

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

(鄉土)教材獎

051811

平行板電場間導電球的震盪分析

學校名稱：國立金門高級中學

作者： 高二 盛洧揚 高二 莊宏森	指導老師： 楊智琨 李育賢
-------------------------	---------------------

關鍵詞：富蘭克林的鈴鐺、靜電感應、力學分析

摘要

本實驗是利用平行電板通電後產生電場，導電球會因電荷傳導與靜電感應因素而在電場之中來回震盪的特性進行相關物理量的調整進行研究。各種變因包括導電球質量、電壓大小、球體半徑、不同球體、不同板距等等，我們量測了來回擺動數次所需要的時間計算平均速率，再以靜電學與運動學方程式推導，並加以分析影響實驗的各個因素。整體研究結果發現，在導電球運動時，質量較重的導電球因為擺動時無駐波、自轉的現象產生，能符合我們所推導之理論。此實驗裝置類似於馬達，通電後可使裝置持續運動，但是並沒有使用到電流的磁效應，屬於相當新穎的電動裝置。

壹、研究動機

我們曾經在 YouTube 上看到網友在家簡易製作的小實驗—富蘭克林的鈴鐺。看到實驗中竟然用隨手可得的易開罐可樂擺放於兩側，中間再以繩子掛上拉環，通電後便能來回擺動形成鈴鐺，基於好奇的我們便上網搜尋相關資訊，漸漸地對其產生興趣，而且發現網路上沒有更深入的相關研究，於是決定動手做實驗，我們使用電蚊拍、金屬板與導電球來進行實驗設計，了解導電球在平行板間運動的特性。

貳、研究目的

- 一、探討不同電壓對球體擺動之影響
- 二、探討不同板距對球體擺動之影響
- 三、探討不同球體對球體擺動之影響
- 四、探討恢復係數對球體擺動之影響
- 五、探討濕度對球體擺動之影響

參、研究設備及器材

- 一、攝影器材：手機、腳架。
- 二、供電裝置：不同款式電蚊拍(1470V、3270V、3390V)，串聯組合能提供多種電壓。
- 三、實驗裝置：金屬鋁板(20*20cm²)、鋁箔保麗龍球、鋁箔球、樂高積木、玉線、溼度計
- 四、鋁箔[R(cm), m(g)]：[0.45, 0.65]、[1, 1.3]、[1.25, 1.85]、[1.5, 2.13]、[1.75, 3.28]、[2, 4.13]
- 五、鋁箔保麗龍球[R(cm), m(g)]：[0.5, 0.05]、[0.75, 0.18]、[1, 0.26]、[1.25, 0.5]、[1.5, 0.79]、[1.75, 1.02]、[2, 1.61]

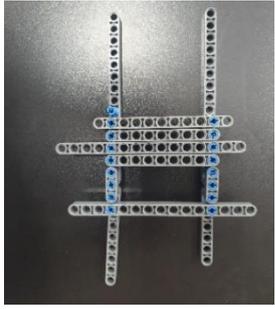
			
玉線	電子秤	樂高積木	游標尺
			
A 電蚊拍(1470V)	B 電蚊拍(3270V)	C 電蚊拍(3390V)	三用電表



圖 1、實驗裝置說明：以電蚊拍連接平行電板兩端，並以樂高為基座穩固裝置。
(具高電壓低電流特性，且內部具安全裝置)

肆、研究方法與過程

一、實驗儀器架設及改善過程

(一) 實驗裝置 1[如圖 2 左]：首先我們比照網站上用一般市售可樂及其拉環製作裝置，並連接直流電源供應器(最大輸出為 40V)，我們發現直流電源供應器的輸出電壓無法使裝置運作，因此改以高電壓低電流特性的電蚊拍作為電源輸出。

(二) 實驗裝置 2[如圖 2 右]：由於拉環形狀不規則且瓶身為弧狀，因此會產生不規律的運動軌跡，不利於實驗觀察，因此我們架上平行鋁板取代可樂瓶，並加上樂高積木作為其基座，以增加穩固性，並用自製的鋁箔球取代拉環，經過改良後的實驗裝置 2，整體穩定性提高，實驗數據也較為集中。

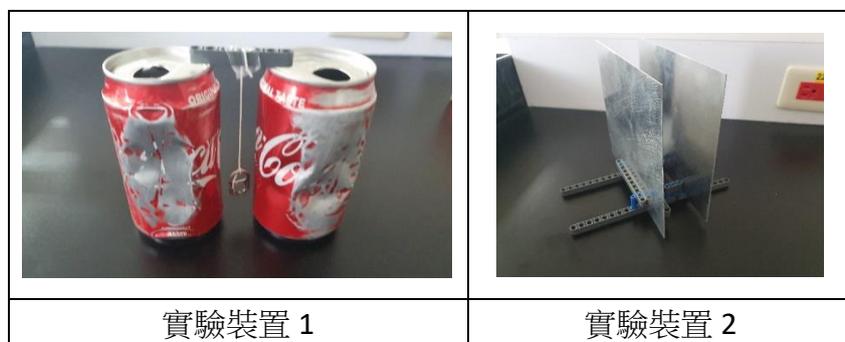
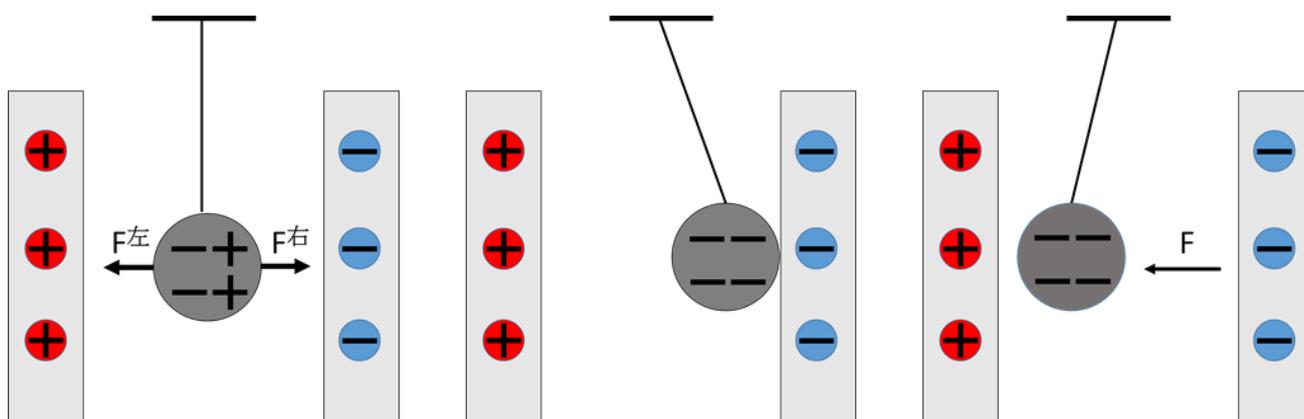


圖 2、實驗儀器差異

二、實驗機制

以下面的示意圖為例，在一開始的時候雖然導電球不帶電，但在靜電感應的作用下，導電球內部會有正負電分離的現象，正負電會各自被兩片異性電的平行金屬板給吸引，此時若吸引力有些微的不均勻，導電球就會被拉往引力較大的板子發生碰撞，而後導電球因接觸起電，得到了與碰撞金屬板同性的電荷，接著便因同性電相互排斥而往反方向運動至碰撞另一個平行金屬板交換電荷，如此循環。



三、找適合的導電球材料材料

在進行實驗的初期，我們使自製的鋁球，與鋁箔包覆保麗龍的球體(以下簡稱鋁箔保麗龍球)做為實驗材料，並比較不同半徑大小的球體、不同電壓與不同板距之間造成的頻率、速率等等的物理關係。



圖 3、鋁箔球與鋁箔包覆保麗龍球。

伍、研究結果

一、探討不同電壓對球體擺動之平均速率的影響(實驗一)

- (一) 實驗目的：為了解電壓對實驗的影響。
- (二) 實驗內容：以不同電壓進行實驗，並觀察球體擺動情形加以分析。
- (三) 實驗變因

控制變因(本實驗圖表只呈現 2cm)		操縱變因
繩長	48cm	A 電蚊拍(電壓 1470V)
鋁板間距	5cm	B 電蚊拍(電壓 3270V)
球體半徑	1cm、1.75cm、2cm(鋁箔球、鋁箔保麗龍球)	C 電蚊拍(電壓 3390V)

(四) 實驗流程

1. 架設平行電板連接電蚊拍
2. 以腳架懸掛導電球
3. 並以慢速錄影觀察其擺動
4. 每顆球進行五組實驗
5. 調整電壓，並重複進行

我們將實驗數據以 Excel 進行分析(如圖)，可以看出純鋁箔球電壓與速率呈正線性關係，亦可以看出保麗龍導電球電壓與速率呈線性關係(本次實驗的速率為平均速率，使用來回擺盪的路徑長除以總時間求得)。除了 2cm 也另外針對控制變因為 1cm 與 1.75cm 的球體做相同的實驗，得到 1cm 半徑的鋁箔球實驗電壓-速率關係 $R^2=0.998$ ，鋁箔保麗龍球 $R^2=0.91$ ，而 1.75cm 半徑鋁箔球 $R^2=0.98$ ，鋁箔保麗龍 $R^2=0.92$ 。另外，鋁箔球還有 0.45cm 的 $R^2=0.81$ 、1.25cm 的 $R^2=0.985$ 、1.5cm 的 $R^2=0.98$ 。詳細數據可參考附錄。列舉 2cm 半徑圖示如下：

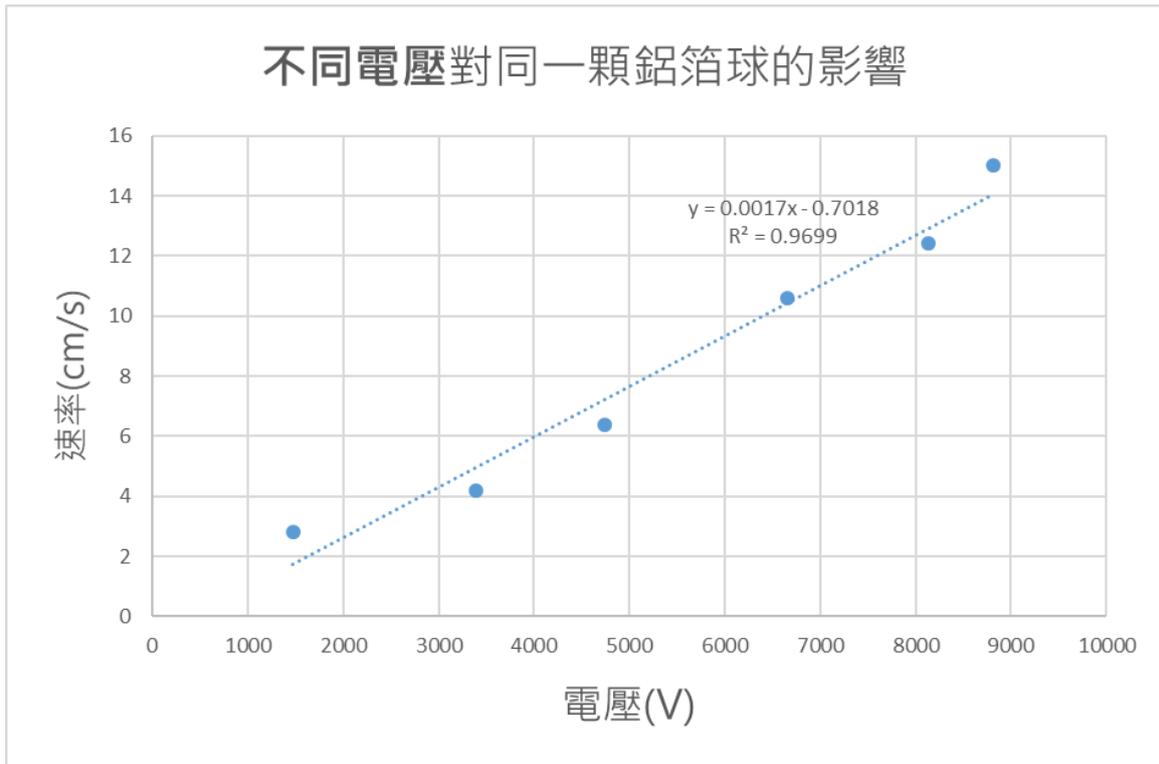


圖 4、半徑 2cm 鋁箔球實驗電壓與平均速率的關係

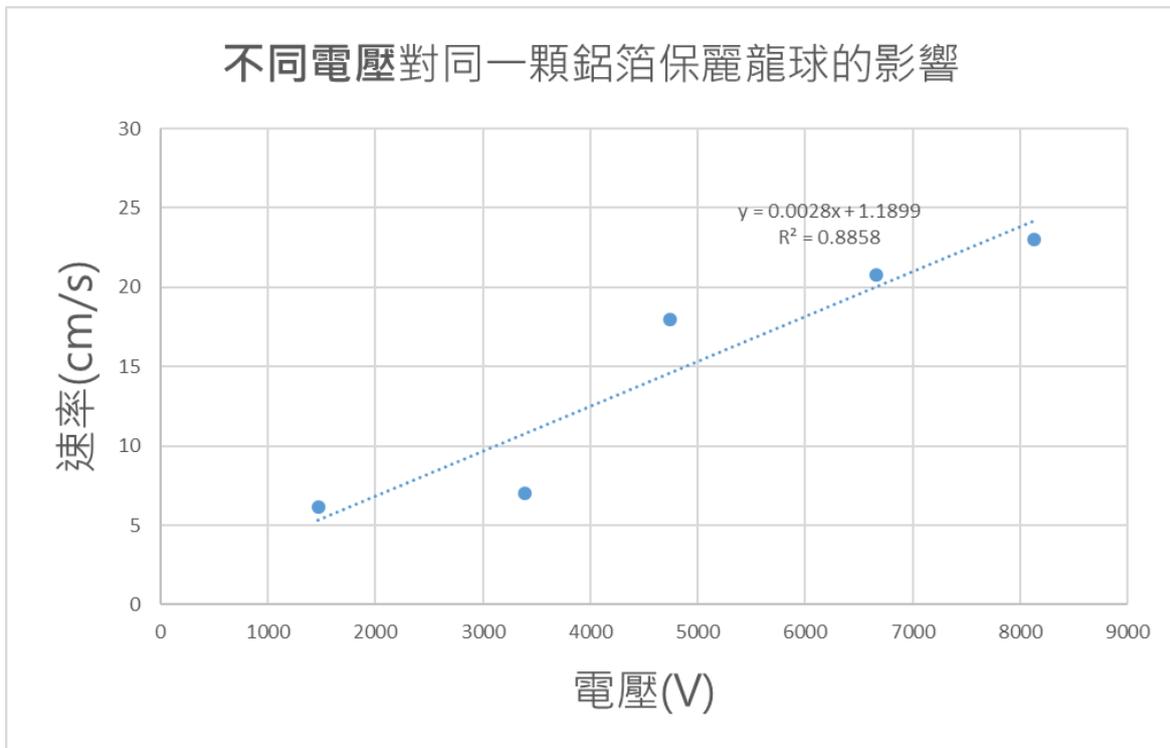


圖 5、2cm 鋁箔保麗龍球實驗電壓與平均速率的關係

對比 1cm 與 1.75cm 的球體，可以得知半徑在 2cm 以後，鋁箔保麗龍球的相關係數開始降低，推測與保麗龍球之質量比鋁箔球輕有關。

二、探討板距對擺動週期之影響(實驗二)

(一) 實驗目的：為找出板距及週期之間的關聯性。

(二) 實驗內容：固定其他因素下，改變板距測量其週期，並就結果加以分析。

(三) 實驗變因

控制變因(本次實驗呈現 3270V 結果)		操縱變因
繩長	48cm	鋁板間距(cm)： 3、4、5、6、6.5、7、7.5、8
球體半徑	1cm(鋁箔)、1cm(鋁箔保麗龍球)	
輸出電壓	3270V(圖表呈現)、6660V	

(四) 實驗流程

1. 架設平行電板連接電蚊拍
2. 以腳架懸掛導電球
3. 並以慢速錄影觀察其擺動
4. 每顆球進行五組實驗
5. 將板距進行調整，並重複進行

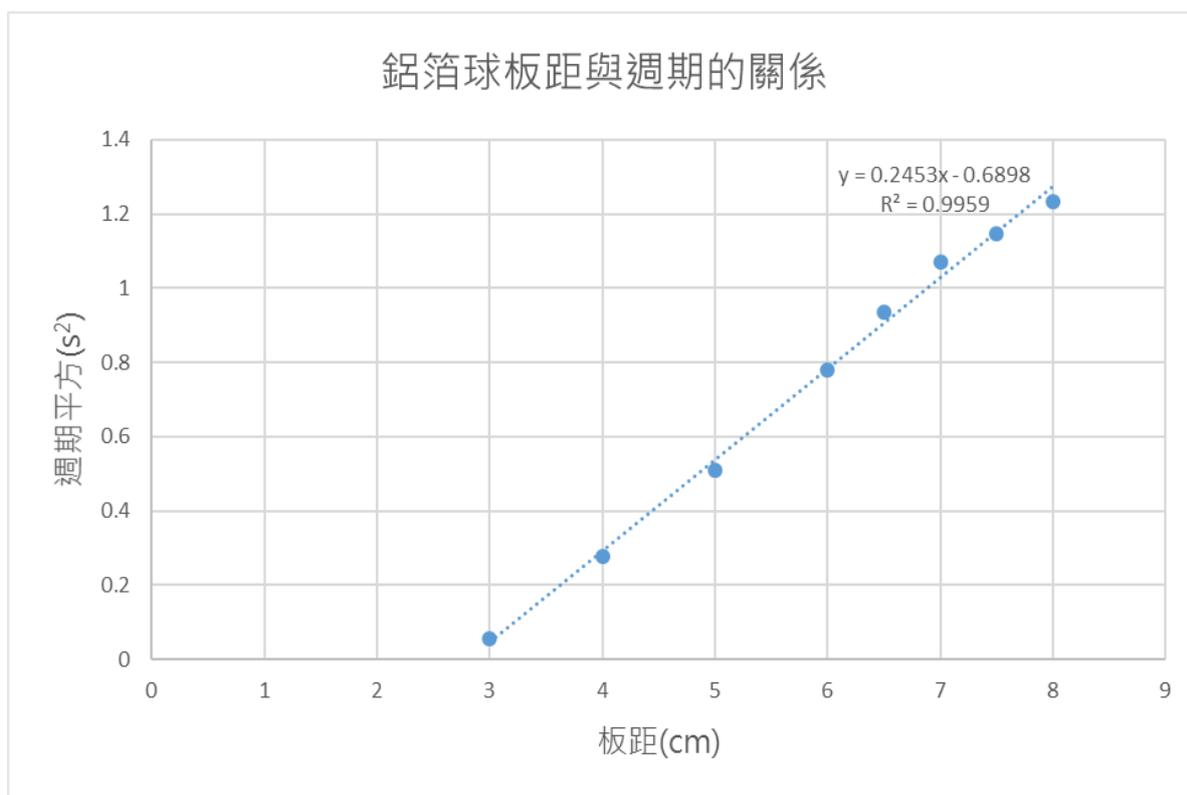


圖 6、半徑 1cm 鋁箔球實驗板距與週期平方的關係

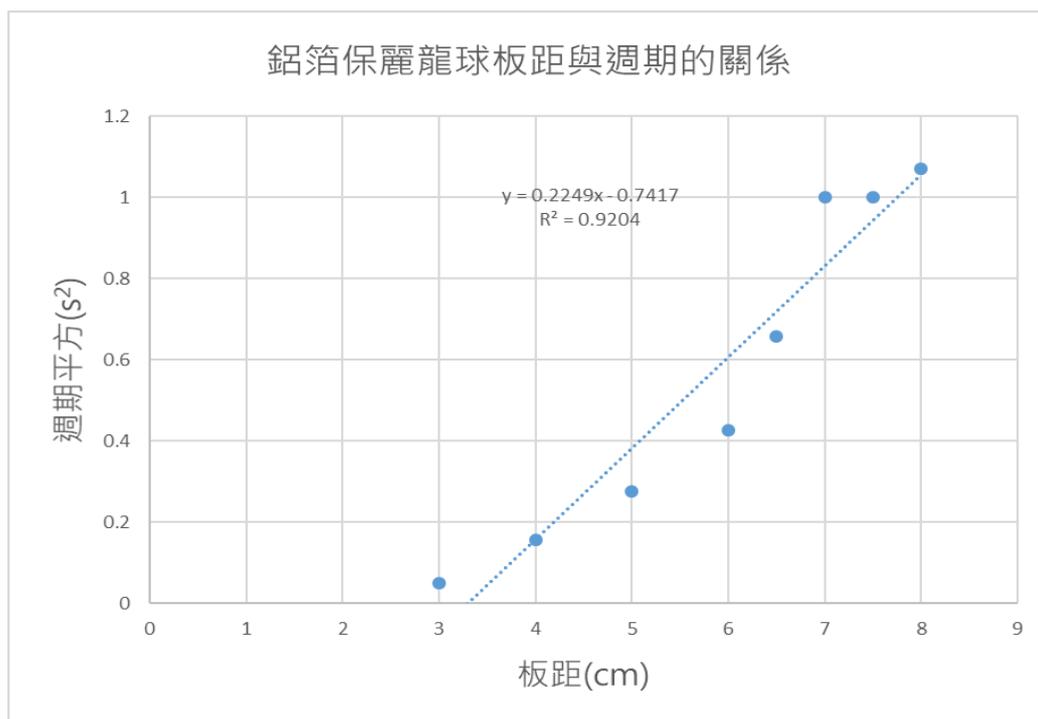


圖 7、半徑 1cm 保麗龍球實驗板距與週期平方的關係

我們以 6660V 電壓的實驗出來的結果，初步發現鋁箔球的週期平方與板距相關係數平方為 $R^2=0.97$ ，鋁箔保麗龍球的 $R^2=0.92$ ，顯示電壓的提升，相關係數並不會有較大的改變，且鋁箔球的相關係數值依舊較鋁箔保麗龍球高。

三、探討不同球體對擺動之影響(實驗三)

(一) 實驗目的：為找出球體擺動之間的關聯性

(二) 實驗內容：以不同半徑之鋁箔球進與鋁箔保麗龍球進行實驗，以觀察其擺動情形並加以分析。

(三) 實驗變因

控制變因(實驗呈現 3270V 結果)		操縱變因
繩長	48cm	1、球體半徑(cm)：0.45、1、1.25、1.5、1.75、2 之鋁箔球 2、球體半徑(cm)：0.5、0.75、1、1.25、1.5、1.75、2 之保麗龍球(外包鋁箔)
鋁板間距	5cm	
輸出電壓	3270V、6660V	

(四) 實驗流程

1. 架設平行電板連接電蚊拍
2. 以腳架懸掛導電球
3. 並以慢速錄影觀察其擺動
4. 每顆球進行五組實驗
5. 更換下顆導電球，並重複進行

根據以上的設計，在固定 3270V 電壓下，我們將實驗數據以 Excel 進行分析，可以看出鋁箔球半徑和質量之比值與速率平方呈線性關係，可以看出鋁箔保麗龍導電球半徑和質量之比值亦與平均速率平方**沒有**呈線性關係。(其中在 6660V 的電壓下，鋁箔球半徑質量比與平均速率平方關係的 $R^2=0.775$)

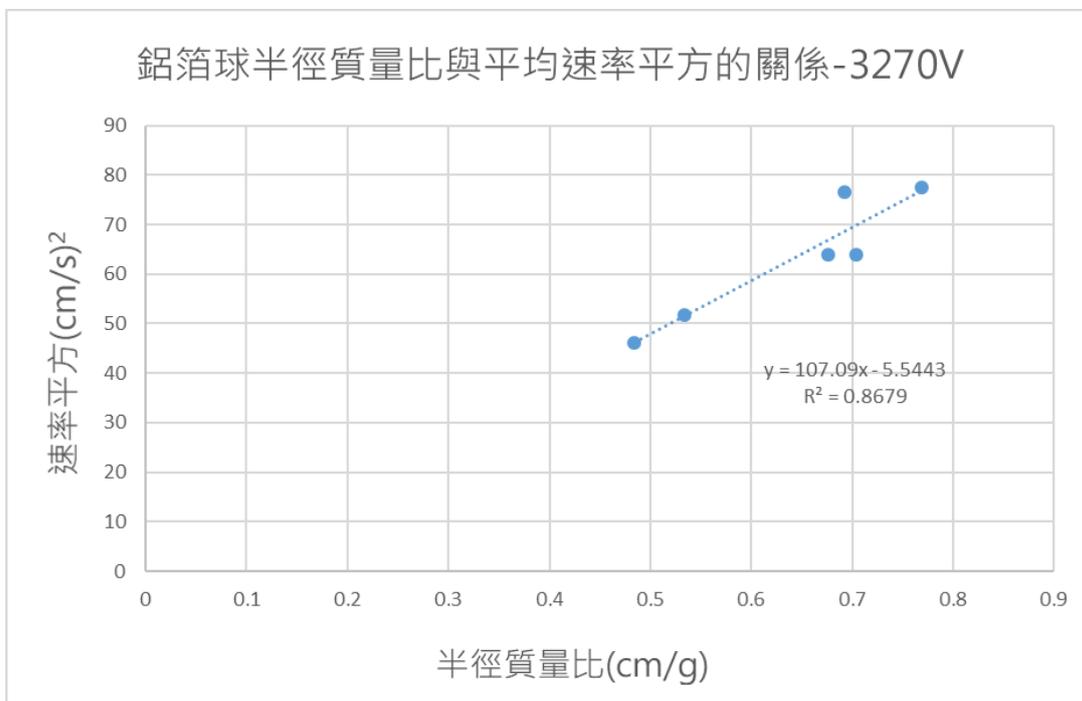


圖 8、鋁箔球固定電壓下半徑質量比與平均速率平方的關係

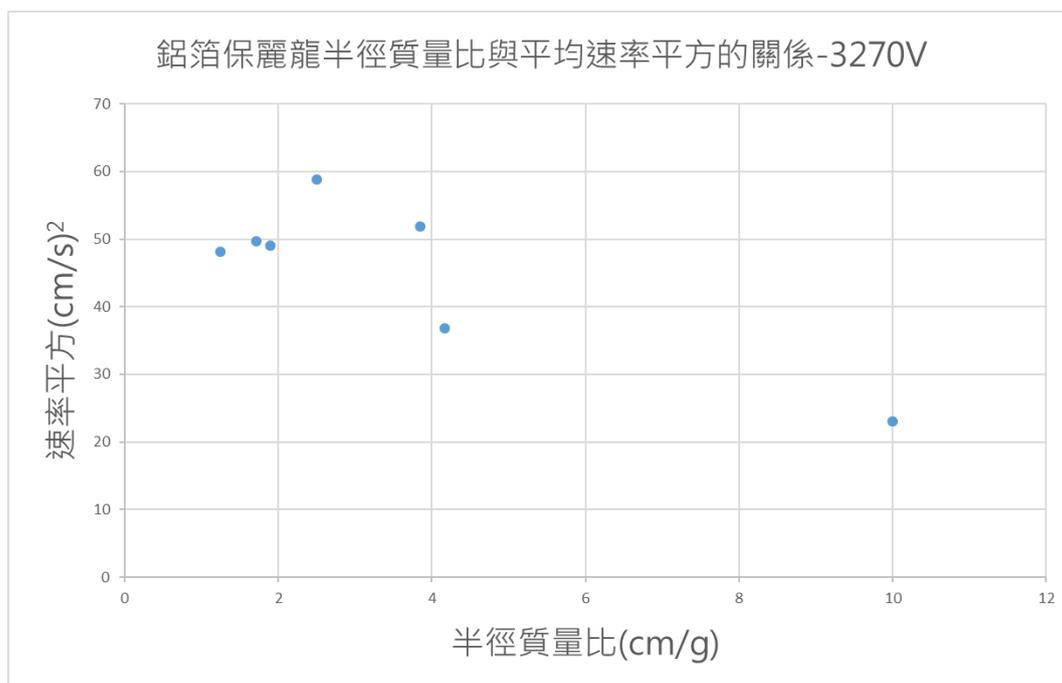
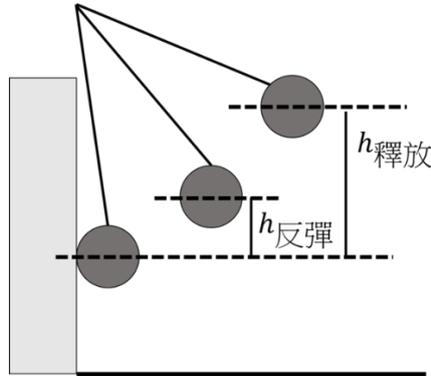


圖 9、鋁箔保麗龍球電壓下半徑質量比與平均速率平方的關係(無規律)

四、探討恢復係數與球體材料之影響(實驗四)

(一) 實驗目的：為了解球體在碰撞前後的速率關係。

(二) 實驗內容：以衝擊擺方式架設實驗裝置，觀察其釋放高度與反彈高度之比值(如圖)。



(三) 實驗變因

1. 球體半徑(cm)：0.45、1、1.25、1.5、1.75、2 之鋁箔球

2. 球體半徑(cm)：0.5、0.75、1、1.25、1.5、1.75、2 之保麗龍球(外包鋁箔)

(四) 實驗流程：

1. 架設實驗裝置
2. 以相機慢速錄影觀察分析
3. 將球體拉至最高點釋放

(a) 理論依據：鋁箔球碰撞鋁板時，在極短時間內該作用力便會改變球的運動方向，因為碰撞發生時會有能量耗損的情況，我們將量測鋁箔球以某一速度撞擊鋁板後得到的反彈速度來計算反彈係數，令金屬球碰撞前一刻的末速度為 v_f ，反彈初速度為 v_i ，則反彈係數為：

$$\alpha = \frac{v_i}{v_f}$$

(b) 分析過程：擷取影片中利用像素來量測釋放高度以及反彈高度的比例關係，藉以推算碰撞的末速度與反彈初速度之間的比值，即：

$$\alpha = \frac{\sqrt{h_{\text{反彈}}}}{\sqrt{h_{\text{釋放}}}} = \frac{v_i}{v_f}$$

4. 擷取其釋放高度與反彈高度之像素比例
5. 撞擊不同角度進行實驗
6. 測量十次後並算其平均及標準差整理如下表

表 1、各球體不同半徑恢復係數

	鋁箔球	鋁箔保麗龍球		鋁箔球	鋁箔保麗龍球
半徑(cm)	恢復係數 [平均±標準差]	恢復係數 [平均±標準差]	半徑 (cm)	恢復係數 [平均±標準差]	恢復係數 [平均±標準差]
0.45[保麗龍 0.5]	0.214±0.005	0.422±0.008	1.5	0.188±0.005	0.270±0.001
1.0	0.206±0.001	0.320±0.006	1.75	0.173±0.008	0.251±0.005
1.25	0.198±0.001	0.299±0.008	2.0	0.169±0.003	0.239±0.001

由上述表格的結果可以觀察到，鋁箔球的恢復係數較鋁箔保麗龍球小的許多，且鋁箔球體的半徑漸增，恢復係數也漸降，由圖 8 的結果可以觀察到，半徑較大(半徑質量比較小)的球體，就會愈接近理論的趨勢線上。

(五)、論鋁箔球與鋁箔保麗龍球之差異

1. 質量差異：鋁箔球>鋁箔保麗龍球。
2. 恢復係數：鋁箔保麗龍球>鋁箔球。
3. 整體相關性：鋁箔球>鋁箔保麗龍球。
4. 穩定性：鋁箔球>鋁箔保麗龍球。

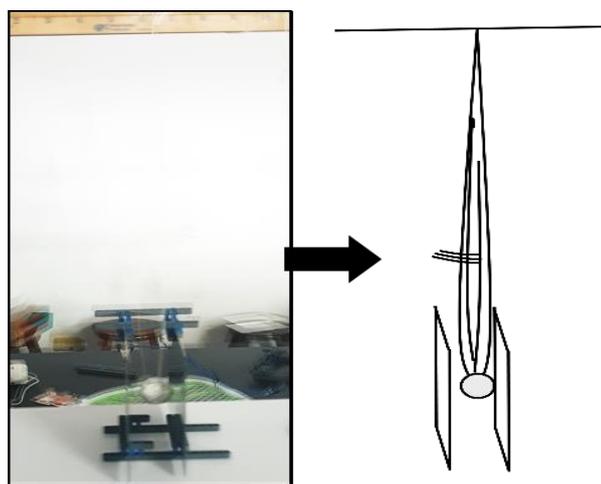


圖 10、使用質量較輕的鋁箔保麗龍球時，擺繩產生了駐波，而球帶有自轉

(六)、初步推測

1. 我們推測因鋁箔保麗龍球質量較輕，轉動慣量影響較大，因此其運動軌跡不固定。
2. 部份鋁箔保麗龍球擺繩有產生駐波的現象，影響球體擺動。

綜合以上所說，因此我們推論純鋁箔球整體穩定度較保麗龍導電球好，這也是為什麼在不同球體實驗中，兩者相關性有截然不同的結果，因此，以下的分析結果，為了排除其他影響因素，我們將以鋁箔球作為理論分析的主要樣本。

五、探討濕度對球體擺動之影響(實驗五)

(一) 實驗目的：濕度是否會對實驗進行影響。

(二) 實驗內容：配合本校每天的溼度變化，進行實驗再分析濕度對球體擺動之影響

(三) 實驗變因

控制變因		操縱變因
繩長	48cm	球體半徑(cm)：0.45、1、1.5、1.75、2 之鋁箔球 相對溼度：60%、65%(2次)、71%、79%
鋁板間距	5cm	
輸出電壓	B拍(3270V)	

(四) 實驗流程

1. 架設平行電板連接電蚊拍
2. 以腳架懸掛導電球
3. 記錄當天濕度
4. 並以慢速錄影觀察其擺動
5. 更換下顆導電球，並重複進行

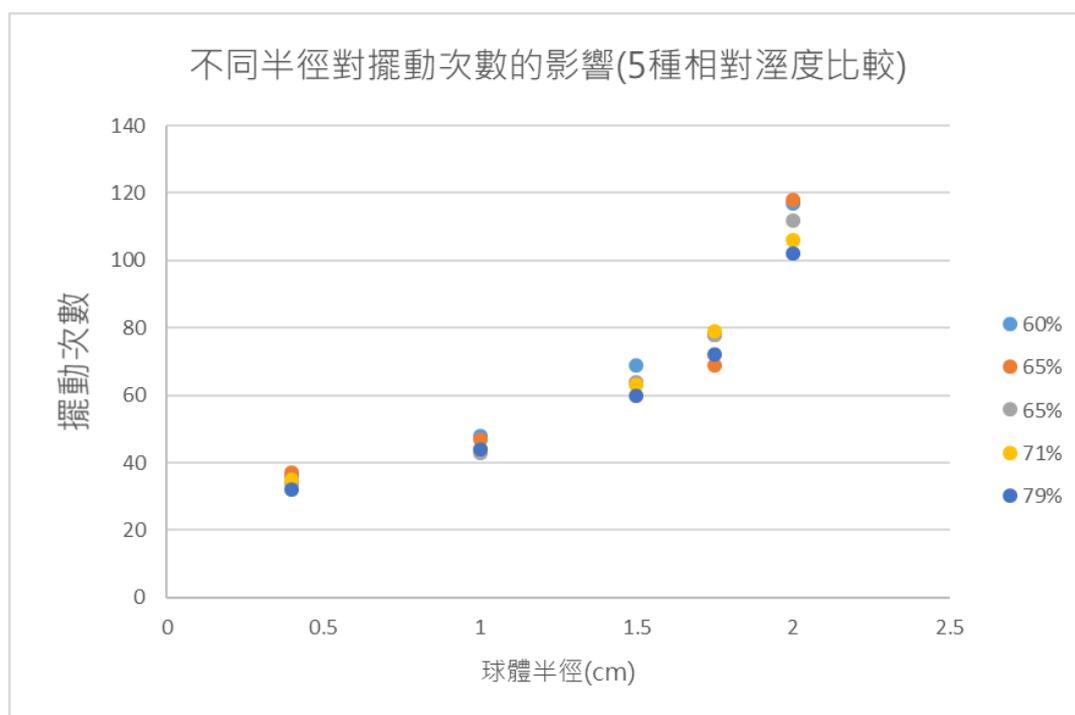


圖 11、不同溼度下相同實驗的數據比較

以不同半徑球體對擺動次數的實驗結果可知，相對溼度對實驗結果的影響不大，但在球體的半徑逐漸增加後，對擺動次數的差異範圍(誤差)就逐漸增大，這也是為什麼球體半徑愈小，相關性會愈高的可能原因。

陸、討論

一、理論分析

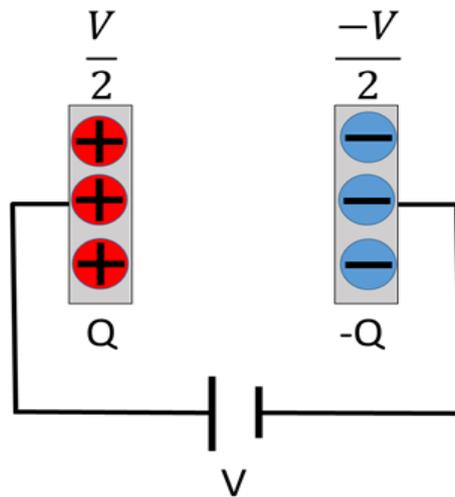
(一)、基本假設

1. 平行電板長寬夠大，且電板上電荷均勻分布，導電球不會受邊際效應影響，且導體球自身的介電係數不會影響空間中的電場分布。
2. 導電球在運動過程中只受庫侖力作用，且距離極短空氣阻力可忽略。
3. 將連接電源的電板電源強迫供電，則電板的電位電量是一定值。

(二)、論導電球在電板間受到的庫侖力

我們架設的裝置如下圖，令電源提供的電壓為 V ，電板間距為 d ，根據平行電板電場方程式，可得知電板之間存在的均勻電場 E 為

$$E = \frac{V}{d}$$



若此裝置中間以長度 L 的繩子懸掛著一顆質量為 m 半徑為 R 的導電球，根據高中的靜電學與電路學原理，由於我們的電路裝置電源使用的是電池配合升壓裝置，當電池端電壓為 V 時，電源兩極連接至電板後形成斷路，因此電板本身的電位分別為 $\frac{+V}{2}$ 與 $\frac{-V}{2}$ 。當導電球碰到電板時，導電球會瞬間得到和電板相同的電位，由導電球的電位公式

$$\frac{+V}{2} = \frac{k(+q)}{R} \quad \text{或} \quad \frac{-V}{2} = \frac{k(-q)}{R}$$

得

$$\pm q = \frac{\pm RV}{2k}$$

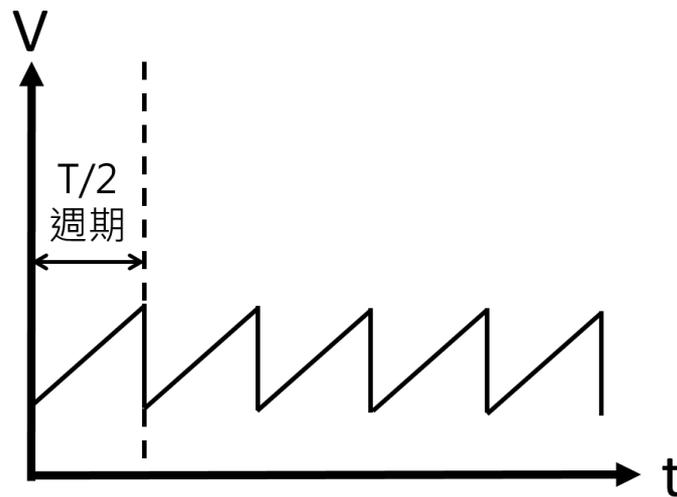
其中 q 為導電球身上所具有的電量。

因為球身處在均勻電場環境 E 中，此時導電球所受到的庫侖力量值為

$$F_e = |q|E = \frac{\pm RV^2}{2kd}$$

(三)、論導電球在電板間的運動情形

假設球只受一定庫侖力作用，因此導電球將會在電板間作等加速度運動，維持碰撞頻率穩定的原因為每次碰撞金屬板後速度的消耗。速率隨時間的關係圖如下圖所示：



而球的加速度為：

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{RV^2}{2kdm}$$

加速度 a 與位移 $d-2R$ 代入等加速度運動相關式：

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

得

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{RV^2}{kdm}(d - 2R)$$

又因導電球在撞擊電板時，會發生力學能損耗，撞擊前後速率相關式為

$$v_i = \alpha v_f$$

其中 α 為球與電板的恢復係數，又將上面兩式合併：

$$v_f^2(1 - \alpha^2) = \frac{RV^2}{kdm}(d - 2R)$$

從上述關係式中得到以下初步結論：在電壓 V 與導體球可動範圍($d-2R$)固定的情況下，末速度平方與導電球的半徑成正比、質量成反比，由於為等加速度(變化呈線性)，可看作平均速度與末速度的成正比關係，而平均速率可以藉由實驗測得，本次實驗的結果也顯示，速度平方與半徑、質量、板距、電壓的正反比關係皆符合上述結果，證明以上理論適用於本實驗。

二、實驗結果之細部分析

探討理論與實驗結果，我們由理論得知：

$$v_f^2(1 - \alpha^2) = \frac{RV^2}{kdm}(d - 2R)$$

且我們使用的鋁箔球的恢復係數 $\alpha = 0.17\sim 0.21$ ，此數值平方後，遠小於 1，因此若把此項忽略：

$$v_f^2 = \frac{RV^2}{kdm}(d - 2R)$$

由上可知，我們要量測的平均速度為 v ，結果如下：

$$v = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{v_f + \alpha v_f}{2} = v_f \times \frac{(1 + \alpha)}{2}$$

(一)探討不同電壓對球體擺動之平均速率影響(實驗一)的理論探討

我們以 2cm 鋁箔球的實驗結果為例，由上式可以整理成

$$v = \sqrt{\frac{R}{kdm}(d - 2R)} \times \frac{(1 + \alpha)}{2} V$$

我們的實驗結果符合速率與電壓呈現正相關，以 Excel 製圖後拉出的斜率(圖 4)以 SI 制單位來看為 1.675×10^{-5} 。為了驗證我們的理論數值是否符合，我們將參數 $R=0.02\text{m}$ ， $d=0.05\text{m}$ ， k 為庫侖常數及鋁箔球質量 0.00413kg ，其中反彈係數為 0.169 代入後，得：

$$[v = \sqrt{\frac{0.02}{9 \times 10^9 \times 0.05 \times 0.00413} (0.05 - 2 \times 0.02) \times \frac{(1+0.169)}{2} V}] ,$$

以上得到的斜率數值為 6.603×10^{-6} ，與實際值相差 3 倍左右，於是我們將各半徑鋁箔球體的理論斜率與實際實驗值整理如下：

表 2、各球體不同半徑對應的斜率(Δ 速率/ Δ 電壓)值

實驗一使用鋁箔球體半徑	理論值	實驗值	Z(R)=實驗值/理論值
0.45 cm	1.524×10^{-5}	1.149×10^{-5}	0.7535
1 cm	1.366×10^{-5}	1.445×10^{-5}	1.0583
1.25 cm	1.161×10^{-5}	1.259×10^{-5}	1.0844
1.5 cm	1.051×10^{-5}	1.861×10^{-5}	1.7709
1.75 cm	7.821×10^{-6}	1.395×10^{-5}	1.7838
2 cm	6.603×10^{-6}	1.675×10^{-5}	2.7617

由上表可以觀察到，當球的半徑在 1.25 與 1 公分時貼近我們所做的理論預測，而半徑 0.45 公分小球因質量過輕，與鋁箔保麗龍球一樣在擺動時擺繩有駐波產生，推測能量被繩子吸走於是運動速度較預期慢。隨著球的半徑增大，實際與理論的斜率比值大於一，我們認為是因為球體的介電係數明顯影響了空間中的電場分佈，若擺動無駐波發生，半徑愈小的球體就愈接近理論的數值。而大顆的球體產生的此現象與我們前面的基本假設稍微相互違背，雖然如此，整體的實驗結果還是遵守著高中物理運動學方程式推導。

由實驗結果可以確定，我們的方程式應該要加個實驗修正項 Z(R)，此值會與球體半徑呈相關性，修正後的方程式就會符合我們的實驗結果。乘上常數後的方程式如下：

$$v = Z(R) \sqrt{\frac{R}{kdm} (d - 2R) \times \frac{(1 + \alpha)}{2} V}$$

我們由本次實驗可知，此常數值會依球體的大小而變，但不影響正比關係，因此以下討論暫不考慮常數數值，只考慮正比關係。

(二) 探討板距對擺動週期之影響(實驗二)的理論探討

以本次實驗結果為例，移動距離 $(d - 2R) = \frac{1}{2}at^2 + v_i t$ ，因為初速 $v_i = \alpha v_f$ ，且速度變化量 $\Delta v = v_f - v_i = (1 - \alpha)v_f = at$ ，將以上關係式重整，可以得到：

$$(d - 2R) = \frac{1 + \alpha}{2(1 - \alpha)} at^2$$

其中 $a = \frac{F_e}{m} = \frac{RV^2}{2kdm}$ ，代入前式得到 $(d - 2R) = \frac{(1 + \alpha)}{2(1 - \alpha)} \frac{RV^2}{2kdm} t^2$ ，其中所經過的時間 t 為週期的一半，即 $\frac{T}{2}$ ，得到

$$d(d - 2R) = \frac{(1 + \alpha)}{2(1 - \alpha)} \frac{RV^2}{2km} \left(\frac{T}{2}\right)^2$$

由以上關係我們將 $d(d - 2R)$ 與 T^2 以 Excel 整理成圖表如下，與圖 6 差異不大。

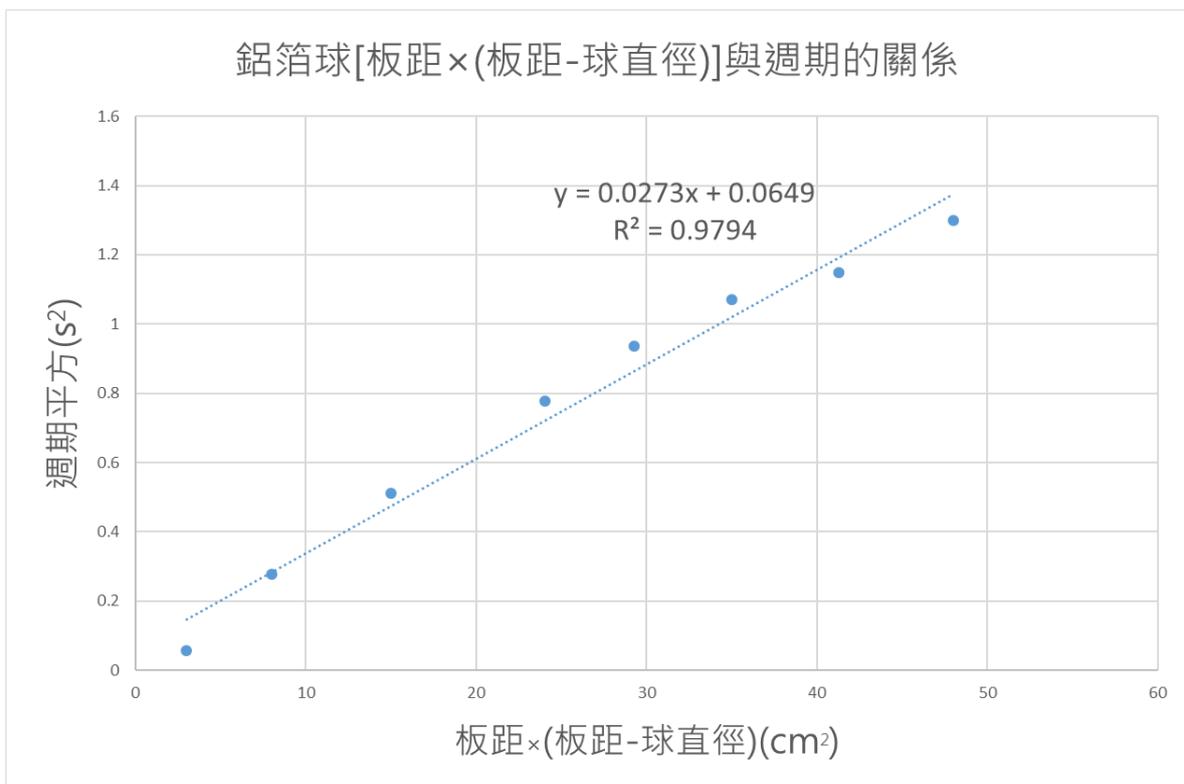


圖 12、考慮理論運動方程式對應關係(圖 6 依理論修正)

(三) 探討不同球體對擺動之影響(實驗三)的理論探討

我們以圖 8 為例，原來的實驗結果我們只考慮到板距 d ，但經由公式推導後我們發現， $\frac{d-2R}{d}$ 的修正才符合我們理論的假設，於是我們把圖 9 的資料板距再補上實際間距 $\frac{d-2R}{d}$ 的修正項後，直線相關係數就提升一些(R^2 由 0.8679 提升至 0.9393)，更吻合我們推導的理論結果。(而 6660V 的實驗結果 R^2 由 0.770 提升至 0.9877)，可知道在高電壓的情況下，可以更接近近似後的理論結果。

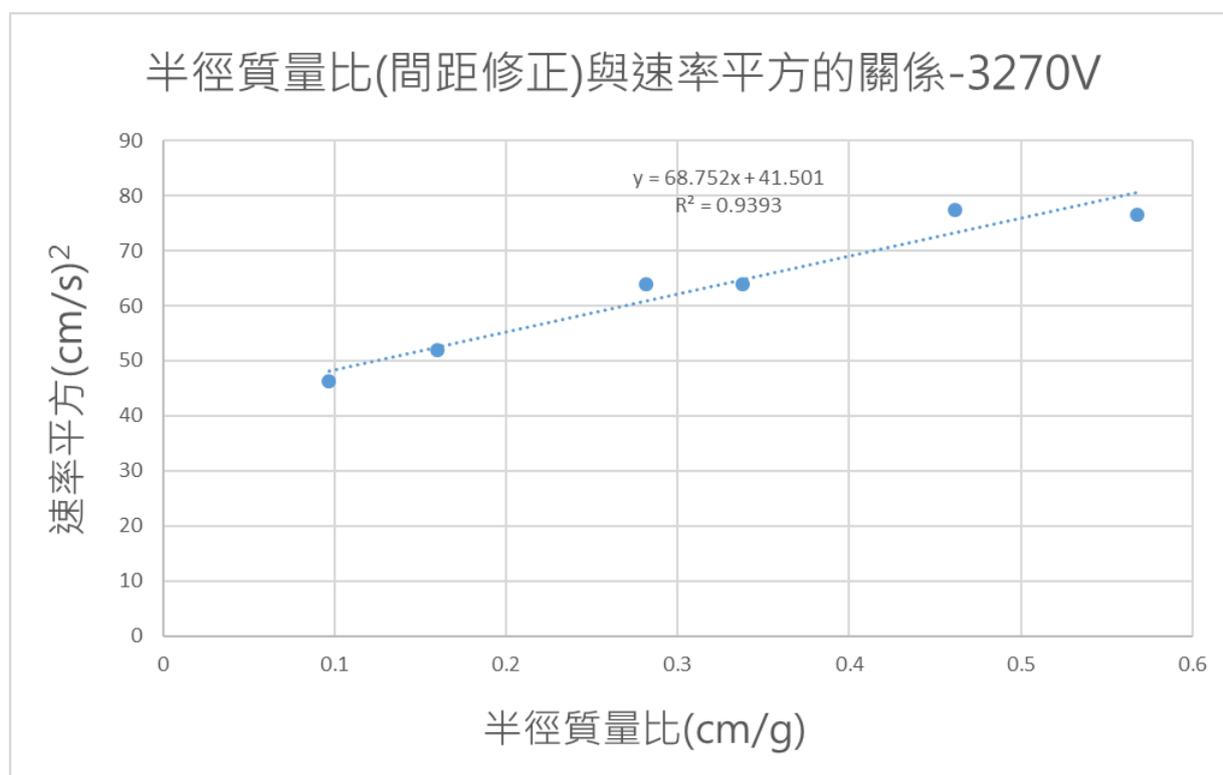


圖 13、考慮間距修正後相關係數提升(對照圖 8)

三、其他因素

我們在進行導電球的相關實驗時，發現自製的導電球，可能無法視為理想的均勻球體，於是又在文具店購買不同尺寸的保麗龍球用鋁箔紙包覆，這兩種類型的球互相比較，純鋁箔紙的球比保麗龍重，擺動時不易受到駐波影響，反而因此適合做為本次探討的本實驗球運動的材料。這部份與直覺不同，這算是本科展我們非常特別的發現。

柒、結論

- 一、由不同電壓對球體擺動之影響實驗結果我們得知，如果球體及板距不變，其平均速率(或是末速率)會與電壓成正比。
- 二、由不同板距對其擺動之影響的實驗結果結合高中所學之運動學公式，得到其運動型態為來回擺動的等加速度運動。
- 三、由不同球體對其擺動之影響的實驗結果可知，當電壓及板距固定不變時，其速率平方會與其半徑/質量之比值成正比。
- 四、要讓實驗的結果接近我們理論的推導，表面的光滑平整不是最重要的關鍵，而是導電球體的半徑質量比的適當值。
- 五、綜合以上結論，實驗的結果基本上完全符合我們的理論推導結果，但是我們的理論所下的基本假設是佔有體積的導體球自身的介電係數不影響電場分布，經實驗結果交叉比對後，我們發現球體積也是影響實驗斜率的因素，此因素可用常數修正項 $Z(R)$ 修正，但不影響整體的正比關係。

展望

本文的實驗當中我們掌握到了導電球運動的一些基礎規則，將這些規則加以應用，可以製作成是一個新型的計時器或是節拍器，這將是一個不同於以往電動機(振動或震盪)需要依靠磁力的驅動機制。本次實驗所製作的富蘭克林鈴鐺是使用主動接電的方式使導電球來回震動(溼度不影響實驗的結果，但會影響能讓裝置啟動的初始電壓)。若無強迫供電的方式，實際上也能利用帶電物體靠近使用感應起電方式使金屬板帶電的裝置，但是受限於環境濕度往往過高，導電球無法順利擺動，而且如何將帶電物體做為控制變因也是一則問題，未來我們期望能將這些問題進一步研究感應起電與濕度的關係，發展出一套量測濕度的方式。

在 Krotkov(2011)的討論中，有探討電壓與振動頻率的關係，但都是以質化的結果呈現。但本科展以高中物理程度的運動方程配合靜電學所推導的簡單理論符合實驗結果，而且使用的材料讓球反彈後初速度接近零，讓理論更簡單，而且有更深入探討半徑/質量比、板距及表面材質等。本文最大的突破在我們以高中物理知識推導出運動方程式，因此更具體的結論呈現，或許能夠直接運用在高中課程的實驗或是成為科普推廣的演示範例。

參考資料

- 一、高涌泉等著(2016)。普通高級中學選修物理(上冊)。新北市，龍騰出版。
- 二、wiki-Franklin_bell。網址：https://en.wikipedia.org/wiki/Franklin_bells
- 三、Franklin Bells。網址：<https://www.upsbatterycenter.com/blog/how-to-make-franklins-bells>
- 四、R. V. Krotkov, M. T. Tuominen, and M. L. Breuer(2001). "Franklin's Bells" and charge transport as an undergraduate lab. *American Journal of Physics* 69, 50.
- 五、YouTube 影片。【美英物理】288 -高三選修物理(上)|6-0 靜電現象_課程。

附錄、原始數據

(實驗一)電壓實驗:鋁箔球(2cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
1470	1.4	0.714286	2.8
3390	2.1	0.47619	4.2
4740	3.2	0.3125	6.4
6660	5.3	0.188679	10.6
8130	6.2	0.16129	12.4
8820	7.5	0.13333	15

(實驗一)電壓實驗：鋁箔保麗龍球(2cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
1470	3.066667	0.326087	6.133333
3390	3.5	0.285714	7
4740	9	0.111111	18
6660	10.4	0.096154	20.8
8130	11.5	0.086957	23

(實驗一)電壓實驗：鋁箔球(1.75cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
1470	1.533333	0.652174	4.6
3390	2.533333	0.394737	7.6
4740	3.266667	0.306122	9.8
6660	4.133333	0.241935	12.4
8130	4.6	0.217391	13.8
8820	5.03333	0.19868	15.1

(實驗一)電壓實驗：鋁箔保麗龍球(1.75cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
1470	2.533333	0.394737	7.6
3390	3.833333	0.26087	11.5
4740	7.6	0.131579	22.8
6660	9.066667	0.110294	27.2
8130	10.4	0.096154	31.2

(實驗一)電壓實驗：鋁箔球(1.5cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
3050	2	0.5	8
3270	2.2	0.45455	8.8
6320	3.8	0.26316	15.2
8820	4.66667	0.21428	18.6667

(實驗一)電壓實驗：鋁箔球(1.25cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
3270	1.66667	0.6	8.3333
6320	2.4	0.416667	12
8820	3.06667	0.326087	15.3333

(實驗一)電壓實驗：鋁箔球(1cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
1470	1	1	6
3390	1.4	0.714286	8.4
4740	1.9	0.526316	11.4
6660	2.26667	0.441176	13.6
8130	2.5	0.4	15
8820	2.8333	0.35294	17

(實驗一)電壓實驗：鋁箔保麗龍球(1cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
1470	1.2	0.833333	7.2
3390	2	0.5	12
4740	3.1	0.322581	18.6
6660	3.5	0.285714	21
8130	3.6	0.277778	21.6

(實驗一)電壓實驗：鋁箔球(0.45cm) 繩長：48cm 鋁板間距：5cm

電壓	頻率	週期	平均速度 cm/s
3050	1.13333	0.88235	9.293
3270	1.2	0.83333	9.84
5570	1.9	0.5263	13.94
6320	1.7	0.588235	15.853
8820	1.933333	0.5172	15.58

(實驗二)板距實驗：鋁箔球(1cm) 繩長：48cm 電壓：3270V

版距	頻率	週期	週期平方
3	4.1666667	0.24	0.0576
4	1.9	0.526316	0.277008
5	1.4	0.714286	0.510204
6	1.1333333	0.882353	0.778547
6.5	1.0333333	0.967742	0.936524
7	0.9666667	1.034483	1.070155
7.5	0.9333333	1.071429	1.147959
8	0.9333333	1.071429	1.147959

(實驗二)板距實驗：鋁箔保麗龍球(1cm) 繩長：48cm 電壓：3270V

版距	頻率	週期	週期平方
3	4.4333333	0.225564	0.050879
4	2.5333333	0.394737	0.155817
5	1.9	0.526316	0.277008
6	1.5333333	0.652174	0.425331
6.5	1.2333333	0.810811	0.657414
7	1	1	1
7.5	1	1	1
8	0.9666667	1.034483	1.070155

(實驗二)板距實驗：：鋁箔球(1cm) 繩長：48cm 電壓：6660V

版距	頻率	週期	週期平方
3	3.6	0.277778	0.07716
4	2.4	0.416667	0.173611
5	2	0.5	0.25
6	1.5	0.666667	0.444444
6.5	1.3	0.769231	0.591716
7	1.2	0.833333	0.694444
7.5	1.1333333	0.882353	0.778547
8	1.1	0.909091	0.826446

(實驗二)板距實驗：：鋁箔保麗龍球(1cm) 繩長：48cm 電壓：6660V

版距	頻率	週期	週期平方
3	13.6	0.073529	0.005407
4	4.7	0.212766	0.045269
5	3.6666667	0.272727	0.07438
6	1.9	0.526316	0.277008
6.5	1.6666667	0.6	0.36
7	1.4	0.714286	0.510204
7.5	1.3	0.769231	0.591716
8	1.2	0.833333	0.694444

(實驗三)球體實驗：鋁箔球 繩長：48cm 鋁板間距：5cm 輸出電壓：3270V

半徑	質量	頻率	週期	平均速率 V	V 平方	R/M
0.45	0.65	1.066666667	0.9375	8.746666667	76.50417778	0.692307692
1	1.3	1.466666667	0.681818	8.8	77.44	0.769230769
1.25	1.85	1.6	0.625	8	64	0.675675676
1.5	2.13	2	0.5	8	64	0.704225352
1.75	3.28	2.4	0.416667	7.2	51.84	0.533536585
2	4.13	3.4	0.294118	6.8	46.24	0.484261501

(實驗三)球體實驗：鋁箔保麗龍球 繩長：48cm 鋁板間距：5cm 輸出電壓：3270V

半徑	質量	頻率	週期	平均速率 V	V 平方	R/M
0.5	0.05	1.2	0.8333333	9.6	92.16	10
0.75	0.18	1.733333333	0.5769231	12.13333	147.2178	4.166667
1	0.26	2.4	0.4166667	14.4	207.36	3.846154
1.25	0.5	3.066666667	0.326087	15.33333	235.1111	2.5
1.5	0.79	3.5	0.2857143	14	196	1.898734
1.75	1.02	4.7	0.212766	14.1	198.81	1.715686
2	1.61	6.933333333	0.1442308	13.86667	192.2844	1.242236

(實驗三)球體實驗：鋁箔球 繩長：48cm 鋁板間距：5cm 輸出電壓：6660V

半徑	質量	頻率	週期	平均速率 V	V 平方	R/M
0.45	0.65	1.5	0.666667	12.3	151.29	0.692307692
1	1.3	2	0.5	12	144	0.769230769
1.25	1.85	2.233333333	0.447761	11.16666667	124.6944444	0.675675676
1.5	2.13	2.7	0.37037	10.8	116.64	0.704225352
1.75	3.28	3.266666667	0.306122	9.8	96.04	0.533536585
2	4.13	4.7	0.212766	9.4	88.36	0.484261501

(實驗三)球體實驗：鋁箔保麗龍球 繩長：48cm 鋁板間距：5cm 輸出電壓：6660V

半徑	質量	頻率	週期	平均速率 V	V 平方	R/M
0.5	0.05	1.7	0.5882353	13.6	184.96	10
0.75	0.18	2.433333333	0.4109589	17.03333	290.1344	4.166667
1	0.26	3.5	0.2857143	21	441	3.846154
1.25	0.5	4.166666667	0.24	20.83333	434.0278	2.5
1.5	0.79	5.033333333	0.1986755	20.13333	405.3511	1.898734
1.75	1.02	8.2	0.1219512	24.6	605.16	1.715686
2	1.61	10.4	0.0961538	20.8	432.64	1.242236

(實驗五)原始數據

濕度 \ 半徑	0.5cm	2cm	1.5cm	1cm	1.75cm
60%	36	117	69	48	78
65%	37	118	64	47	69
65%	34	112	64	43	78
71%	35	106	63	44	79
79%	32	102	60	44	72

【評語】 051811

本實驗作品主要探討富蘭克林鈴鐺的運作，特別是不同電壓、不同板距、恢復係數以及濕度對球體擺動之影響以及不同球體對擺動之影響。主題清楚，實驗設計簡單，分析數據很仔細。只是可能需要更仔細的思考實驗數據與理論分析的差異，對球的電力可能並不只是由兩電板的距離決定。

摘要

本實驗是利用平行電板通電後產生電場，導電球會因電荷傳導與靜電感應等因素而在電場之中來回震盪的特性進行相關物理量的調整進行研究。各種變因包括導電球質量、電壓大小、球體半徑、不同球體、不同板距等等，我們量測來回擺動數次所需要的時間計算平均速率，再以靜電學與運動學方程式推導，並分析影響實驗的各個因素。整體研究結果發現，導電球運動時，質量較重的導電球因為擺動時無駐波、自轉的現象產生，能符合我們推導之理論。此實驗裝置類似於馬達，通電後可使裝置持續運動，但是並沒有使用到電流的磁效應，屬於相當新穎的電動裝置。

壹 研究動機

我們在YouTube上看到網友在家簡易製作的小實驗—富蘭克林的鈴鐺。實驗中用隨手可得的可樂罐擺放於兩側，中間以繩懸掛拉環，通電後便能來回擺動形成鈴鐺，基於好奇的我們便上網搜尋相關資訊，漸漸地對其產生興趣，然而發現網路上沒有更深入的相關研究，於是決定動手做實驗，於是我們使用電蚊拍、金屬板與導電球來進行實驗設計，了解導電球在平行板間運動的特性。

貳 研究目的

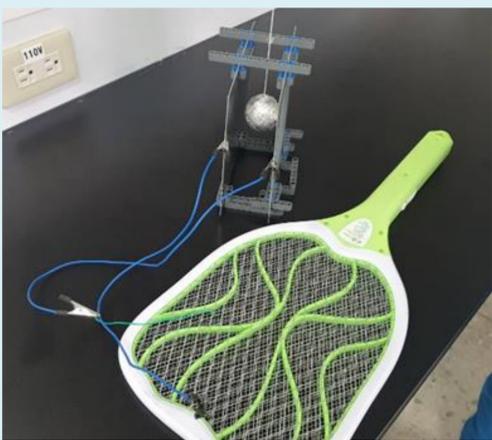
探討不同電壓、板距、球體、恢復係數及溼度對球體擺動之影響

參 研究設備與器材

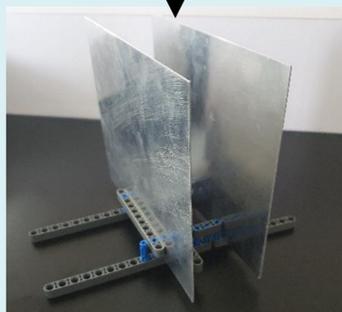
- 一、攝影器材：手機、腳架。
- 二、供電裝置：不同款式電蚊拍(1470V、3270V、3390V)，串聯組合能提供多種電壓。
- 三、實驗裝置：金屬鋁板(20*20cm²)、鋁箔保麗龍球、鋁箔球、樂高積木、玉線、溼度計。
- 四、鋁箔[R(cm), m(g)]：[0.45, 0.65]、[1, 1.3]、[1.25, 1.85]、[1.5, 2.13]、[1.75, 3.28]、[2, 4.13]
- 五、鋁箔保麗龍球[R(cm), m(g)]：[0.5, 0.05]、[0.75, 0.18]、[1, 0.26]、[1.25, 0.5]、[1.5, 0.79]、[1.75, 1.02]、[2, 1.61]

肆 研究方法與過程

一、實驗儀器架設及改善過程



- ☑電蚊拍連接平行電板以樂高基座穩固裝置。
- ☑具高電壓低電流特性且內部具安全裝置。



穩定性提高
數據較為集中

二、找適合的導電球材料

我們以鋁箔自製成的鋁球，與鋁箔包覆保麗龍的球體(以下簡稱鋁箔保麗龍球)做為實驗材料，並比較不同半徑大小的球體、不同電壓與不同板距之間造成的頻率、速率等等的物理關係。

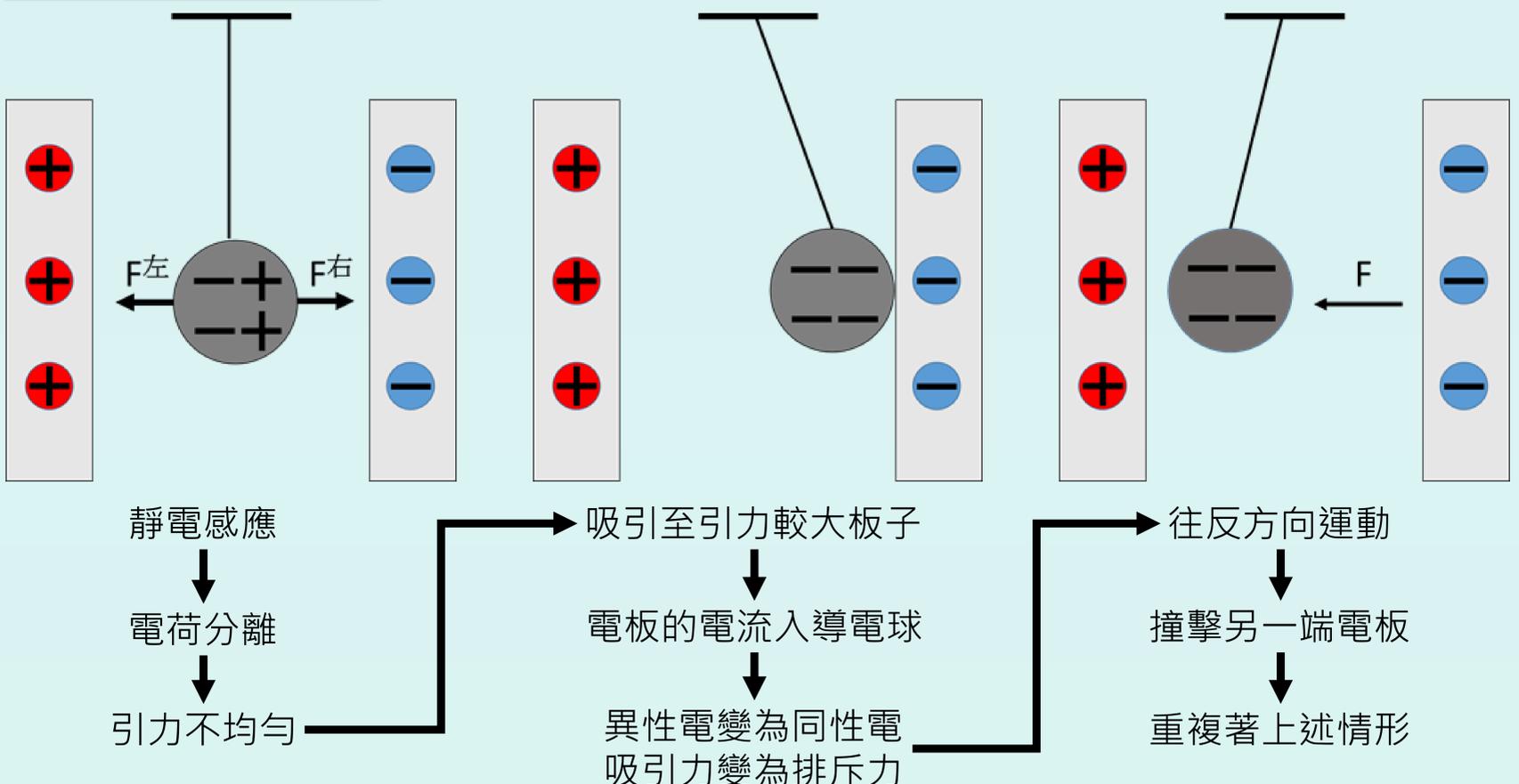


以3D列印
制作模具



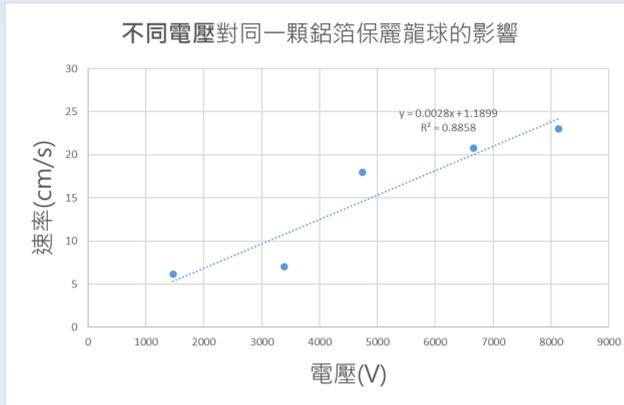
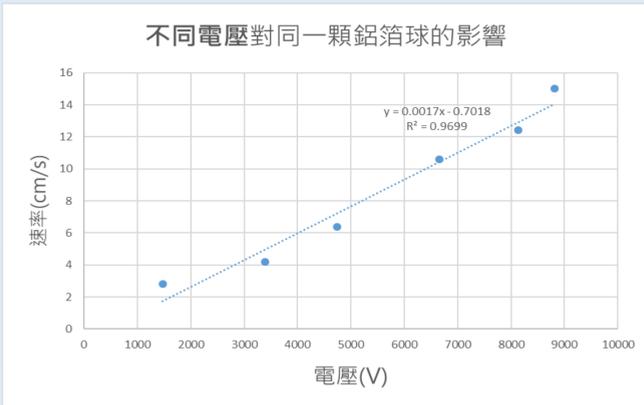
鋁箔球與鋁箔包覆保麗龍球

三、實驗機制



伍 研究結果

一、探討不同電壓對球體擺動之平均速率的影響

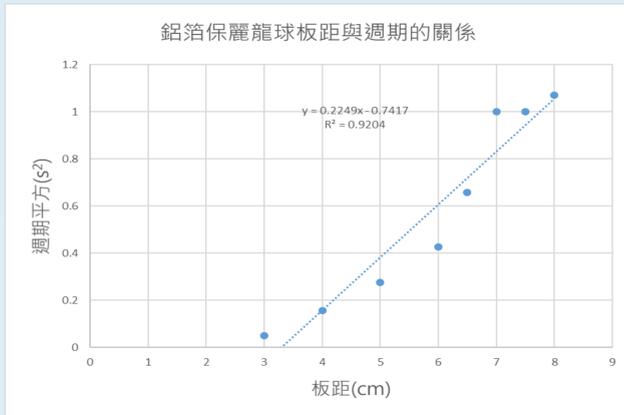
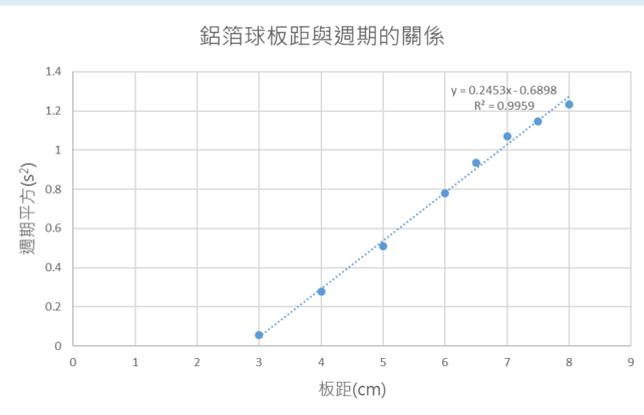


我們列舉半徑2cm圖示如下：可看出鋁箔球以及鋁箔保麗龍球電壓皆與速率呈正線性關係。

	鋁箔球	鋁箔保麗龍球
半徑(cm)	R ²	R ²
1	0.974	0.91
1.75	0.99	0.92
2	0.97	0.885

整體具有相關性

二、探討板距對擺動週期之影響

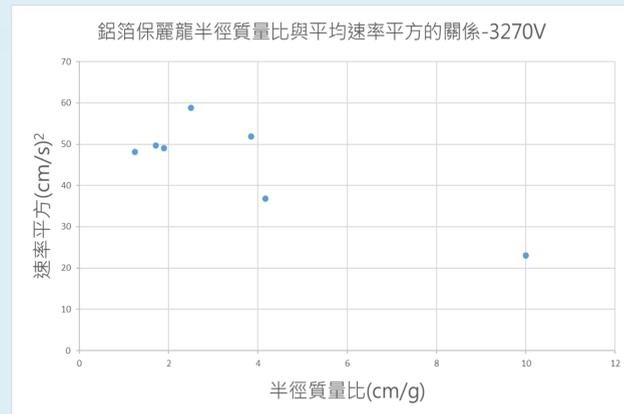
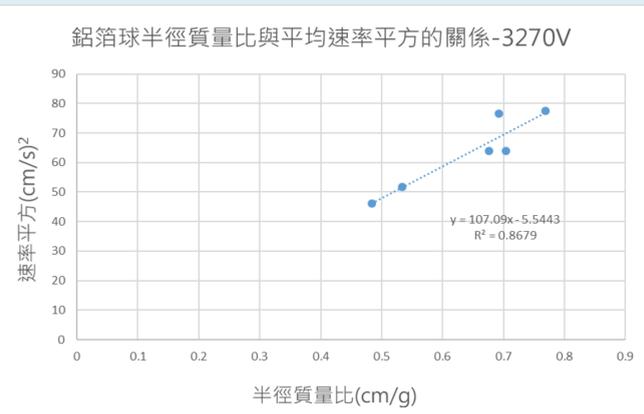


我們列舉電壓3270V半徑圖示如下：可看出鋁箔球以及鋁箔保麗龍球板距皆與週期平方呈正線性關係。

	鋁箔球	鋁箔保麗龍球
電壓(V)	R ²	R ²
3270	0.995	0.92
6660	0.97	0.92

整體具有相關性

三、探討不同球體對擺動之影響



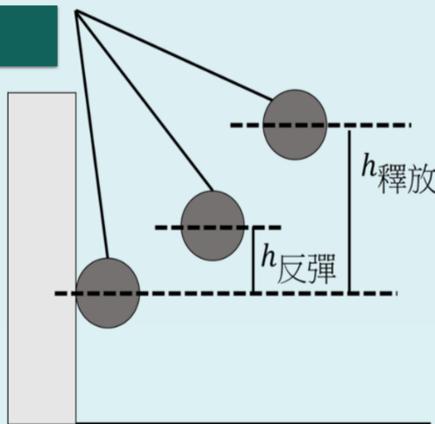
我們列舉電壓3270V圖示如下：可看出鋁箔球半徑和質量之比值與平均速率平方呈線性關係，然而鋁箔保麗龍球半徑和質量之比值與平均速率平方較無規律。

	鋁箔球	鋁箔保麗龍球
電壓(V)	R ²	R ²
3270	0.86	較無規律
6660	0.775	較無規律

僅鋁箔球具有相關性

四、探討恢復係數之影響

衝擊擺方式架設實驗裝置，以慢速錄影截取其釋放高度與反彈高度像素之比值。由上表可以觀察到鋁箔球之恢復細數明顯較低，且球體半徑越大其恢復係數則越低。



論鋁箔球與鋁箔保麗龍球之差異

1. 質量差異：鋁箔球 > 鋁箔保麗龍球。
2. 恢復係數：鋁箔保麗龍球 > 鋁箔球。
3. 整體相關性：鋁箔球 > 鋁箔保麗龍球。
4. 穩定性：鋁箔球 > 鋁箔保麗龍球。

推測鋁箔保麗龍不穩定之原因

1. 質量輕 → 轉動慣量影響較大 → 運動軌跡不固定
2. 擺繩發生駐波現象 → 影響擺動

	鋁箔球	鋁箔保麗龍球	鋁箔球	鋁箔保麗龍球
半徑(cm)	恢復係數 平均±標準差	恢復係數 平均±標準差	半徑 (cm)	恢復係數 平均±標準差
0.5	0.214±0.005	0.422±0.008	1.5	0.188±0.005
1.0	0.206±0.001	0.320±0.006	1.75	0.173±0.008
1.25	0.198±0.001	0.299±0.008	2.0	0.169±0.003

綜合以上所說，我們推論鋁箔球整體穩定度較鋁箔保麗龍球好，這也是為什麼在不同球體實驗中，兩者相關性有截然不同的結果，因此以下的分析結果，為了排除其他影響因素，我們將以鋁箔球作為理論分析的主要樣本。

陸 討論

一、理論分析

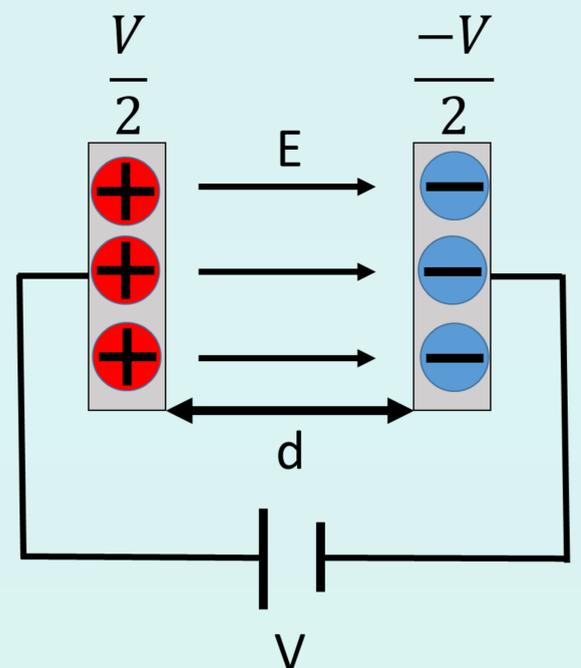
(一)、基本假設

1. 平行電板長寬夠大，且電板上電荷均勻分布，導電球不會受邊際效應影響，且導體球自身的介電係數不會影響空間中的電場分布。
2. 導電球在運動過程中只受庫倫力作用，且距離極短空氣阻力可忽略。
3. 將連接電源的電板電源強迫供電，則電板的電位電量是一定值。

(二)、論導電球在電板間受到的庫倫力

我們架設的裝置如右圖，令電源提供的電壓為V，電板間距為d，根據平行電板電場方程式，可得知電板之間存在的均勻電場E為：

$$E = \frac{V}{d}$$

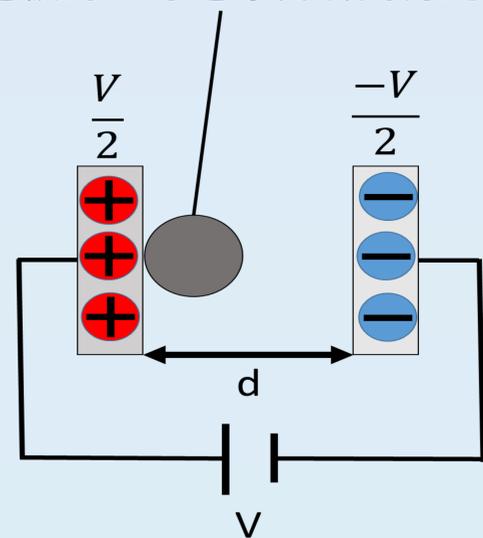


若此裝置中間懸掛著一顆質量為 m 半徑為 R 的導電球，當電池端電壓為 V 時，電源兩極連接至電板後形成斷路，因此電板本身的電位分別為 $\frac{+V}{2}$ 與 $\frac{-V}{2}$ 。當導電球碰到電板時，導電球會瞬間得到和電板相同的電位，由導電球的電位公式

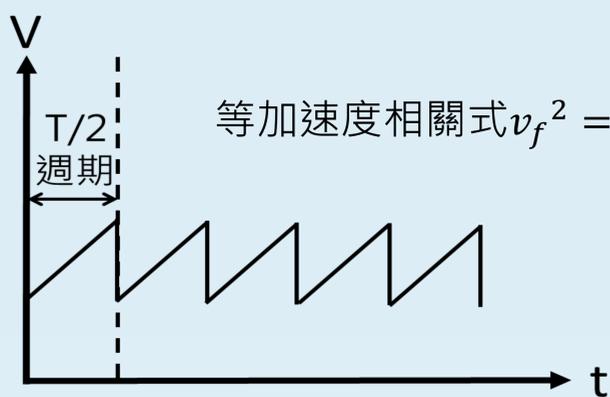
$$\frac{+V}{2} = \frac{k(+q)}{R} \text{ 或 } \frac{-V}{2} = \frac{k(-q)}{R} \xrightarrow{\text{移項整理得}} \pm q = \frac{\pm RV}{2k}$$

(q 為導電球身上所具有的電量)

$$\text{得導電球所受庫倫力 } F_e = |q|E = \frac{\pm RV^2}{2kd} \text{ 加速度為: } a = \frac{F_e}{m} = \frac{RV^2}{2kdm}$$



(三)、論導電球在電板間的運動情形



$$\text{移項整理得 } v_i = \alpha v_f \text{ } \alpha \text{ 球恢復係數} \xrightarrow{\text{等加速度相關式 } v_f^2 = v_i^2 + 2as} v_f^2(1 - \alpha^2) = \frac{RV^2}{kdm}(d - 2R)$$

維持碰撞頻率穩定的原因為每次碰撞金屬板後速度的消耗。速率隨時間的關係如右圖所示：

假設此金屬球只受庫倫力作用 → 做等加速度運動

二、實驗結果之細部分析

(一) 探討不同電壓對球體擺動之平均速率影響(實驗一)的理論探討

由上式整理可得理論運動方程式

$$v = \sqrt{\frac{R}{kdm}(d - 2R)} \times \frac{(1 + \alpha)}{2} V$$

比較理論值與實際值的關係，我們認為球體的介電係數會影響電場分佈，因而提出修正項 $Z(R)$ 修改方程式



$$v = Z(R) \sqrt{\frac{R}{kdm}(d - 2R)} \times \frac{(1 + \alpha)}{2} V$$

半徑	理論值	實驗值	Z(R)=實驗值/理論值
0.45 cm	1.524×10^{-5}	1.149×10^{-5}	0.7535
1 cm	1.366×10^{-5}	1.445×10^{-5}	1.0583
1.25 cm	1.161×10^{-5}	1.259×10^{-5}	1.0844
1.5 cm	1.051×10^{-5}	1.861×10^{-5}	1.7709
1.75 cm	7.821×10^{-6}	1.395×10^{-5}	1.7838
2 cm	6.603×10^{-6}	1.675×10^{-5}	2.7617

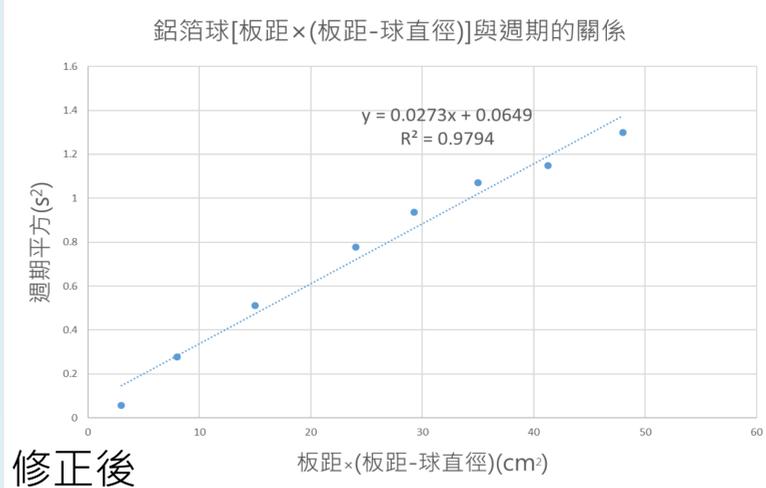
(二) 探討板距對擺動週期之影響(實驗二)的理論探討

$$\text{移動距離 } (d - 2R) = \frac{(1 + \alpha)}{2(1 - \alpha)} \frac{RV^2}{2kdm} t^2$$

移項整理得 ↓

$$d(d - 2R) = \frac{(1 + \alpha)}{2(1 - \alpha)} \frac{RV^2}{2km} \left(\frac{T}{2}\right)^2$$

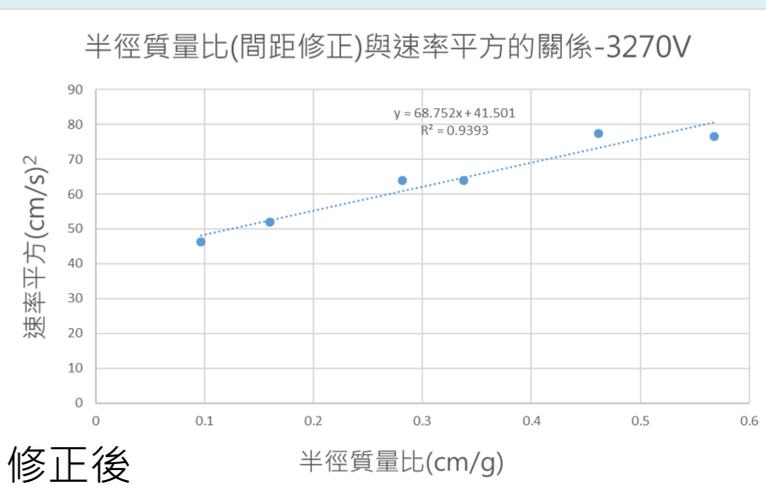
因此我們將 $d(d - 2R)$ 與 T^2 以Excel整理成圖表如左，與原實驗結果差異不大。



(三) 探討不同球體對擺動之影響(實驗三)的理論探討

原來的實驗結果我們只考慮半徑與質量，但經由公式推導後我們發現，須乘上 $\frac{d-2R}{d}$ 的修正才符合我們理論的假設，修正後相關性就有提升

不同球體實驗(僅鋁箔球)	修正前	修正後
電壓(V)	R^2	R^2
3270	0.8679	0.9393
6660	0.770	0.9877



柒 結論

- 由不同電壓對球體擺動之影響實驗結果得知，其他條件固定下，其平均速率(或是末速率)會與電壓成正比。
- 由不同板距對其擺動之影響的實驗結果結合高中所學運動學公式，得其運動型態為來回擺動的等加速度運動。
- 由不同球體對其擺動之影響的實驗結果可知，其他條件固定下，其速率平方會與其半徑與質量之比值成正比。
- 綜合以上結論，我們的理論推導結果發現球體積也是影響實驗斜率的因素，此因素可用常數修正項 $Z(R)$ 修正，但不影響整體的正比關係。