

三、偏心圓盤重心反覆上翻下降的現象

編號 5 偏心圓盤角速度隨時間變化關係如下圖 9，由圖中可以發現偏心圓盤之重心會有反覆上翻的現象（有多個黃色區塊）。

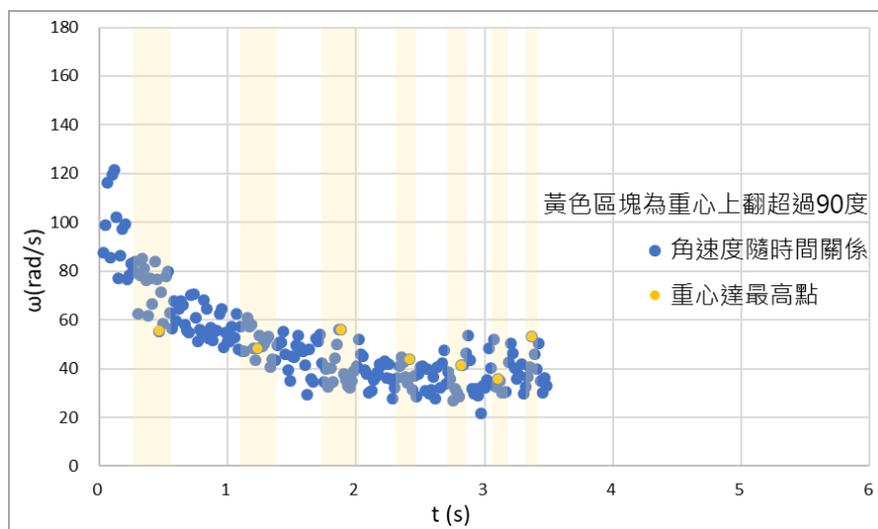


圖 9 編號 5 偏心圓盤
角速度隨時間變化關係圖

四、不同初始自轉角速度如何影響上翻現象

圖 10(a) 至圖 10(e) 為編號 7 偏心圓盤不同次發射之角速度隨時間變化關係圖；開始至發生第一次上翻所需的時間與初始自轉角速度的關係如圖 10(f)。實驗前我預期偏心圓盤的自轉角速度降至某個定值會開始上翻，但經實驗結果發現初始自轉角速度影響偏心圓盤 θ 由 0° 上翻至 90° 的時間長短，即重心上翻時並無特定自轉角速度，取而代之的是初自轉角速度越大越快上翻。

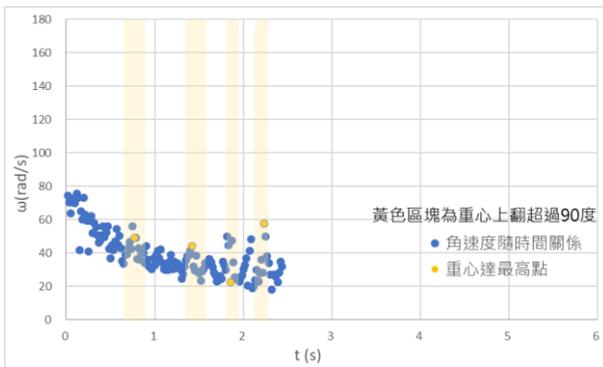


圖 10(a) 編號 7 偏心圓盤-第一次發射角速度隨時間變化關係圖

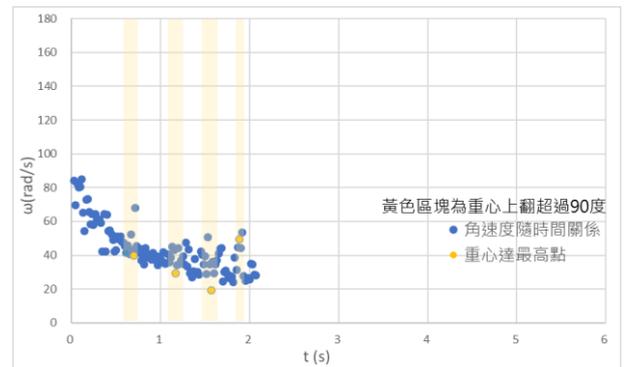


圖 10(b) 編號 7 偏心圓盤-第二次發射角速度隨時間變化關係圖

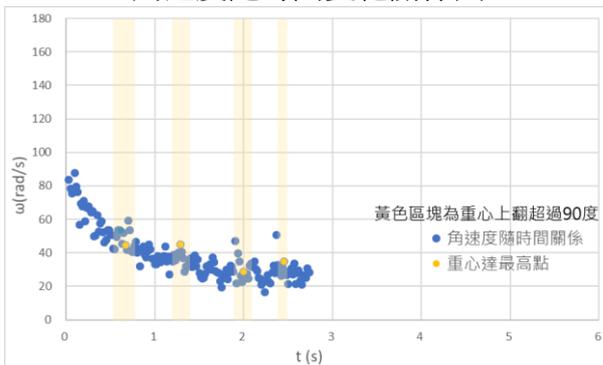


圖 10(c) 編號 7 偏心圓盤-第三次發射角速度隨時間變化關係圖

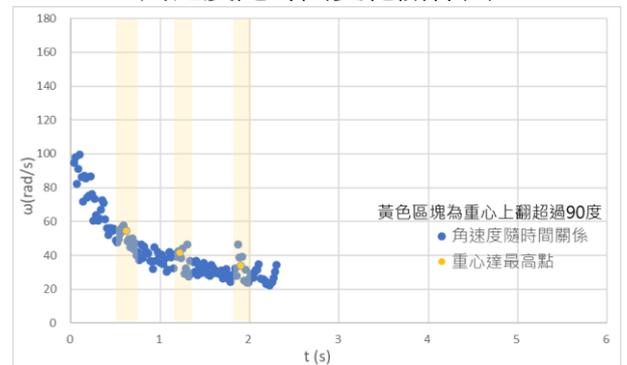


圖 10(d) 編號 7 偏心圓盤-第四次發射角速度隨時間變化關係圖

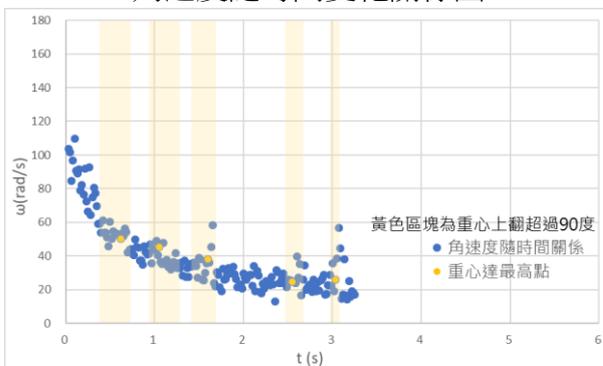


圖 10(e) 編號 7 偏心圓盤-第五次發射角速度隨時間變化關係圖

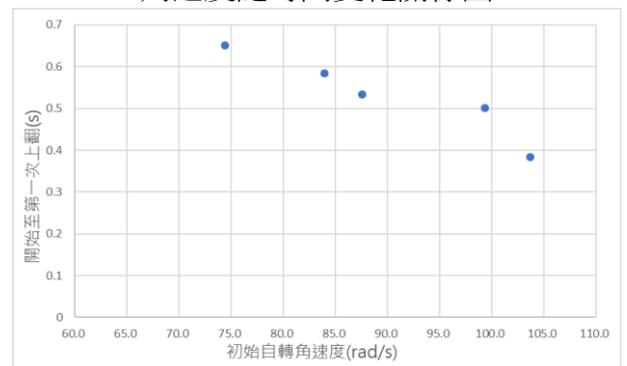


圖 10(f) 編號 7 偏心圓盤 開始至第一次上翻時間與初始自轉角速度關係圖

五、偏心率與重心上翻維持時間的關係

偏心率由大到小的偏心圓盤（編號：3、4、5）實驗結果分別為圖 11(a)、圖 11(b)、圖 11(c)，將其第一次上翻持續時間與偏心率關係繪製如圖 11(d)。可以發現其**第一次上翻持續時間**（即第一個黃色區塊的時距）**隨著偏心率的增加而變長**。

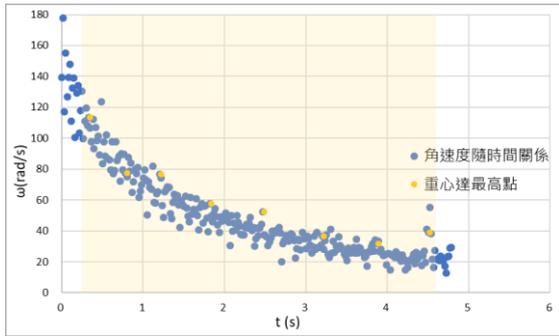


圖 11(a) 編號 3 偏心圓盤
角速度隨時間變化關係圖

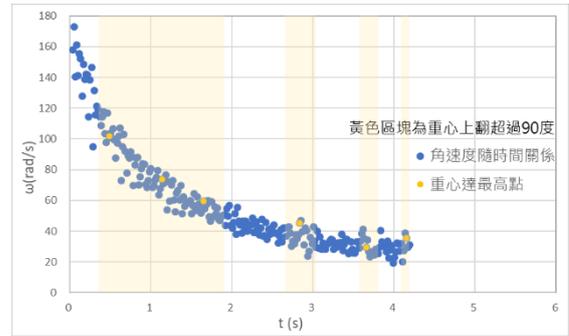


圖 11(b) 編號 4 偏心圓盤
角速度隨時間變化關係圖

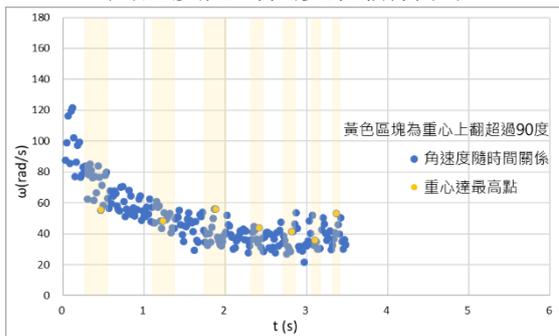


圖 11(c) 編號 5 偏心圓盤
角速度隨時間變化關係圖

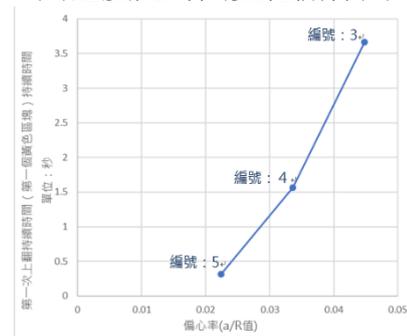


圖 11(d)
第一次上翻持續時間與偏心率置關係圖

六、不同厚度之偏心圓盤比較

圖 8(a)、圖 8(b) 為厚度 3mm 的偏心圓盤，圖 12 為厚度 5mm 的偏心圓盤。厚度較厚的偏心圓盤，其上翻持續的時間較短，旋轉較不穩定。

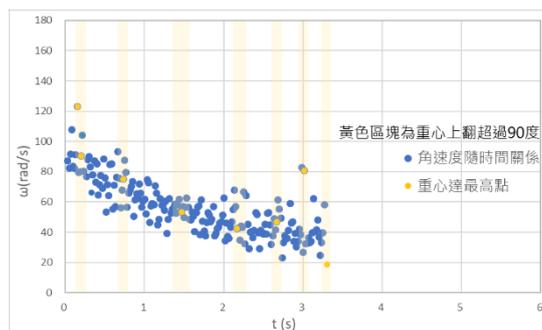


圖 12 編號 1 偏心圓盤
角速度隨時間變化關係圖

伍、討論

一、原理分析

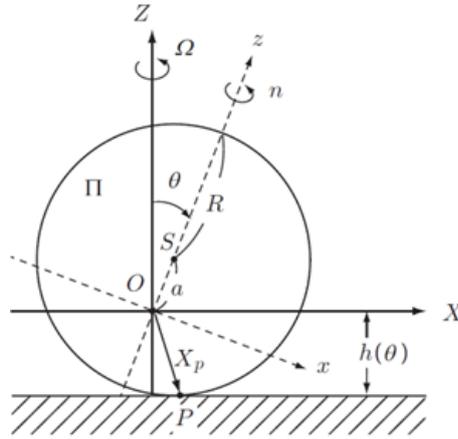


圖 13(a) 配重偏心圓盤示意圖[7]

參考文獻倒轉陀螺分析 [7]，倒轉陀螺與偏心圓盤結構一致，差異僅為倒轉陀螺為圓對稱結構，偏心圓盤為平面結構，故可借用文獻[7]的圖片分析本實驗的偏心圓盤。其中重心 O 與圓心 S 相距 a ， P 點為圓盤與桌面接觸點，其中 XYZ 為垂直座標系而 xyz 為剛體座標系。

(一) 利用旋轉矩陣將剛體座標系轉為垂直座標系

1. 如圖 13(a) 所示，圓半徑 R ，重心 O 與圓心 S 相距為 a ，定義 XYZ 為垂直座標系而 xyz 為剛體座標系，兩座標 O 點重疊且 Y 軸、 y 軸一致。 XYZ 坐標系中 Y 軸穿入紙面， Z 軸為鉛直線；而 xyz 為跟著物體運動之剛體坐標系，其 z 軸在質心和圓心的延長線上， x 軸垂直 z 軸。
2. XYZ 座標中，進動角速度 $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ 。定義 Euler angles 歐拉角 (ϕ, θ, ψ) ，其中 θ 為 OZ 和 oz 夾角，而 $\Omega = \dot{\phi}$ 。於 xyz 座標中，圓盤自旋角速度為 $\dot{\psi}\hat{z}$ ，而：

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{Z} = -\Omega \sin \theta \hat{x} + \Omega \cos \theta \hat{z} \quad (1)$$

其總角速度

$$\vec{\omega} = -\Omega \sin \theta \hat{x} + \dot{\theta} \hat{y} + (\Omega \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{z} \quad (2)$$

將總角速度 z 分量 $(\Omega \cos \theta + \dot{\psi})$ 定義為 n

3. 將(2)帶入角動量公式，得：

$$\vec{L} = I\omega = -A\Omega \sin \theta \hat{x} + B\dot{\theta} \hat{y} + Cn\hat{z} \quad (3)$$

其中 A, B, C 分別為相對 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 軸的轉動慣量

4. 利用旋轉矩陣將角速度和角動量（即方程式(2)和(3)）換到XYZ 座標

$$\text{xyz} \xrightarrow{\substack{\text{對 } oy \text{ 轉 } \theta \text{ 角}}} \text{XYZ}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\{XYZ\}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \omega_{\{xyz\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ n \end{bmatrix} \\ &= (-\sin \theta \cos \theta \Omega + n \sin \theta, \dot{\theta}, \sin^2 \theta \Omega + n \cos \theta) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} L_{\{XYZ\}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A\Omega \sin \theta \\ B\dot{\theta} \\ Cn \end{bmatrix} \\ &= (Cn \sin \theta - A\Omega \sin \theta \cos \theta, B\dot{\theta}, A\Omega \sin^2 \theta + Cn \cos \theta) \end{aligned} \quad (5)$$

接下來的分析是採用垂直座標XYZ

(二) 歐拉角轉動方程式

1. 方程式推導：

歐拉角方程式推導請參考【附錄 C】，本實驗模型的方程式如下：

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{L} = \tau = \vec{X}_p \times (\vec{N} + \vec{F}) \quad (6)$$

其中 $X_p = (X_p, 0, Z_p)$ ，摩擦力 $\vec{F} = (F_x, F_y, 0)$ ，接觸點正向力 $\vec{N} = (0, 0, N)$ 。

由圖 13(a)可知 $Z_p = -(R - a \cos \theta) \equiv -h(\theta)$ ，其中 $h(\theta)$ 為質心離地高度，而 $X_p =$

$a \sin \theta = \frac{dh}{d\theta}$ 。帶入(6)可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \Omega \\ L_x & L_y & L_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ X_p & 0 & Z_p \\ F_x & F_y & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{dh}{d\theta} & 0 & -h(\theta) \\ F_x & F_y & N \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial L_x}{\partial t}, \frac{\partial L_y}{\partial t}, \frac{\partial L_z}{\partial t} \right) + (-L_y \Omega, L_x \Omega, 0) & \\ = \left(F_y h(\theta), -F_x h(\theta) - N \frac{dh}{d\theta}, F_y \frac{dh}{d\theta} \right) & \\ = (F_y h(\theta), -F_x h(\theta) - Na \sin \theta, F_y a \sin \theta) & \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{L}_x - L_y \Omega = h(\theta) F_y \\ \dot{L}_y + L_x \Omega = -a \sin \theta N - h(\theta) F_x \\ \dot{L}_z = a \sin \theta F_y \end{cases} \quad (8)$$

將(5)對時間微分得：

$$\begin{cases} \dot{L}_x = Cn \cos \theta \dot{\theta} - A\Omega(\cos \theta \cos \theta + \sin \theta (-\sin \theta))\dot{\theta} - A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta + C\dot{n} \sin \theta & (9-a) \\ \dot{L}_y = B\ddot{\theta} & (9-b) \\ \dot{L}_z = A\dot{\Omega} \sin^2 \theta + 2A\Omega \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + C\dot{n} \cos \theta - Cn \sin \theta \dot{\theta} & (9-c) \end{cases}$$

將(9)帶入(8)得：

$$\begin{cases} Cn \cos \theta \dot{\theta} - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\dot{\theta} - A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta + C\dot{n} \sin \theta - B\dot{\theta}\Omega = h(\theta)F_y & (10-a) \\ B\ddot{\theta} + (Cn \sin \theta - A\Omega \sin \theta \cos \theta)\Omega = -a \sin \theta N - h(\theta)F_x & (10-b) \\ A\dot{\Omega} \sin^2 \theta + 2A\Omega \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + C\dot{n} \cos \theta - Cn \sin \theta \dot{\theta} = a \sin \theta F_y & (10-c) \end{cases}$$

將(10-a)移項得：

$$\dot{\theta} = \frac{h(\theta)F_y + A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - C\dot{n} \sin \theta}{Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega} \quad (11)$$

2. 轉動慣量推導

$$\begin{aligned} \text{A 慣量} &= \left\{ \frac{MR^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{R^2}{4} + a^2 \right) \right\} - \left\{ \frac{Mr^2}{R^2 - r^2} \left[\frac{r^2}{4} + (b-a)^2 \right] \right\} + \left\{ m \left[\frac{r^2}{4} + (b-a)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{MR^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{R^2}{4} + a^2 \right) - \frac{Mr^4}{4(R^2 - r^2)} + \frac{mr^2}{4} + \left(m - M \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) (b-a)^2 \\ \text{B 慣量} &= \left\{ \frac{MR^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right) \right\} - \left\{ \frac{Mr^2}{R^2 - r^2} \left[\frac{r^2}{2} + (b-a)^2 \right] \right\} + \left\{ m \left[\frac{r^2}{2} + (b-a)^2 \right] \right\} \\ \text{C 慣量} &= \left\{ \frac{1}{4} \left[M \frac{R^2}{R^2 - r^2} \right] R^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{4} \left[M \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right] r^2 \right\} + \frac{1}{4} mr^2 \end{aligned}$$

本實驗中樣品的A, B, C值分別如下表3，其中可知偏心率越大A、B越大。

表3 偏心圓盤的轉動慣量

編號	a/R 偏心率	A (g)(mm) ²	B (g)(mm) ²	C (g)(mm) ²
1	0.0735	1005.81	2020.45	982.38
2	0.0730	550.32	1105.71	537.68
3	0.0450	434.08	857.57	422.22
4	0.0335	428.88	851.91	422.22
5	0.0225	425.18	847.88	422.22
6	0.109	2877.62	5632.06	2703.69
7	0.101	9057.16	17643.53	8487.13

(三) 移動方程

由牛頓運動方程可一寫出下列方程式：

$$M \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_{\text{合}} \Rightarrow M \left(\frac{\partial \vec{u}_o}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{u}_o \right) = \vec{N} + \vec{F} + \vec{W} \quad (12)$$

其中 $\vec{W} = (0, 0, -Mg)$ ， M 總質量； \vec{u}_o 為質心速度， $\vec{u}_o = (u_{oX}, u_{oY}, u_{oZ})$

$$M \left[\left(\frac{\partial u_{oX}}{\partial t}, \frac{\partial u_{oY}}{\partial t}, \frac{\partial u_{oZ}}{\partial t} \right) + \begin{bmatrix} \hat{X} & \hat{Y} & \hat{Z} \\ 0 & 0 & \Omega \\ u_{oX} & u_{oY} & u_{oZ} \end{bmatrix} \right] = (F_X, F_Y, N - Mg) \quad (13)$$

$$\Rightarrow M \left[\left(\frac{\partial u_{oX}}{\partial t}, \frac{\partial u_{oY}}{\partial t}, \frac{\partial u_{oZ}}{\partial t} \right) + (-\Omega u_{oY}, u_{oX} \Omega, 0) \right] = (F_X, F_Y, N - Mg) \quad (13)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(u_{oX} - \Omega u_{oY}) = F_x & (14-a) \\ M(u_{oY} + \Omega u_{oX}) = F_y & (14-b) \\ M u_{oZ} = N - Mg & (14-c) \end{cases}$$

其中 $u_{oZ} = \frac{dh}{dt}$ 所以 $u_{oZ} = \frac{d^2h}{dt^2}$ ，又 $h(\theta) = R - a \cos \theta$ ，因此：

$$h(\theta) = a \sin \theta \quad (15)$$

將(15)微分：

$$h(\dot{\theta}) = a \cos \theta (\dot{\theta})^2 + a \sin \theta \ddot{\theta} = u_{oZ} \quad (16)$$

將(16)帶入(14-c)得：

$$M \left(a \cos \theta (\dot{\theta})^2 + a \sin \theta \ddot{\theta} \right) = N - Mg \quad (17)$$

$$N = M \left\{ g + a \left((\dot{\theta})^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta \right) \right\} \quad (18)$$

(四) 摩擦力計算

$$\vec{F} = -\mu N \frac{v_p}{|v_p(\Lambda)|} \quad (19)$$

其中 $|v_p(\Lambda)| = \sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2 + \Lambda^2}$ ，而 Λ 為極小的值

$$\begin{aligned} \vec{v}_{rot_p} = \vec{\omega} \times \vec{X}_p \Rightarrow \vec{v}_{rot_p} &= \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\Omega \sin \theta & \dot{\theta} & n \\ X_p & 0 & Z_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\Omega \sin \theta & \dot{\theta} & n \\ a \sin \theta & 0 & -(R - a \cos \theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$v_{rot_p}(y) = a \sin \theta n - (R - a \cos \theta) \Omega \sin \theta \quad (21)$$

而質心速度 $\vec{u}_0 = (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})$ ，則 P 點速度

$$\vec{v}_p = \vec{u}_0 + v_{rot_p} \quad (22)$$

將(21)帶入(22)的y分量，則：

$$v_{py} = u_{0y} + a \sin \theta n - (R - a \cos \theta)\Omega \sin \theta \quad (23)$$

此速度將影響 F_y

(五) 能量

能量包含轉動動能、移動動能、重力位能

$$E = \left[\frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \right] + \frac{1}{2} M (u_{0x}^2 + u_{0y}^2 + u_{0z}^2) + Mgh \quad (24)$$

將式子(2)帶入(24)得：

$$E = \frac{1}{2} \left[A(\Omega \sin \theta)^2 + B(\dot{\theta})^2 + Cn^2 \right] + \frac{1}{2} M \vec{u}_0^2 + Mgh \quad (25)$$

能量會受到摩擦力做功而損耗

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_p = -\mu N \frac{v_p^2}{|v_p(\Lambda)|} \quad (26)$$

二、結果分析與討論

(一) 偏心圓盤的運動階段

1. 實驗發現偏心圓盤運動可略分為三階段，依時間先後分別為：

- (1) 第一階段：圓盤質心主要為直線前進，並伴隨著自轉，其進動較不明顯，且重心與圓心的連線和鉛直軸的夾角約 0° (即 $\theta \approx 0^\circ$)。
- (2) 第二階段：物體運動軌跡成螺線型，有明顯進動，且重心開始上翻至圓盤上半部 (即 $\theta > 90^\circ$)。
- (3) 第三階段：圓盤面與水平面的夾角小於 45° ，且圓盤接觸地面的圓軌跡線幾乎接近圓盤之周長。

2. 偏心圓盤與旋轉硬幣運動之差異有以下兩點：

- (1) 偏心圓盤質心有移動速度，而旋轉硬幣質心速度幾乎為 0 。原因為手彈擊偏心圓盤時的衝量提供質心速度。

(2) 偏心圓盤第一階段運動的盤面不像旋轉硬幣般筆直，推測原因為用手發射偏心圓盤的過程中，無法準確地施力於通過重心的水平線上，導致自轉軸傾斜而無法完美直立的自轉。

(二) 偏心圓盤的運動軌跡

比較圖 8(a) 與圖 8(c) 偏心圓盤重心開始上翻瞬間，其運動軌跡的曲率半徑明顯變小。因偏心圓盤自轉速度下降，重力力矩造成圓盤傾斜，引發進動發生。而由式子(11) $\dot{\theta} = \frac{h(\theta)F_y + A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - C\dot{n} \sin \theta}{Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega}$ 中，當進動發生、角速度 n 下降，使分子的 $\dot{\Omega} > 0$ 且 $\dot{n} < 0$ 造成分子變大，而進動速度上升造成 Ω 變大，使得分母變小。因此軌跡彎曲的同時 $\dot{\theta}$ 數值上升，使上翻開始明顯。由此可知，軌跡旋轉、進動開始、盤面傾斜、上翻開始皆發生於此刻。

(三) 偏心圓盤重心反覆上翻及下降的現象

圖 9 中偏心圓盤重心有明顯的反覆上翻及下降現象，由式子(11) $\dot{\theta} = \frac{h(\theta)F_y + A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - C\dot{n} \sin \theta}{Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega}$ 可知，若分母 = 0，即 $Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega = 0$ ，定義此時 $n = n_c$ ，則：

$$n_c = \frac{B\Omega + A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{C \cos \theta} \quad (27)$$

如果 $\dot{\theta} > 0$ 則 θ 隨時間增加代表重心上翻，如果 $\dot{\theta} < 0$ 則 θ 隨時間減少代表重心下降。將情況分成下表 4 的六種情況：

表 4(a) 當 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 偏心圓盤的上翻及下降情形

	式子(11)中分母>0 $n > n_c$	式子(11)中分母<0 $n < n_c$
式子(11)中分子>0	① $\dot{\theta} > 0$	② $\dot{\theta} < 0$
式子(11)中分子<0	③ $\dot{\theta} < 0$	④ $\dot{\theta} > 0$

表 4(b) 當 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 偏心圓盤的上翻及下降情形

	式子(11)中分母 <0 $n > n_c$	式子(11)中分母 >0 $n < n_c$
式子(11)中分子 >0	⑤ $\dot{\theta} < 0$	當 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 時分 母必為負
式子(11)中分子 <0	⑥ $\dot{\theta} > 0$	

考慮一開始軌跡轉彎時進動變快、自轉變慢、摩擦力為負值、高度為正，則 $\dot{\Omega} \approx 0, \dot{n} > 0, F_y < 0, h(\theta) > 0$ ，又如一開始進動還未出現，則 $\Omega \approx 0$ ，因此由(27)式看出 $n_c \approx 0$ 。

當進動開始時 $\dot{\Omega} > 0$ 且 $\dot{n} < 0$ 使得分子三項中有兩項 $A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta$ 和 $-C\dot{n} \sin \theta$ 為正值，唯一出現負值為 $h(\theta)F_y$ ，如果 $|A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - C\dot{n} \sin \theta| > |h(\theta)F_y|$ 則分子為正值。根據表 4(a) 結合 $n > n_c$ 與分子 > 0 可知此時發生於表 4(a) 中 ① 的狀況，所以 $\dot{\theta} > 0$ 則上翻開始發生。

後續由運動物理量 Ω 、 n 、 \dot{n} 、 $\dot{\Omega}$ 、 $h(\theta)$ 、 θ 的增減產生表 4(a) 和 4(b) 中六格的變化，當發生 ② ③ ⑤ 將引發圓盤下翻，不同情況的變化，將造成圓盤上翻及下降的週期變化。

(四) 不同初自轉角速度如何影響上翻的現象

實驗前原預測偏心圓盤自轉角速度會於降至特定數值時上翻，但在圖 10 中，卻發現初始自轉角速度越快的偏心圓盤至第一次上翻的時間越短。在倒轉陀螺的文獻中[7]也有類似的結果：

此篇論文中提及，當倒轉陀螺符合以下關係時，倒轉陀螺的重心能夠上翻到達最高點：

$$1 - \frac{a}{R} < \frac{A}{C} < 1 + \frac{a}{R} \left\{ \begin{array}{l} A : \text{圖 13 (a) 中對 } x \text{ 軸的轉動慣量} \\ C : \text{圖 13 (a) 中對 } z \text{ 軸的轉動慣量} \\ a : \text{重心與大圓圓心距離} \\ R : \text{大圓半徑} \end{array} \right.$$

此範圍即圖 13(b) 中藍色區域。我將偏心圓盤的這些參數帶入，發現其皆落於圖 13(b) 中的藍色區域中（圖 13(b) 中的深藍色點）。

另外，於文獻[7]中模擬圖 13(b) 中紅色點參數的 θ 角隨時間變化關係圖。本實驗中平均每次實驗之初始自轉角速度皆在 80 rad/s 以上，且重心上翻到達最高點的時間皆在 1 秒內，符合論文中圖 13(c) 之趨勢，故推測倒轉陀螺與配重偏心圓盤的原理具有一定的相關性。

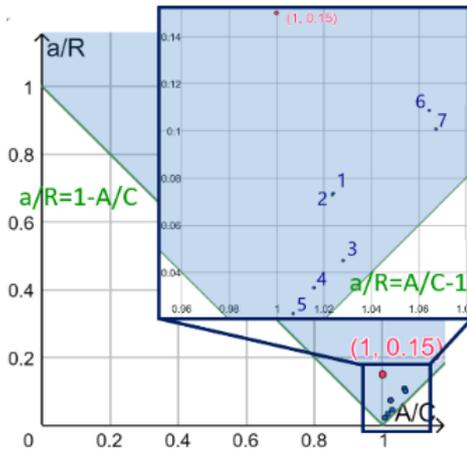


圖 13(b) 倒轉陀螺
重心能上翻達最高點之範圍
(編號對應表 2 中的樣品編號)

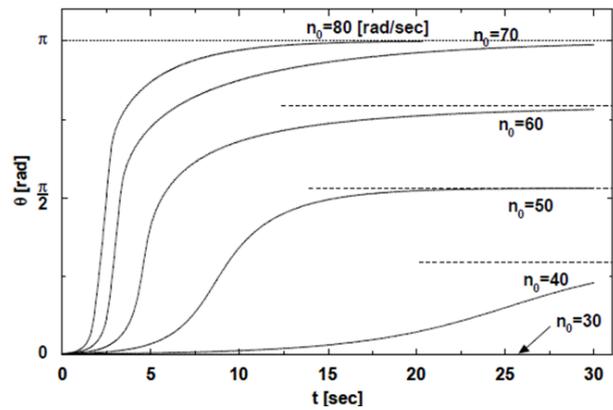


圖 13(c) 圖 13(b) 中紅色點之
 θ 角隨時間變化關係圖 [7]

(五) 偏心率不同之圓盤

由圖 11 可得知偏心率越高的偏心圓盤，第一次上翻的持續時間較長，旋轉時也較為穩定。由式子(11) $\dot{\theta} = \frac{h(\theta)F_y + A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - Cn \sin \theta}{Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega}$ ，並比較表三，得知偏心率越大，轉動慣量 A、B 越大。A 越大造成式子(11)中分子越大，A、B 越大造成式子(11)中分母越小，因此偏心率越大， $\dot{\theta}$ 越大使得圓盤重心越快到達最高點，導致到最高點的轉速較大，使能維持在上半部的時間較長。

(六) 厚度不同的偏心圓盤

由圖 8 (a)，(b) 和圖 12 得知，厚度較厚的偏心圓盤，其上翻持續的時間較短，旋轉較不穩定。推測可能是因為旋轉時其與桌面之接觸點不連續變化，造成支點的不確性，且摩擦大小不穩定，使得偏心圓盤難以穩定旋轉。

(七) 偏心圓盤重心上翻至最高點的週期性

由圖 8 至 圖 12 中，發現在第一次重心上翻的過程中（第一個黃色區塊內），重心上翻至最高點（黃色標記點處）之時機具有週期性，不過還未確認其中關係。在重心第一次重心上翻過後（第二個黃色區塊開始），可能因時間過短，重心上翻到最高點（黃色標記點）之時機並無明顯的週期性。

陸、結論

- 一、偏心圓盤具有三階段運動，其中第一階段質心直線前進並伴隨自轉；第二階段重心開始上翻且進動明顯，軌跡半徑明顯變小；第三階段，盤面與桌面夾角小於 45 度且接觸桌面軌跡近乎周長。
- 二、第二階段始於盤面傾斜，重力矩引發進動，伴隨軌跡旋轉、重心上翻。
- 三、由於重力矩、摩擦力、正向力及連續性的接觸點，導致偏心圓盤在運動過程中重心有反覆上翻及下降的現象。
- 四、圓盤上翻並無特定角速度，取而代之，初自轉角速度越大，越快上翻，亦有越大翻轉角速度。
- 五、偏心率越大的圓盤，因轉動慣量的差異較大，使得重心保持在上半部的時間可以維持較長，且旋轉也較為穩定。
- 六、厚度不同的圓盤，因接觸點不連續變化，使得重心維持在上半部的時間較短，且旋轉較不穩定。
- 七、重心上翻到上半部時，重心會重複出現於最高點，且這些點的時間近乎具有週期性。

柒、未來展望

- 一、找出能使偏心圓盤穩定旋轉的最佳配重比例。
- 二、改變接觸面材質，探討接觸面摩擦係數對旋轉的影響。
- 三、若彈擊瞬間初始角度 $\theta \neq 0$ （如 $\theta = 45^\circ$ 、 $\theta = 90^\circ$ 、 $\theta = 135^\circ$ ），則上翻現象會如何？

捌、參考資料及其他

[1]Instagram 張貼之影音 justspinnin [video file]。

取自：<https://www.instagram.com/p/BwiXFih7Q4/>

[2]Youtube 張貼之影音 Orbit Spinning Tops [video file]。

取自：<https://www.youtube.com/watch?v=9pV7iaaR1QY>

[3]國立台中教育大學 NTCU 科學教育與應用學系。科學遊戲實驗室。歐拉盤。

取自：<http://scigame.ntcu.edu.tw/power/power-043.html>

[4]郭印心。Euler' s Disk 的影像與光。

取自：<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2016/10/2016101022584463.pdf>

[5]徐茂紘、吳家宇。翻轉吧!硬幣~

取自：<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2011/11/2011111422185167.pdf>

[6]跟著鄭大師玩科學。生活科學趣談。PAULI 和 BOHR 曾感到好奇的玩具。

取自：<https://www.masters.tw/35301/reverse-gyro>

[7]Takahiro UEDA, Ken SASAKI and Shinsuke WATANABE (2005) . Motion of the Tippe Top
Gyroscopic Balance Condition and Stability. YNU-HEPTh-05-102

壹、研究設備及器材

表 5 詳細器材及工具

編號	名稱	數量	型號、備註
1	壓克力板	詳見表 2	
2	萬用黏土		
3	電腦	一台	使用軟體： MEXE02, Tracker, Excel
4	電源供應器	一台	GW GPS-4303
5	步進馬達及驅動器	一組	Oriental motor AZM26AK
6	攝影機	兩台	SONY hdr-cx450*1(60fps) SONY hdr-as300*1(60fps)
7	3D 列印零件	兩個	支架圖 14(a)/馬達零件 圖 14(b)、圖 14(c))
8	滑軌	一組	igus NS01-40,NWY01400
9	滑輪	一個	
10	棉線	一公尺	
11	白紙	1 張	4K

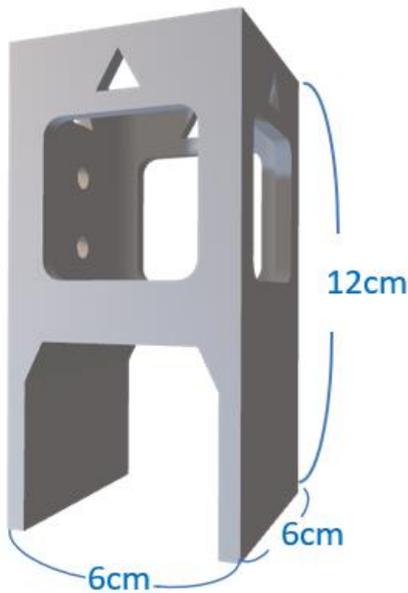


圖 14(a) 支架

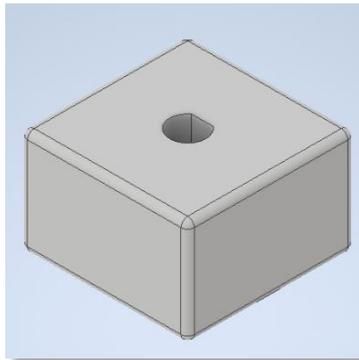


圖 14(b) 馬達零件俯視

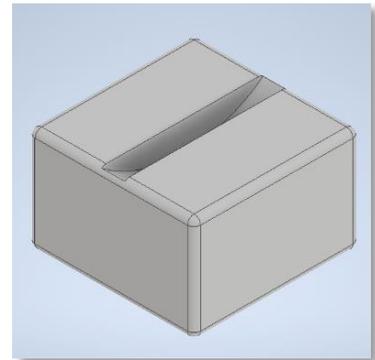


圖 14(c) 馬達零件仰視圖

貳、研究過程或方式

- 一、實驗裝置如圖 15(a) 所示，將馬達固定於 3D 列印之支架並將支架鎖於滑軌上。上方設有滑輪組可利用施力於棉線，使支架鉛直上升。
- 二、利用電腦軟體調控馬達轉速。
- 三、當偏心圓盤穩定旋轉時，利用滑軌使馬達支架組鉛直上升藉此釋放偏心圓盤。



圖 15(a) 實驗一裝置

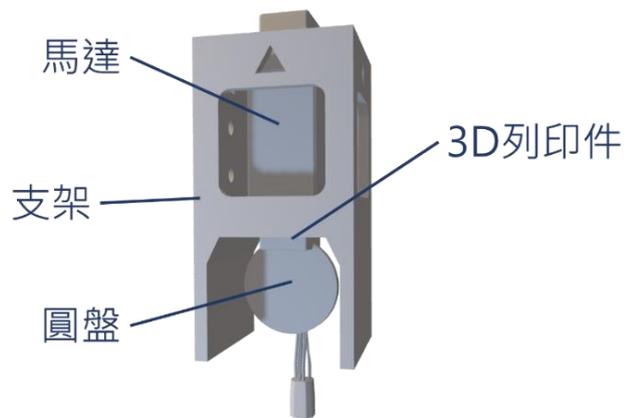


圖 15(b) 馬達固定示意圖

參、研究結果

圓盤在支架上升後幾乎立即停止旋轉。推測是馬達旋轉時，3D 列印件的凹槽對圓盤的正向力太大，導致圓盤在支架上拉的瞬間，離開了桌面，而後又從空中掉落導致無法穩定旋轉。

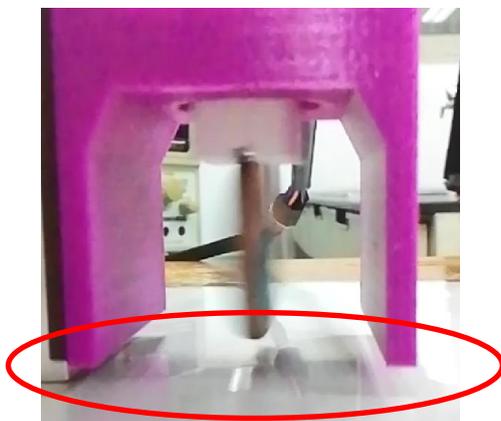


圖 16(a) 實驗一圓盤離開桌面圖

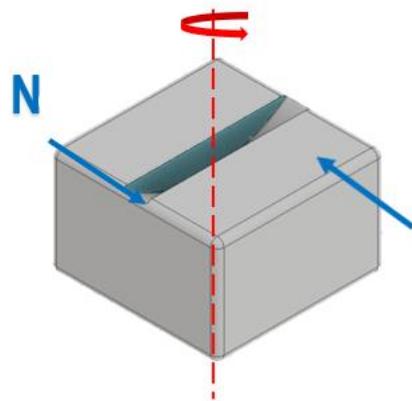


圖 16(b) 正向力示意圖

【附錄 B】用高斯炮撞擊實驗

壹、研究設備及器材

表 6 詳細器材及工具

編號	名稱	數量	型號、備註
1	壓克力板	詳見表 2	
2	萬用黏土		
3	電腦	一台	使用軟體： Tracker, Excel
4	攝影機	兩台	SONY hdr-cx450*1(60fps) SONY hdr-as300*1(60fps)
5	壓條	一條	長 102cm /寬 1.5cm
6	鋼珠	數顆	直徑 1.5cm, 12g /顆
7	白紙	1 張	4K
8	強力磁鐵	9 個	直徑 1.5cm,厚度 5mm

貳、研究過程或方式

將偏心圓盤放置於高斯炮軌道前方，利用調整位置使高斯炮撞擊點約略於通過圓心水平線之圓盤的一側使其旋轉，並用攝影機記錄。

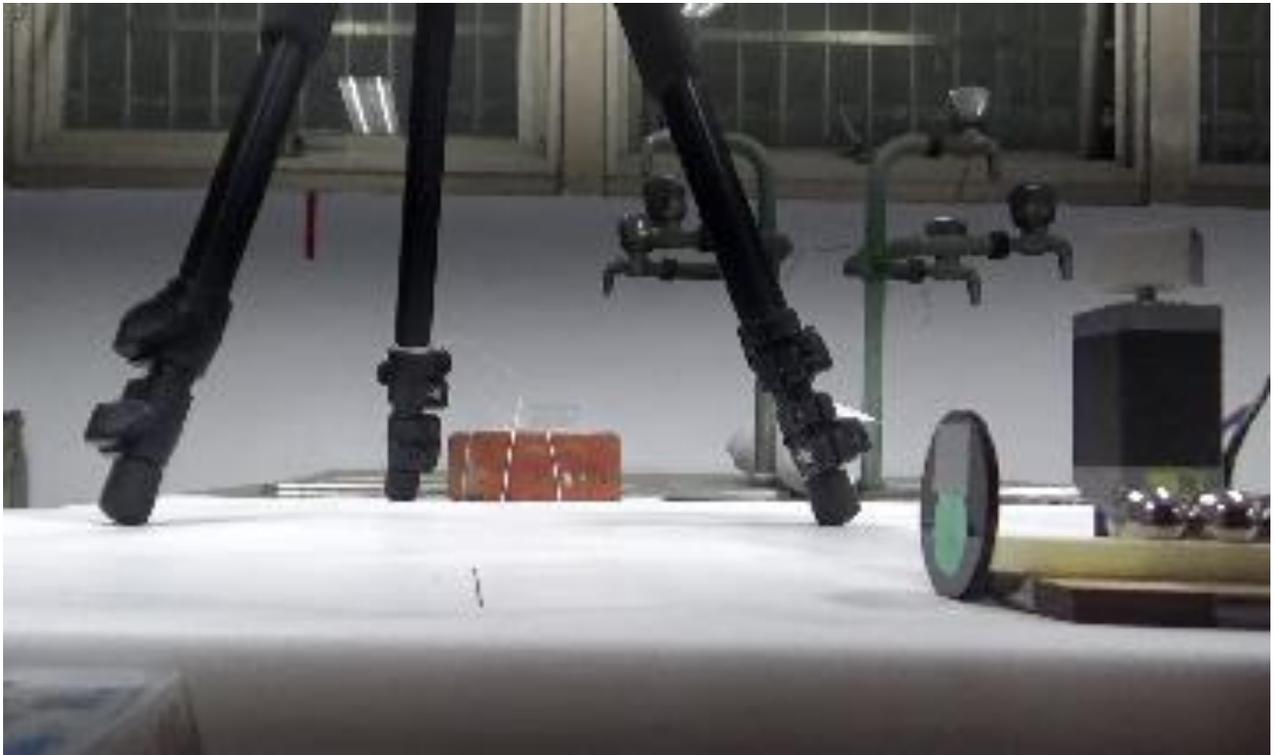


圖 17 實驗二裝置

參、研究結果

雖然相較【附錄 A】之發射裝置利用高斯炮撞擊圓盤時，但其旋轉仍不是很穩定，並且時常因為彈珠的射擊導致圓盤有騰空的現象，如圖 18(a)。相對而言，用手發射能使圓盤擁有較穩定的旋轉，其轉動時間較長。未來將嘗試於圓盤兩側均架設高斯炮，如圖 18(b)，並且改變鋼珠及強力磁鐵的數量，看是否能解決此問題。

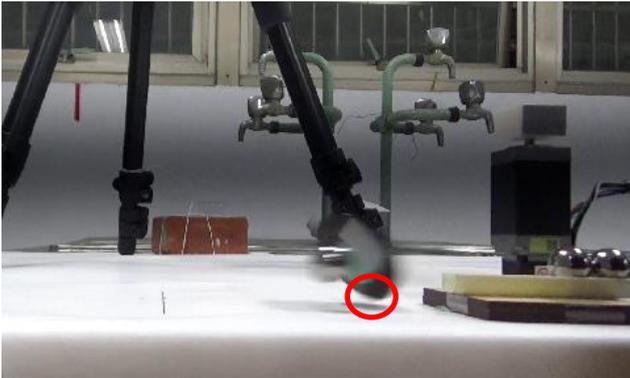


圖 18(a) 實驗二圓盤離開桌面圖

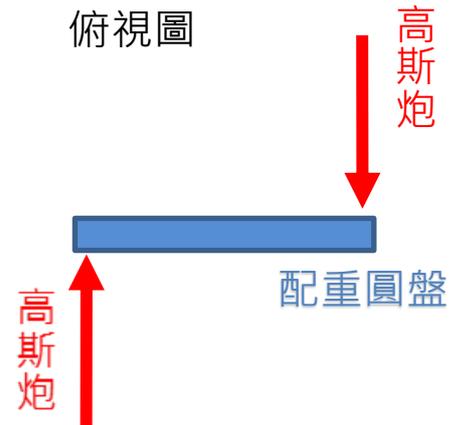


圖 18(b) 實驗二改良示意圖

【附錄 C】剛體運動方程-歐拉方程(Euler' s equation)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau \quad (\text{此為慣性座標系}) \quad (C 1)$$

但為呈現固定轉動慣量，需要剛體座標系, (x, y, z) ，所以對 \vec{L} 微分時還要考慮剛體主軸轉動。

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (I_x \Omega_x \hat{x} + I_y \Omega_y \hat{y} + I_z \Omega_z \hat{z}) \\ &= I_x \frac{d\Omega_x}{dt} \hat{x} + I_x \Omega_x \frac{d\hat{x}}{dt} + I_y \frac{d\Omega_y}{dt} \hat{y} + I_y \Omega_y \frac{d\hat{y}}{dt} + I_z \frac{d\Omega_z}{dt} \hat{z} + I_z \Omega_z \frac{d\hat{z}}{dt} \end{aligned} \quad (C 2)$$

剛體以 Ω 的角速度轉動

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \Omega \times \hat{x} = (\Omega_x \hat{x}, \Omega_y \hat{y}, \Omega_z \hat{z}) \times \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_y \hat{y} - \Omega_z \hat{z} \quad (C 3a)$$

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \Omega \times \hat{y} = (\Omega_x \hat{x}, \Omega_y \hat{y}, \Omega_z \hat{z}) \times \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_x \hat{z} - \Omega_z \hat{x} \quad (C 3b)$$

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = \Omega \times \hat{z} = (\Omega_x \hat{x}, \Omega_y \hat{y}, \Omega_z \hat{z}) \times \hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Omega_y \hat{x} - \Omega_x \hat{y} \quad (C 3c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= I_x \frac{d\Omega_x}{dt} \hat{x} + I_x \Omega_x (\Omega_y \hat{y} - \Omega_z \hat{z}) + I_y \frac{d\Omega_y}{dt} \hat{y} + I_y \Omega_y (\Omega_x \hat{z} - \Omega_z \hat{x}) + I_z \frac{d\Omega_z}{dt} \hat{z} \\ &\quad + I_z \Omega_z (\Omega_y \hat{x} - \Omega_x \hat{y}) \\ &= I_x \frac{d\Omega_x}{dt} \hat{x} + I_x \Omega_x (\Omega_y \hat{y} - \Omega_z \hat{z}) + I_y \frac{d\Omega_y}{dt} \hat{y} + I_y \Omega_y (\Omega_x \hat{z} - \Omega_z \hat{x}) + I_z \frac{d\Omega_z}{dt} \hat{z} \\ &\quad + I_z \Omega_z (\Omega_y \hat{x} - \Omega_x \hat{y}) \\ &= \hat{x} \left(I_x \frac{d\Omega_x}{dt} + I_z \Omega_z \Omega_y - I_y \Omega_y \Omega_z \right) + \hat{y} \left(I_y \frac{d\Omega_y}{dt} + I_x \Omega_x \Omega_z - I_z \Omega_z \Omega_x \right) \\ &\quad + \hat{z} \left(I_z \frac{d\Omega_z}{dt} + I_y \Omega_y \Omega_x - I_x \Omega_x \Omega_y \right) = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{L} \end{aligned} \quad (C 4)$$

$$\text{其中 } \vec{\Omega} \times \vec{L} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ I_x \Omega_x & I_y \Omega_y & I_z \Omega_z \end{bmatrix}$$

【評語】 051813

本作品探討重心偏移的圓盤（有如不對稱之陀螺）經旋轉發射後，其重心上翻與轉速的關係。實驗發現偏心圓盤在旋轉的過程中，重心有反覆上翻而又下降的現象，即總能量因摩擦在散失之過程中，發生轉動動能與重力位能交換的現象。

所探討之力學現象簡潔而不失創意。主要在測量角速度與翻轉時間，並佐以歐拉方程式做定性的分析。題目雖然新穎，但實驗量測與分析不足，為本作品可改善之處。若能更系統性地討論動量、角動量、移動動能、轉動動能與位能隨時間之變化與其之間的交互作用，當使作品更為成熟與完整。

在實驗設計上，可考慮將膠注入乒乓球，形成外型對稱，但重量配置不對稱之旋轉體，精進目前之設計。

摘要

本實驗研究重心偏移的圓盤經旋轉發射後，其重心上翻與轉速的關係。實驗發現偏心圓盤在旋轉的過程中，重心有反覆上翻而又下降的現象，其重心位於上方的持續時間會逐次減少。從歐拉角轉動方程式、摩擦力與能量關係得出角度變化率的關係式，特殊條件下上翻條件為自轉角速度 $n > n_c$ (臨界角速度)，但 n_c 會因進動變快而上升，且 n 因進動變快及摩擦力損耗而下降，使 n 低於 n_c 導致重心下翻。另，重心上翻時並無特定自轉角速度，取而代之的是初自轉角速度愈大愈快上翻，即初自轉角速度愈大上翻時自轉角速度亦愈大；而重心偏心率越大能有較穩定的旋轉，也就是重心在上半部的維持時間較長；厚度愈厚其旋轉較不穩定，推測因其無穩定接觸點使摩擦力作用不連續。

壹、前言

一.研究動機

如圖1(a)，影片中的兩個半球原本位於圓盤下半部，在開始自轉後半球會在旋轉的過程中上升，如圖1(b)。為使左右質量對稱，我設計另一款偏心圓盤，如下圖1(c)，其中配重盤的材質密度大於挖洞圓盤，後續實驗將此重心偏離圓心的圓盤簡稱「偏心圓盤」。本實驗定義偏心率(e)：

$$e \equiv \left(\frac{\text{重心與圓心距離}}{\text{大圓半徑}} \right)$$

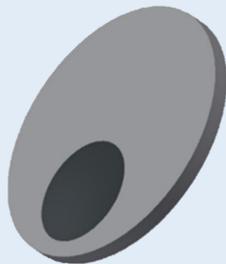
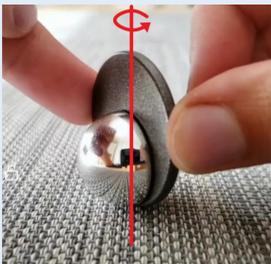


圖1(a) 市售偏心圓初始狀態^[1]

圖1(b) 市售偏心圓盤重心倒轉^[1]

圖1(c) 改良偏心圓盤

二.實驗原理

偏心圓盤與以下兩種童玩有幾點相似：

(一)旋轉硬幣

偏心圓盤具有類似旋轉硬幣的三階段運動。

(二)倒轉陀螺

偏心圓盤與倒轉陀螺皆有重心上翻的現象。

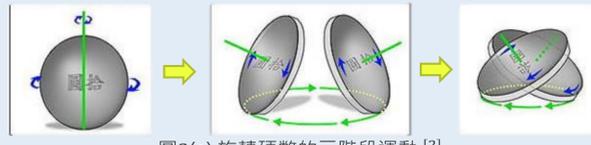


圖2(a) 旋轉硬幣的三階段運動^[2]



圖2(b) 倒轉陀螺^[3]

三.研究目的

- (一)探討偏心圓盤的運動階段與特徵。
- (二)不同初自轉角速度如何影響上翻的現象。
- (三)探討偏心率與重心上翻維持時間的關係。
- (四)偏心圓盤厚度對旋轉的影響。

貳、研究方法與過程

一.實驗器材

表1 詳細器材及工具

編號	名稱	數量	型號、備註
1	壓克力板	詳見 表2	
2	萬用黏土		
3	電腦	一台	使用軟體：Tracker, Excel
4	攝影機	兩台	SONY hdr-cx450(60fps) SONY hdr-as300(60fps)
5	白紙	1張	4K

表2 偏心圓盤規格表

編號	厚度 (mm)	2R (mm)	2r (mm)	Δd (mm)	a (mm)	壓克力重量 (g)	黏土重量 (g)	總重 (g)
1	5.0	40.0	20.0	5.0	1.47	5.442	3.015	8.457
2	3.0	40.0	20.0	5.0	1.46	2.981	1.634	4.615
3	3.0	40.0	10.0	5.0	0.90	3.704	0.389	4.093
4	3.0	40.0	10.0	7.5	0.67	3.704	0.389	4.093
5	3.0	40.0	10.0	10.0	0.45	3.704	0.389	4.093
6	3.0	60.0	25.0	2.5	3.26	8.128	2.726	10.584
7	3.0	80.0	30.0	5.0	4.03	15.503	4.559	20.602

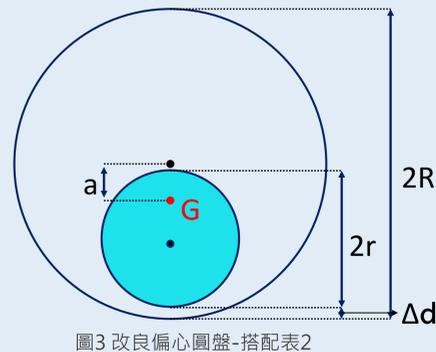


圖3 改良偏心圓盤-搭配表2

二.研究方法

方法一：用馬達控制起始轉速

方法二：用高斯炮撞擊

方法三：用手發射

問題：摩擦力影響太大

問題：較手發射不穩定且易造成偏心圓盤騰空

步驟：用手發射自製配重圓盤，在其上方及側面架設攝影機錄製，並利用 Tracker及Excel加以分析

→本實驗採用方法三

三.理論分析

(一)利用旋轉矩陣將剛體座標系轉為垂直座標系

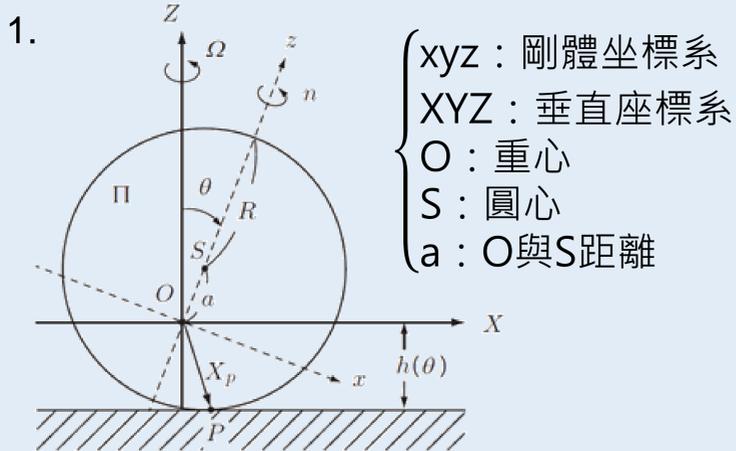


圖4配重偏心圓盤示意圖^[7]

2. 進動角速度 $\vec{\omega} = (0, 0, \Omega) = \Omega \hat{z} = -\Omega \sin \theta \hat{x} + \Omega \cos \theta \hat{z}$
自旋角速度 $\psi \hat{z}$
總角速度 $\vec{\omega} = -\Omega \sin \theta \hat{x} + \dot{\theta} \hat{y} + (\Omega \cos \theta + \psi) \hat{z}$ 定義為 n
總角動量 $\vec{L} = I\vec{\omega} = -A\Omega \sin \theta \hat{x} + B\dot{\theta} \hat{y} + Cn \hat{z}$
其中A,B,C分別為相對軸($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)的轉動慣量

3. 利用旋轉矩陣將物理量轉到XYZ座標

$$\omega_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \theta \Omega + n \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \sin^2 \theta \Omega + n \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$L_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A\Omega \sin \theta \\ B\dot{\theta} \\ Cn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cn \sin \theta - A\Omega \sin \theta \cos \theta \\ B\dot{\theta} \\ A\Omega \sin^2 \theta + Cn \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

(二)用歐拉角轉動方程分析

轉動力學相對質心的力矩作用造成角動量變化

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \tau = \vec{X}_p \times (\vec{N} + \vec{F}) \quad (3)$$

相對質心的作用點座標 $\vec{X}_p = (X_p, 0, Z_p)$

摩擦力 $\vec{F} = (F_x, F_y, 0)$

桌面正向力 $\vec{N} = (0, 0, N)$

將(1)(2)帶入(3)得：

$$\dot{\theta} = \frac{h(\theta)F_y + A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - C\dot{n} \sin \theta}{Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega} \quad (4)$$

θ ：oz和OZ夾角，即重心與質心連線和鉛直線夾角

F_y ：摩擦力 $\left(\vec{F}_y = -\mu N \frac{v_p}{|v_p(\Lambda)|} \right) \begin{cases} \mu \text{ 為動摩擦係數} \\ N \text{ 為正向力} \\ v_p \text{ 為桌面接觸點的速度} \end{cases}$

$h(\theta)$ ：質心離桌面高度

Ω ：進動角速度

n ：相對z軸的總角速度

A ：相對x軸的轉動慣量

B ：相對y軸的轉動慣量

C ：相對z軸的轉動慣量

$\dot{\theta} > 0$ 重心上翻

$\dot{\theta} < 0$ 重心下翻

(三) 樣品轉動慣量

$$A \text{轉動慣量} = \frac{MR^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{R^2}{4} + a^2 \right) - \frac{Mr^4}{4(R^2 - r^2)} + \frac{mr^2}{4} + \left(m - M \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) (b - a)^2$$

$$B \text{轉動慣量} = \left\{ \frac{MR^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right) \right\} - \left\{ \frac{Mr^2}{R^2 - r^2} \left[\frac{r^2}{2} + (b - a)^2 \right] \right\} + \left\{ m \left[\frac{r^2}{2} + (b - a)^2 \right] \right\}$$

$$C \text{轉動慣量} = \left\{ \frac{1}{4} \left[M \frac{R^2}{R^2 - r^2} \right] R^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{4} \left[M \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right] r^2 \right\} + \frac{1}{4} mr^2$$

表3 偏心圓盤轉動慣量值

編號	e 偏心率	A (g)(mm) ²	B (g)(mm) ²	C (g)(mm) ²
1	0.0735	1005.81	2020.45	982.38
2	0.0730	550.32	1105.71	537.68
3	0.0450	434.08	857.57	422.22
4	0.0335	428.88	851.91	422.22
5	0.0225	425.18	847.88	422.22
6	0.109	2877.62	5632.06	2703.69
7	0.101	9057.16	17643.53	8487.13

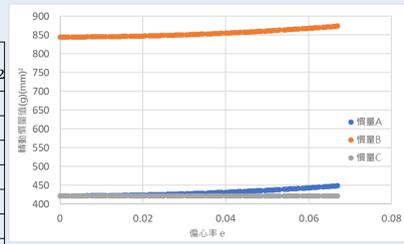


圖5 轉動慣量隨偏心率趨勢圖

參、研究結果與討論

偏心圓盤定義 θ 角為重心與圓心連線和鉛直線夾角，如圖6(a)。當翻到最高 $\theta=180^\circ$ ，如圖6(b)。

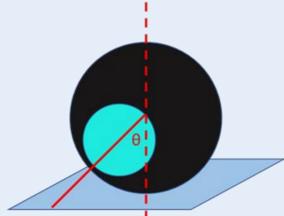


圖6(a) θ標示圖

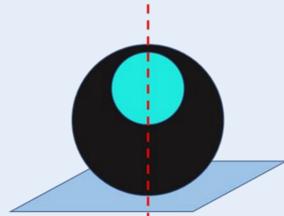


圖6(b) 圓盤重心翻轉達最高點(θ=180°)

一. 偏心圓盤的重複性與運動階段

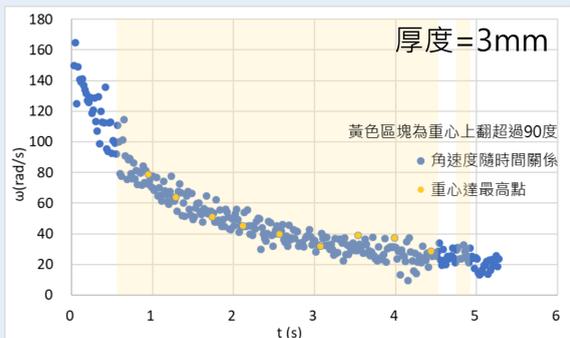


圖7(a) 編號2偏心圓盤-第一次發射角速度隨時間變化關係圖

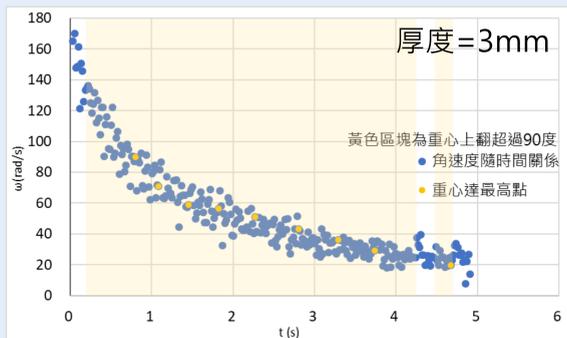


圖7(b) 編號2偏心圓盤-第二次發射角速度隨時間變化關係圖

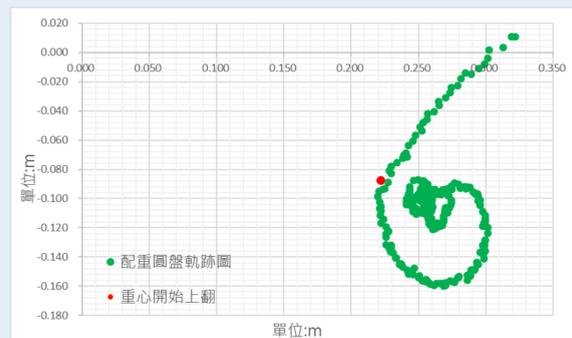


圖7(c) 編號2偏心圓盤-第一次發射圓盤俯視軌跡圖

(一)同樣品同初速度的情況下大致具有可重複性的結果。

(二)運動軌跡曲率半徑明顯變小、軌跡旋轉、進動開始、盤面傾斜、上翻開始皆發生於圖7(c)中紅色點的時刻。

(三)由式子(4)推得進動開始 $\Omega > 0, \dot{\Omega} > 0$ ，則 $\dot{\theta}$ 明顯增大，上翻現象趨於明顯。

二. 偏心圓盤與旋轉硬幣、倒轉陀螺之比較

(一)偏心圓盤與旋轉硬幣的差異

	第一階段	第二階段	第三階段
偏心圓盤	<ul style="list-style-type: none"> 質心主要為直線前進 進動較不明顯 $\theta \approx 0^\circ$ 	<ul style="list-style-type: none"> 運動軌跡成螺線型 有明顯進動 $\theta > 90^\circ$ 	<ul style="list-style-type: none"> 圓盤面與水平面的夾角小於45度 接觸地面的軌跡線近乎圓盤之周長
偏心圓盤 v.s. 旋轉硬幣	<ul style="list-style-type: none"> 盤面不完全筆直 	無明顯差異	無明顯差異
	<ul style="list-style-type: none"> 盤面筆直 		

(二)偏心圓盤與倒轉陀螺的差異

倒轉陀螺	<ul style="list-style-type: none"> 兩軸對稱∴慣量A=B 翻上去之後以棒子支撐旋轉，重心只會上翻一次。
偏心圓盤	<ul style="list-style-type: none"> 三軸慣量皆不同 可藉由圓盤邊緣支撐重心不斷上翻下降

(三)原理解釋

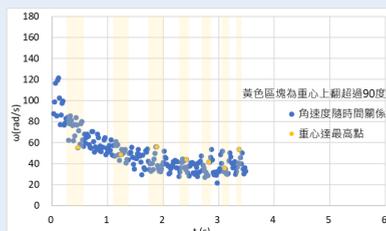


圖8 編號5偏心圓盤角速度隨時間變化關係圖

$$\dot{\theta} = \frac{h(\theta)F_y + A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - C\dot{n} \sin \theta}{Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega}$$

分母=0時 $n = n_c$

$$\Rightarrow n_c = \frac{B\Omega + A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{C \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n > n_c & \text{分母} > 0 \\ n < n_c & \text{分母} < 0 \end{cases}$$

	$0^\circ < \theta < 90^\circ$		$90^\circ < \theta < 180^\circ$	
	分母>0 $n > n_c$	分母<0 $n < n_c$	分母必為負值	
分子>0	① $\dot{\theta} > 0$	② $\dot{\theta} < 0$	分子>0	⑤ $\dot{\theta} < 0$
分子<0	③ $\dot{\theta} < 0$	④ $\dot{\theta} > 0$	分子<0	⑥ $\dot{\theta} > 0$

其中①④⑥重心上翻，②③⑤重心下翻。

隨著 Ω 、 n 、 $\dot{\Omega}$ 、 \dot{n} 、 $h(\theta)$ 、 F_y 、 θ 變化發生上翻與下降

三. 不同初自轉角速度如何影響上翻的現象

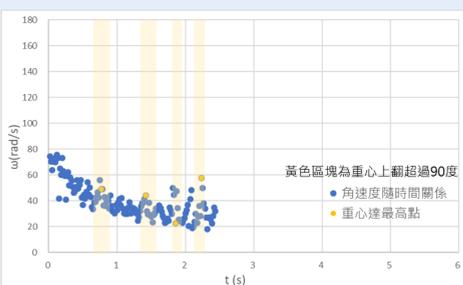


圖9(a) 編號7偏心圓盤-第一次發射角速度隨時間變化關係圖

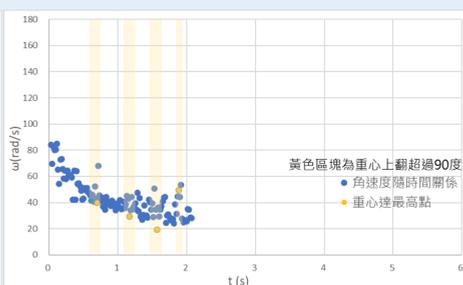


圖9(b) 編號7偏心圓盤-第二次發射角速度隨時間變化關係圖

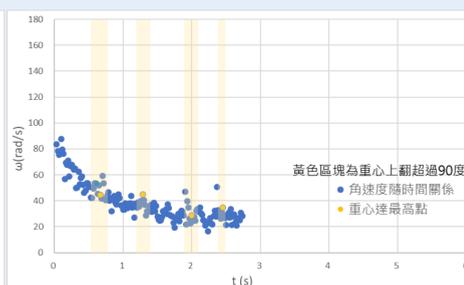


圖9(c) 編號7偏心圓盤-第三次發射角速度隨時間變化關係圖

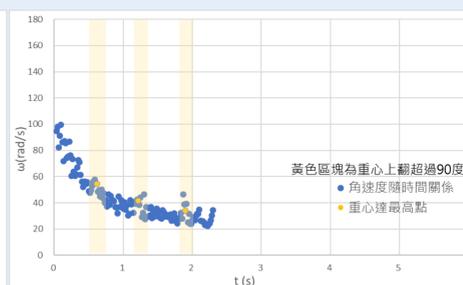


圖9(d) 編號7偏心圓盤-第四次發射角速度隨時間變化關係圖

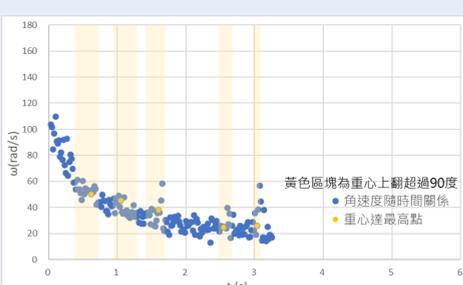


圖9(e) 編號7偏心圓盤-第五次發射角速度隨時間變化關係圖

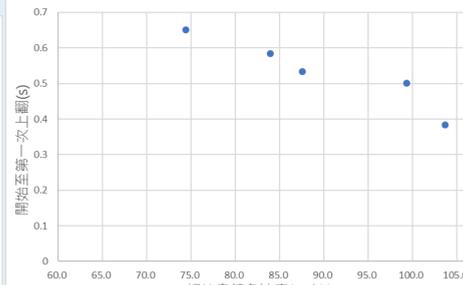


圖9(f) 編號7偏心圓盤開始至第一次上翻時間與初始自轉角速度關係圖

實驗前預測

偏心圓盤自轉角速度降至特定數值時上翻

實驗結果

初自轉角速度越快，則上翻時間越短，並無特定上翻自轉角速度

文獻中[7]倒轉陀螺也具有類似的現象，當倒轉陀螺結構符合以下範圍時，其重心能夠上翻到達最高點：

$$1 - \frac{a}{R} < \frac{A}{C} < 1 + \frac{a}{R}$$

- A：圖4中對x軸的轉動慣量
- C：圖4中對z軸的轉動慣量
- a：重心與大圓圓心距離
- R：大圓半徑

即圖10(a)中的藍色區域

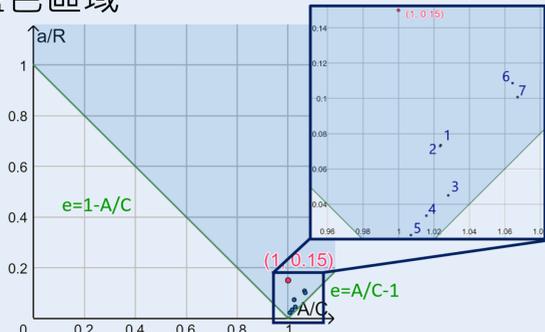


圖10(a) 倒轉陀螺重心上翻達最高點之範圍 (編號對應表2中的樣品編號)

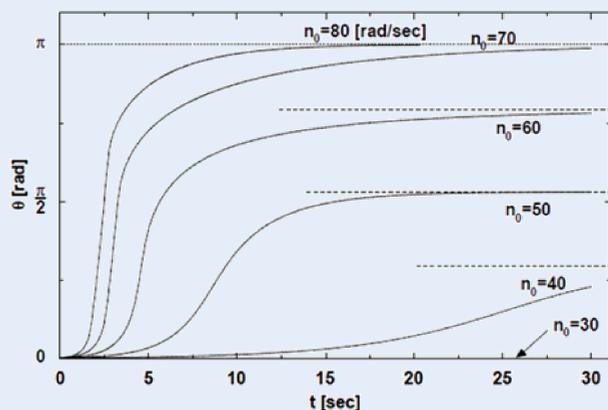


圖10(b) 圖10(a)中紅色點之 θ 角隨時間變化關係圖 [7]

我們的樣品為深藍色點，均落在藍色區域中。文獻[7]中以 $e=0.15, A/C=1$ 模擬倒轉陀螺出不同初自轉角速度下 θ 角隨時間的變化。在我的實驗數據中，偏心圓盤的初自轉角速度平均皆大於 80rad/s ，且上翻所需時間落在1秒以內，也大致符合圖10(b)中，倒轉陀螺的模擬結果。

四. 偏心率與重心維持的關係

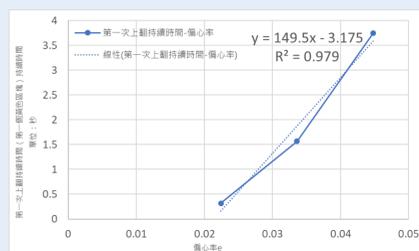
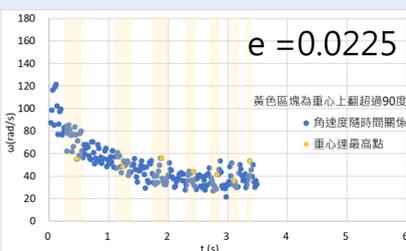
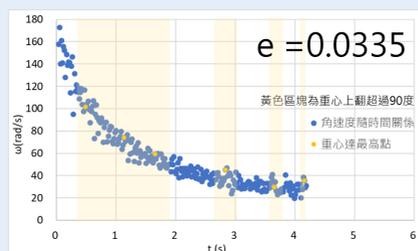
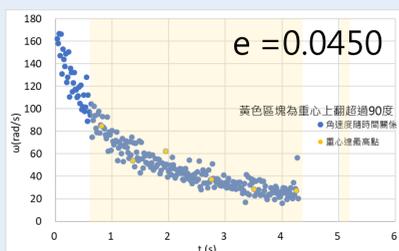


圖11(a) 編號3偏心圓盤角速度隨時間變化關係圖 圖11(b) 編號4偏心圓盤角速度隨時間變化關係圖 圖11(c) 編號5偏心圓盤角速度隨時間變化關係圖 圖11(d) 上翻持續時間與偏心率置關係圖

偏心率越高的偏心圓盤，第一次上翻的維持時間較長，且呈線性相關，旋轉時也較為穩定。

$$\dot{\theta} = \frac{h(\theta)F_y + A\dot{\Omega} \sin \theta \cos \theta - C\dot{n} \sin \theta}{Cn \cos \theta - A\Omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - B\Omega} \quad e \uparrow \Rightarrow A \uparrow \quad B \uparrow \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{+A \uparrow}{-A \uparrow - B \uparrow} \Rightarrow \dot{\theta} \uparrow$$

上翻後就類似一般陀螺的運動，偏心率越大，因進動的角動量越大，越不易受力矩改變方向，因此有較佳的穩定性。

五. 厚度不同的偏心圓盤

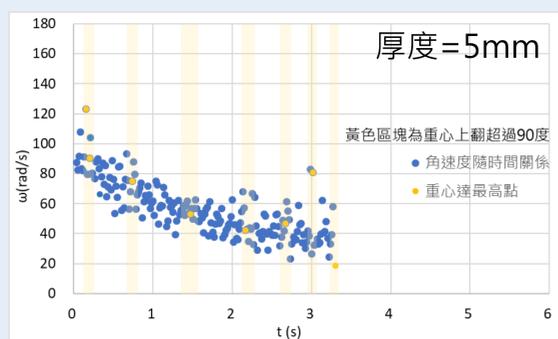


圖12 編號1偏心圓盤角速度隨時間變化關係圖

由圖7(a)、7(b) 和圖12 得知，厚度較厚的偏心圓盤，其上翻持續的時間較短，旋轉較不穩定。推測可能是因為旋轉時其與桌面之接觸點不連續變化，造成支點的不確性，且摩擦大小不穩定，使得偏心圓盤難以穩定旋轉。

六. 重心上翻至最高點的週期性

由圖7至圖12中，發現部分偏心圓盤在第一次重心上翻的過程中（第一個黃色區塊內），重心上翻至最高點（黃色標記點處）之時機具有週期性。在重心第一次重心上翻過後（第二個黃色區塊開始），可能因時間過短，重心上翻到最高點（黃色標記點）之時機並無明顯的週期性。

肆、結論

- 一. 初自轉角速度越大，越快上翻，圓盤上翻時並無特定角速度。
- 二. 偏心率越大的圓盤，因轉動慣量較大，使得重心保持在上半部的時間可以維持較長，且旋轉也較為穩定。另外第一次上翻持續的時間長度和偏心率呈線性關係。
- 三. 偏心圓盤因邊緣接觸點的連續性導致上翻與下翻現象的重複出現。

伍、參考資料

- [1]Instagram張貼之影音justspinnin [video file] 。
取自：<https://www.instagram.com/p/BwixFih7Q4/>
- [2]Youtube 張貼之影音Orbit Spinning Tops [video file] 。
取自：<https://www.youtube.com/watch?v=9pV7iaaR1QY>
- [3]國立台中教育大學 NTCU科學教育與應用學系。科學遊戲實驗室。歐拉盤。
取自：<http://scigame.ntcu.edu.tw/power/power-043.html>
- [4]跟著鄭大師玩科學。生活科學趣談。PAULI 和BOHR曾感到好奇的玩具。
取自：<https://www.masters.tw/35301/reverse-gyro>
- [5]Nils rutstam(2013). Analysis of Dynamics of the Tippe Top. *Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations, No. 1500.*
- [6]René bodack(2008). Dynamics of the spinning top : discretization and interactive visualization. Technische Universität Berlin, Institut für Mathematik, Prof. A. I. Bobenko, Berlin.
- [7]Takahiro ueda, Ken sasaki and Shinsuke watanabe(2005). Motion of the Tippe Top Gyroscopic Balance Condition and Stability. *YNU-HEPTh-05-102.*
- [8]大衛·哈利戴，捷爾·沃克，羅伯特·萊斯尼(2008)。物理(上)(第八版)(王行達，田麗文，李佳榮)。全華圖書股份有限公司。
- [9]黃智賢。搞定陀螺儀——從傳統到現代。物理雙月刊，36卷3期。