

# 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051812

滾動體在圓盤上運動之軌跡探討

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者： 高二 方譯蔓 高二 沈書煒	指導老師： 楊才民
-------------------------	--------------

關鍵詞：旋轉平台、滑動-滾動摩擦模型、  
準靜態滾動

## 摘要

球體在旋轉平台上的運動分三階段：進動階段、螺線振盪階段、打滑階段。進動階段、螺線振盪階段為兩個運動模式的疊加：迴旋半徑漸增的螺旋線運動、向平台中心靠近的平移運動。當迴旋半徑漸增至滑動摩擦力的上限值，球進入打滑階段並向外甩出平台。

研究紀錄球體質心運動參數，並以接觸點準靜態理論計算及滑動-滾動摩擦模型進行數值分析，找出各種變因與運動參數間的關係。

結果發現滾動階段中鋼球作迴旋運動的頻率 $f_{球}$ 和平台旋轉頻率 $f_{盤}$ 和有正比關係，且比例值和球標準化轉動慣量 $\delta$ 正相關。由滾動階段過渡到滑動階段的最大迴旋半徑 $R_{max}$ 和 $f_{球}^2$ 成反比、和 $\delta$ 呈負相關、和滑動摩擦係數 $\mu_k$ 成正比。滾動摩擦使球向平台中心靠近，也使迴旋半徑漸增。平台傾斜時，球體的運動向水平方向偏移。

## 壹、 研究動機

舊金山探索博物館網頁有一份專欄描寫球在旋轉平台上移動時，產生了俯衝與轉彎的運動引起我們的好奇。我們對於其中所描寫、形容的現象感到疑惑，因為這與我們所能想像得到的軌跡相差甚遠。接著，我們上網搜尋關於類似實驗的影片，結果更是令我們感到驚奇，原來球與盤的簡單實驗裝置，可以藉由改變各種微小的因素，表現出如此多變的軌跡，例如：球繞中心轉、球繞圓盤中心外的一個中心旋轉、原地轉動、心臟型曲線、繞中心漸漸向外.....等等。探討這些微小因素帶給軌跡的影響是此篇研究的重點。

## 貳、 研究目的

一、 透過實驗、力學分析、數值模擬方法研究以下變因之間的關係

- (一)平台轉速對球體運動的影響。
- (二)球體轉動慣量對運動的影響。
- (三)平台與球體間的滑動摩擦對球體運動的影響。
- (四)平台與球體間的滾動摩擦對球體運動的影響。
- (五)平台傾斜角度對球體運動的影響。

## 參、 研究設備及器材

### 一、 圖示與說明

器材名稱	圖片	用途
拉坏機		拉坏機做為控制圓盤鏈之機器,右方有可調整轉速之手搖桿。
鋁板		鋁板作為承載砂紙的底板(厚度 1mm, 半徑 55cm)。
砂紙		用來改變摩擦係數的工具，分別有甲、乙、丙、丁種砂紙，其粗細程度分別為 P150、P400、P600 及 P800 (ISO/FEPA 單位)。
不鏽鋼球		作為釋放在砂紙之上的球體，為改變質量的要素(由左到右分別代號為:小實、小空、中實、中空、大實、大空)。
支撐木架		由於鋁板較軟，置於原本較小的底座上時，外緣鋁板會下垂，所以製作支撐木架，以確保平面為水平。

水管		用以控制球體的運動範圍，來達到球體準靜態釋放。
車子		在實驗前置作業中，我們將三顆不鏽鋼珠黏於塑膠下，使之接觸砂紙。
斜面		在實驗前置作業中，用砂紙固定在斜面上，製造出一定高度，並使車子滑下不同的砂紙斜面。

## 二、 詳細規格表

### (一)不鏽鋼球規格

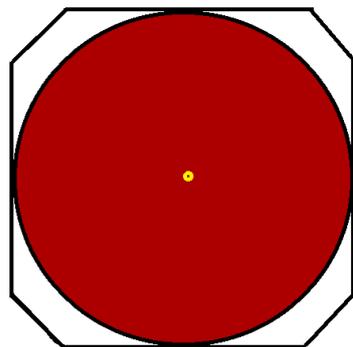
代號	質量(g)	直徑(mm)	壁厚(mm)	轉動慣量
大實	229.43	38.0		0.40
大空	12.50	38.0	0.45	0.81
中實	67.73	25.4		0.40
中空	6.61	25.4	0.80	0.75
小實	33.28	20.0		0.40
小空	5.61	20.0	0.80	0.89

### (二)砂紙規格

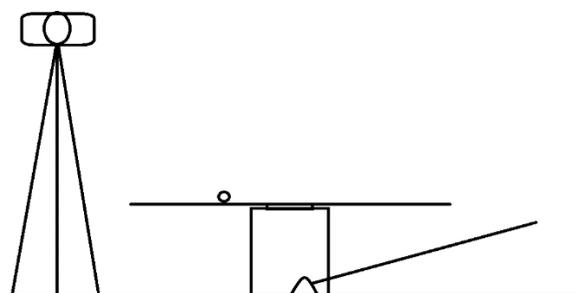
代號	摩擦係數(ISO/FEPA 單位)	滑動摩擦係數	滾動摩擦係數
甲砂紙	P150	1.10	0.068
乙砂紙	P400	1.15	0.059
丙砂紙	P600	0.99	0.096
丁砂紙	P800	1.14	0.055

三、 器材架設示意圖

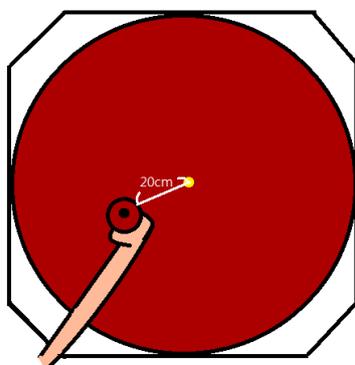
(一)俯視圖



(二)側視圖



(三) 準靜態釋放示意圖

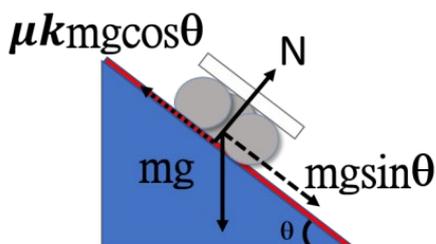


## 肆、研究方法

### 一、實驗前置作業

#### (一)滑動摩擦

- 1.實驗目的:測量不鏽鋼球與不同砂紙的滑動摩擦係數 $\mu_k$ 。
- 2.實驗原理

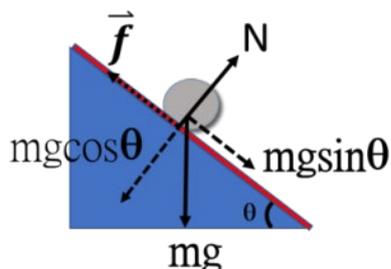


圖一 滑動摩擦力圖

$$mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma, \mu_k = \frac{g \sin \theta - a}{g \cos \theta}.$$

#### (二)滾動摩擦係數 $\beta$ 及標準化轉動慣量 $\delta$

- 1.實驗目的:測量不鏽鋼球與不同砂紙的滾動摩擦係數、空心不鏽鋼球標準化轉動慣量。
- 2.實驗原理:利用小角度斜面，使球體以純滾動方式沿斜面滾下，



圖二 滑動摩擦力圖

因滾動摩擦約比滑動摩擦小二個數量級，故滾動摩擦對平移運動的影響可忽略不計，主要提供力矩 $\tau_{\text{滾}} = \beta Nr = \beta(mg \cos \theta)r$ 。

質心運動方程式： $mg \sin \theta - f = ma \dots (1)$

轉動方程式： $fr - \beta(mg \cos \theta)r = I\alpha = \delta mr^2 \alpha \dots (2)$

( $\delta$  為無單位標準化轉動慣量)

純滾動方程式： $a = r\alpha \dots (3)$

標準化轉動慣量 $\delta$ 測量：由(1)(2)(3)可得  $\delta + 1 = \frac{g(\sin \theta - \beta \cos \theta)}{a} \dots (4)$

由(4)式知，當固定斜面角度 $\theta$ ，以同一張砂紙(固定 $\beta$ )，分別使用不鏽鋼實心球、空心球，各作靜止釋放滾動實驗，可得兩球標準化轉動慣量的相對關係

$$\frac{\delta_{\text{空心球}}+1}{\delta_{\text{實心球}}+1} = \frac{a_{\text{實心球}}}{a_{\text{空心球}}}, \text{ 或 } \delta_{\text{空心球}} = \frac{a_{\text{實心球}}}{a_{\text{空心球}}} (\delta_{\text{實心球}} + 1) - 1。$$

若令均質實心球  $\delta_{\text{實心球}} = 0.4$ ，則可得  $\delta_{\text{空心球}} = \frac{a_{\text{實心球}}}{a_{\text{空心球}}} (0.4 + 1) - 1$

再利用 x-t 圖測得兩球的質心加速度，能求出空心球的標準化轉動慣量  $\delta_{\text{空心球}}$ 。

滾動摩擦係數  $\beta$  測量：由(1)(2)(3) 可得  $\beta = \frac{g \sin \theta - a(\delta + 1)}{g \cos \theta} \dots \dots (5)$

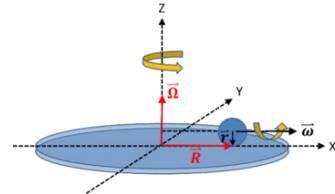
在不同粗糙程度的斜面上，固定斜角，以同一實心球 ( $\delta_{\text{實心球}} = 0.4$ ) 作準靜態釋放實驗並由 x-t 圖測出質心加速度 a 值得此接觸面的滾動摩擦係數  $\beta$ 。

二、 主要實驗: 探究球體於旋轉平台由準靜態釋放後的運動模式

(一) 實驗目的: 分析旋轉平台上，由準靜態釋放的不鏽鋼球體運動情形。

(二) 實驗原理:

球體在旋轉平台運動物理量說明，如圖三。



圖三 運動物理量示意圖

鋼球運動物理量說明

1. 平台旋轉角速度  $\vec{\Omega} (0, 0, \Omega)$ ，指向+z 軸， $\Omega = 2\pi f_{\text{盤}}$
2. 由平台中心指向小球底部的位置向量  $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), 0)$ ，位於平台 X-Y 平面上
3. 鋼球自旋角速度  $\vec{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), 0)$ ，位於 X-Y 平面上
4. 鋼球半徑向量  $\vec{r} = (0, 0, -r)$ ，指向-Z 軸
5. 鋼球的質心速度  $\vec{V}_c(t) = (V_x(t), V_y(t), 0)$

控制及操縱變因物理量說明

1. 鋼球與砂紙間滑動摩擦係數  $\mu_k$
2. 鋼球與砂紙間滾動摩擦係數  $\beta$
3. 球體標準化轉動慣量  $\delta$

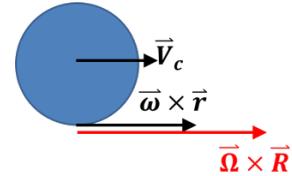
4. 平台旋轉角速度  $\vec{\Omega}$ ，指向+z 軸、旋轉頻率  $f_{\text{盤}} = \frac{\Omega}{2\pi}$
5. 平台傾斜角  $\theta$ ，平台向-y 軸傾斜

應變變因物理量說明

1. 鋼球質心作振盪的角速度  $\vec{\Omega}'$ 、振盪頻率  $f_{\text{球}} = \frac{\Omega'}{2\pi}$
2. 鋼球質心由螺線振盪運動過渡到打滑階段前的最大迴旋半徑  $R_{\text{max}}$

接觸點的相對運動速度 $\vec{V}_{rel}$ :球底與平台接觸點的相對速度關係，如圖所示。

球質心速度為 $\vec{V}_c$ 、球底部點相對於質心的速度 $\vec{\omega} \times \vec{r}$ 、



接觸點平台速度 $\vec{\Omega} \times \vec{R}$ 。

圖四 球底部接觸點與平台相對運動

球底部與平台接觸點的相對速度 $\vec{V}_{rel} = \vec{V}_{球底} - \vec{V}_{盤} = (\vec{V}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{\Omega} \times \vec{R}$   
 $\vec{R} \dots \dots (1)$

### 受力分析

鋼球主要的驅動力有三：

1.滑動摩擦力 $\vec{f}_k$ ：發生時機為**接觸點有相對運動**時。 $\vec{f}_k$ 對球的平移及轉動皆有影響，其方向為接觸點相對運的反方向  $\vec{f}_k = \mu mg \cos \theta (-\hat{V}_{rel})$ 。……(2)。

2.滾動摩擦力矩 $\vec{\tau}_{滾}$ ：發生原因為接觸面的微小凸起或平台與球底部接觸點的附著力。因滾動摩擦係數一般較滑動摩擦係數小約二個數量級，故在平移的部分影響可忽略，主要提供和角速度反向的力矩： $\vec{\tau}_{滾} = \beta mg \cos \theta r (-\hat{\omega})$ ……(3)。

$$\vec{\tau}_{滾} = \beta mg \cos \theta r (-\hat{\omega})$$



圖五 滾動摩擦力矩

3.重力的下滑分力 $\vec{W}_{||}$ ：當平台傾斜時，重力有下滑分力，本實驗將傾斜方向設定往-y 軸傾斜， $\vec{W}_{||} = mg \sin \theta (-\hat{y})$ ，因此力過質心故不提供力矩。

### 運動方程式

1.質心平移運動方程式：

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_{合}}{m} = \frac{\vec{f}_k + \vec{W}_{||}}{m} = \frac{\mu mg \cos \theta (-\hat{V}_{rel}) + mg \sin \theta (-\hat{y})}{m} = \mu g \cos \theta (-\hat{V}_{rel}) + g \sin \theta (-\hat{y}) \dots \dots (4)$$

2.繞鋼球質心轉動方程式：

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}_{合}}{I} = \frac{\vec{\tau}_k + \vec{\tau}_{滾}}{\delta m r^2} = \frac{\vec{r} \times \vec{f}_k + \beta mg \cos \theta r (-\hat{\omega})}{\delta m r^2} \dots \dots (5)$$
，其中 $\delta$ 為無單位標準化轉動慣量。

### 數值分析模擬

因運動方程式解析解不易求出，改用數值模擬方式分析鋼球質心的運動情形，將球運動的物理量分為二方向，依運動方程式進行疊代。

平台轉速相當快(每秒有二轉左右)，因此球的起始放置成了很不易控制的變因，為了控制球的起始運動狀態，以下所有實驗均以準靜態( $\vec{V}_{rel}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ )的初始條件釋放，因此實驗中我們使用套管套住球，使小球於平台上以質心速度 $\vec{V}_c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，但有自旋角速度 $\vec{\omega}(\mathbf{0}) \times \vec{r} = \vec{\Omega} \times \vec{R}(\mathbf{0})$ 即純滾動的方式出發。設定完起始條件後，利用疊代方法找出 $n\Delta t$ 時刻的物理量：

$$x(n\Delta t) = x((n-1)\Delta t) + V_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t^2$$

$$y(n\Delta t) = y((n-1)\Delta t) + V_y((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_y((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t^2$$

$$V_x(n\Delta t) = V_x((n-1)\Delta t) + a_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t$$

$$V_y(n\Delta t) = V_y((n-1)\Delta t) + a_y((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t$$

$$a_x = \frac{-g \cos \theta \mu_k (V_x - \omega_y r + \Omega y)}{\sqrt{(V_x - \omega_y r + \Omega y)^2 + (V_y + \omega_x r - \Omega x)^2}}$$

$$a_y = \frac{-g \cos \theta \mu_k (V_y + \omega_x r - \Omega x)}{\sqrt{(V_x - \omega_y r + \Omega y)^2 + (V_y + \omega_x r - \Omega x)^2}} + (-g \sin \theta)$$

$$\omega_x(n\Delta t) = \omega_x((n-1)\Delta t) + \alpha_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t$$

$$\omega_y(n\Delta t) = \omega_y((n-1)\Delta t) + \alpha_y((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t$$

$$\alpha_x = \frac{mgr \cos \theta \mu_k \cdot \frac{-(V_y + \omega_x r - \Omega x)}{\sqrt{(V_x - \omega_y r + \Omega y)^2 + (V_y + \omega_x r - \Omega x)^2}} + \beta mg \cos \theta \left( \frac{-\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}} \right)}{\delta m r^2} \quad \alpha_y =$$

$$\frac{mgr \cos \theta \mu_k \cdot \frac{-(V_x - \omega_y r + \Omega y)}{\sqrt{(V_x - \omega_y r + \Omega y)^2 + (V_y + \omega_x r - \Omega x)^2}} + \beta mg \cos \theta \left( \frac{-\omega_y}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}} \right)}{\delta m r^2}$$

以下為準靜態釋放起始條件

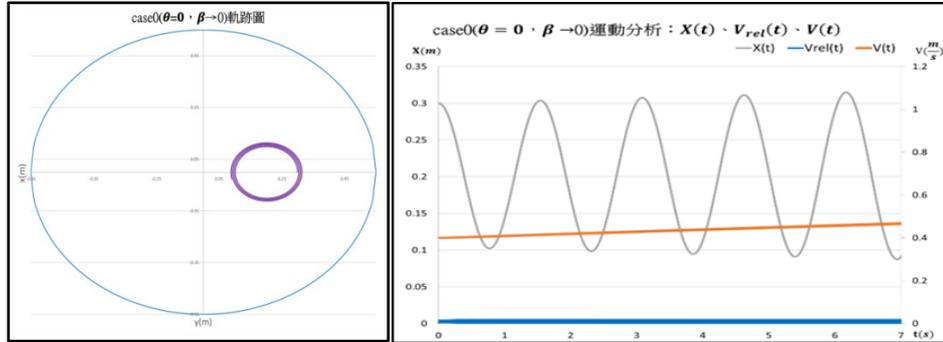
$$\omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r}$$

$$\omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r}$$

Excel 疊代表格示例：

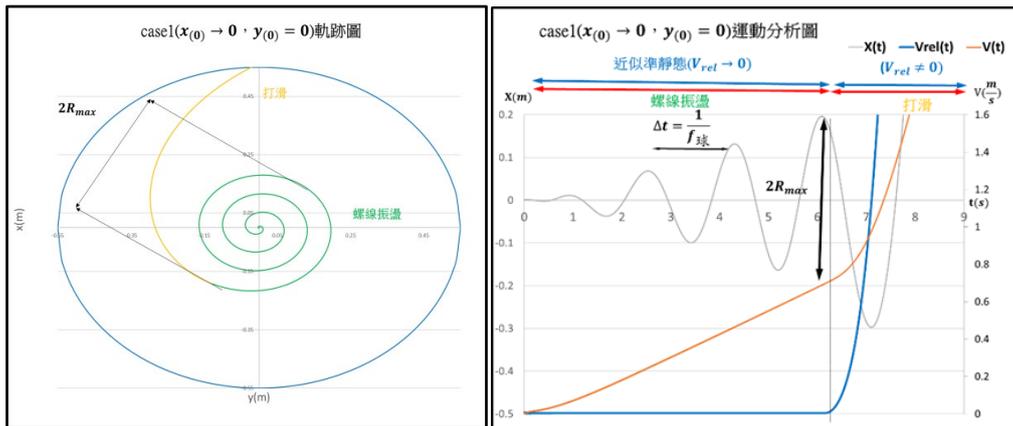
t	x	y	$V_x$	$V_y$	$a_x$	$a_y$	$\omega_x$	$\omega_y$	$\alpha_x$	$\alpha_y$
0	$x(0)$	$y(0)$	$V_x(0)$	$V_y(0)$	$a_x(0)$	$a_y(0)$	$\omega_x(0)$	$\omega_y(0)$	$\alpha_x(0)$	$\alpha_y(0)$
$\Delta t$	$x(\Delta t)$	$y(\Delta t)$	$V_x(\Delta t)$	$V_y(\Delta t)$	$a_x(\Delta t)$	$a_y(\Delta t)$	$\omega_x(\Delta t)$	$\omega_y(\Delta t)$	$\alpha_x(\Delta t)$	$\alpha_y(\Delta t)$
$2\Delta t$	$x(2\Delta t)$	$y(2\Delta t)$	$V_x(2\Delta t)$	$V_y(2\Delta t)$	$a_x(2\Delta t)$	$a_y(2\Delta t)$	$\omega_x(2\Delta t)$	$\omega_y(2\Delta t)$	$\alpha_x(2\Delta t)$	$\alpha_y(2\Delta t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)\Delta t$	$x((n-1)\Delta t)$	$y((n-1)\Delta t)$	$V_x((n-1)\Delta t)$	$V_y((n-1)\Delta t)$	$a_x((n-1)\Delta t)$	$a_y((n-1)\Delta t)$	$\omega_x((n-1)\Delta t)$	$\omega_y((n-1)\Delta t)$	$\alpha_x((n-1)\Delta t)$	$\alpha_y((n-1)\Delta t)$
$n\Delta t$	$x(n\Delta t)$	$y(n\Delta t)$	$V_x(n\Delta t)$	$V_y(n\Delta t)$	$a_x(n\Delta t)$	$a_y(n\Delta t)$	$\omega_x(n\Delta t)$	$\omega_y(n\Delta t)$	$\alpha_x(n\Delta t)$	$\alpha_y(n\Delta t)$

討論四種不同的起始條件：以下左圖為軌跡圖，右圖為  $X(t)$ 、 $V(t)$ 、 $V_{rel}(t)$ 圖  
 Case 0：滾動摩擦係數趨近 0 ( $\theta = 0, \beta \rightarrow 0, x(0) = 0.3, y(0) = 0, V_x(0) = 0, V_y(0) = 0.4, \omega_x(0) = 172.3053, \omega_y(0) = 0$ )



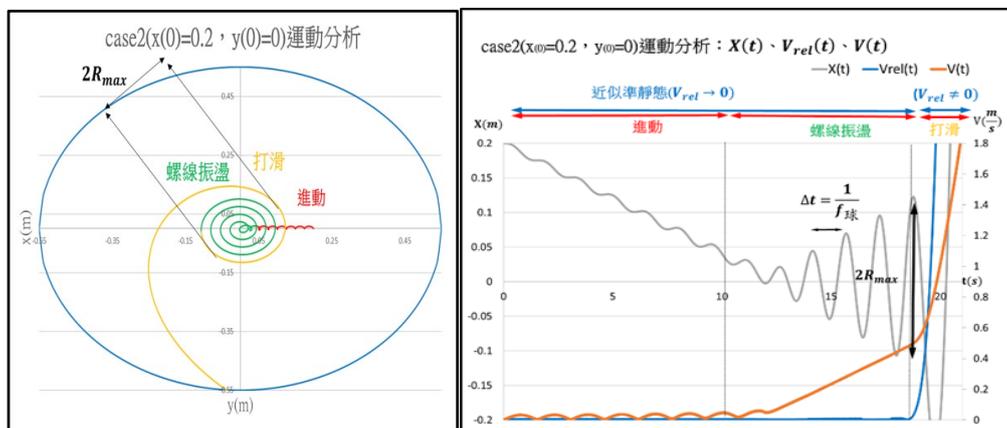
圖六 Case0 軌跡與運動分析圖

Case 1：盤心釋放：螺線振盪-打滑 ( $\theta = 0, \beta \neq 0, x(0) = 0.001, y(0) = 0, V_x(0) = 0, V_y(0) = 0, \omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r} = 0.96, \omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r} = 0$ )



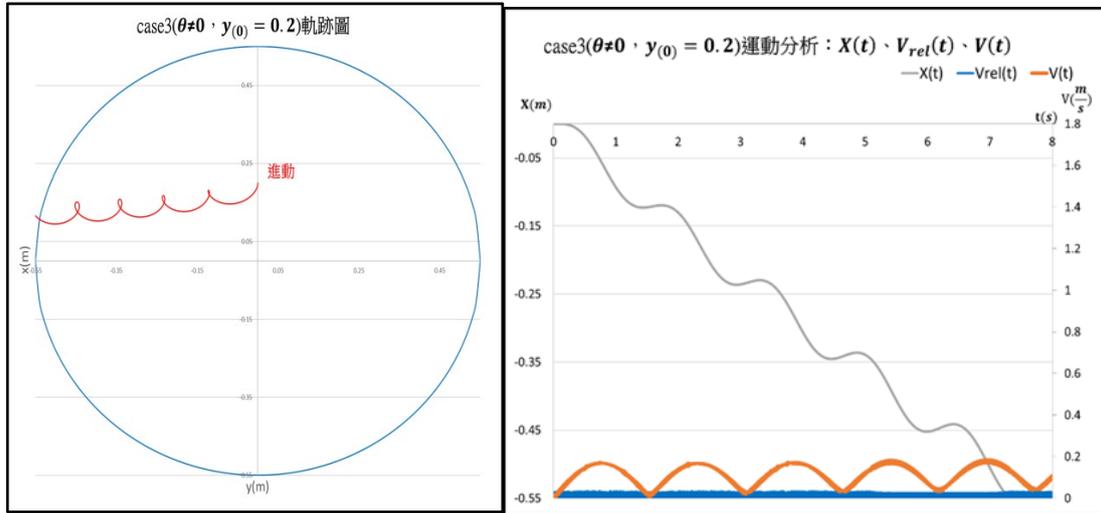
圖七 Case1 軌跡與運動分析圖

Case 2：非盤心釋放：進動-振盪-打滑 ( $\theta = 0, \beta \neq 0, x(0) = 0.2, y(0) = 0, V_x(0) = 0, V_y(0) = 0, \omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r} = -149.839, \omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r} = 0$ )



圖八 Case2 軌跡與運動分析圖

Case 3: 盤面傾斜 ( $\theta \neq 0, \beta \neq 0, x(0) = 0.2, y(0) = 0, V_x(0) = 0, V_y(0) = 0, \omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r} = -149.839, \omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r} = 0$ )



圖九 Case3 軌跡與運動分析圖

特殊之處：向-y 方向傾斜，卻有向-x 方向進動的趨勢。

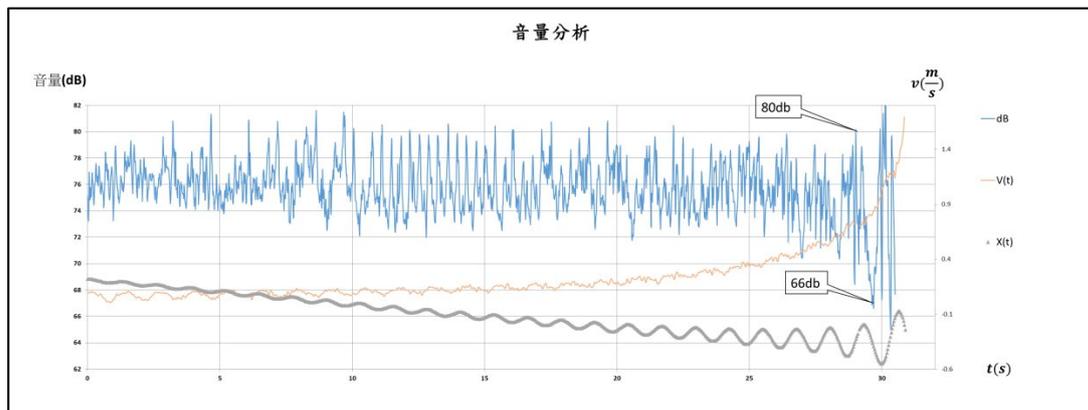
模擬發現所有 case 都有一段長的時間維持  $\vec{V}_{rel} = 0$ ，我們將它稱為準靜態運動期間，此期間的運動似有一規律。

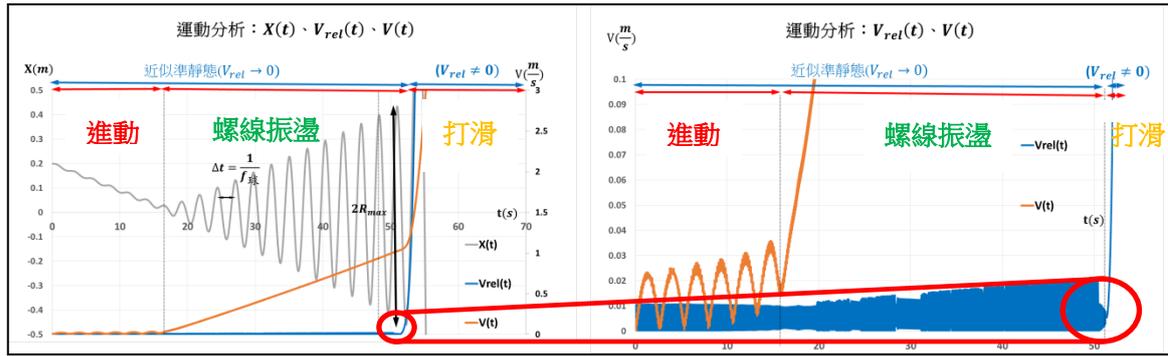
### 初步實驗

我們注意到 case2 有最豐富的運動資訊， $v(t)$ 圖在階段一進動過程是忽快忽慢，並保持低速，階段二螺線振盪速率穩定增加，階段三打滑速率陡增。

$V_{rel}(t)$ 圖則在階段一二趨近於 0(準靜態運動期間)，且進入打滑階段前會先突然降低然後陡升。

因此我們試著做實驗，並錄下鋼球與砂紙磨擦音量，發現摩擦音量約略在進入打滑前會由 80dB 陡降至 66dB。我們猜測音量大小與接觸點的相對運動  $V_{rel}$  有關。





由模擬圖發現在進入打滑前  $V_{rel}$  確實陡降。印證了我們的猜測，也從實驗中看到了模擬的效果。

### 準靜態運動期間的解析解

為了便於在合理的範圍內分析，我們發現在所有 case 的運動初期的振盪階段，球底部和平台接觸點間的相對速度並不大，因此我們利用球體底部和平台的接觸點相對速度趨近為零的近似，套入鋼球的運動方程式，期望能找到有意義的解析解。

$$\text{假定：}\vec{V}_{rel} \rightarrow 0 \dots \dots (6)$$

$$\text{由(6) } \frac{d\vec{V}_{rel}}{dt} = 0 \dots \dots (7)$$

將(1)微分 可得準靜態運動方程式

$$\frac{d\vec{V}_{rel}}{dt} = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times \vec{V} \dots \dots (8)$$

將(7)代入(8) 可得準靜態運動方程式

$$\vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times \vec{V}_c = 0 \dots \dots (9)$$

將鋼球的轉動方程式(5)代入(9)得

$$\vec{a}_c + \left[ \frac{\vec{r} \times \vec{f}_k + \beta mgr \cos \theta (-\hat{\omega})}{\delta mr^2} \right] \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times \vec{V}_c = 0 \dots \dots (10)$$

$$\text{展開得 } \vec{a}_c + \frac{\vec{f}_k}{\delta m} + \frac{\beta g \cos \theta (-\hat{\omega} \times \vec{r})}{\delta} - \vec{\Omega} \times \vec{V}_c = 0$$

$$\text{以質心平移方程式(4)代入 並移項得 } \vec{a}_c + \frac{1}{\delta} \vec{a}_c = \frac{\beta g \cos \theta (\hat{\omega} \times \vec{r})}{\delta} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_c - \frac{g \sin \theta}{\delta} \hat{y}$$

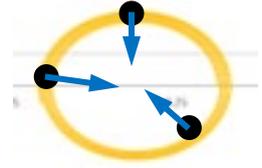
可得在滑動摩擦力及滾動摩擦作用下，球體做準靜態運動方程式

$$\vec{a}_c = \frac{\beta g \cos \theta (\hat{\omega} \times \vec{r})}{(\delta+1)} + \left( \frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega} \right) \times \vec{V}_c - \frac{g \sin \theta}{\delta+1} \hat{y} \dots \dots (11)$$

以下為此質心運動方程式之解讀：

For case 0 等速圓周運動：( $\beta \rightarrow 0 ; \theta = 0$ )

$$\vec{a}_c = \left( \frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega} \right) \times \vec{V}_c = \vec{\Omega}' \times \vec{V}_c ; \text{右圖中以對應顏色代表加速度方向。}$$



圖十 case0 力圖分析

由於其加速度永遠在法線方向，故作等速率圓周運動。

鋼球將以  $\vec{\Omega}' = \left( \frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega} \right)$  的等角速度繞平台上某一定點作等角速度圓周運動，此圓

$$\boxed{f_{\text{球}} = f_{\text{盤}} \frac{\delta}{\delta+1}}$$
，此比例與轉動慣量有正相關，但和其他物理量無關。

但因為實驗室很難找到  $\beta \rightarrow 0$  的材料，故我們不做此實驗，僅將其視為一理想情況。

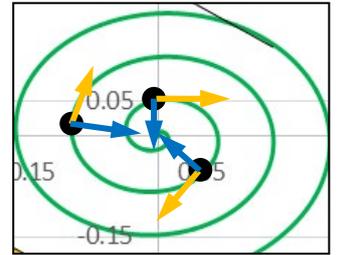
For case 1 盤心釋放[實驗一]：( $\theta = 0, \beta \neq 0, x(0) = 0.001, y(0) = 0, V_x(0) = 0,$

$V_y(0) = 0, \omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r} = 0.96, \omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r} = 0$ ) 藍底為準靜態釋放條件

$$\vec{a}_c = \frac{\beta g}{\delta+1} (\hat{\omega} \times \hat{r}) + \left( \frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega} \right) \times \vec{V}_c, \text{右圖中以對應顏色代表加速度方向。}$$

由於  $\hat{\omega} \times \hat{r}$  為質心速度的切線方向單位向量， $\vec{\Omega} \times \vec{V}_c$  則在法線方向。  
故球體質心加速度可看為

$$\vec{a}_c = \frac{\beta g}{\delta+1} \cdot \hat{a}_{\text{切}} + \left( \frac{\delta}{\delta+1} \Omega \right) V_c \cdot \hat{a}_{\text{法}},$$



圖十一 case1 力圖分析

1. 切線加速度  $a_{\text{切}} = \frac{\beta g}{(\delta+1)}$

代表此球體將作等加速率運動，加速度大小和滾動摩擦係數成正比、和轉動慣量有負相關。由此可知，滾動摩擦是使球體加速的根本因素，極端的看，若  $\beta=0$  則鋼球將作 case0 等速率運動。

2. 法線加速度  $a_{\text{法}} = \left( \frac{\delta}{\delta+1} \Omega \right) V_c = \Omega' V_c$

代表鋼球將以  $\vec{\Omega}' = \left( \frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega} \right)$  的等角速度繞平台上某一定點作等角速度圓周運動，

此圓周運動角速度  $\Omega' = 2\pi f_{\text{球}}$  和平台轉速  $\Omega = 2\pi f_{\text{盤}}$  有簡單比例關係，或可寫為

$$\boxed{f_{\text{球}} = f_{\text{盤}} \frac{\delta}{\delta+1}}$$
，此比例與轉動慣量有正相關，但和其他物理量無關；將在後續

實驗中觀察並驗證此一結果。

### 3.圓周運動半徑

圓周運動的半徑可寫為 $R = \frac{V_c}{\Omega'}$ 。由於鋼球作等角速度圓周運動，而切線速度隨時間線性增加，故半徑亦隨時間線性增加，可知其運動軌跡為以一固定點為圓心的螺線。

### 4.螺線運動的最大半徑

將螺線運動的法線加速度以半徑表示為 $a_{\text{法}} = R\Omega'^2$ ，隨半徑漸增，當所需的 $a_{\text{法}}$ 增至接觸面所能提供的上限 $\mu_k g$ 時，螺旋線運動來到半徑最大值，再大即由準靜態進入打滑階段並迅速滑出盤面，並超過準靜態假設的適用邊界。定義此臨界最大半徑 $R_{\text{max}} = \frac{\mu_k g}{\Omega'^2}$ ，經過代換可得 $R_{\text{max}} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{\text{盤}}^2} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$ ；將在後續實驗中觀察並驗證此一結果。

本研究將操控以下變因：鋼球與砂紙間滑動摩擦係數( $\mu_k$ )、球與砂紙間滾動摩擦係數( $\beta$ )、球體標準化轉動慣量( $\delta$ )、平台旋轉頻率( $f_{\text{盤}}$ )，觀察相應的運動參數，鋼球作螺線迴旋運動的頻率( $f_{\text{球}}$ )、由滾動階段過渡到滑動階段的最大迴旋半徑 $R_{\text{max}}$ ，並比對上述框框內的二條方程式，檢驗理論的正確性。

For case 2 非盤心釋放[實驗二]： $(\theta = 0, \beta \neq 0, x(0) = 0.2, y(0) = 0, V_x(0) = 0,$

$V_y(0) = 0, \omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r} = -149.839, \omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r} = 0)$ 藍底為準靜態釋放條件

將球由非平台中心釋放時，球會向平台中心一邊打轉一邊進動(precession)，如下圖所示，至平台中心後的運動模式與前一個 case 相同。

我們可這樣想：依準靜態運動的條件，可推論球在每一位置的 $\hat{\omega}$ 方向均由盤心輻射向外，假設在球離平台中心甚遠處，且運動過程振幅不大，因此運動過程 $\hat{\omega}$ 及 $\hat{\omega} \times \hat{r}$ 的方向均不改變。

$$\vec{a}_c = \frac{\beta g}{\delta + 1} (\hat{\omega} \times \hat{r}) + \left(\frac{\delta}{\delta + 1} \vec{\Omega}\right) \times \vec{V}_c$$

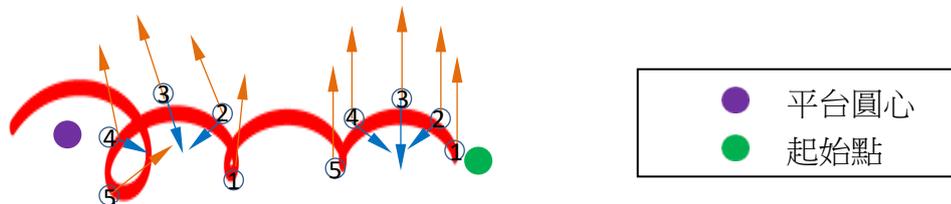
以下圖為例，右方循環中， $\hat{\omega}$ 向右， $\frac{\beta g}{\delta + 1} (\hat{\omega} \times \hat{r})$ 向上，加速度的方向與下方公式

中的顏色對應， $\left(\frac{\delta}{\delta + 1} \vec{\Omega}\right) \times \vec{V}_c$ 在法線方向。

### 進動速率 $V_p$ 分析

①經②至③為加速過程，當中可見橘色加速度有切線加快效果，③為最快速率，③經④到⑤為減速過程當中可見橘色加速度有切線減慢效果，⑤為接近 0 的速率。

越靠近盤心，因  $\frac{\beta g}{\delta+1}(\hat{\omega} \times \hat{r})$  改變方向，③為最快速率點延遲來到、⑤最慢速率點提早來到，加速過程時間大於減速時間，故速率會漸快。



圖十二 case2 力圖分析

為了定量進動的速率，一個週期定義為①到⑤的過程。令球做週期性振盪的時間間隔為  $\Delta t = \frac{1}{f_{球}}$ ，則  $\Delta t = \frac{1}{(\frac{\delta}{\delta+1})f_{盤}}$ ，每個週期進動位移  $\Delta x$  可依加速度運動理論估計

之， $\Delta x \propto \bar{v} \Delta t \propto (a_{切} \Delta t) \Delta t$ ，其中  $a_{切} \propto \frac{\beta g}{\delta+1}(\hat{\omega} \times \hat{r})$ 。定義平均進動速率  $V_p \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 。

則  $V_p \propto \frac{(a_{切} \Delta t) \Delta t}{\Delta t} \propto \frac{\beta g}{\delta+1} \frac{1}{(\frac{\delta}{\delta+1})f_{盤}} \propto \frac{\beta}{\delta f_{盤}}$ 。將於實驗及模擬中驗證進動速率  $V_p \propto \frac{\beta}{\delta f_{盤}}$  關係式。

### 進動曲率半徑分析

曲率半徑  $R = \frac{v_c^2}{a_{法}} = \frac{v_c^2}{\left[ \frac{\beta g}{\delta+1}(\hat{\omega} \times \hat{r}) + \left( \frac{\delta}{\delta+1} \Omega \right) \times v_c \right]}$ ，先不考慮橘色項， $R = \frac{v_c^2}{a_{法}} = \frac{v_c^2}{\left( \frac{\delta}{\delta+1} \Omega \right) \times v_c} \propto v_c$ ，故一個週期內的半徑大小關係為③>②=④>①=⑤。

再考慮  $\frac{\beta g}{\delta+1}(\hat{\omega} \times \hat{r})$ ，則②③④期間該加速度均有一離心分量，使  $a_{法}$  量值下降，進而再提高  $R$ ，其中③處此加速度恰完全在離心方向，因此對提高  $R$  有更顯著效果。

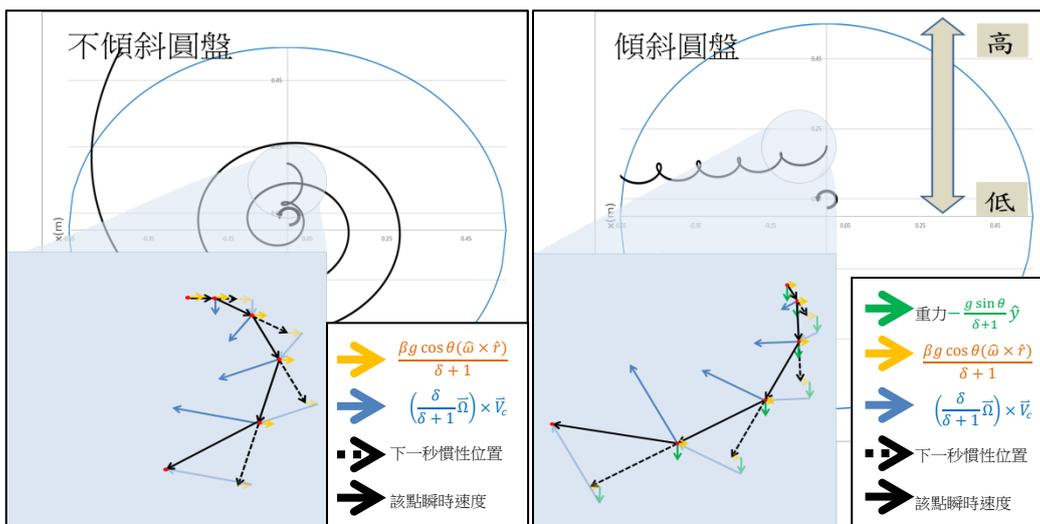
①⑤處的  $\frac{\beta g}{\delta+1}(\hat{\omega} \times \hat{r})$  則恰在切線方向，不影響原討論之  $R$ 。故考慮僅使原趨勢放大，並不影響相對大小關係。

For case 3 傾斜平台[實驗三]： $(\theta \neq 0, \beta \neq 0, x(0) = 0, y(0) = 0.2, V_x(0) = 0,$

$$V_y(0) = 0, \omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r} = -149.839, \omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r} = 0)$$

$$\vec{a}_c = \frac{\beta g \cos \theta (\hat{\omega} \times \hat{r})}{\delta + 1} + \left( \frac{\delta}{\delta + 1} \vec{\Omega} \right) \times \vec{V}_c - \frac{g \sin \theta}{\delta + 1} \hat{y}$$

比 case2 多了一個  $-\frac{g \sin \theta}{\delta + 1} \hat{y}$ ，此項最終導致向-y 傾斜的盤，卻使球向-x 進動。



圖十三 case2 力圖分析(不傾斜圓盤)

圖十四 case3 力圖分析(傾斜圓盤)

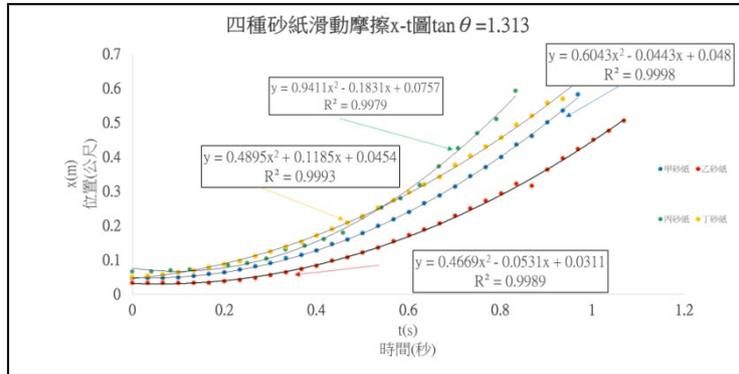
### (三)實驗步驟

1. 設定好平台傾斜度等物理量，將球以準靜態置放於轉動平台的對應位置上。
2. 待鋼球脫落圓盤即停止。
3. 重複 1.與 2.利用不同砂紙、盤轉速、釋放半徑、轉動慣量釋放鋼球。
4. 將鋼球運動軌跡影片輸入 tracker 進行運動分析，以圓心為原點，設定一對互相垂直 x、y 軸，測量鋼球運動的軌跡圖 (x-y 圖) 及位置-時間 關係圖 (x-t 圖)。

## 伍、 研究結果與討論

### 一、 實驗前置作業

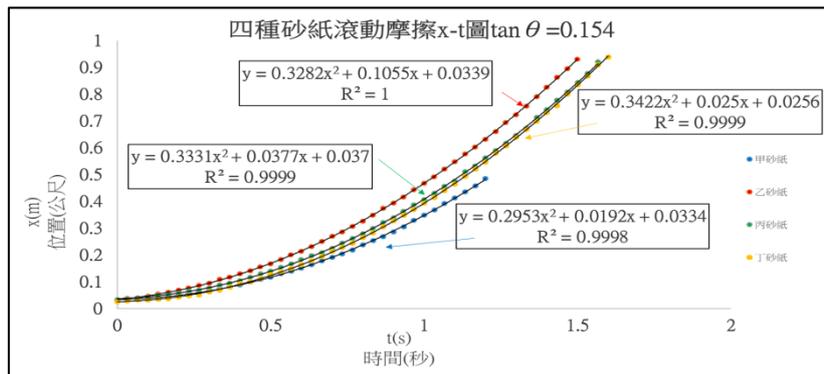
#### (一) 滑動摩擦係數 $\mu_k$ 的測量



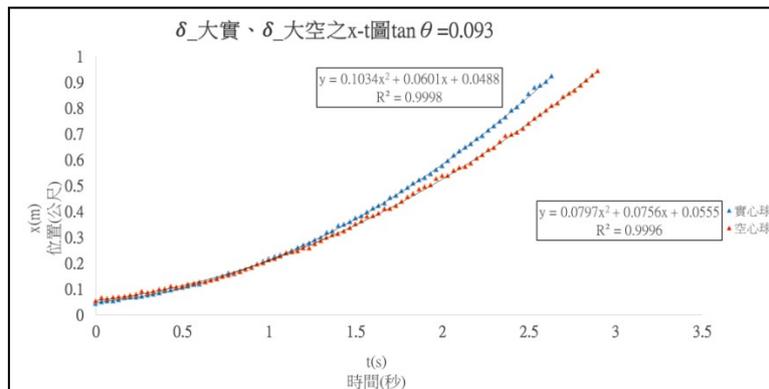
圖十五 四種砂紙滑動摩擦位置與時間關係圖  $\tan \theta = 1.313$

圖十五 吻合實驗數據的多項式函數曲線之 $R^2$ 值近似於 1，此僅有些許誤差的滑動摩擦將用於實驗一、二、三的驗證。

#### (二) 滾動摩擦係數 $\beta$ 及標準化轉動慣量 $\delta$ 的測量



圖十六 四種砂紙滾動摩擦位置與時間關係圖  $\tan \theta = 0.154$

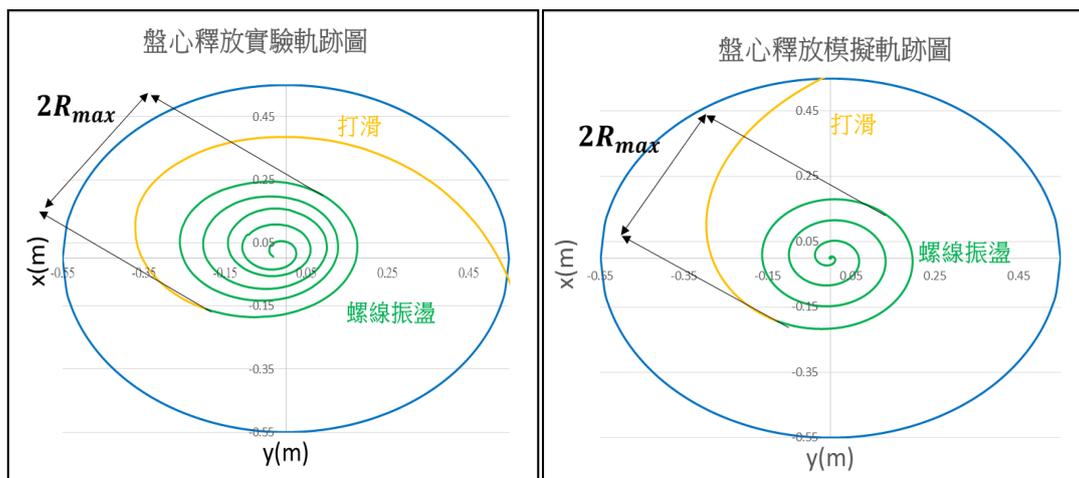


圖十七  $\delta_{大實}$ 、 $\delta_{大空}$ 之位置與時間關係圖  $\tan \theta = 0.093$

圖十六、十七 吻合實驗數據的多項式函數曲線之 $R^2$ 值近似於 1，此僅有些許誤差的滾動摩擦、轉動慣量將用於實驗一、二、三的驗證。

## 二、 實驗一：球體於轉盤圓心準靜態釋放

### (一) 軌跡圖實驗 VS 模擬

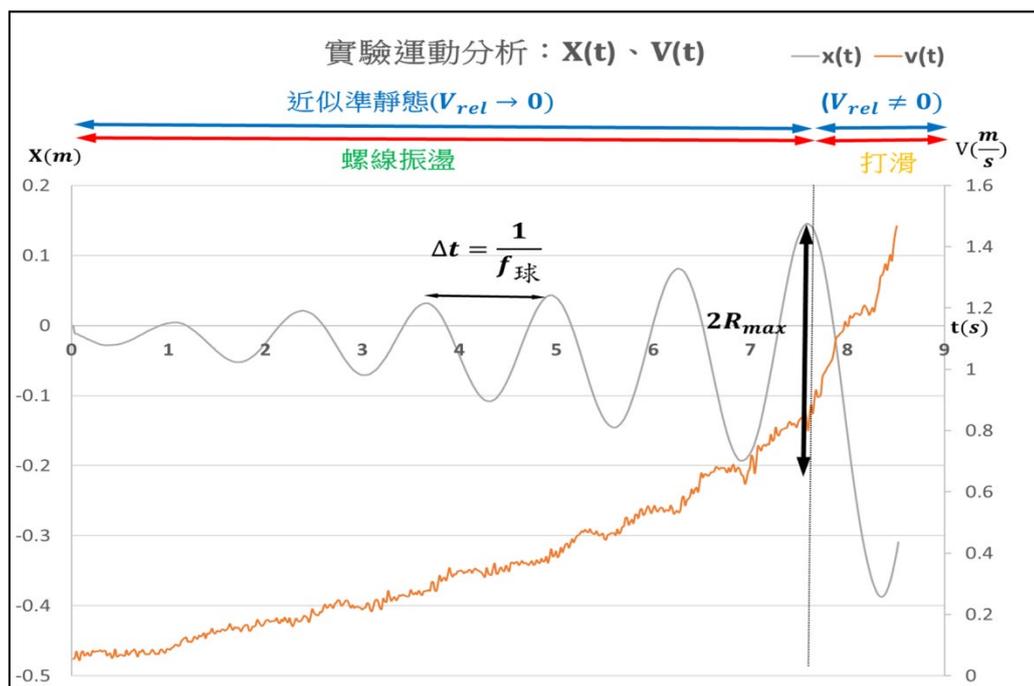


圖十八 盤心準靜態釋放軌跡圖 實驗數據(甲砂紙, 中空,  $f_{\text{盤}} = 136$  轉/分)

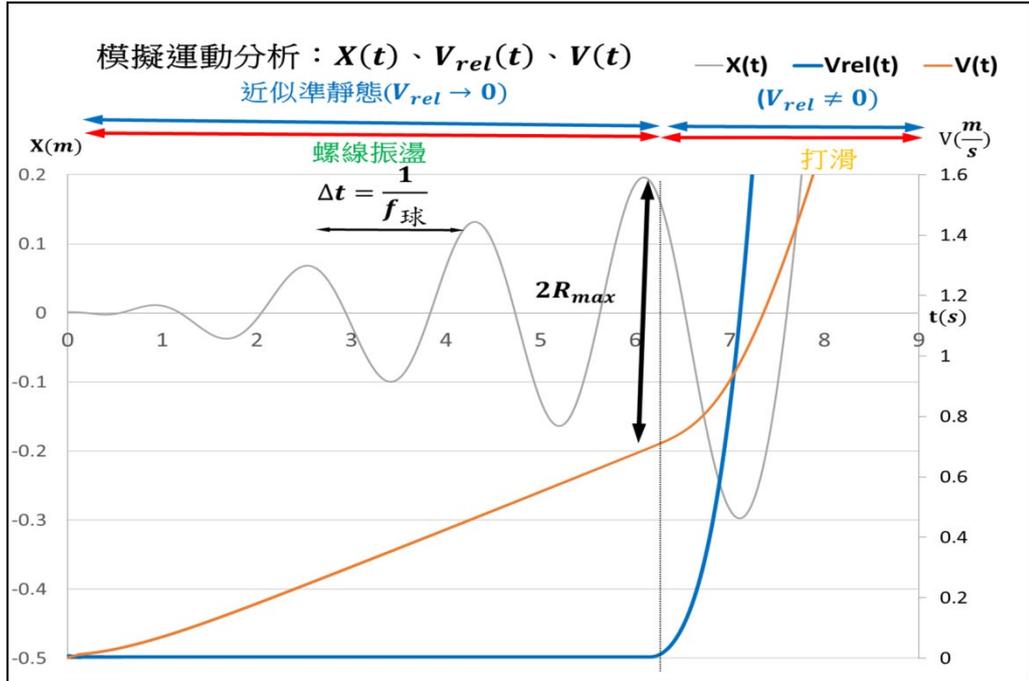
圖十九 盤心準靜態釋放模擬圖

由圖十八 可以看到軌跡呈現出兩個階段，先呈現螺線振盪向外，接著進入打滑階段。

### (二) 運動分析實驗 VS 模擬



圖二十 中心準靜態釋放實驗運動分析



圖二十一 中心準靜態釋放模擬運動分析

比較圖二十、二十一，由  $V(t)$  中，可看出運動分為兩個階段，先呈現螺線振盪向外，接著進入打滑階段，與軌跡圖可互相參照。

模擬圖中  $V_{rel}(t)$  可發現在螺線振盪階段近似 0，進入打滑階段時陡增。說明我們可用準靜態近似條件理論來分析螺線振盪運動階段。

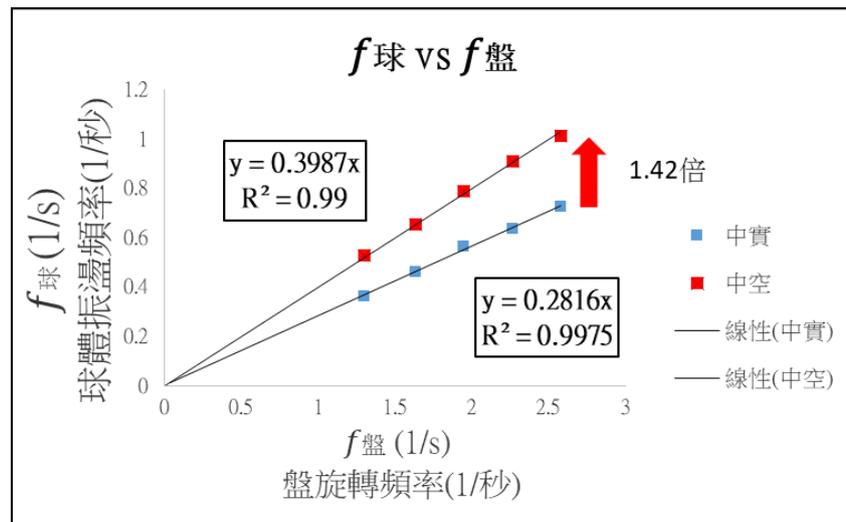
由  $X(t)$  中，發現在同一條件下的實驗和模擬運動分析圖，振盪頻率約為定值，且在實驗與模擬的振盪頻率相當接近。我們在後續實驗中利用準靜態近似條件理論原理的  $f_{球} = f_{盤} \frac{\delta}{\delta + 1}$  與實驗結果對照，驗證其解釋力。

將以準靜態近似條件理論原理的  $R_{max} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{盤}^2} \left(\frac{\delta + 1}{\delta}\right)^2$  作為  $R_{max}$  的理論值，

並與實驗結果對照。

模擬圖中的  $V(t)$  和實驗圖大致吻合，可以發現，進入打滑階段時  $V(t)$  陡增。實驗中我們除了以軌跡圖來判斷  $R_{max}$  外，也利用  $V(t)$  陡增的條件協助判斷。

(三)  $f_{球}$  與  $f_{盤}$  之關係

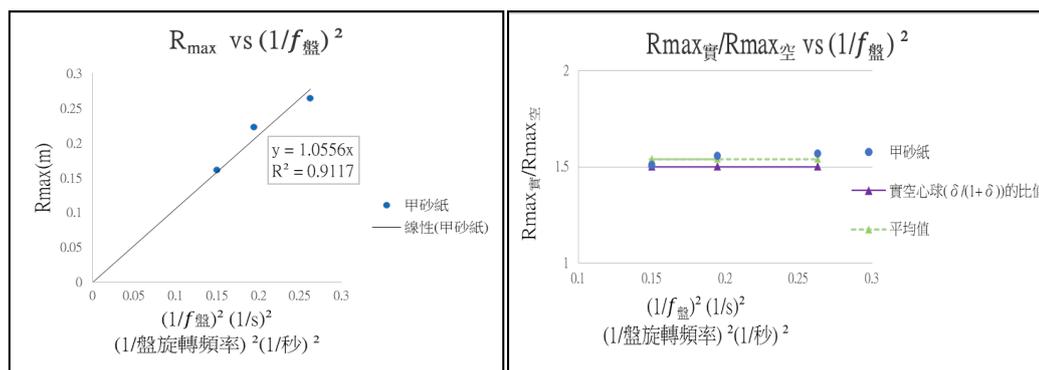


圖二十二 砂紙  $f_{球}$  與  $f_{盤}$  之關係

$f_{球}$  與  $f_{盤}$  皆是在螺線振盪階段下擷取，由圖二十二實驗結果顯示不論空心或實心球的螺線振盪頻率  $f_{球}$  均與盤轉動頻率  $f_{盤}$  成正比，此結果與理論，

$f_{球} = \frac{\delta}{\delta+1} f_{盤}$  吻合。圖中呈現出空心球的斜率較實心球大 1.42 倍，而  $\frac{\delta}{\delta+1}$  的理論值為 1.57 倍，誤差值僅為 9%，此結果亦與上述理論吻合，證實準靜態模型在此實驗中具解釋力。

#### (四) $R_{max}$ 之探討



圖二十三  $R_{max\text{實}}/R_{max\text{空}}$  與  $(1/f_{\text{盤}})^2$  之關係

圖二十四 甲砂紙 ( $\mu_k = 1.1$ ) 不同轉速下  $R_{max}$  與  $(1/f_{\text{盤}})^2$  的關係

將實驗結果與理論  $R_{max} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{\text{盤}}^2} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$  對照。

由圖二十三，發現固定球的轉動慣量、砂紙摩擦係數，改變平台轉速，轉速越快則  $R_{max}$  越小。實驗結果吻合  $R_{max}$  與  $\frac{1}{f_{\text{盤}}^2}$  成正比的理論預測。

由圖二十四，固定砂紙摩擦係數、盤轉速。發現實心鋼球較空心鋼球有較大的  $R_{max}$ ，其比值有  $\frac{R_{max\text{實}}}{R_{max\text{空}}} = 1.54$  的關係。且此比值在不同的轉速、不同砂紙的情況下均為此定值。

根據理論  $\frac{R_{max\text{實}}}{R_{max\text{空}}} = \frac{(\frac{\delta_{\text{實}}+1}{\delta_{\text{實}}})^2}{(\frac{\delta_{\text{空}}+1}{\delta_{\text{空}}})^2}$  可見此比值僅與轉動慣量有關，

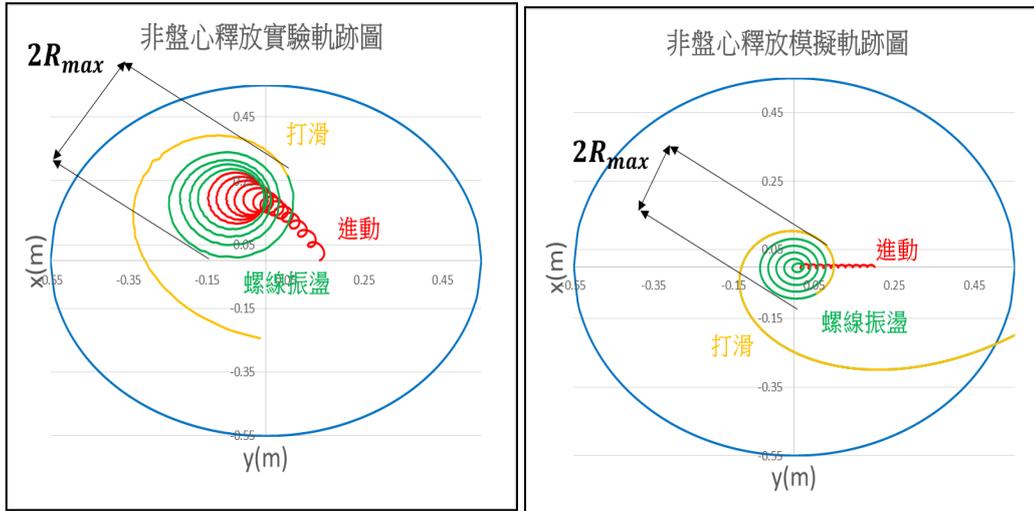
與盤轉速或砂紙種類無關，實驗結果呼應理論。

根據我們先前測定的轉動慣量值，發現  $\frac{(\frac{\delta_{\text{實}}+1}{\delta_{\text{實}}})^2}{(\frac{\delta_{\text{空}}+1}{\delta_{\text{空}}})^2}$  為 1.5，而  $\frac{(\frac{\delta_{\text{實}}+1}{\delta_{\text{實}}})^2}{(\frac{\delta_{\text{空}}+1}{\delta_{\text{空}}})^2}$  為 2.25，此處顯

示可能我們測定轉動慣量或  $R_{max}$  的絕對值可能有誤差，但基本趨勢即實心球  $R_{max}$  較空心球大、其比值僅和轉動慣量有關此一結果仍證實理論具解釋力。

### 三、 實驗二:球體距圓心 20 公分準靜態釋放

#### (一) 軌跡圖實驗 VS 模擬

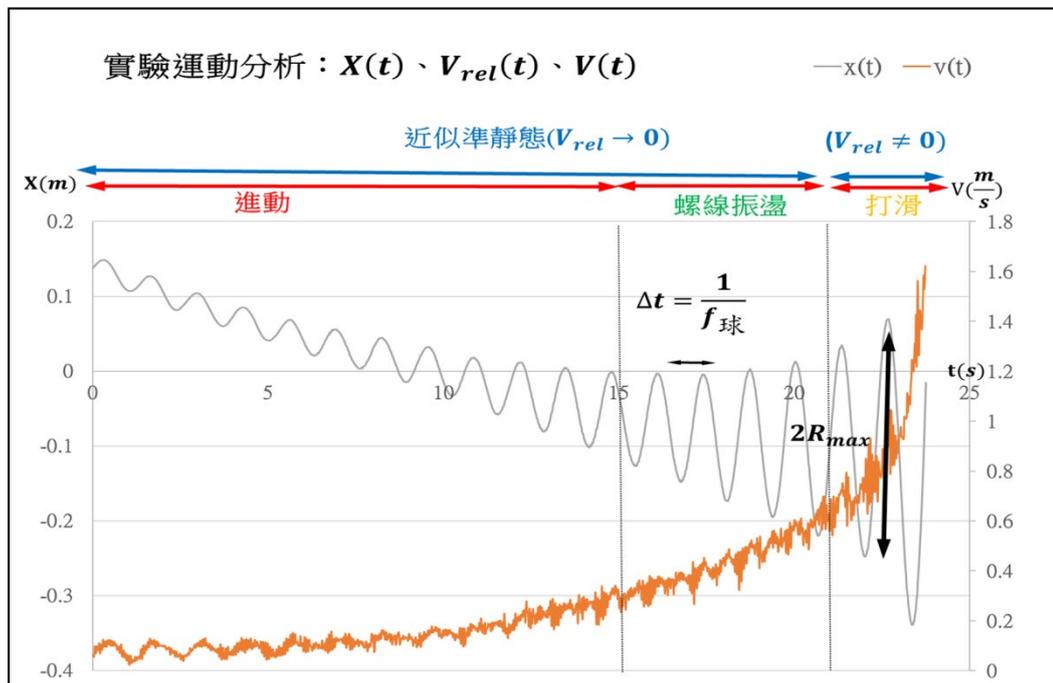


圖二十五 非盤心準靜態釋放軌跡圖(丁砂紙, 大空,  $f_{\text{盤}} = 117$  轉/分)

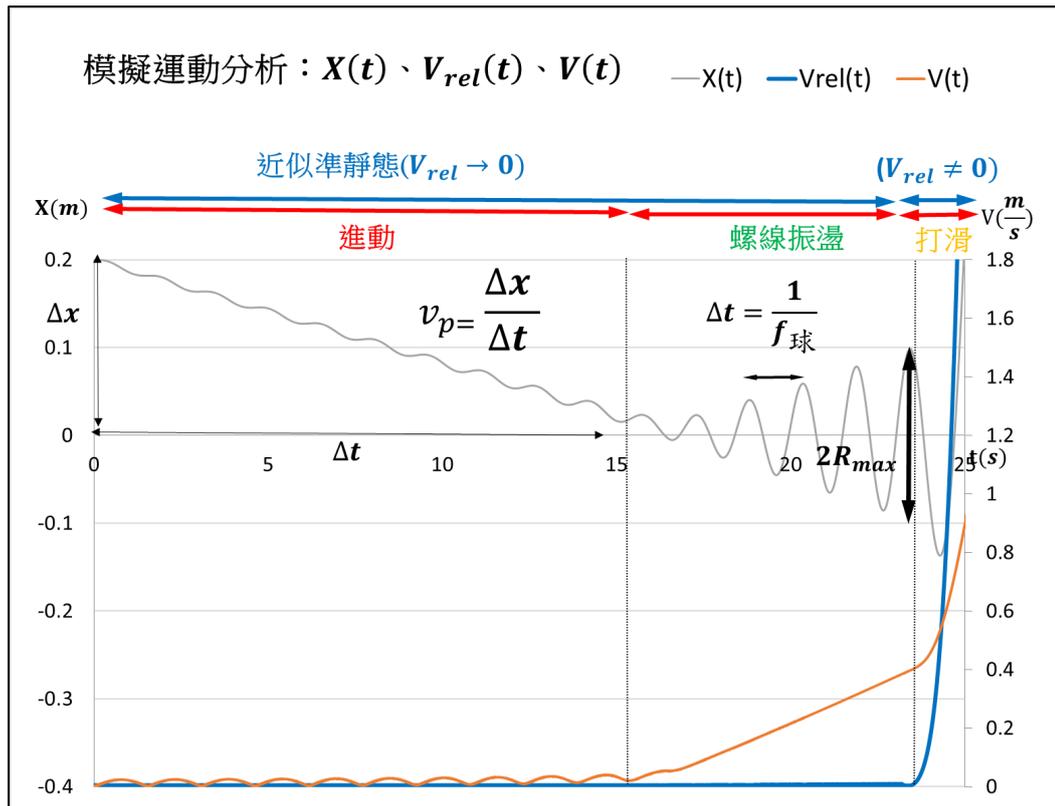
圖二十六 非盤心準靜態釋放模擬圖

由圖二十五可以看到軌跡呈現明顯的三個階段,第一階段進動向盤心靠攏,稱為進動, 第二階段螺線振盪向外, 第三階段打滑。螺線振盪階段、打滑階段與實驗一相似。

#### (二) 運動分析實驗 VS 模擬



圖二十七 非盤心準靜態釋放實驗運動分析



圖二十八 非盤心準靜態釋放模擬運動分析

模擬圖中 $V_{rel}(t)$ 可發現在進動階段及螺線振盪階均近似 0，進入打滑階段時陡增。說明我們可用準靜態近似條件理論來分析進動及螺線振盪的運動階段。

由  $X(t)$  中，發現在同一條件下的實驗和模擬運動分析圖，振盪頻率約為定值，且在實驗與模擬的振盪頻率相當接近。我們在後續實驗中利用準靜態近似

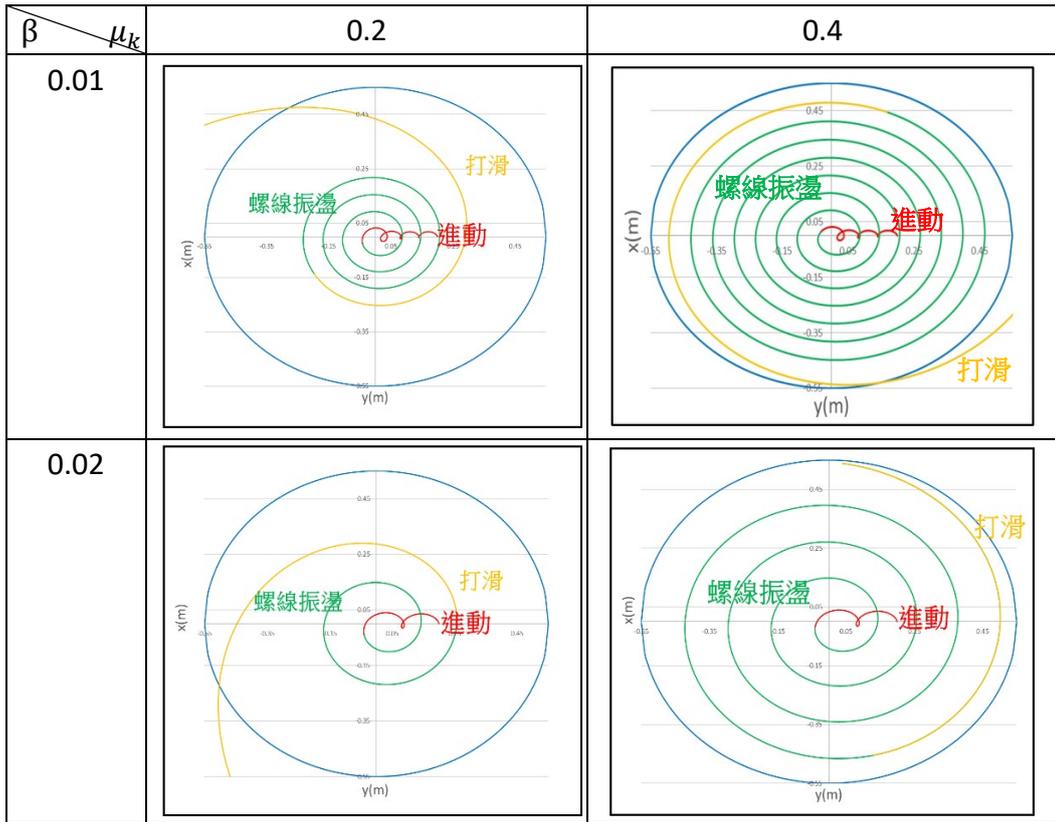
條件理論原理的  $f_{球} = f_{盤} \frac{\delta}{\delta+1}$  與實驗結果對照，驗證其解釋力。

將以準靜態近似條件理論原理的  $R_{max} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{盤}^2} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$  作為  $R_{max}$  的理論值，

並與實驗結果對照。

模擬圖中的  $V(t)$  和實驗圖大致吻合，可以發現，進入打滑階段時  $V(t)$  陡增。實驗中我們除了以軌跡圖來判斷  $R_{max}$  外，也利用  $V(t)$  陡增的條件協助判斷。經各種條件下的模擬發現在進動階段中，向盤心靠攏的進動速率為一定值  $v_p$  將用模擬與實驗結果，驗證此結果。

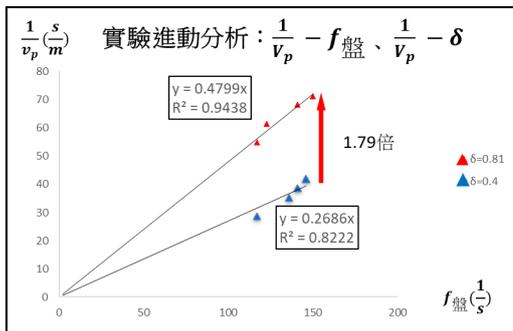
(三) 滾動摩擦係數、滑動摩擦係數對運動的影響、進動分析



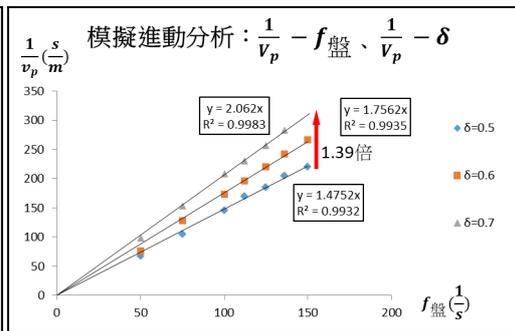
圖二十九 比較不同係數 $\mu_k$ 與 $\beta$ 下進動速度以及 $R_{max}$ 之關係

由圖二十九，滑動滾動摩擦的數值模擬發現，調整滑動摩擦係數 $\mu_k$ 與滾動摩擦係數 $\beta$ ，可發現二者對軌跡有不同影響：

當 $\beta$ 固定時，發現 $R_{max}$ 與 $\mu_k$ 成正比，是因為 $\mu_k$ 越大能夠提供更大的摩擦力作為向心力，延遲打滑的時間與提升最大半徑，此點在後面的實驗可驗證。當 $\mu_k$ 固定時， $\beta$ 越大，向盤心靠攏的進動越快速，且其原因可參考原理的力學分析，以上為定性分析，接下來探討進動速度與 $\beta$ 之間的定量分析。



圖三十 實驗進動分析

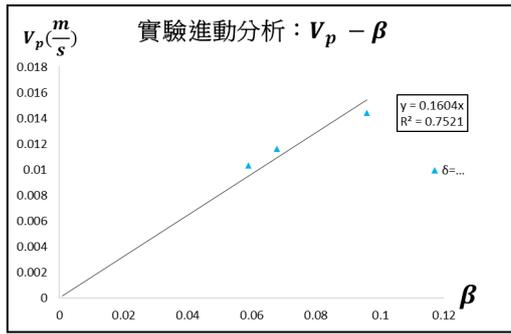


圖三十一 模擬進動分析

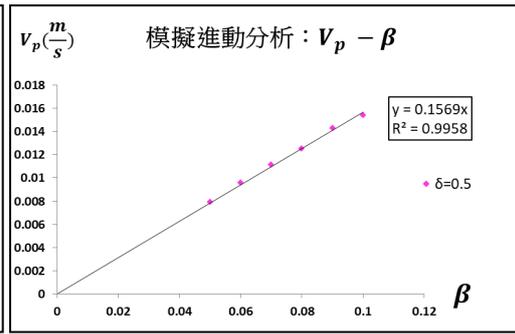
其他條件固定之情況下，如圖三十實驗圖，改變轉速測量得空心球的振盪頻率較實心球高出約 1.79 倍，而根據實驗中的測量值 2.02，其誤差僅約 10%，由圖三十一模擬圖得誤差為 0.7%，可知不論是實驗或是模擬，球進動速度和盤的旋轉頻率成反比，並且和球的轉動慣量成反比。吻合

$$V_p \propto \frac{\beta}{\delta f_{\text{盤}}}$$

測。



圖三十二 實驗進動分析

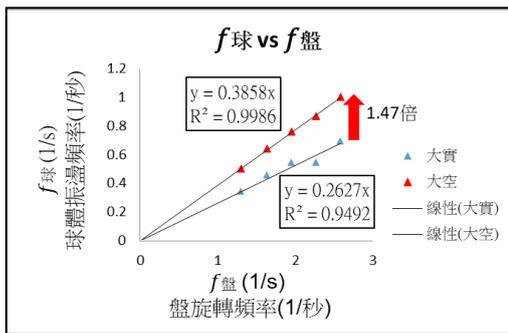


圖三十三 模擬進動分析

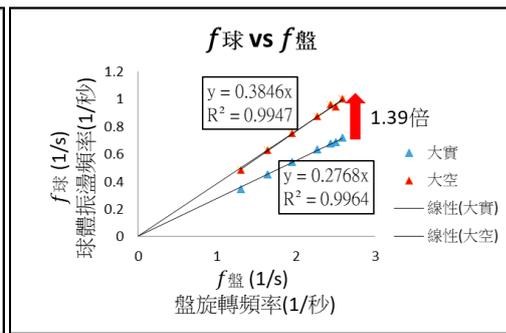
比較圖三十二、三十三，不論是實驗或是模擬，當其他條件固定時，球進動速率正比於滾動摩擦係數，與圖二十九定性分析吻合，也吻合定量關係

$$V_p \propto \frac{\beta}{\delta f_{\text{盤}}}$$

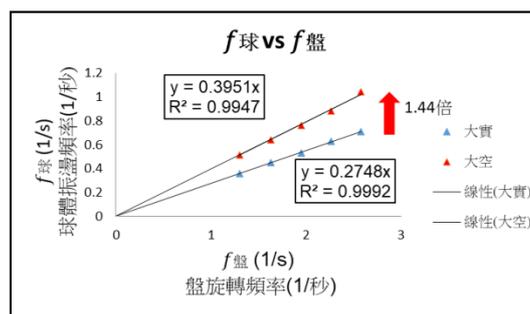
(四)  $f_{\text{球}}$  與  $f_{\text{盤}}$  之關係



圖三十四 甲砂紙  $f_{\text{球}}$  與  $f_{\text{盤}}$  之關係



圖三十五 丙砂紙  $f_{\text{球}}$  與  $f_{\text{盤}}$  之關係



圖三十六 丁砂紙  $f_{\text{球}}$  與  $f_{\text{盤}}$  之關係

由圖三十四、三十五、三十六， $f_{\text{球}}$  與  $f_{\text{盤}}$  皆是在準靜態階段下擷取，依

$$f_{\text{球}} = f_{\text{盤}} \frac{\delta}{\delta + 1}$$

在不同的砂紙上  $f_{\text{球}}$  均應正比於  $f_{\text{盤}}$ ，且其比值應和球之轉動慣

量有  $\frac{f_{球}}{f_{盤}} = \frac{\delta}{\delta + 1}$  的關係。實驗結果呼應此理論：在不同砂紙的實驗中，均發

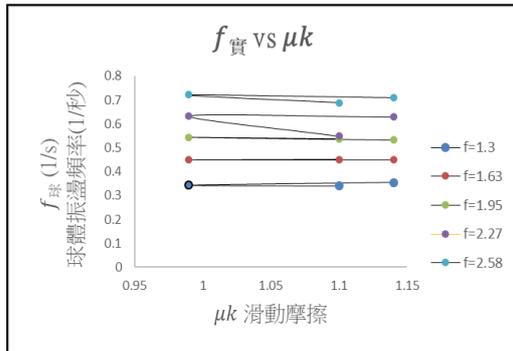
現球的振盪頻率與盤的旋轉頻率成正比；且在固定砂紙、固定盤轉速的情況下，空心球的振盪頻率較實心球高出約 1.43 倍，而根據實驗中的測量值

$$\frac{\frac{\delta_{空}}{\delta_{空} + 1}}{\frac{\delta_{實}}{\delta_{實} + 1}} = 1.56$$

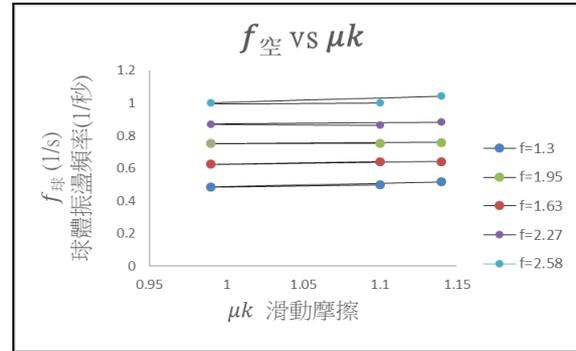
，其誤差僅約 9%，證實對於進動階段及螺線振盪階段部分，仍

可利用準靜態近似來求出解析解。

### (五) $f_{球}$ 與 $\mu_k$ 之關係



圖三十七 實心球在不同轉速下  $f_{球}$  與  $\mu_k$  之關係

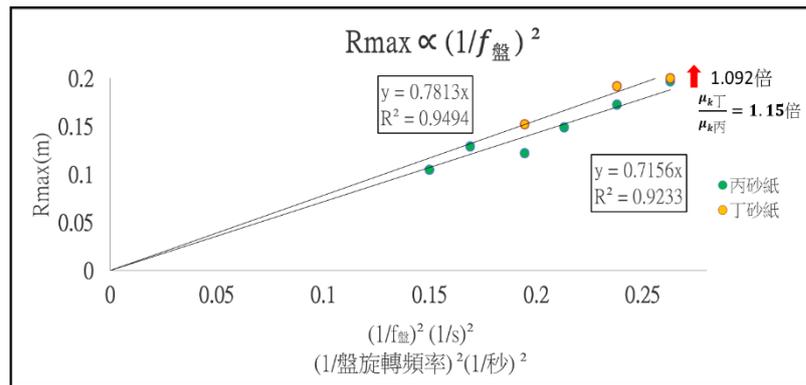


圖三十八 空心球在不同轉速下  $f_{球}$  與  $\mu_k$  之關係

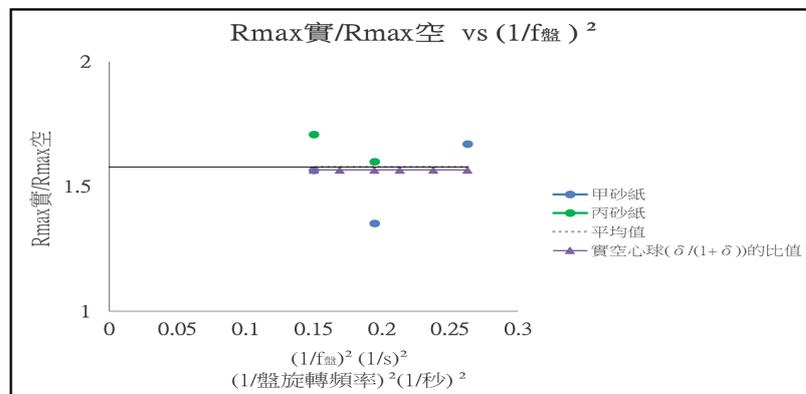
觀察  $f_{球}$  與  $\mu_k$  關係，由圖三十七、三十八在不同轉速下的實驗結果顯示，不論高

轉速或低轉速， $f_{球}$  均與  $\mu_k$  無關，而與原理顯示的  $f_{球} = f_{盤} \frac{\delta}{\delta + 1}$  吻合。

(六) $R_{max}$ 之探討



圖三十九 丙砂紙( $\mu_k = 0.9$ )與丁砂紙( $\mu_k = 1.14$ )不同轉速下 $\frac{R_{max實}}{R_{max空}}$ 與 $(1/f_{盤})^2$ 的關係



圖四十  $\frac{R_{max實}}{R_{max空}}$ 與 $(1/f_{盤})^2$ 之關係

$R_{max}$ 是由準靜態過渡到打滑的臨界狀態,理論值  $R_{max} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{盤}^2} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$

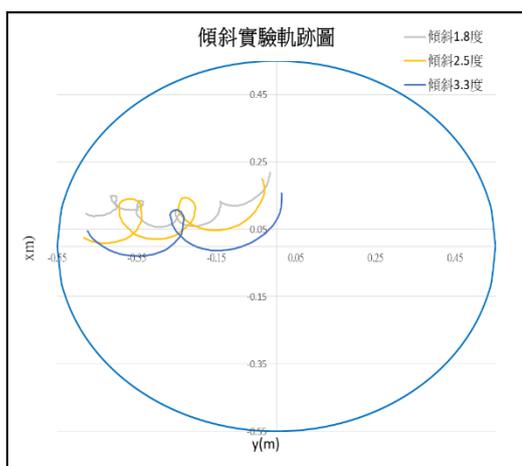
圖三十九,使用甲砂紙測量不同轉速下之 $R_{max}$ ,實驗結果即 $R_{max}$ 與 $(1/f_{盤})^2$ 成正比,與理論吻合。且由圖三十九,丁砂紙斜率除以丙砂紙斜率約為 1.092 與  $\frac{\mu_{k丁}}{\mu_{k丙}} = 1.15$ ,可說明 $R_{max}$ 與 $\mu_k$ 成正比。

圖四十使用甲砂紙與丙砂紙測量不同轉速下之 $R_{max實}/R_{max空}$ 實驗值為 1.58 且

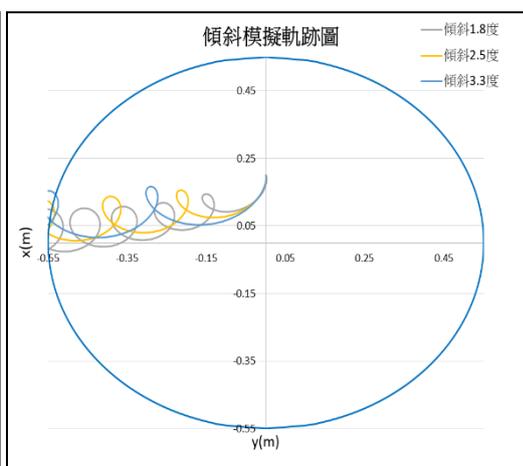
$\left(\frac{\delta_{實心球}+1}{\delta_{實心球}} / \frac{\delta_{空心球}+1}{\delta_{空心球}}\right)$ 理論值為 1.59,  $R_{max}$ 正比於 $\left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)$ ,與公式不吻合,但仍可看出具有相同趨勢,實心球較空心球有較大最大半徑。

#### 四、 實驗三:球體距圓心 20 公分準靜態釋放於傾斜轉盤

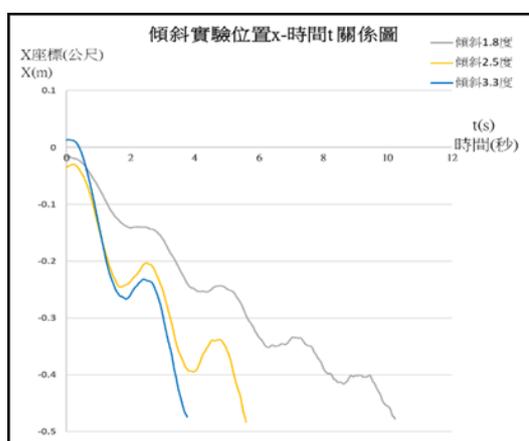
##### (一)傾角軌跡分析、運動分析 實驗 vs 模擬



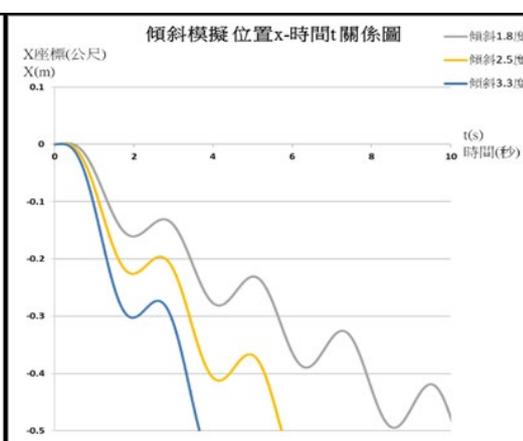
圖四十一 傾斜盤面實驗軌跡圖



圖四十二 傾斜盤面模擬軌跡圖



圖四十三 傾斜盤面實驗位置與時間關係圖



圖四十四 傾斜盤面模擬位置與時間關係圖

比對圖四十一、四十二與四十三、四十四實驗結果與滑動滾動摩擦模擬，發現高度一致性，證實研究中所提出的滑動滾動摩擦模型對於解釋、預測鋼球在旋轉平台上的運動而言是適切的模型。

且由圖四十三、四十四中實驗結果、模擬圖中均發現下列規則：

傾斜角度	震盪次數	震盪時間間隔
1.8 度	5	2、2.5、2.4、1.77、1.57
2.5 度	3	1.7、2.17、1.73
3.3 度	2	1.87、1.9

說明傾斜角度越大，球體振盪次數越小，且每次振盪時間間隔有逐漸減少趨勢。

## 陸、 結論

- 一、 由實驗發現，球體在旋轉平台上的運動，可以分為三階段：進動、螺線振盪、打滑。
- 二、 由盤心釋放的實驗中，以下數個實驗結果均與準靜態理論相符： $f_{球}$ 與 $f_{盤}$ 成正比、 $f_{球}$ 與 $\frac{\delta}{\delta+1}$ 成正比，且 $f_{球}$ 與 $\mu_k$ 無關。 $R_{max}$ 與 $(1/f_{盤})^2$ 成正比、 $R_{max}$ 與 $\frac{\delta+1}{\delta}$ 成正比。
- 三、 由非盤心釋放的實驗中，以下數個實驗結果與準靜態理論相符： $f_{球}$ 與 $f_{盤}$ 成正比、 $f_{球}$ 與 $\frac{\delta}{\delta+1}$ 成正比，且 $f_{球}$ 與 $\mu_k$ 無關。 $R_{max}$ 與 $(1/f_{盤})^2$ 成正比、 $R_{max}$ 與 $\frac{\delta+1}{\delta}$ 成正比、 $R_{max}$ 與 $\mu_k$ 成正比。
- 四、 滑動-滾動摩擦模擬能夠清楚描述進動、螺線振盪、打滑的現象。且由實驗結果及模擬均一致顯示滑動摩擦與滾動摩擦是影響球運動軌跡的關鍵因子：滾動摩擦是球加速的主因，滾動摩擦係數越大，進動速度 $v_p$ 越大；而滑動摩擦會和球打滑前的最大半徑成正比。滑動-滾動摩擦模擬符合實驗結果，具解釋力與預測力。
- 五、 旋轉平台傾斜，並以準靜態方式純滾動釋放，發現球會偏往水平的方向進動，且傾角越大則進動越明顯，時間間隔也越短。此結果與滑動-滾動摩擦模擬相符，證實我們研究提出的模型可應用到新的情境。

## 柒、 展望與應用

### 一、 展望

依據滑動-滾動摩擦模擬，發現 case0 中，若滾動摩擦接近 0，則球會在平台的一側繞一非圓心的定點，做等速率圓周運動，這是非常有趣的現象。若能找到滾動摩擦很小的材料，例如鋼球與鋼盤面或利用乒乓球與 CD 唱盤也許可看見此效果。

### 二、 應用

利用本實驗模擬近地表的氣流運動，如颱風路徑：旋轉平台模擬科氏力，砂紙模擬氣流與地表的摩擦力，傾斜斜面模擬高低氣壓差。

## 捌、 參考資料及其他

一、

*Artjom V. Sokirko , Alexandr A. Belopolskii , Andrei V. Matytsyn , Dmitri A. Kossakowski , Behavior of a ball on the surface of a rotating disk , June 1993*

From <http://www.tyoma.com/plain/science/papers/14/ball.pdf>

二、

*Kyeong Min Kim , Donggeon Oh , Junghwan Lee , Young-Gui Yoon , Chan-Oung Park , Dynamics of Cylindrical and Spherical Objects on a Turntable, April 2018*

From <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01761333/document>

三、

中華民國第四十三屆科學展覽會高中組物理科-滾動運動與滾動摩擦的探討

From <https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040107.pdf>

## 【評語】 051812

本實驗作品探討轉動平台上球體之運動，包括平台轉速對球體運動的影響、球體轉動慣量對運動的影響、平台與球體間的滑動摩擦對球體運動的影響、平台與球體間的滾動摩擦對球體運動的影響以及平台傾斜角度對球體運動的影響。

雖然題材並不非常新穎，但有很多有趣的運動模式，值得深入探討，此研究做了非常完整的實驗及分析，報告清楚，有深入的了解。

# 壹、研究動機

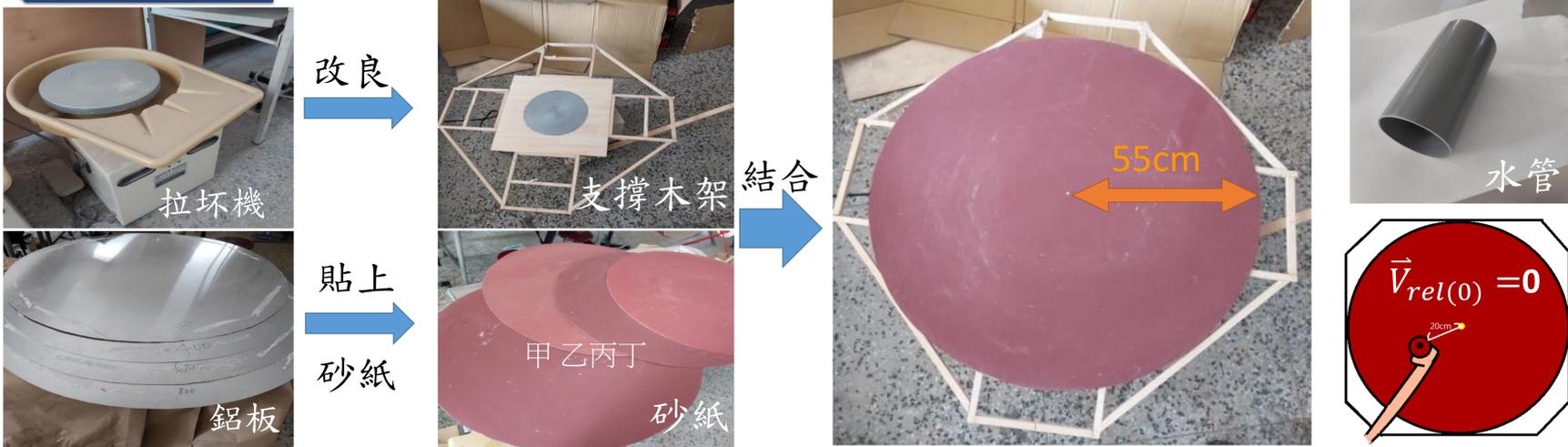
舊金山探索博物館網頁中有一有趣的專欄:球在旋轉的平台上移動時,產生了俯衝與轉彎的運動。球與盤的簡單實驗裝置,可以藉由改變各種微小的因素,表現出如此多變的軌跡,例如:球繞中心轉、球繞圓盤中心外的一個中心旋轉、原地轉動、心臟型曲線、繞中心漸漸向外.....等等。探討這些微小因素帶給軌跡的影響是此篇研究的重點。



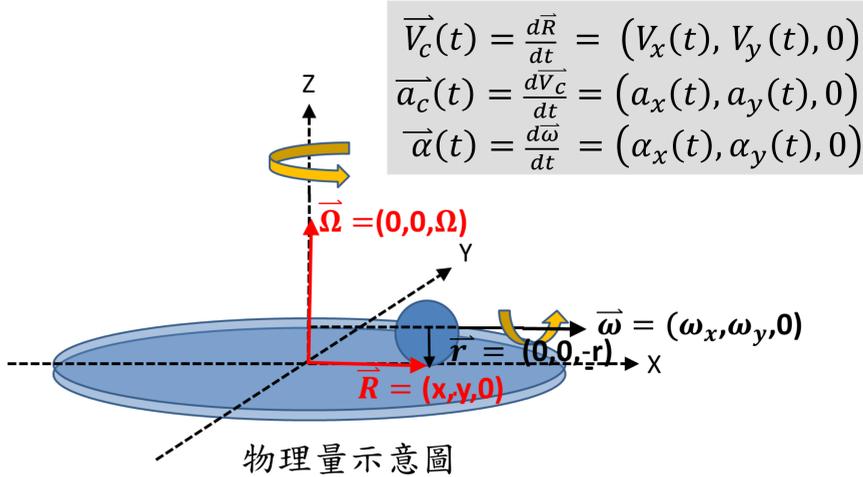
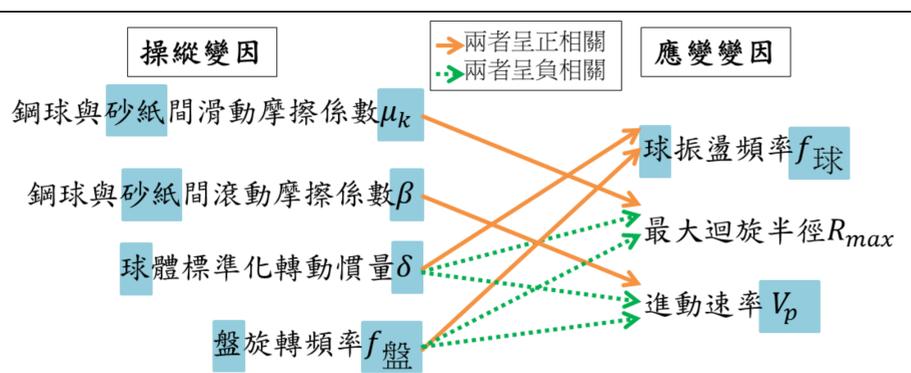
# 貳、研究目的

1. 平台轉速對球體運動的影響
2. 球體轉動慣量對運動的影響
3. 平台與球體間的滑動摩擦對球體運動的影響
4. 平台與球體間的滾動摩擦對球體運動的影響
5. 平台傾斜角度對球體運動的影響

# 參、研究設備



# 肆、研究過程與方法

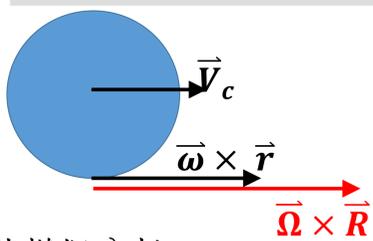


球底與平台接觸點相對速度關係

$$1. \vec{V}_{rel} = (\vec{V}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}) - (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

$$V_{relx}(t) = (V_x(t) - \omega_y(t) \cdot r + \Omega \cdot y(t))$$

$$V_{rely}(t) = (V_y(t) + \omega_x(t) \cdot r - \Omega \cdot x(t))$$



數值模擬分析

造成質心運動的驅動外力

$$2. \vec{F} = mg\mu_k \cos \theta (-\hat{V}_{rel}) + mg \sin \theta (-\hat{y})$$

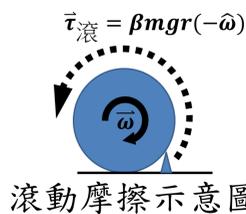
滑動摩擦力      向-y軸傾斜之下滑力

$\beta \ll \mu_k$   
不考慮滾動摩擦造成平移的影響

造成球體自旋的驅動力矩

$$3. \vec{\tau} = \vec{r} \times (mg\mu_k \cos \theta (-\hat{V}_{rel})) + \beta mg \cos \theta r (-\hat{\omega})$$

滑動摩擦力矩      滾動摩擦力矩



## 二維等加速度運動方程式疊代

$$x(n\Delta t) = x((n-1)\Delta t) + V_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t^2$$

$$V_x(n\Delta t) = V_x((n-1)\Delta t) + a_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t$$

$$\omega_x(n\Delta t) = \omega_x((n-1)\Delta t) + \alpha_x((n-1)\Delta t) \cdot \Delta t$$

## Excel 疊代表格示例:

t	x	y	$V_x$	$V_y$	$a_x$	$a_y$	$\omega_x$	$\omega_y$	$\alpha_x$	$\alpha_y$
0	x(0)	y(0)	$V_x(0)$	$V_y(0)$	$a_x(0)$	$a_y(0)$	$\omega_x(0)$	$\omega_y(0)$	$\alpha_x(0)$	$\alpha_y(0)$
$\Delta t$	x( $\Delta t$ )	y( $\Delta t$ )	$V_x(\Delta t)$	$V_y(\Delta t)$	$a_x(\Delta t)$	$a_y(\Delta t)$	$\omega_x(\Delta t)$	$\omega_y(\Delta t)$	$\alpha_x(\Delta t)$	$\alpha_y(\Delta t)$
2 $\Delta t$	x(2 $\Delta t$ )	y(2 $\Delta t$ )	$V_x(2\Delta t)$	$V_y(2\Delta t)$	$a_x(2\Delta t)$	$a_y(2\Delta t)$	$\omega_x(2\Delta t)$	$\omega_y(2\Delta t)$	$\alpha_x(2\Delta t)$	$\alpha_y(2\Delta t)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n $\Delta t$	x(n $\Delta t$ )	y(n $\Delta t$ )	$V_x(n\Delta t)$	$V_y(n\Delta t)$	$a_x(n\Delta t)$	$a_y(n\Delta t)$	$\omega_x(n\Delta t)$	$\omega_y(n\Delta t)$	$\alpha_x(n\Delta t)$	$\alpha_y(n\Delta t)$

$$V_x(0) = V_y(0) = 0$$

$$\because \vec{V}_{rel}(0)=0 \text{ (以準靜態方式釋放)}$$

$$\Rightarrow \omega_x(0) = \frac{V_x - \Omega y}{r} \quad \omega_y(0) = \frac{\Omega x - V_y}{r}$$

## 二維質心運動方程式疊代

$$a_x(n\Delta t) = \frac{-g \cos \theta \mu_k (V_x(n\Delta t) - \omega_y(n\Delta t)r + \Omega y(n\Delta t))}{\sqrt{(V_x(n\Delta t) - \omega_y(n\Delta t)r + \Omega y(n\Delta t))^2 + (V_y(n\Delta t) + \omega_x(n\Delta t)r - \Omega x(n\Delta t))^2}}$$

$$a_y(n\Delta t) = \frac{-g \cos \theta \mu_k (V_y(n\Delta t) + \omega_x(n\Delta t)r - \Omega x(n\Delta t))}{\sqrt{(V_x(n\Delta t) - \omega_y(n\Delta t)r + \Omega y(n\Delta t))^2 + (V_y(n\Delta t) + \omega_x(n\Delta t)r - \Omega x(n\Delta t))^2}} + (-g \sin \theta)$$

## 二維球體自旋轉動方程式疊代

$$\alpha_x(n\Delta t) = \frac{mgr \cos \theta \mu_k \cdot \frac{-(V_y(n\Delta t) + \omega_x(n\Delta t)r - \Omega x(n\Delta t))}{\sqrt{(V_x(n\Delta t) - \omega_y(n\Delta t)r + \Omega y(n\Delta t))^2 + (V_y(n\Delta t) + \omega_x(n\Delta t)r - \Omega x(n\Delta t))^2}} + \beta mg \cos \theta \left( \frac{-\omega_x(n\Delta t)}{\sqrt{(\omega_x(n\Delta t))^2 + (\omega_y(n\Delta t))^2}} \right)}{\delta mr^2}$$

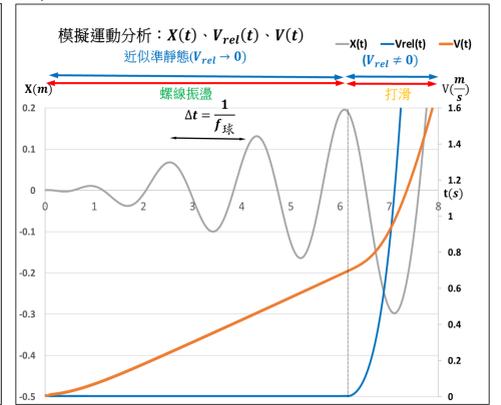
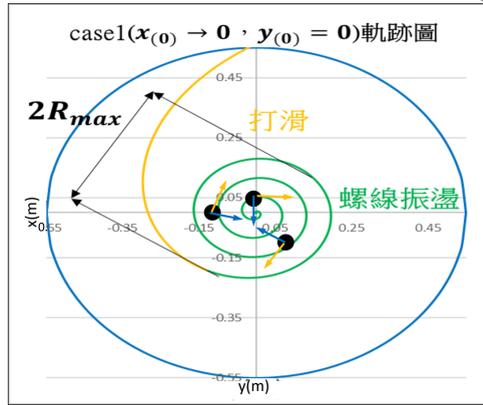
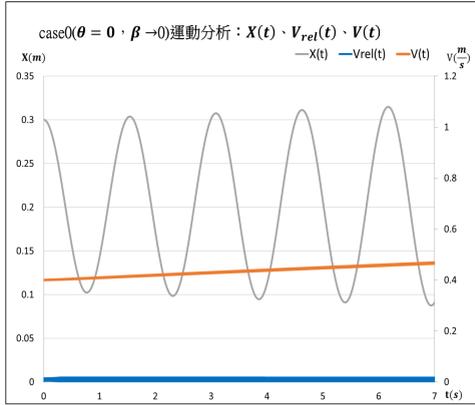
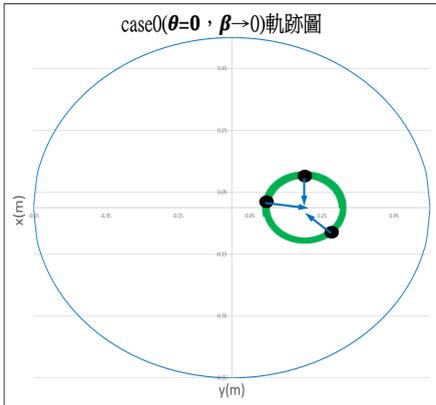
$$\alpha_y(n\Delta t) = \frac{mgr \cos \theta \mu_k \cdot \frac{-(V_x(n\Delta t) - \omega_y(n\Delta t)r + \Omega y(n\Delta t))}{\sqrt{(V_x(n\Delta t) - \omega_y(n\Delta t)r + \Omega y(n\Delta t))^2 + (V_y(n\Delta t) + \omega_x(n\Delta t)r - \Omega x(n\Delta t))^2}} + \beta mg \cos \theta \left( \frac{-\omega_y(n\Delta t)}{\sqrt{(\omega_x(n\Delta t))^2 + (\omega_y(n\Delta t))^2}} \right)}{\delta mr^2}$$

準靜態解析解

設  $\vec{V}_{rel} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = 0$ ，與上頁(1)(2)(3)式合併後，可得質心運動方程式  $\vec{a}_c = \frac{\beta g \cos \theta (\hat{\omega} \times \vec{r})}{(\delta+1)} + \left(\frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega}\right) \times \vec{V}_c - \frac{g \sin \theta}{\delta+1} \hat{y}$

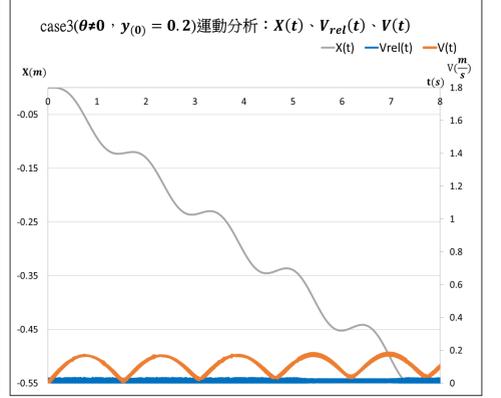
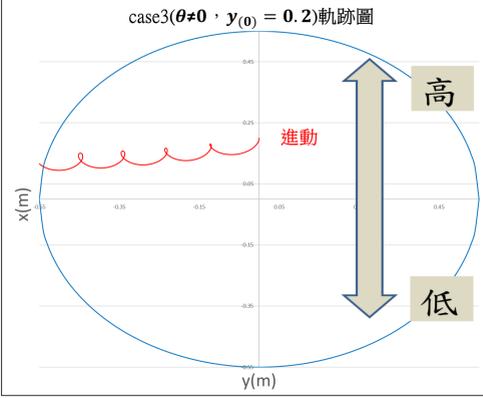
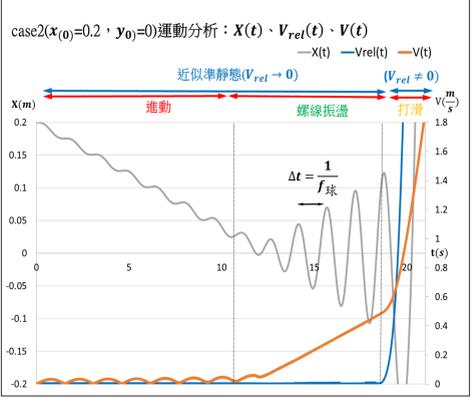
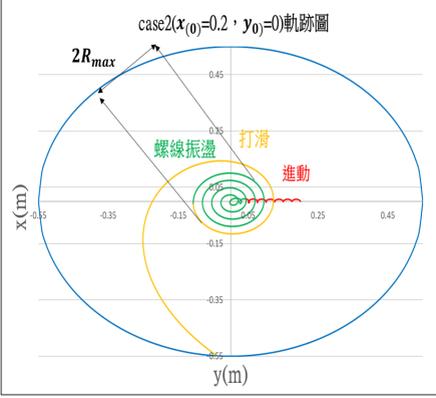
Case0 ( $\beta \rightarrow 0; \theta = 0$ )  $\Rightarrow a_{法} = \left(\frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega}\right) \times \vec{V}_c$

Case1 ( $\theta = 0, \beta \neq 0$ )  $\Rightarrow a_{切} = \frac{\beta g}{(\delta+1)}$   $a_{法} = \left(\frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega}\right) \times \vec{V}_c = \vec{\Omega}' \times \vec{V}_c$



Case2 ( $\theta = 0, \beta \neq 0$ )

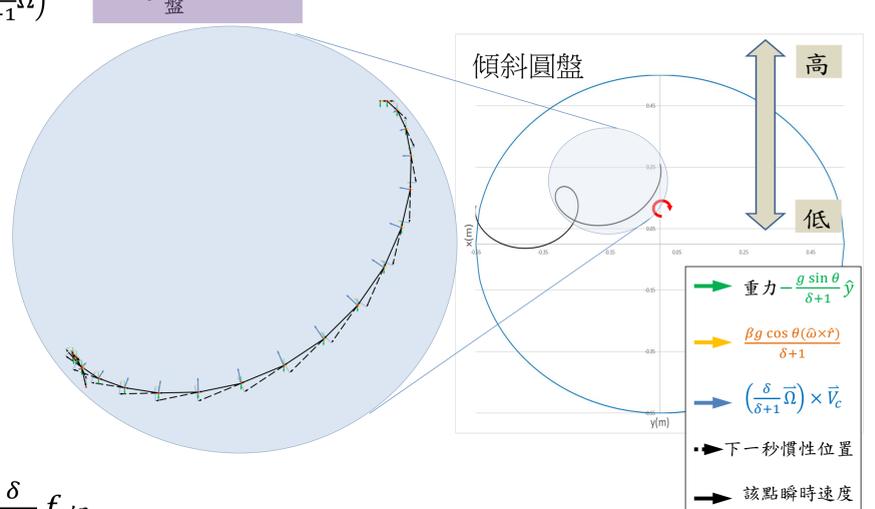
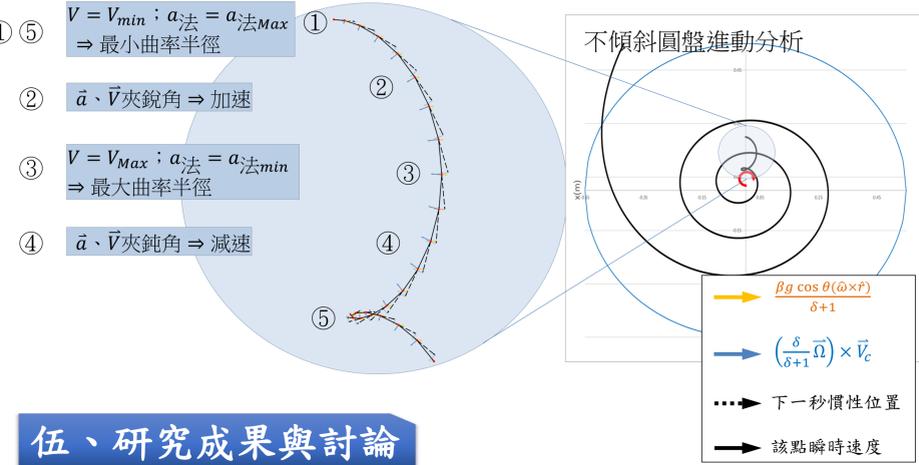
Case3 ( $\theta \neq 0, \beta \neq 0$ )



Case1、Case2共同結論：

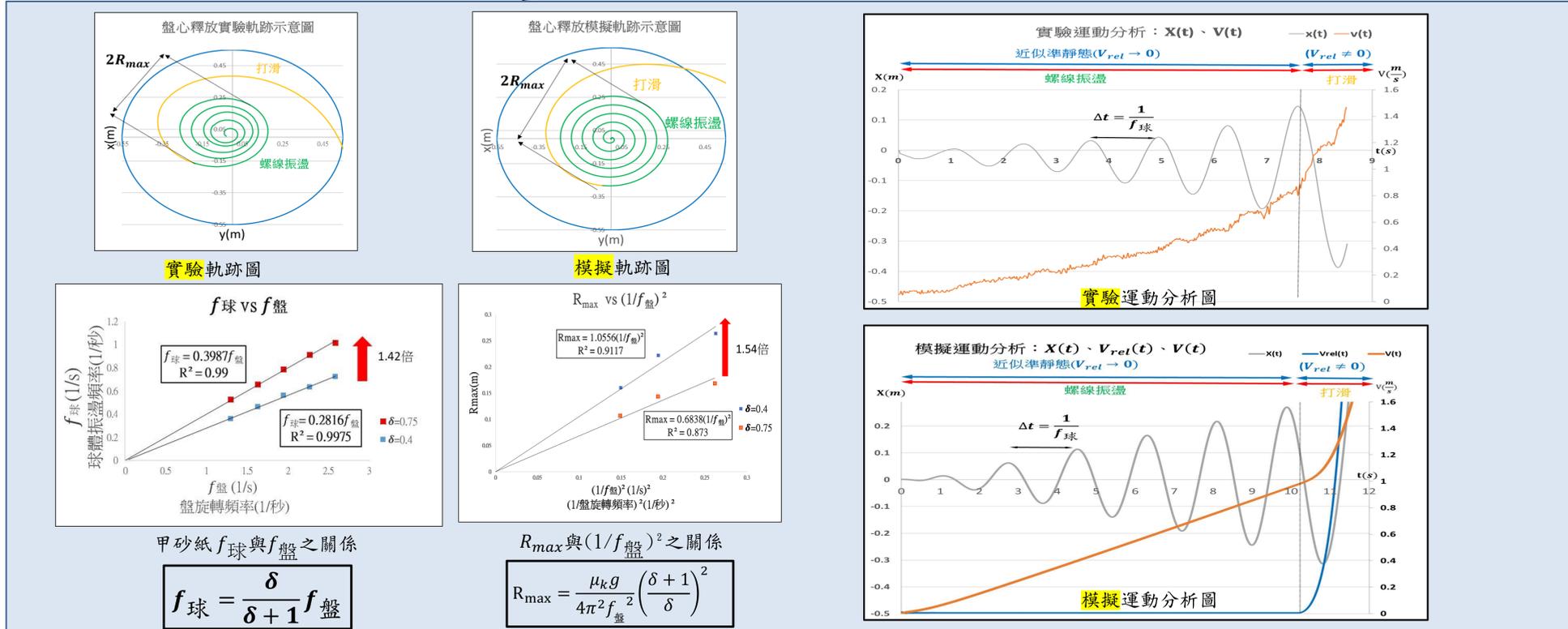
1. 球作迴旋運動的振盪頻率  $\vec{\Omega}' = \left(\frac{\delta}{\delta+1} \vec{\Omega}\right) \Rightarrow f_{球} = \frac{\delta}{\delta+1} f_{盤}$

2. 球作迴旋運動的最大半徑  $a_{法} \leq \mu_k g \Rightarrow R \Omega'^2 \leq \mu_k g \Rightarrow R \leq \frac{\mu_k g}{\left(\frac{\delta}{\delta+1} \Omega\right)^2} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{盤}^2} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$

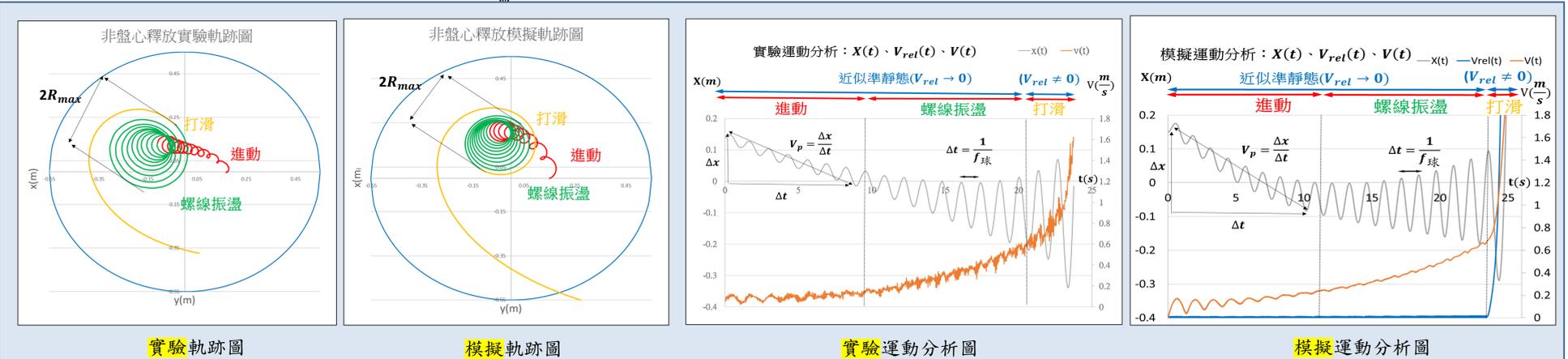


伍、研究成果與討論

Case1(盤心)當  $V_{rel}(t) = 0$  時,  $R_{max} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{盤}^2} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$ , 且  $f_{球} = \frac{\delta}{\delta+1} f_{盤}$

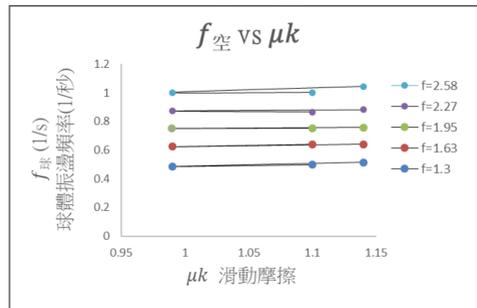
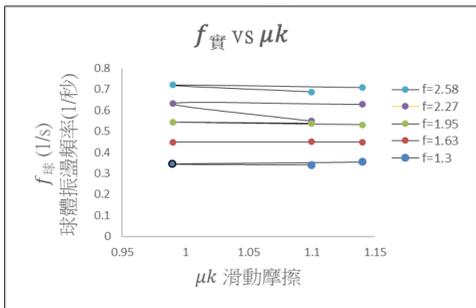
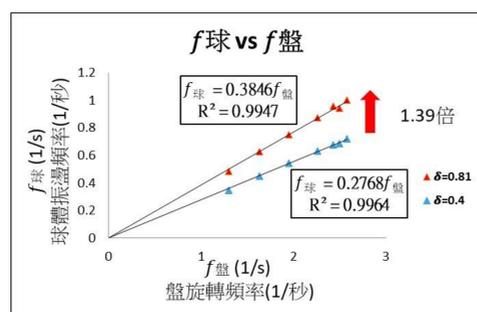
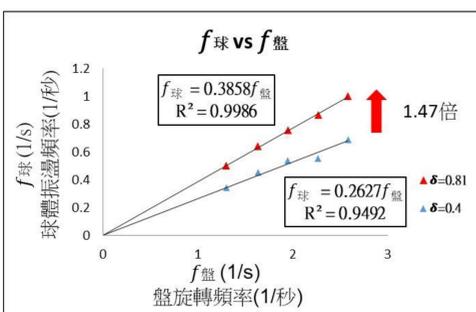


Case2(非盤心)  $V_{rel}(t) = 0$  時  $R_{max} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{盤}^2} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$ , 且  $f_{球} = \frac{\delta}{\delta+1} f_{盤}$ 。另，由模擬發現向盤心靠攏的進動速率  $V_p \propto \frac{\beta}{\delta f_{盤}}$ 。



## 定量分析

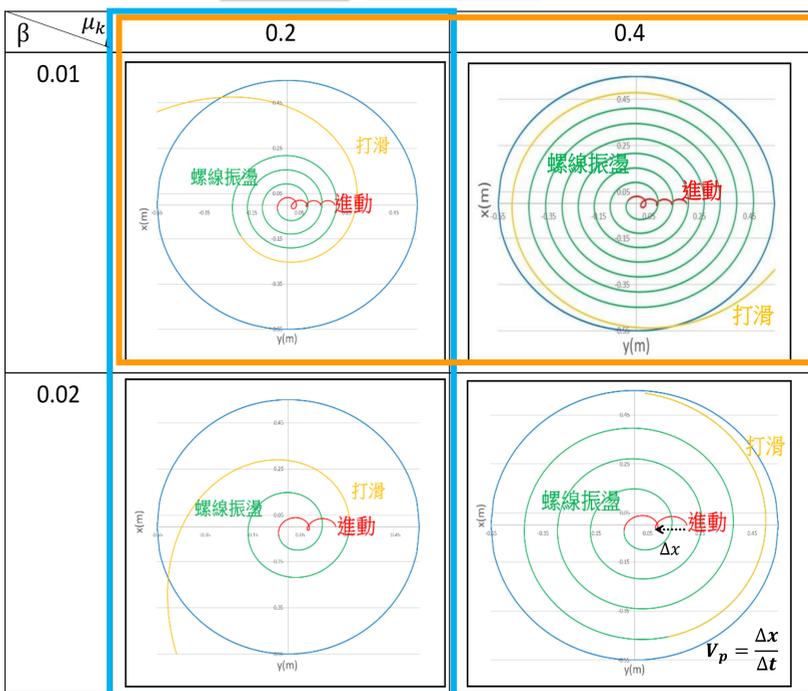
$$f_{\text{球}} = \frac{\delta}{\delta+1} f_{\text{盤}}$$



## 定性分析

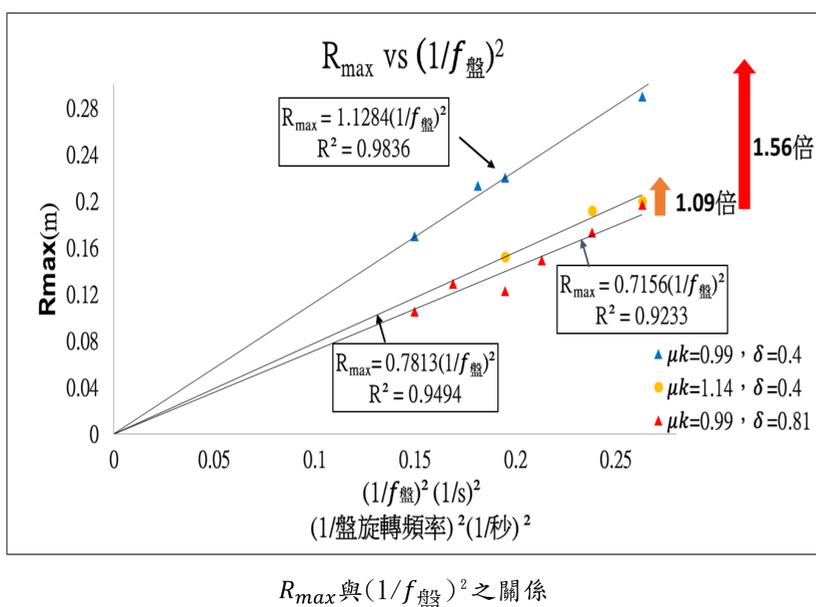
$$V_p \propto \beta$$

$$R_{\text{max}} \propto \mu_k$$



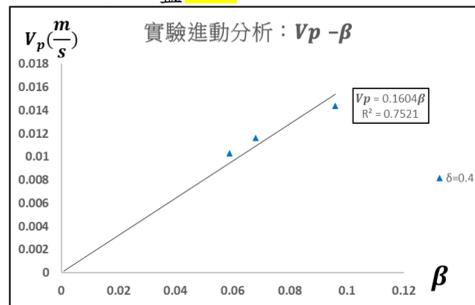
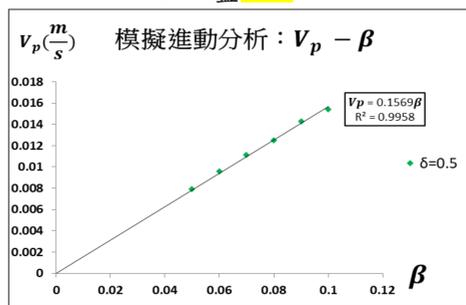
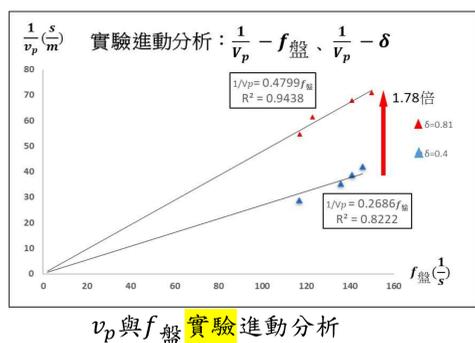
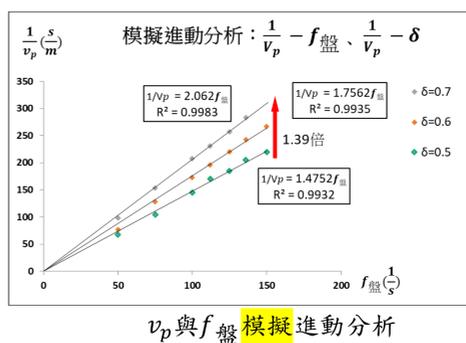
## 定量分析

$$R_{\text{max}} = \frac{\mu_k g}{4\pi^2 f_{\text{盤}}^2} \left( \frac{\delta+1}{\delta} \right)^2$$

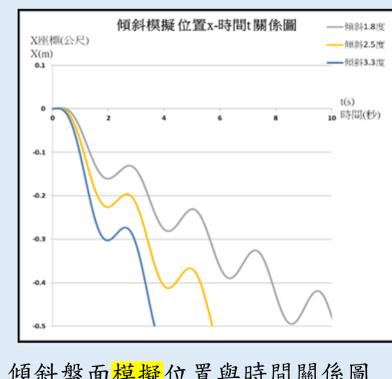
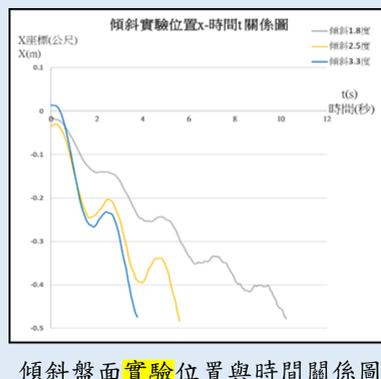
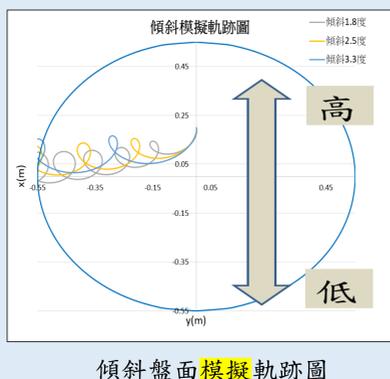
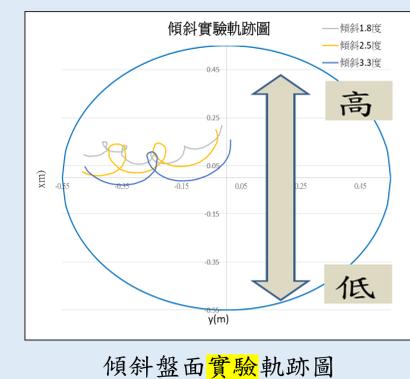


## 定量分析

$$V_p \propto \frac{\beta}{\delta f_{\text{盤}}}$$



## Case3(傾斜盤面)



## 陸、結論

- 由實驗發現，球體在旋轉平台上的運動，可以分為三階段：進動、螺線振盪、打滑。
- 由盤心釋放的實驗中，以下數個實驗結果均與準靜態理論相符： $f_{\text{球}}$  與  $f_{\text{盤}}$  成正比、 $f_{\text{球}}$  與  $\frac{\delta}{\delta+1}$  成正比，且  $f_{\text{球}}$  與  $\mu_k$  無關。  
 $R_{\text{max}}$  與  $(1/f_{\text{盤}})^2$  成正比、 $R_{\text{max}}$  與  $\frac{\delta+1}{\delta}$  成正比。
- 由非盤心釋放的實驗中，以下數個實驗結果與準靜態理論相符： $f_{\text{球}}$  與  $f_{\text{盤}}$  成正比、 $f_{\text{球}}$  與  $\frac{\delta}{\delta+1}$  成正比，且  $f_{\text{球}}$  與  $\mu_k$  無關。  
 $R_{\text{max}}$  與  $(1/f_{\text{盤}})^2$  成正比、 $R_{\text{max}}$  與  $\frac{\delta+1}{\delta}$  成正比、 $R_{\text{max}}$  與  $\mu_k$  成正比。
- 滑動-滾動摩擦模擬能夠清楚描述進動、螺線振盪、打滑的現象。且由實驗結果及模擬均一致顯示滑動摩擦與滾動摩擦是影響球運動軌跡的關鍵因子：滾動摩擦是球加速的主因，滾動摩擦係數越大，進動速度  $v_p$  越大；而滑動摩擦會和球打滑前的最大半徑成正比。滑動-滾動摩擦模擬符合實驗結果，具解釋力與預測力。
- 旋轉平台傾斜，並以準靜態方式純滾動釋放，發現球會偏往水平的方向進動，且傾角越大則進動越明顯，時間間隔也越短。此結果與滑動-滾動摩擦模擬相符，證實我們研究提出的模型可應用到新的情境。

## 柒、未來展望與應用

- case0中，若滾動摩擦接近0，則球會在平台一側繞一非圓心定點，做等速率圓周運動，這是非常有趣的現象。
- 研究結果或可類比地表的氣流運動，如颱風路徑：旋轉平台-科氏力，砂紙-氣流與地表的摩擦力，傾斜斜面-高低氣壓差。
- Harvard曾利用馬鞍型旋轉平台，在特定的旋轉頻率下，可將橡膠球侷限在鞍底部而不滑下。本研究中的模擬方法可應用至此類時變勢能空間中球體粒子的運動分析。

## 捌、參考資料

- Artjom V. Sokirko, Alexandr A. Belopolskii, Andrei V. Matytsyn, Dmitri A. Kossakowski, Behavior of a ball on the surface of a rotating disk, June 1993  
From <http://www.tyoma.com/plain/science/papers/14/ball.pdf>
- Kyeong Min Kim, Donggeon Oh, Junghwan Lee, Young-Gui Yoon, Chan-Oung Park, Dynamics of Cylindrical and Spherical Objects on a Turntable, April 2018  
From <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01761333/document>
- 中華民國第四十三屆科學展覽會高中組物理科-滾動運動與滾動摩擦的探討  
From <https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040107.pdf>