

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

佳作

051808

雙滾軸間的摩擦振盪

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者： 高二 王嘉德 高一 楊翔寓	指導老師： 盧政良 高執貴
-------------------------	---------------------

關鍵詞：雙滾軸、阻尼振盪、接觸形變

摘要

一次生活中的經驗促成了這一次的研究,我們探討了在不同狀況下(如:管重、管長、轉速、動摩擦係數、滾筒間的距離…)PVC 管的運動狀況。進而發現,理論與真實的差距,在真實情況,PVC 管並不會是不斷在做 S.H.M.,而是逐漸衰減,於是我們順水推舟,開始向 PVC 管的衰減率進行研究。最後,我們發現,管重、管長、轉速均不會影響 PVC 管的週期,與其相關的是接觸面間的動摩擦係數及滾筒間的距離。而後,再將結果與模擬進行比較,分析其差異之影響因素。

壹、 研究動機

一次在超商中把熱狗機中的熱狗放成直的,當下覺得很有趣,他會一直往同一個方向跑,但我突然開始想,怎麼樣可以讓熱狗放直的,又可以邊烤而不掉出去呢?



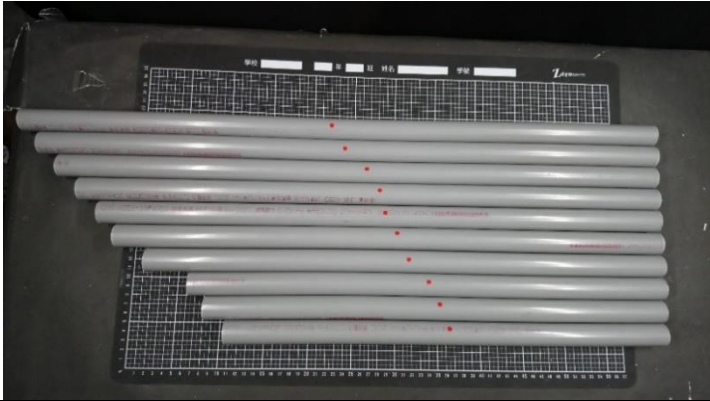

於是,我們便想出了一個好方法,只要把機器上的轉輪往不同方向轉不就可以了嗎,神奇的事這樣一來這跟熱狗竟然開始做簡諧運動?!

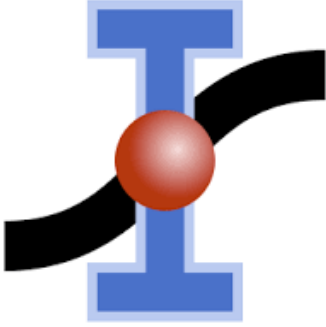

貳、 研究目的

- 一、 觀察並探討不同的質量對 PVC 管週期的影響
- 二、 觀察並探討不同的長度(l)對 PVC 管週期的影響
- 三、 觀察並探討不同的轉速對 PVC 管週期的影響
- 四、 觀察並探討不同的接觸面材質對 PVC 管週期的影響
- 五、 觀察並探討不同的管距($2L$)對 PVC 管週期的影響
- 六、 觀察並探討不同初始位置 PVC 管運動的衰減率

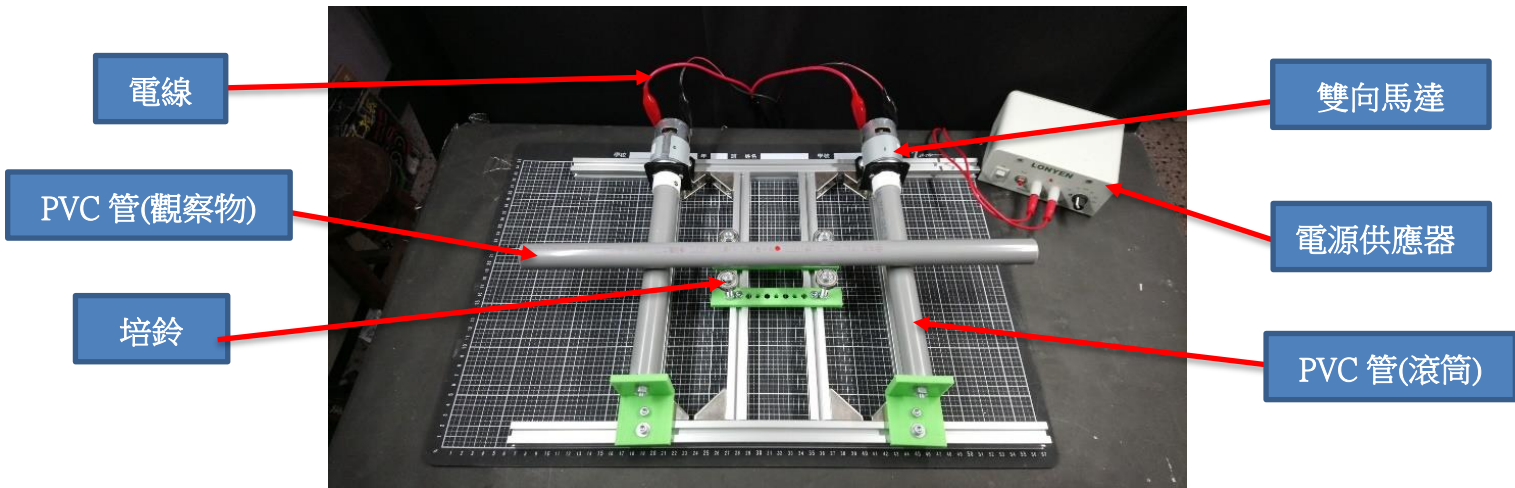
參、研究設備及器材

	器材名稱	數量
相異材質膠帶		5 捆
攝影腳架		1 隻
游標尺		1 隻

Tracker		運動分析 軟件
電子秤		1 台
相異長度 PVC 管 (50、52.5、55…72.5 共 十種長度)		10 隻
捲尺		1 個

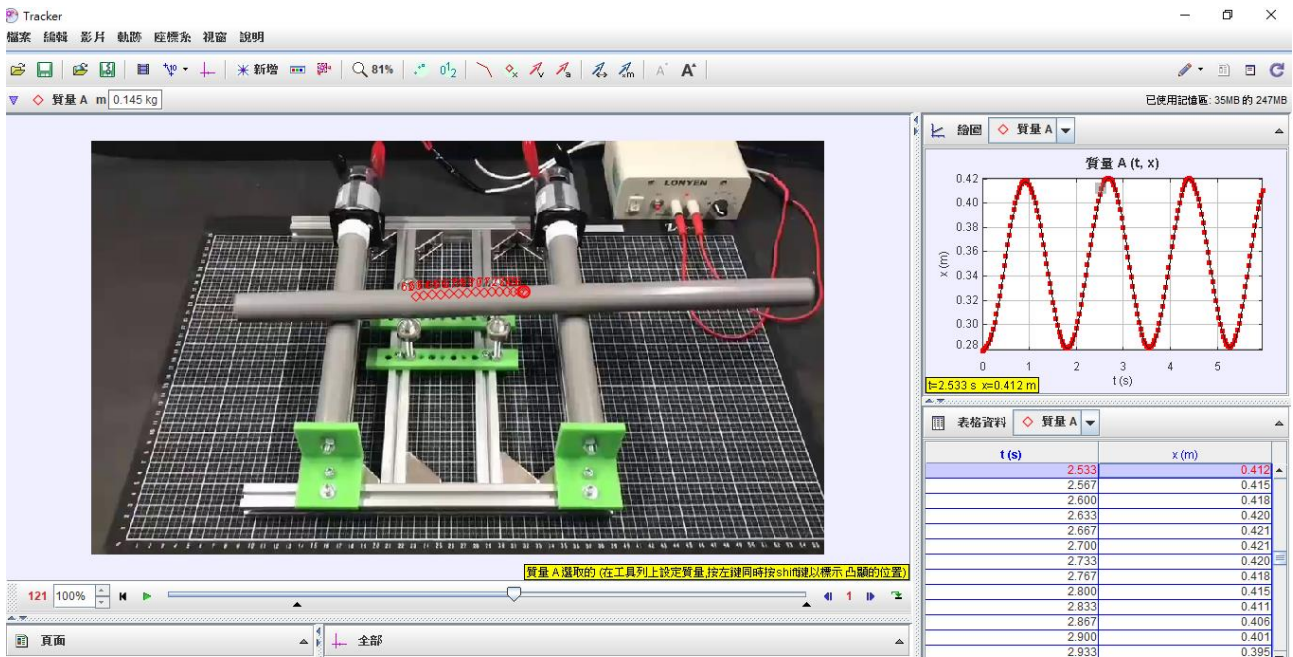
<p>SciDavis</p>		<p>數據繪圖 軟體</p>
<p>木板</p>		<p>1 片</p>

二、實驗裝置及圖示



肆、研究過程與方法

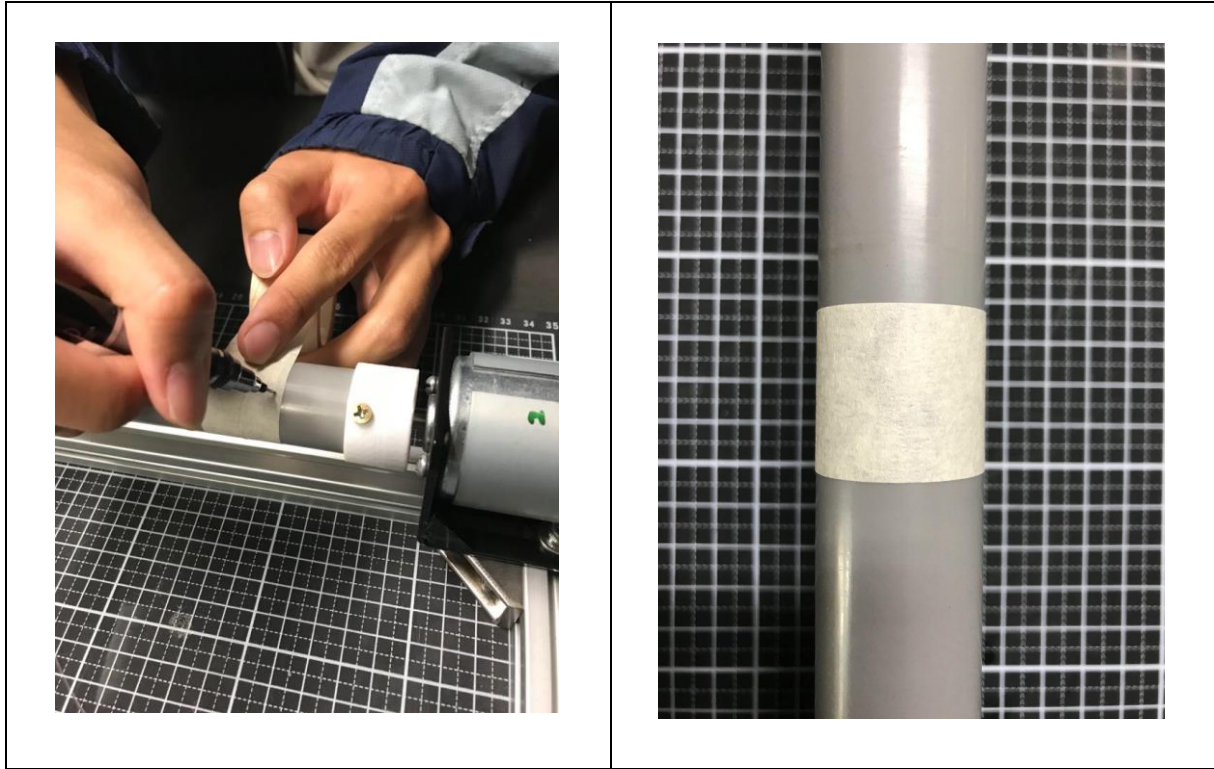
在確立了研究主題後，我們開始假設究竟有那些參數會影響 PVC 管的運動，當然，最容易觀測的無非是週期。於是，我們初步的設想了幾個容易改變的參數:PVC 管的質量、長度，馬達的轉速等等…。經過實驗並錄製成影片後，匯入 Tracker 進行分析，紀錄 PVC 管 x-t 圖中每形成一個波所花費的時間，並把所有數據進行平均，如此便得到 PVC 管在各狀況下的週期。



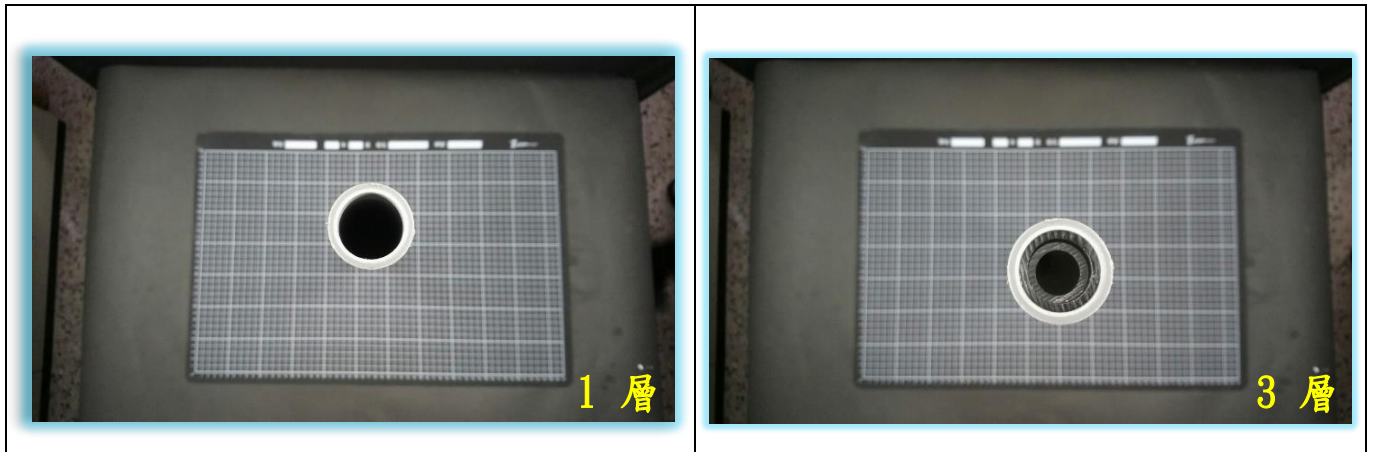
圖一

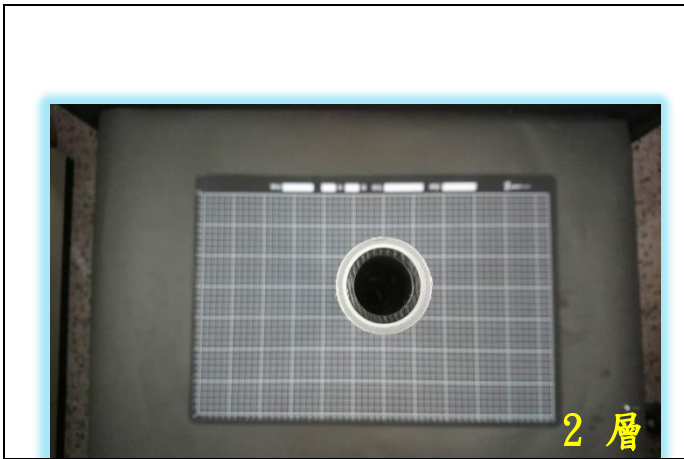
註:這組是實驗在最開始時錄製的，從右上角的 x-t 圖可以發現，其運動軌跡呈現近乎完美的簡諧運動，在此之後，實驗中便不再出現如此完美的 S.H.M.，藉此，我們才了解原來滾筒上的紋路對於 PVC 管的運動影響如此之大。

初步進行預實驗時，我們赫然發現經過一次一次的運動後，接觸面會開始出現刮痕，為確保數據的精確度，我們將滾筒換新，並在每次實驗進行時都在滾筒上貼膠帶，以確保接觸面間的摩擦係數不變。在貼膠帶時，顧慮到其厚度也可能會影響到 PVC 管的運動，於是，在進行膠帶黏貼時，都會在交界面以鉛筆畫上細線，以確保膠帶是完整的一圈包覆在滾筒上頭。

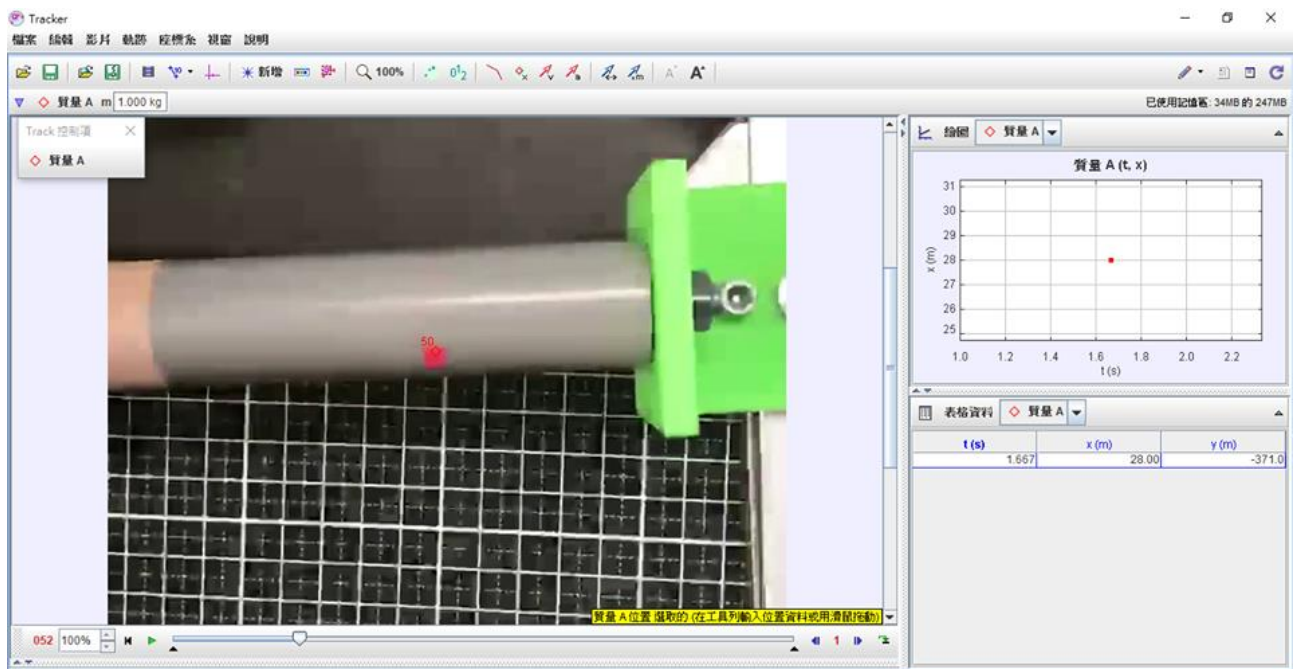


其中，在進行以 PVC 管的質量為操縱變因的實驗時，為了要確保管子的質量儘量分布均勻，於是決定以管子塞入管子的方法進行實驗，並且選擇口徑相差不大的 PVC 管，以確保其在運動時，管間不會相對滑動。(如 P5 圖)





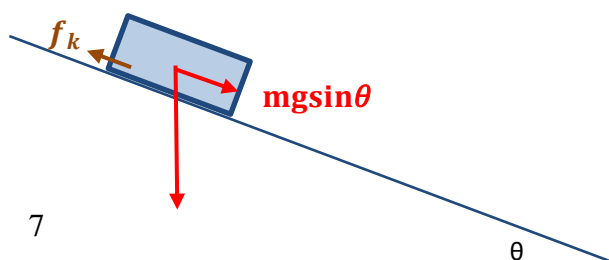
在進行以馬達轉速為操縱變因的實驗時，由於馬達所能觀測到的資訊僅有電壓，於是我們便在滾筒上貼上了紅點並進行錄製，接著利用 tracker 分析出馬達在各相異電壓時的轉速(rad/s)。

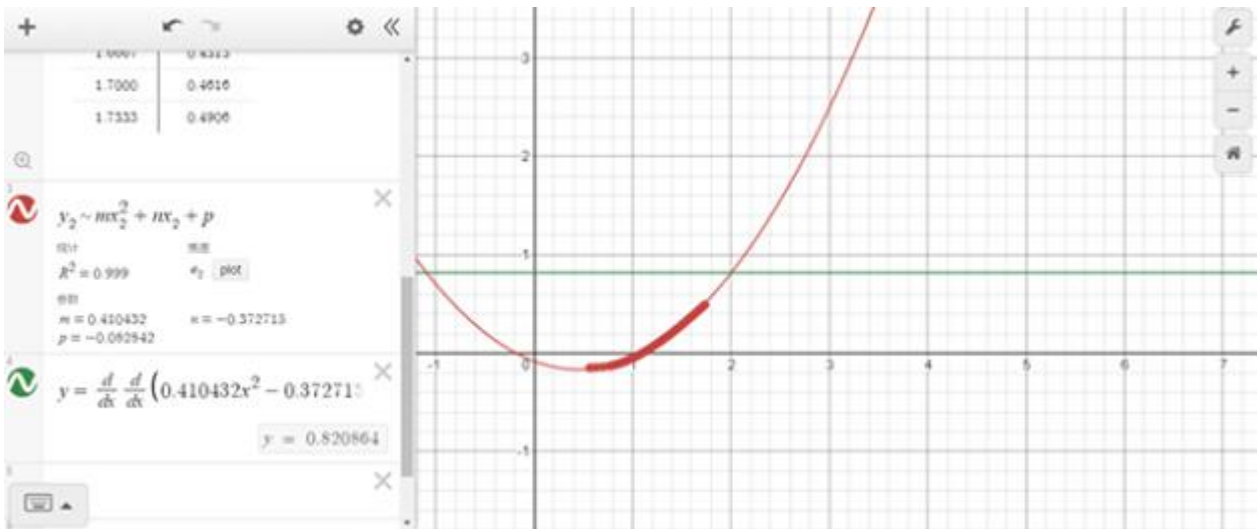


由於其中一個變因是改變 PVC 管與接觸面間的材質，換句話說，就是改變兩者間的動摩擦係數。於是，為取得各膠帶與 PVC 管間的動摩擦係數，我們便利用木板充當斜面，並利用手機軟件量測出斜面與水平面間的夾角，接著將我們所使用的 PVC 管截切一小塊，經過影片錄製並利用 Tracker 進行分析，得到 x-t 圖後，再將數據進行二次微分，如此便能獲得物體的加速度，套入以下的推導結果後，便能得到欲求的動摩擦係數了。

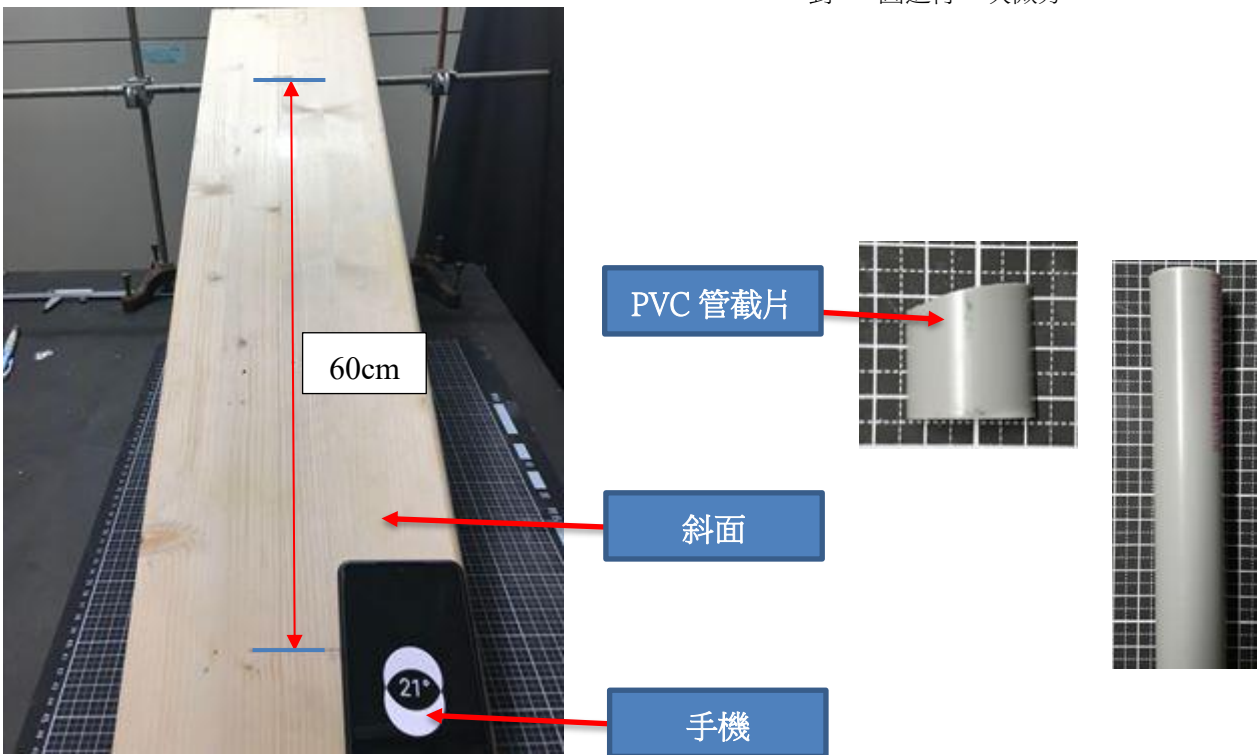
$$\begin{aligned}
 F_t &= ma \\
 &= mg\sin\theta - f_k \\
 &= mg\sin\theta - \mu_k \cdot mg\cos\theta \\
 &= mg(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)
 \end{aligned}$$

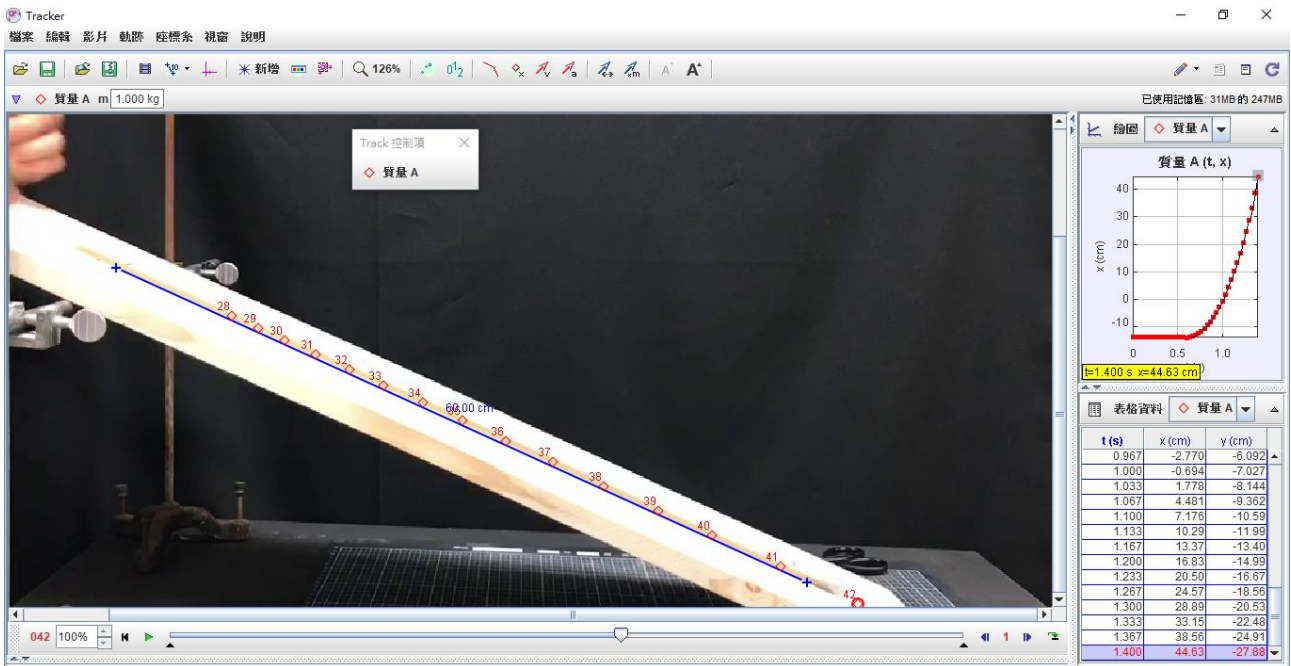
$$\therefore \mu_k = \tan\theta - \frac{a}{g\cos\theta}$$





對 x-t 圖進行二次微分





然而，在進行上述實驗時，我們發現現實狀況並非如模擬時 PVC 管能夠不斷地進行簡諧運動，取而代之的，其振幅會逐漸衰減，最終停止。對於這個現象，我們深感興趣，於是開始著手進行 PVC 管衰減率的研究。首先，在查閱相關文獻及論文後，初步了解阻尼振盪及強迫阻尼振盪的相關原理。接著，我們便開始進行有關衰減率的實驗。透過改變 PVC 管的初始位置，進而發現於相異初始位置時，PVC 管會有不同的衰減率。

二、實驗理論

(一)、簡諧運動推導

將 PVC 管的位移設為 x ，左右兩側的摩擦力分別為 f_R 、 f_L ，而正向力則為 N_R 、 N_L 。此時合力為兩側的磨擦力差。經過以下的推導後可得知:PVC 管的運動為 S.H.M.

$$\Delta f = f_R - f_L$$

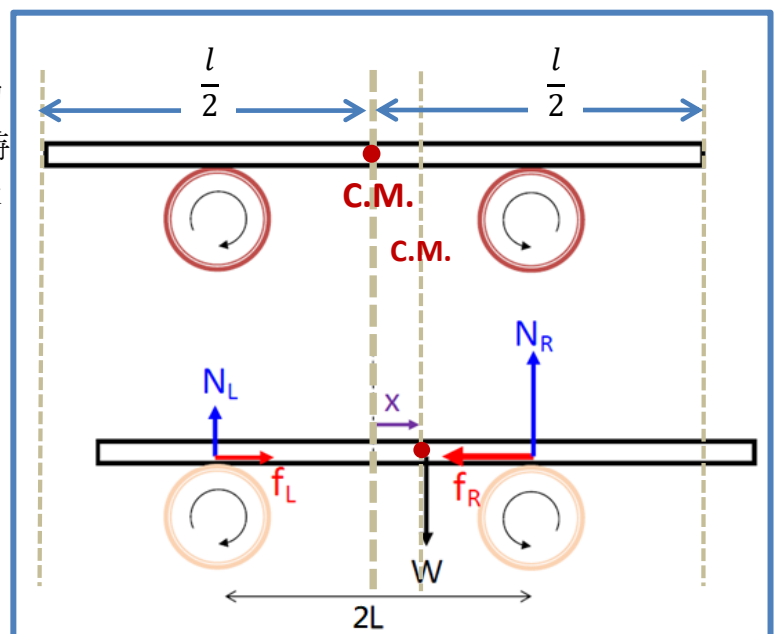
$$= (N_R - N_L)\mu_k$$

$$= \frac{-2x}{2L} mg\mu_k$$

$$= -kx$$

→ S.H.M.

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{mg\mu_k}} \propto \sqrt{\frac{L}{\mu_k}}$$



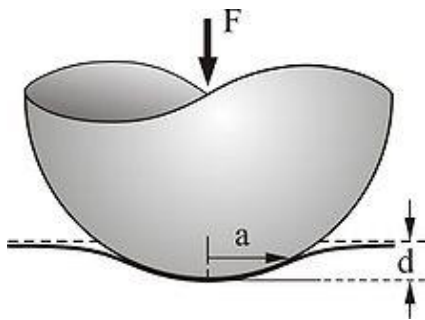
$$\begin{aligned} N_R + N_L &= mg & \rightarrow N_L &= \frac{(L-x)}{2L} mg \\ N_L \cdot 2L &= mg(L-x) & \rightarrow N_R &= \frac{(L+x)}{2L} mg \end{aligned}$$

(二)、接觸力學

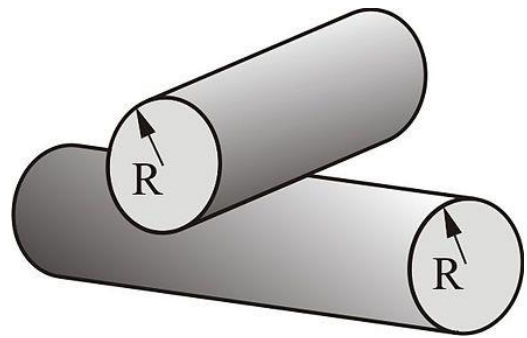
1. 球體和彈性半空間體的接觸

一個半徑為 R 的球體在一個彈性半空間上壓出的凹痕深度為 d ，若產生的接觸區域的半徑為 $a = \sqrt{Rd}$ ，作用力 $F = \frac{4}{3}E^*R^{\frac{1}{2}}d^{\frac{3}{2}}$ 。(如 P5 圖一)

2. 兩個等半徑圓柱體的交叉接觸，該接觸等同於一個半徑為 R 的其體和一個平面的接觸。



圖一

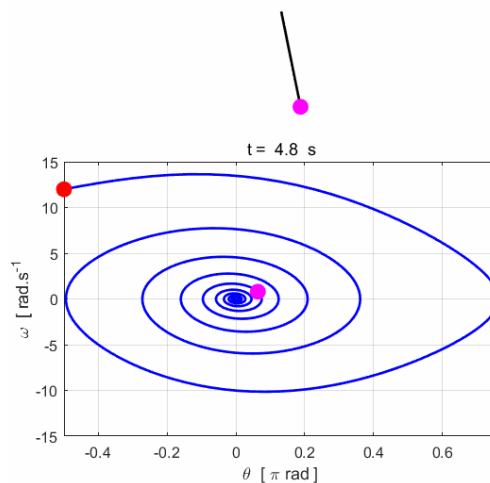


圖二

(三)、阻尼振盪

是指任何振動系統在振動中，由於外界作用（如流體阻力、摩擦力等）和/或系統本身固有的原因引起的振動幅度逐漸下降的特性。

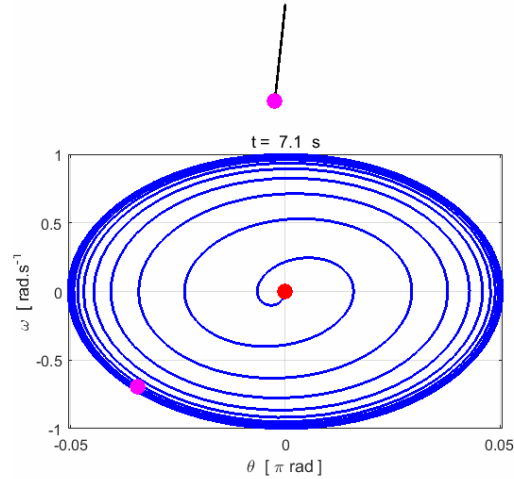
舉單擺來作例子



在我們的系統中，外界作用是來自於上述的形變，造成摩擦力的改變，導致振幅變小。

強迫阻尼運動：共振

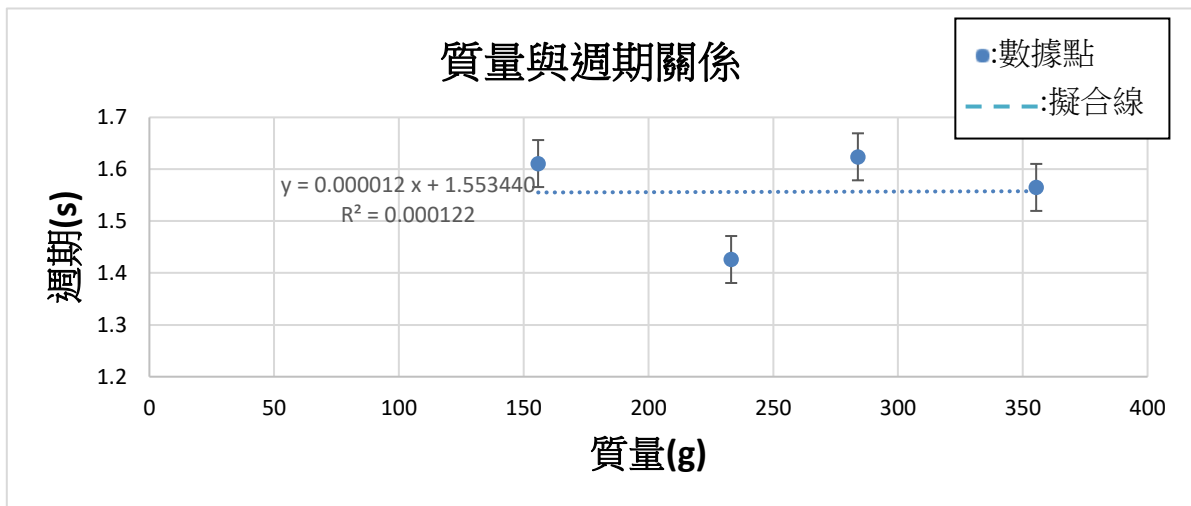
當阻尼力和外力作用在系統上時。阻尼力導致系統能量的耗散。但是，外力可能會增加或減少系統的能量。當外力的頻率等於擺的固有振動頻率時，則會通過外力將最大能量傳遞到系統中。這導致擺的最大振動幅度增加。



在我們的實驗中所出現的強迫阻尼振盪，是因為摩擦力不斷在改變，反推的力不夠大時，造成管子超出了簡諧運動的範圍。

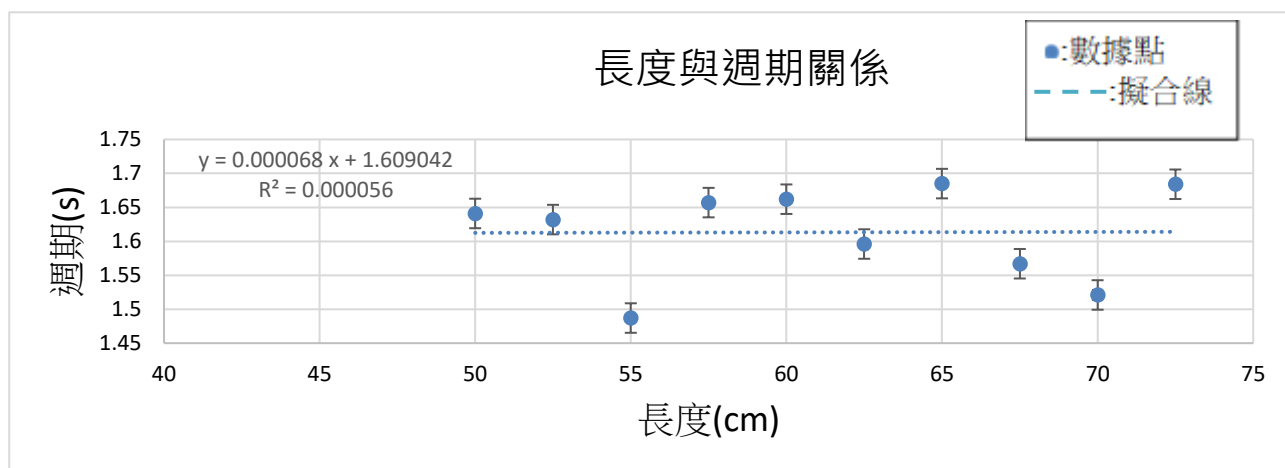
伍、研究結果

一、不同的質量對 PVC 管週期的影響



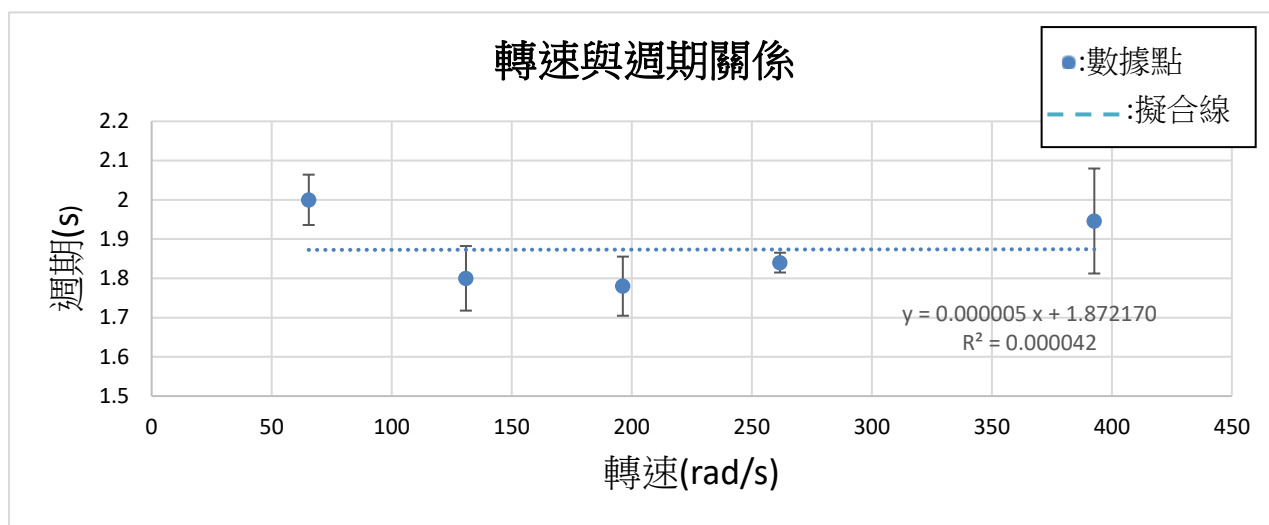
說明: 數據採集完畢並加入擬合線後，發現其圖形幾乎為一水平線，且斜率僅有 0.000012。再將其與先前所推導的理論進行對照，結果吻合。因此，當質量改變時，PVC 管的週期並不會受其影響。

二、不同的長度對 PVC 管週期的影響



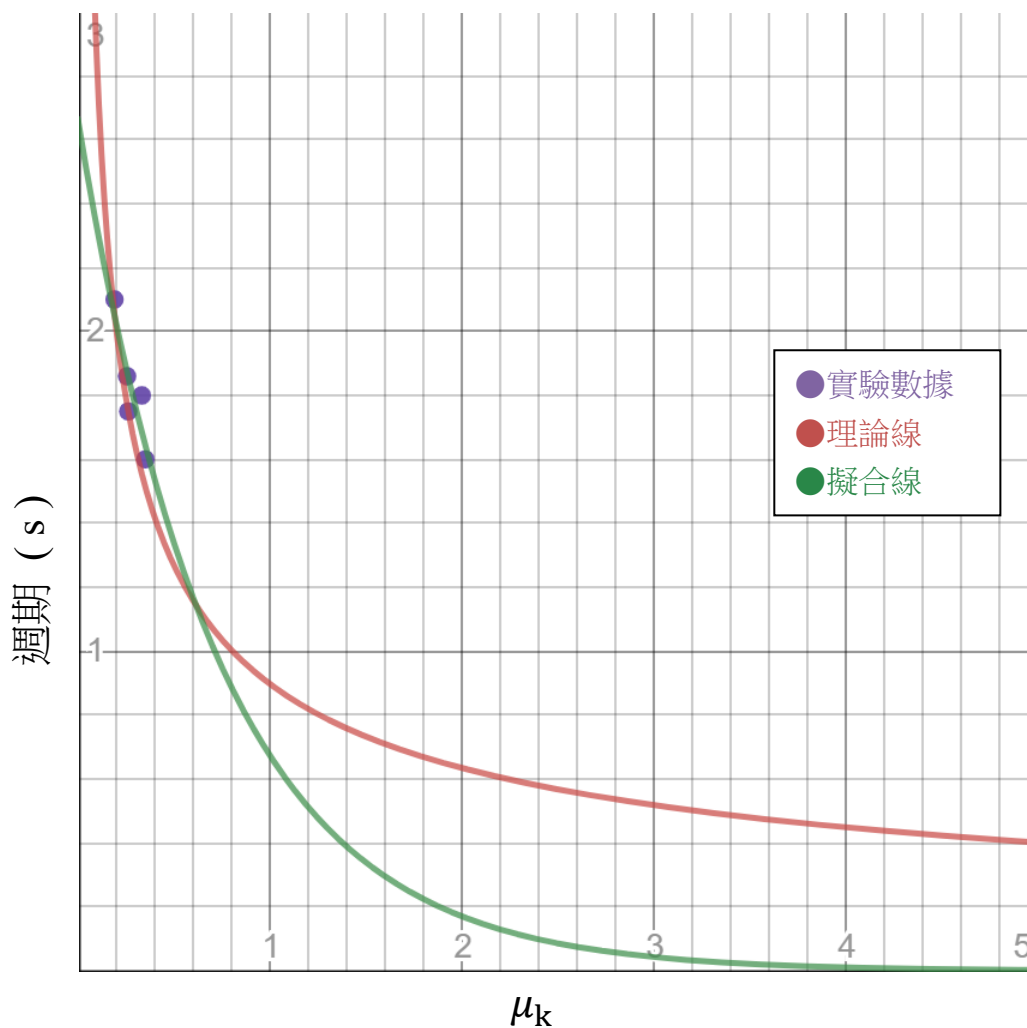
說明: 經過實驗確認質量不會對週期造成影響後, 我們進而改變 PVC 管的管長。將實驗數據匯入並加上擬合線後, 發現其斜率僅有 0.000068, 幾乎是一條水平線。由此可知, 當 PVC 管長改變時, PVC 管的週期並不會受其影響。

三、不同的轉速對 PVC 管週期的影響



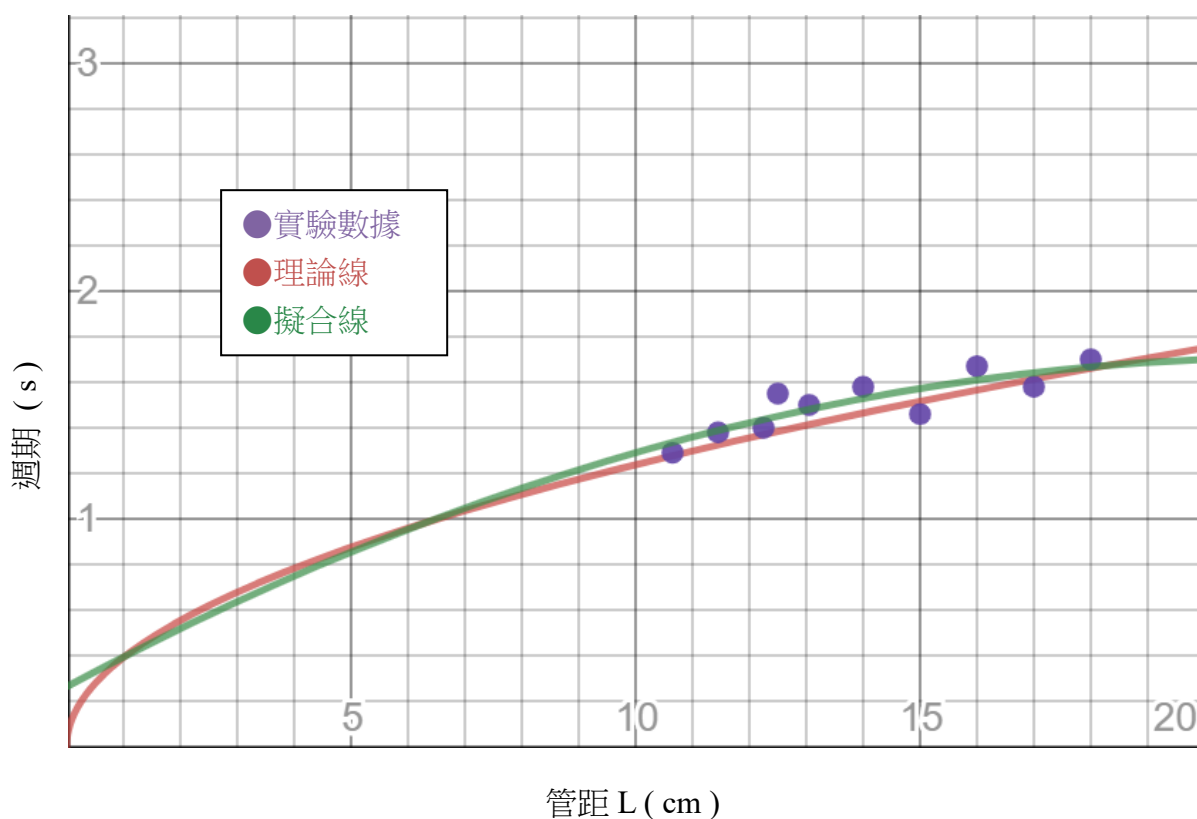
說明: 本實驗於長度為 50cm 的 PVC 管、管距固定為 25cm、摩擦系之下進行, 透過上圖可以得知, 當滾筒的轉速逐漸增加時, PVC 管的週期並不會隨之增加。因此, 滾筒的轉速與 PVC 管的週期無關。

四、不同的接觸面材質對 PVC 管週期的影響



藉由 S.H.M.的推導得知: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\mu_k}}$ ，因此 $g\mu_k T^2 = 4\pi^2 L$ ，理論上，週期與動摩擦係數呈反比關係(如上圖理論線)，經過實驗採集數據後，我們利用數學軟體 Desmos 擬合這些數據點(如上圖擬合線)，我們將管距 L 訂在 20，如此一來，便可將其當作常數來計算。

五、不同的管距對 PVC 管週期的影響



藉由 S.H.M.的推導得知： $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g\mu_k}}$ ，因此 $g\mu_k T = 4\pi^2 L$ ，也就是週期與管距呈現的關係理論線，經過實驗採集數據後，我們利用數學軟體 Desmos 擬合這些數據點(如上圖擬合線)，我們將動摩擦係數訂在 0.262935，也就是淺色紙膠帶的動摩擦係數，如此一來，便可將其當作常數來計算。

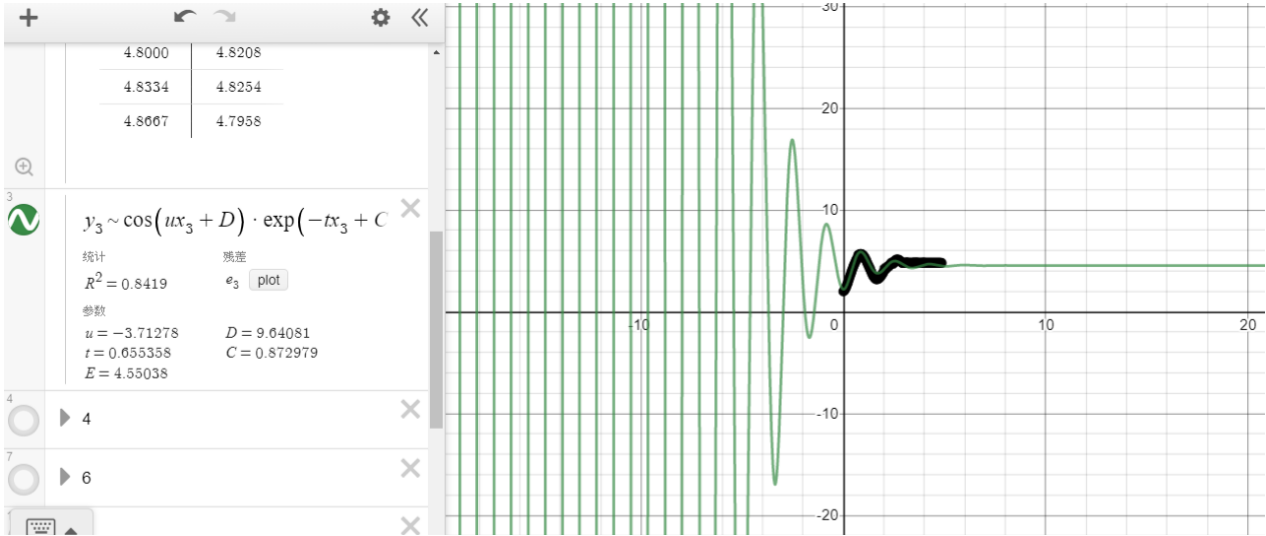
六、PVC 管在相異條件下的衰減率

利用手邊所擁有的不同材質的膠帶進行實驗，發現除了會有阻尼振盪的現象外，在使用某些具有特定紋路或材質的膠帶時，竟然還出現了強迫阻尼振盪。

(一)、阻尼係數 (以接觸面 E 探討)

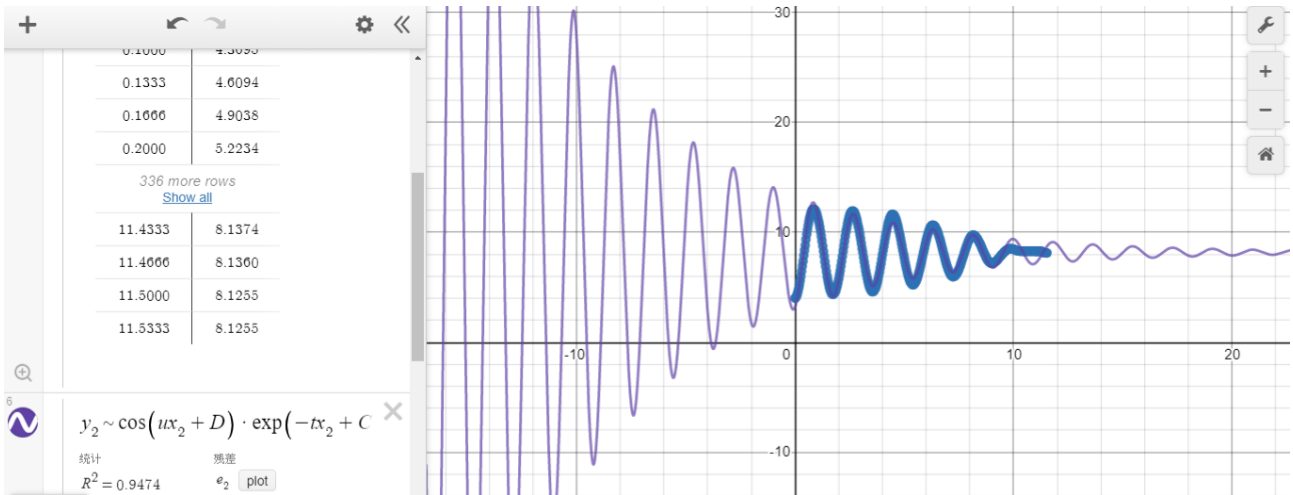
δ 阻尼係數

1. 偏離原點 2cm

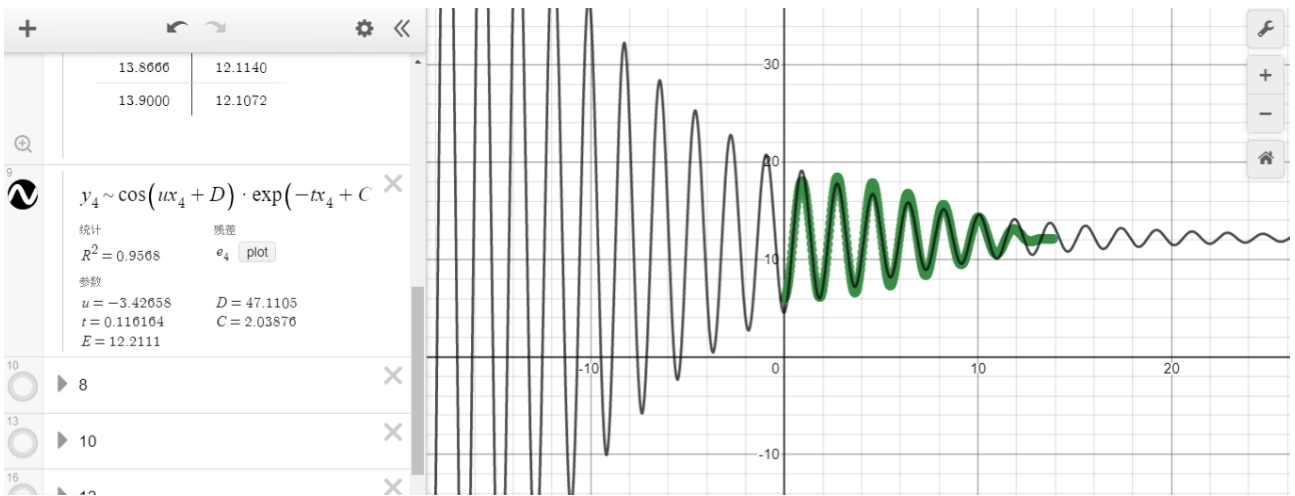


在這裡鍵入方程式。

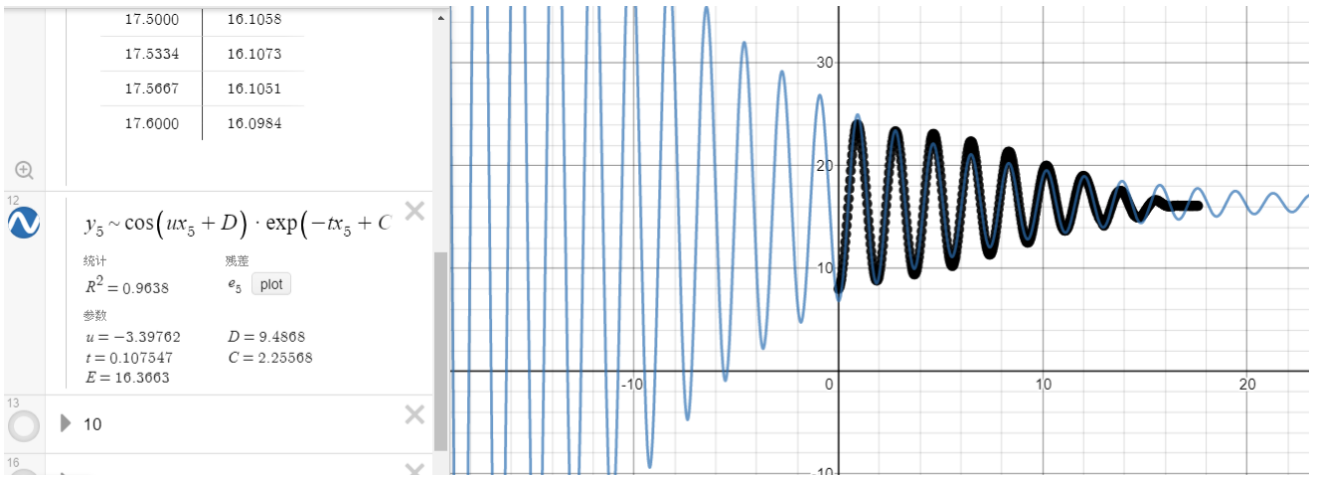
2. 偏離原點 4cm



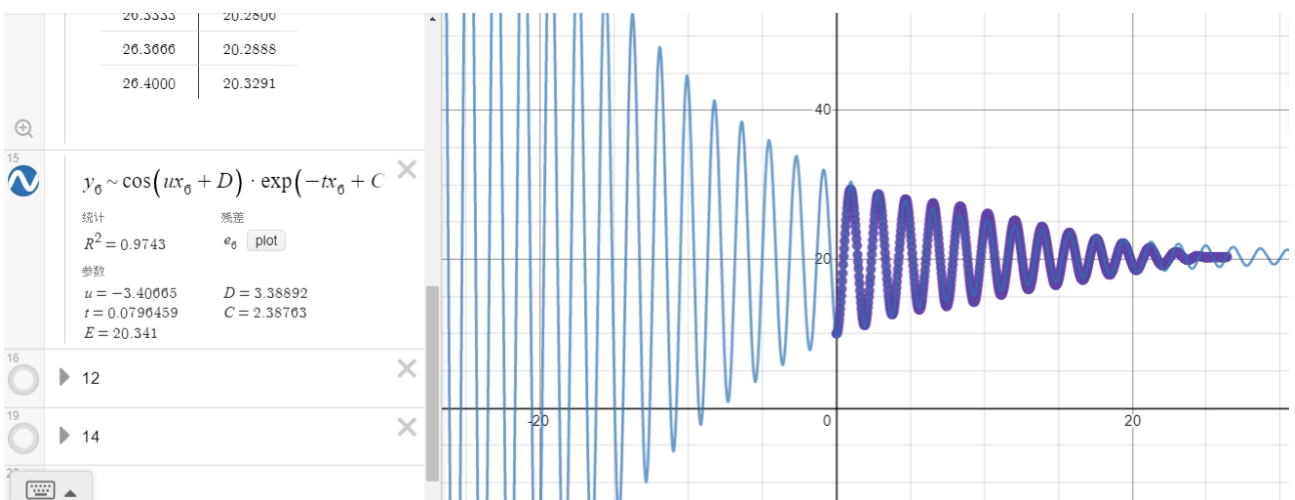
3. 偏離原點 6cm



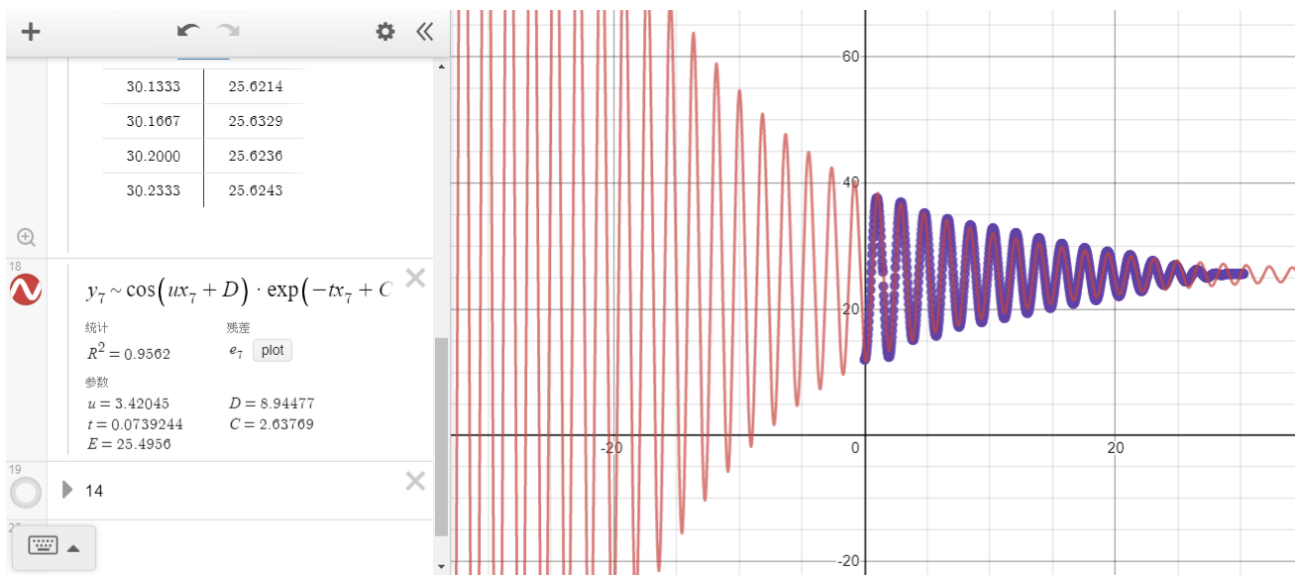
4. 偏離原點 8cm



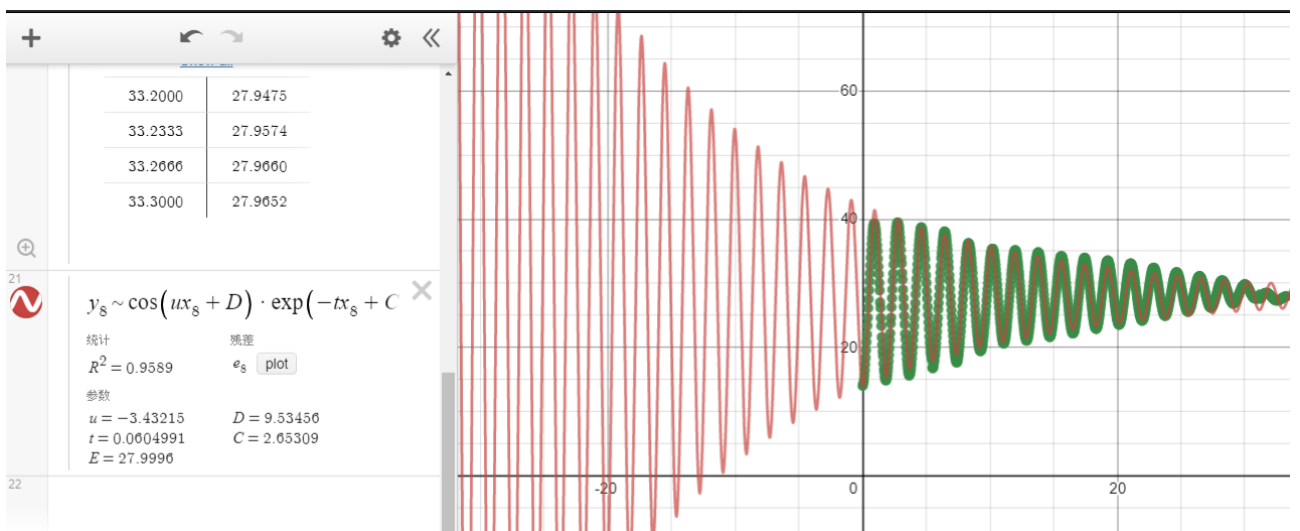
5. 偏離原點 10cm



6. 偏離原點 12cm



7. 偏離原點 14cm



除了圖一，其他的圖形幾乎是相近的

由此得知阻尼係數後，我們可以進一步的推導，

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi) \times e^{-\delta T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, 2B = \frac{\delta}{m}$$

T: 週期 δ : 阻尼係數 m: 管重

$\omega > B$ 時

震幅會隨時間降低

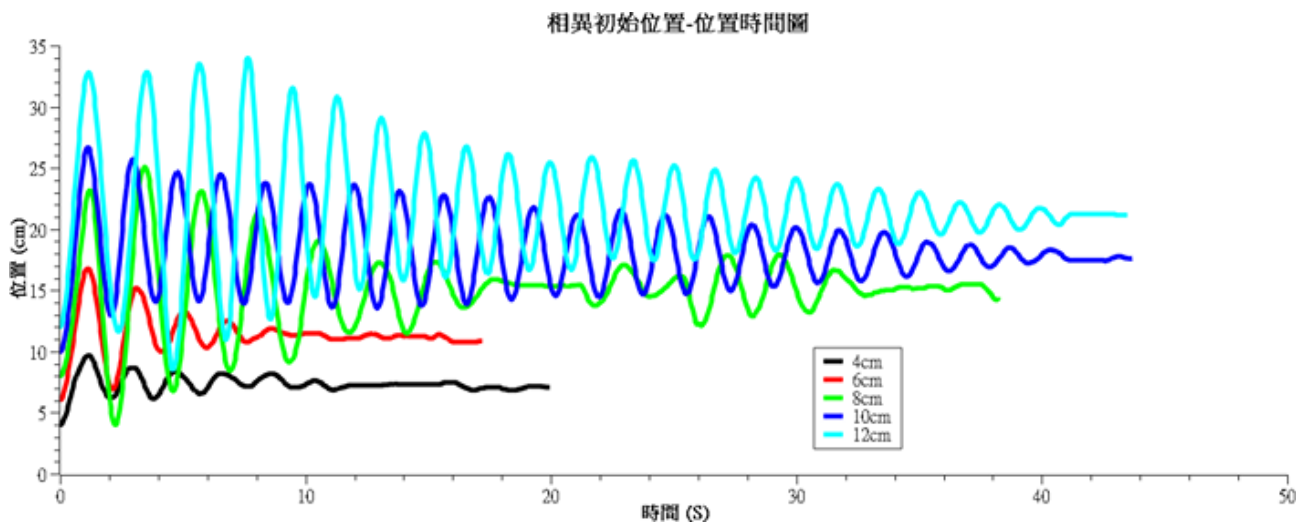
上圖 7 的阻尼係數為 0.060499 管重為 201g 週期為 1.75

所帶入的值

$$\omega = 3.59039 B = 0.0001504, \omega > B$$

(二)、相異初始位置

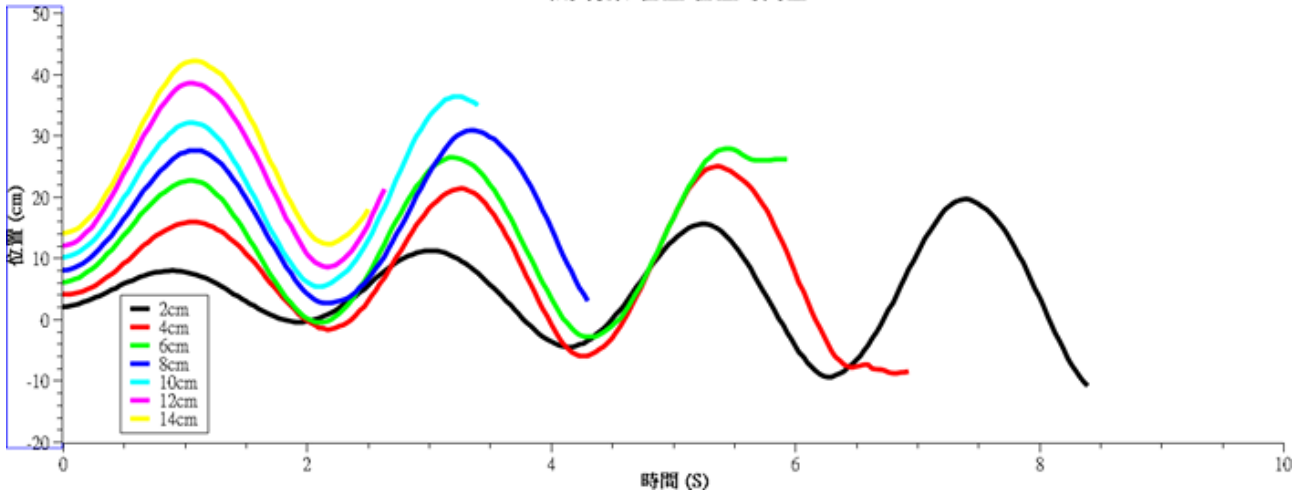
1.接觸面 A (隱形膠帶)



藉由此圖，我們發現當 PVC 管在接觸面 A 上運動且初始位置逐漸偏離中心時，其振幅會隨著與中心偏離的距離增加而變小。

2.接觸面 B(透明膠帶)

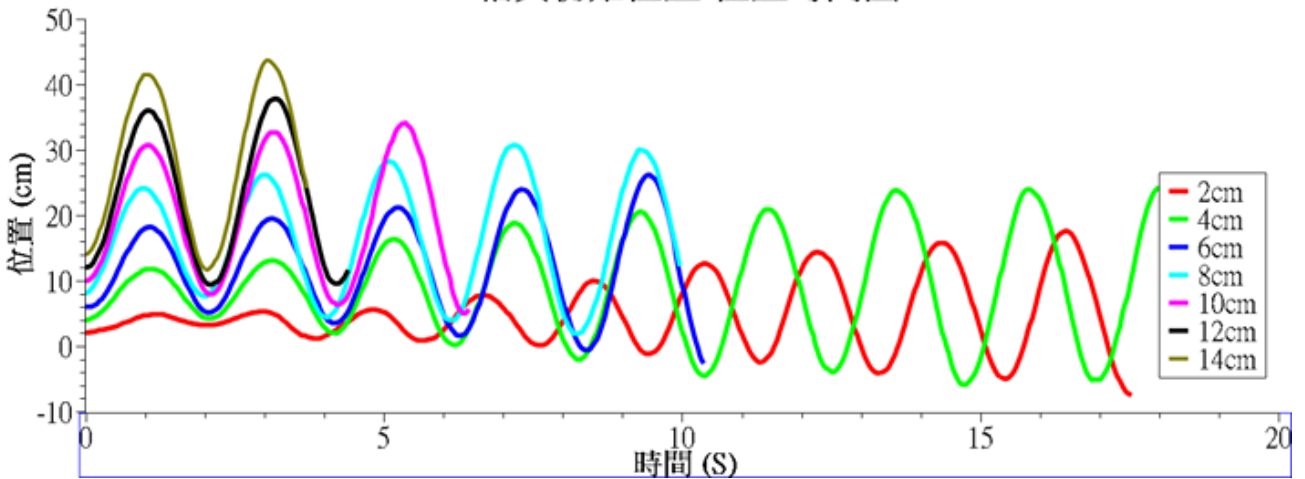
相異初始位置-位置時間圖



藉由此圖，我們發現當 PVC 管在接觸面 B 上運動且初始位置逐漸偏離中心時，其振幅會隨著與中心偏離的距離增加而增大。

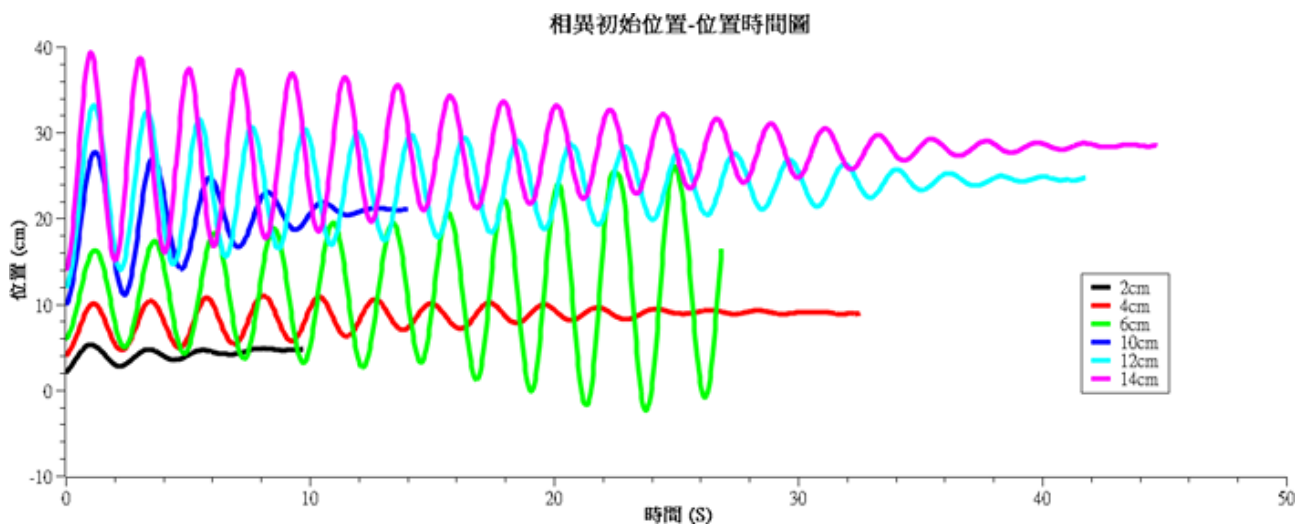
3.接觸面 C(條紋)

相異初始位置-位置時間圖



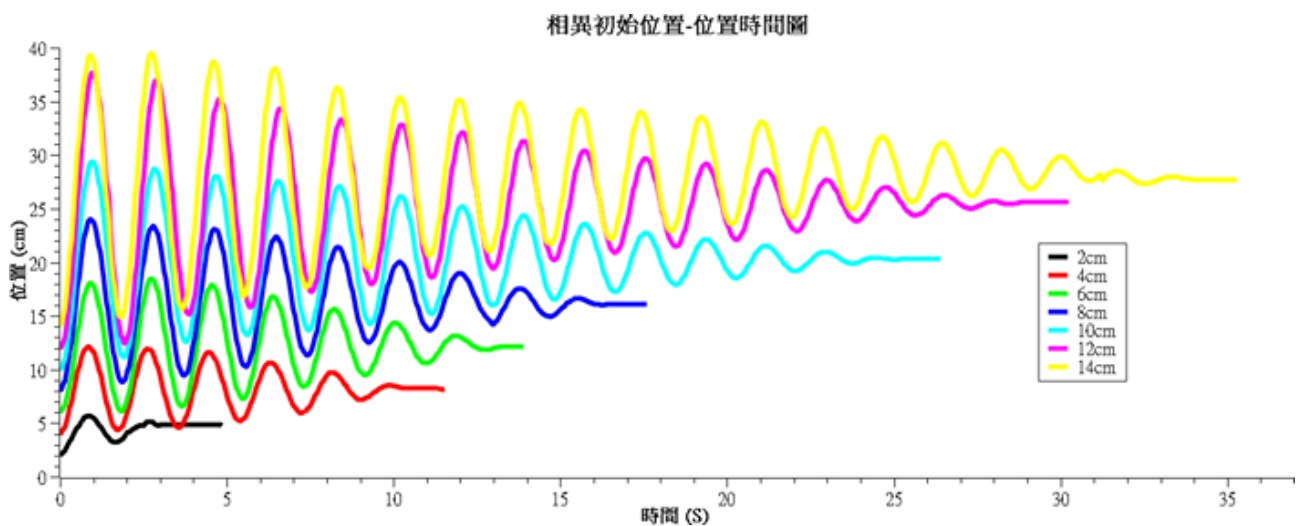
圖中週期幾乎是相同的，管子離開與滾筒的接觸後，數據及不再採計。

4.接觸面 D(深色)






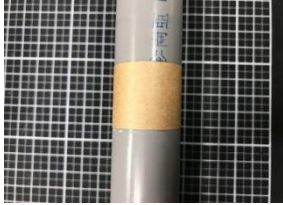
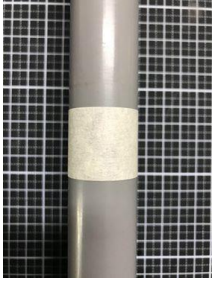
其中一段離原點 6 公分的線段，振幅是增加的，這也是剛剛所提到的強迫阻尼震盪。

5.接觸面 E(淺色)



這是最理想的一圖，阻尼係數幾乎是相同的，初始位置不同代表的是在理論線上的不同位置而已。

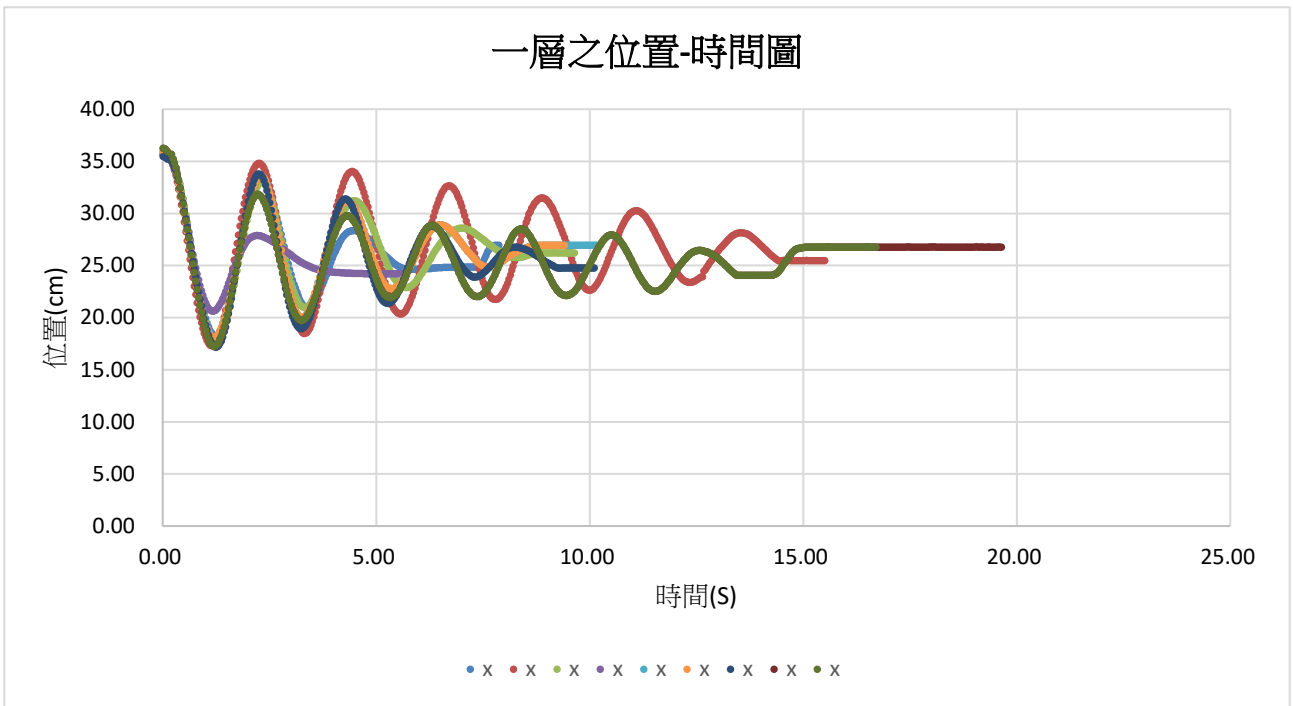
動摩擦係數:

接觸面 A	接觸面 B	接觸面 C	接觸面 D	接觸面 E
0.256593	0.333484	0.351752	0.191129	0.262935
				

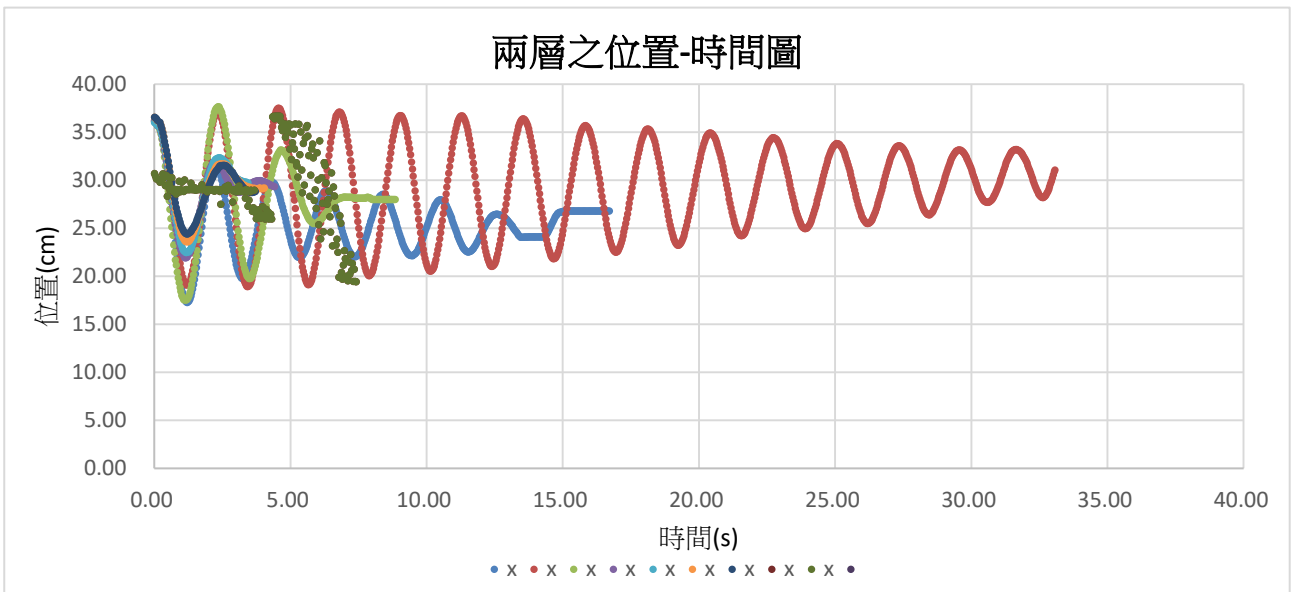
(三)、相異層數進行探討

在完成相異接觸面對於 PVC 管造成影響一實驗後，我們明顯的發現當接觸面愈軟，也就是當 PVC 管通過時，接觸面間會造成愈大的形變，使得阻尼振盪對 PVC 管運動之影響加劇，為更深入探討形變對於 PVC 管運動軌跡之影響，我們固定膠帶的材質(接觸面 D)，並分別錄製 1、2、3、...、10 層的影片，每層均進行十次且將其疊圖，如此便能觀察出形變與 PVC 管運動之關聯。

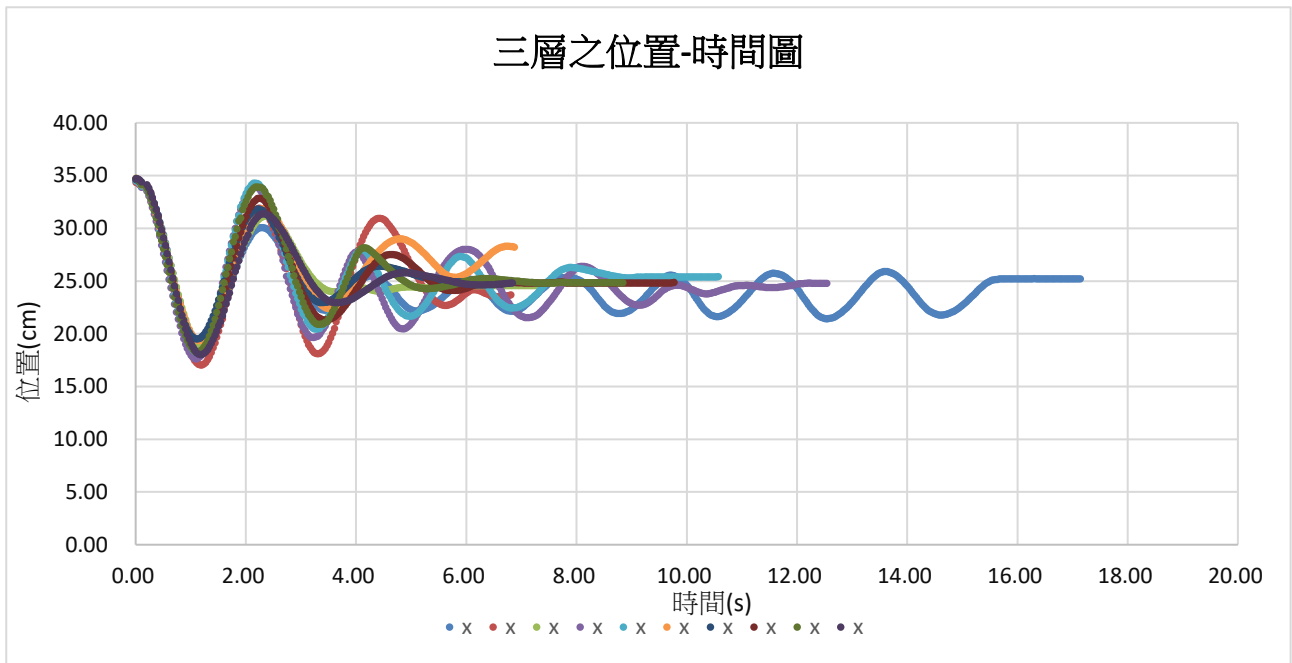
1. 一層膠帶



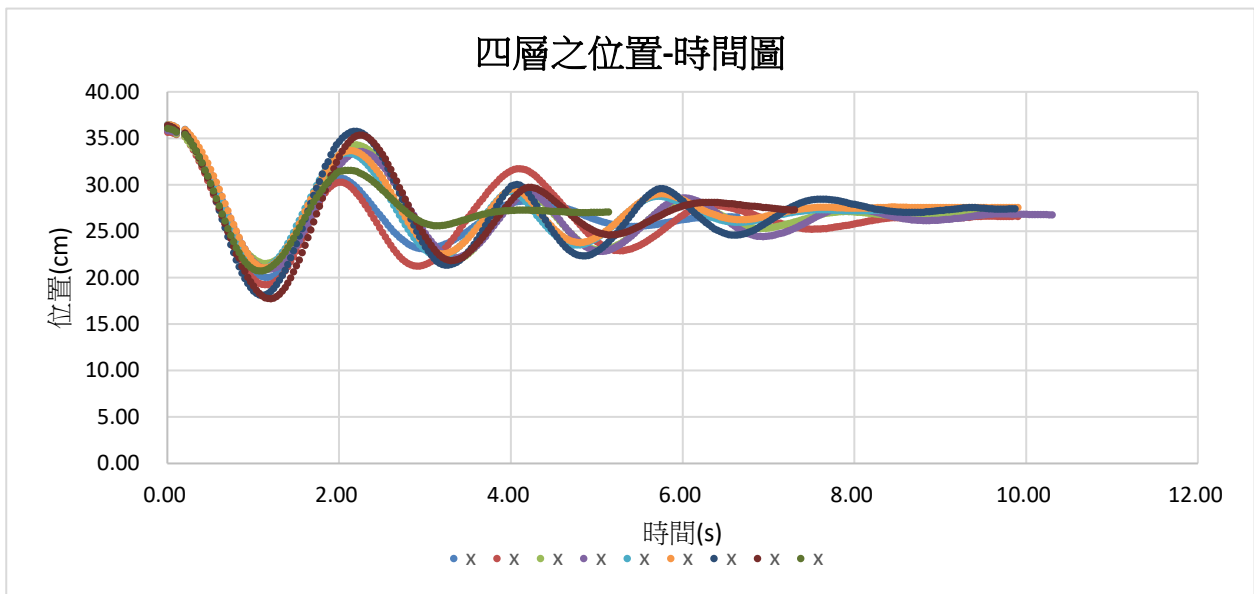
2. 二層膠帶



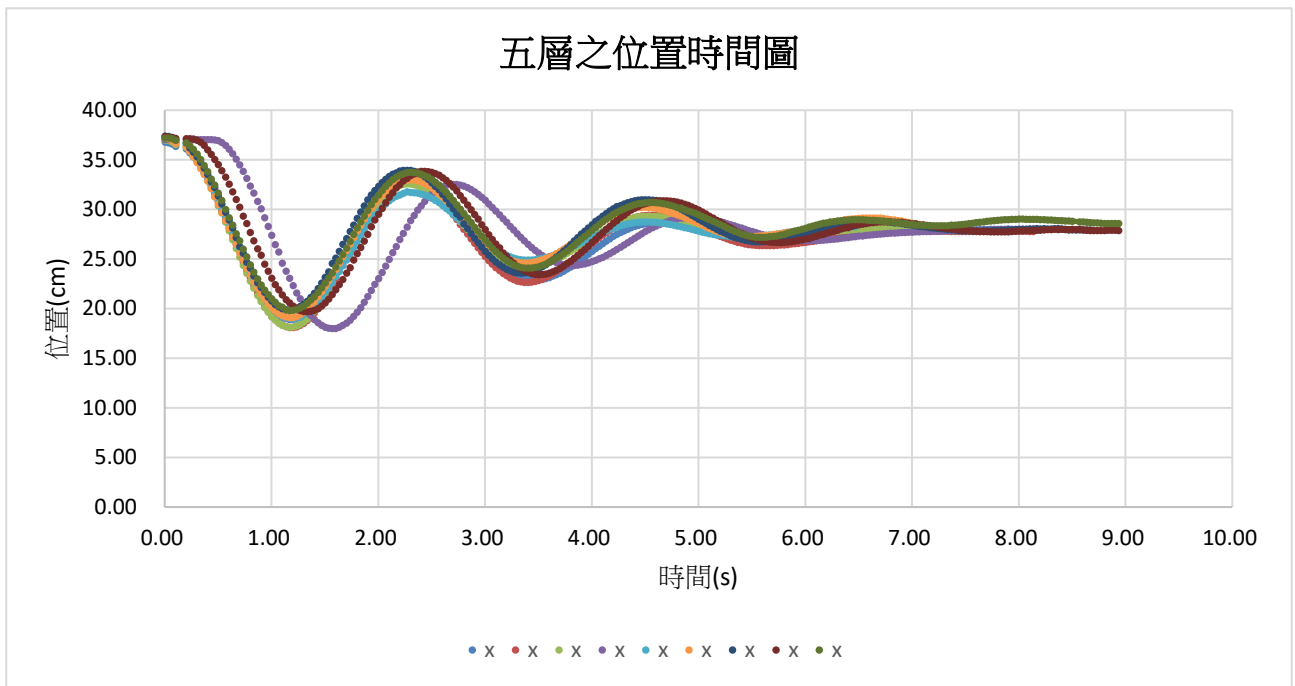
3. 三層膠帶



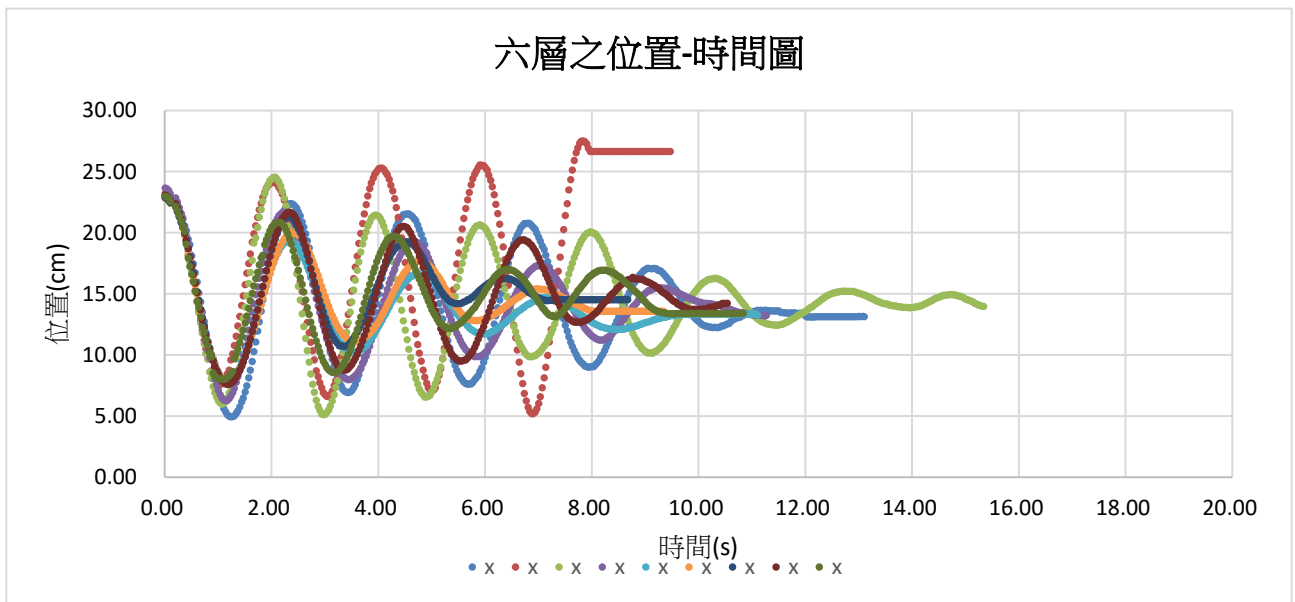
4. 四層膠帶



5. 五層膠帶

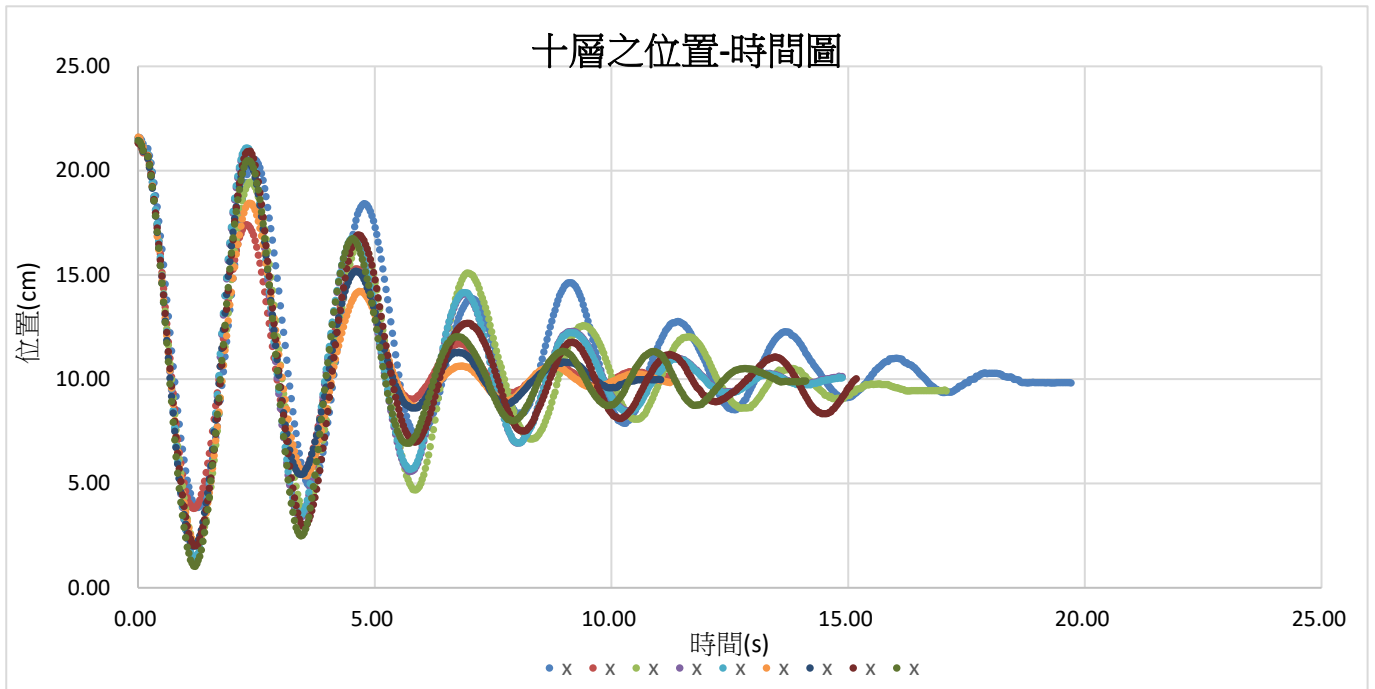


6.六層膠帶



7.七層膠帶

10.十層膠帶



陸、模擬比較

一、VPython

```

#initial velocity
stick.v=vec(0,0,0)
N_force[0]=vec(0,0,0)
dt=0.001
t=0

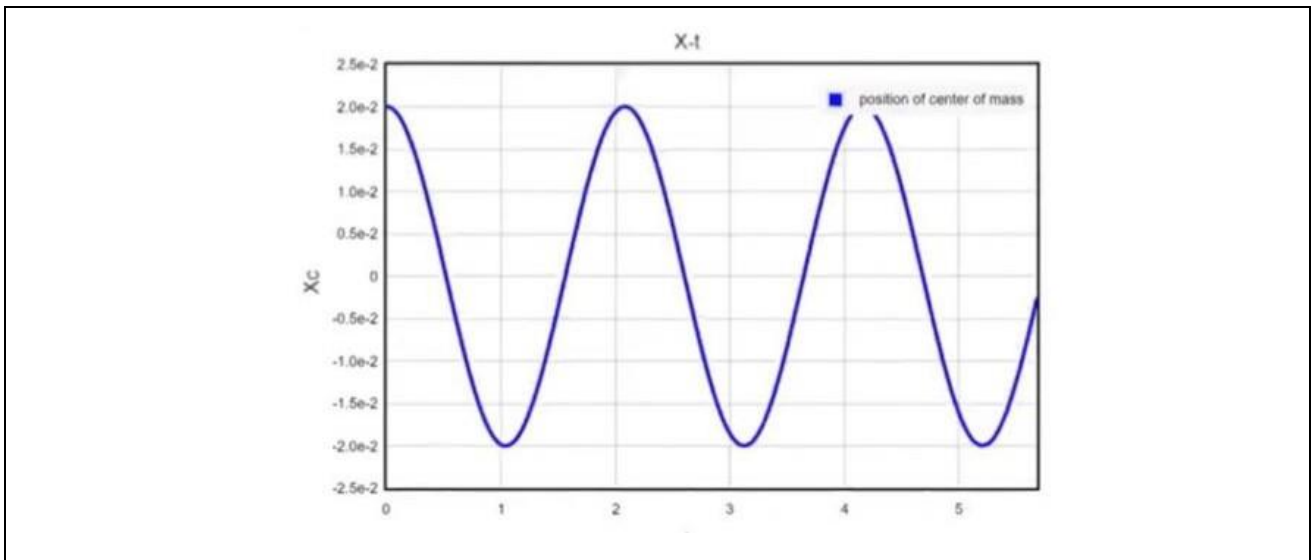
while(t<Tmax):
    rate(1000)
    xc=stick.pos.x+L/2 #determine center of mass
    #find normal forces
    N_force[0]=vec(0,(d/2-wc)/(d/2+wc),0)
    N_force[1]=vec(0,(d/2+wc)/(d/2-wc),0)
    T=0
    #rotation of motor
    motor[0].rotate(angle=omega[0]*t,axis=vec(0,0,1),origin=vector(0,0,0))
    motor[1].rotate(angle=omega[1]*t,axis=vec(0,0,1),origin=vector(1,0,0))

    # determine kinetic friction force or static friction force
    for i in [0,1]:
        if(abs(stick.v.x)-abs(omega[i]))<=0: #slow-> static friction
            fr[i]=vec(N_force[i],y*mu_s*(-1)**i,0,0)
            fr_arrow[i].color=green # green represents static friction force

        if(stick.v.x!=0 and omega[i]): #kinetic friction
            fr[i]=vec(-N_force[i],y*mu_k,0,0)
            fr_arrow[i].color=yellow # yellow represents kinetic friction force
        if(stick.v.x==0 and omega[i]):
            fr[i]=vec(N_force[i],y*mu_k,0,0)
            fr_arrow[i].color=yellow

    N_arrow[0].axis=to-2*N_force[0]
    fr_arrow[0].axis=to-2*fr[0]

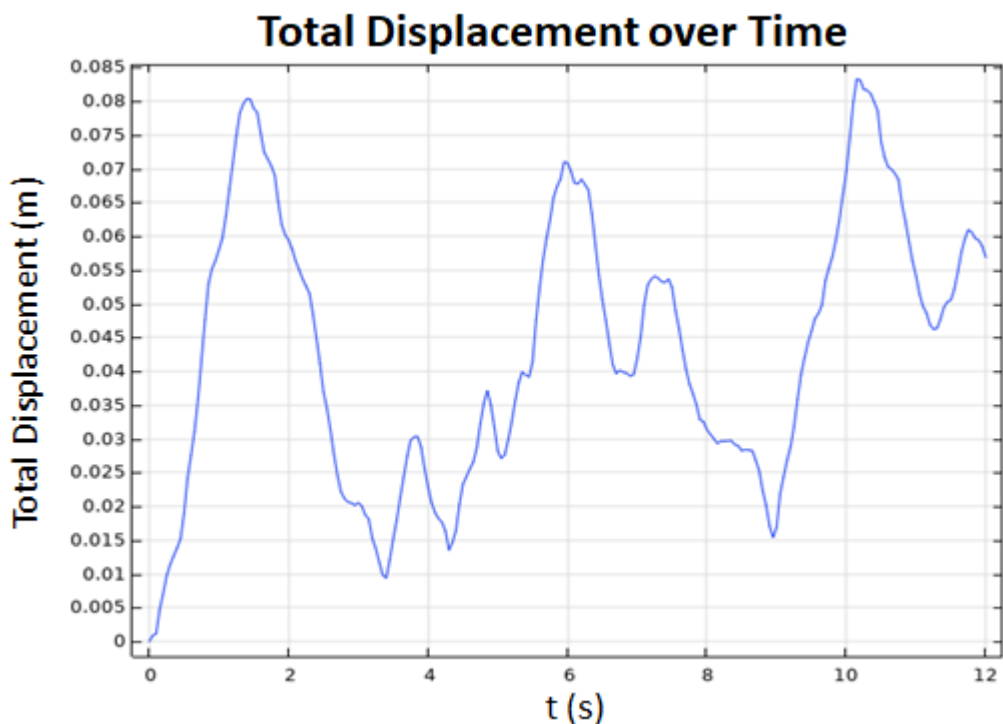
    g_arrow.pos=vec(0,0,0.017)
    stick.v+=fr[0]+fr[1]+g
    stick.v+=stick.a*dt
    stick.pos=stick.v*dt
    
```



完成實驗後，我們便利用 VPython 對我們的實驗架設進行模擬，對照先前得到的實驗數據，模擬與真實的最大差異就在於：模擬是一個理想環境，除了正向力與動摩擦力外沒有任何阻力，且能量亦不會損耗。然而真實情況具有空氣阻力等諸多會影響 PVC 管運動的因素。甚至，在 PVC 管的運動過程中，也會導致滾筒形變，進而改變了動摩擦力。

二 Comsol

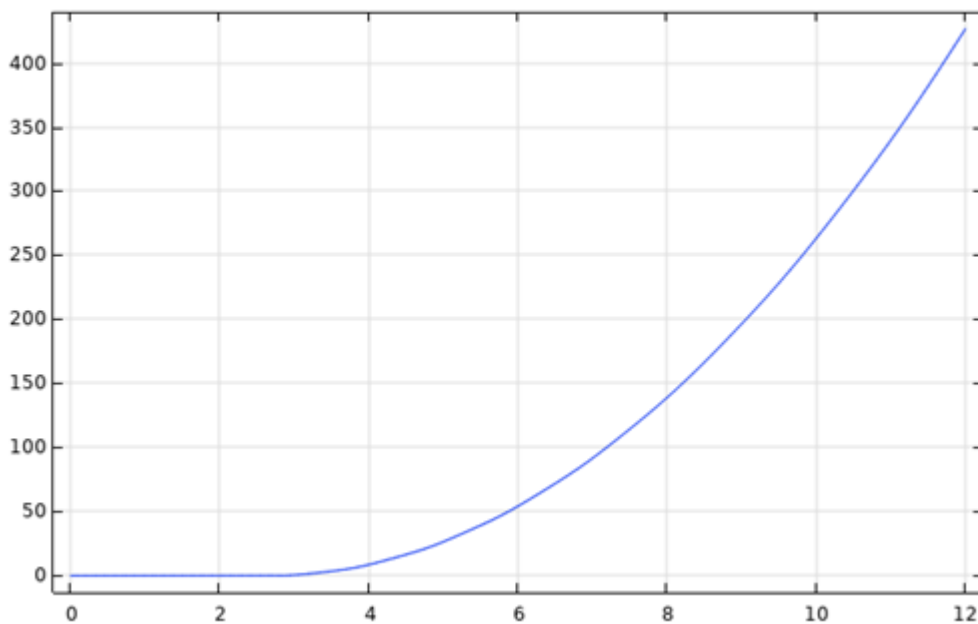
1.





此圖是利用 COMSOL 模擬軟件進行模擬，由於這是三維的模擬，因此其上所呈現的圖會較 VPython 模擬出的圖看起來沒那麼向簡諧運動。但卻十分接近真實實驗的結果。

2.特殊情況討論

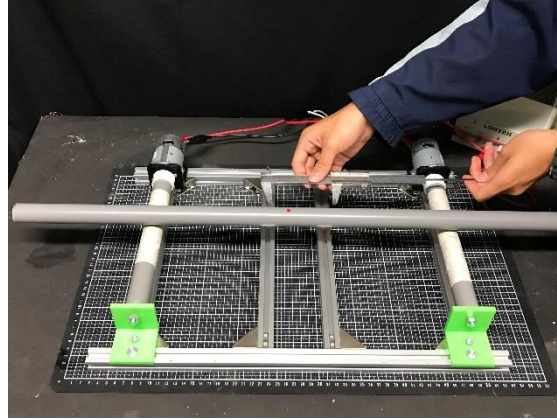


在進行模擬的時候發現一個現象，在所有條件皆不變的狀況下，當質量不斷增加時，到達某個臨界點，PVC 管在滾筒上的運動會直接掉落。

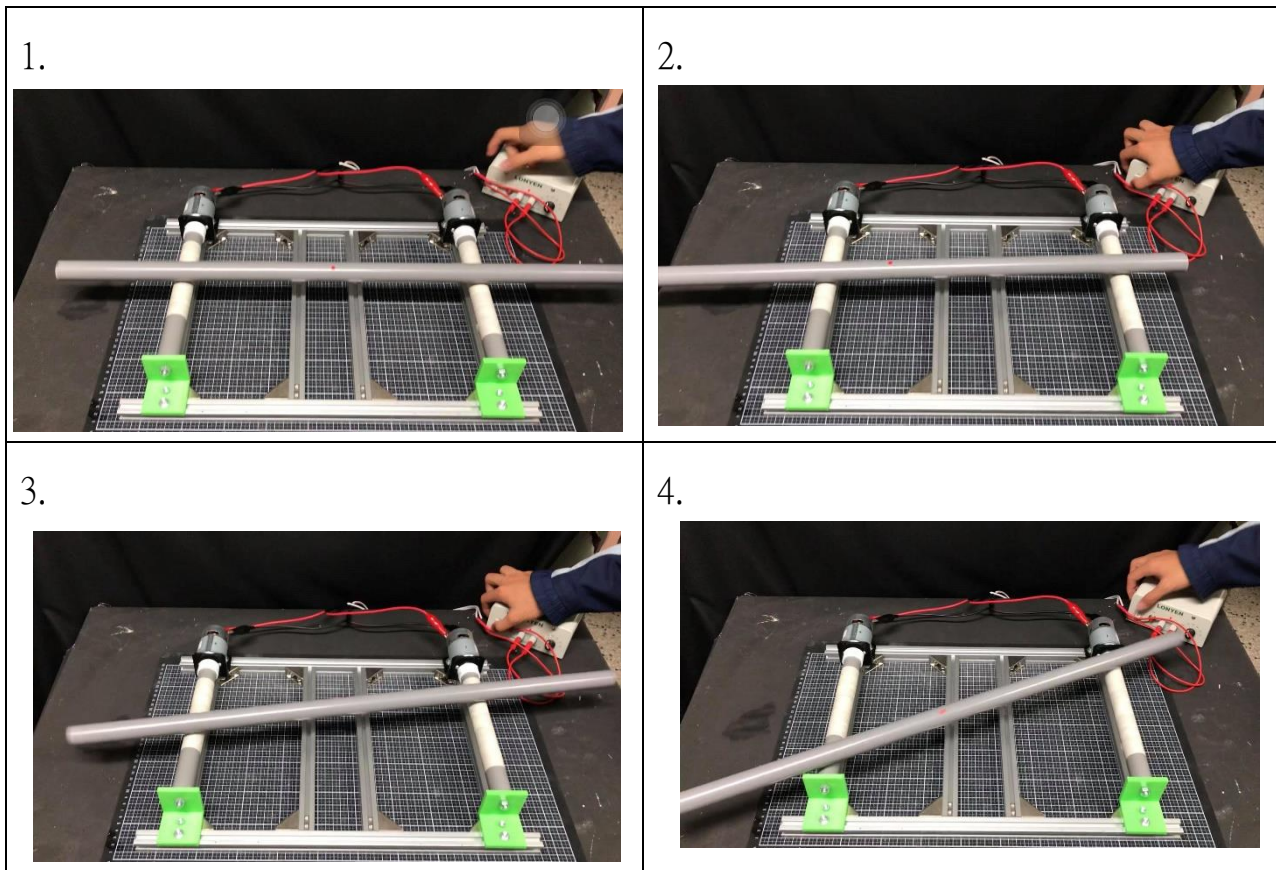
柒、誤差分析

本實驗使用了培鈴輔助

我們在沒有培林的情況下做了測試，在開始前拿游標尺確認管子與滾筒接垂直



開始運動前



捌、結論

- 一、PVC 管的質量與其週期無關
- 二、PVC 管的長度與其週期無關
- 三、馬達的轉速與 PVC 管的週期無關
- 四、不同的接觸面材質與 PVC 管的週期呈指數關係($T \propto \sqrt{\frac{1}{\mu_k}}$)
- 五、不同的管距(2L)與 PVC 管週期呈現指數關係($T \propto \sqrt{L}$)

玖、未來展望

- 一、滾筒的形變如何影響動摩擦係數。
- 二、那些參數會影響阻尼係數、其二者間的關係(ex.摩擦係數)。
- 三、質量不斷增加時，到達某個臨界點，PVC 管在滾筒上的運動會直接掉落，探討其原理及找出關係。

壹拾、參考資料及其他

一、

<https://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Oscillator.htm>

二、

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8E%A5%E8%A7%A6%E5%8A%9B%E5%AD%A6?fbclid=IwAR1TGzBycXvmJKKnu-5vZ3ARP8Ze0LyLay4TzCcaExZRPusrHa374jnYbJ0#%E4%B8%A4%E4%B8%AA%E7%AD%89%E5%8D%8A%E5%BE%84%E5%9C%86%E6%9F%B1%E4%BD%93%E7%9A%84%E4%BA%A4%E5%8F%89%E6%8E%A5%E8%A7%A6>

三、

http://www.physics.usyd.edu.au/teach_res/mp/doc/chaos07A.htm?fbclid=IwAR0opGfzS7hAR1psctjf0yJIWycFi9O8q27z1bJ3dAuyJmhYABQAOKAgto

四、

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BB%E5%B0%BC>

【評語】 051808

本作品探討雙滾軸間因摩擦力造成的振盪現象。作者以其實驗設計，加上力學分析，來了解所觀察到橫架在雙滾軸間長管的振盪現象，唯本主題並非新穎題材，作品內容宜有更大幅度創新，作者對部分實驗結果的詮釋有待進一步釐清。

摘要

我們探討了在不同狀況下 PVC管的運動狀況。最後，我們發現，管重、管長、轉速均不會影響PVC管的週期，也就是 $T \propto \sqrt{\frac{L}{\mu k}}$ 進而發現，在真實情況，PVC管並不會是不斷在做S.H.M.，而是逐漸衰減，於是我們開始向PVC管的衰減率進行研究。找出了不同情況下的阻尼係數，及週期在什麼狀況下會衰減($\omega > B$ 時)。最後再將結果與模擬進行比較，分析其差異。

研究動機

一次在超商中把熱狗機中的熱狗放成直的，當下覺得很有趣，他會一直往同一個方向跑，但我突然開始想，怎麼樣可以讓熱狗放直的，又可以邊烤而不掉出去呢？於是，我們便想出了一個好方法，只要把機器上的轉輪往不同方向轉不就可以了嗎！神奇的是這樣一來這跟熱狗竟然開始做簡諧運動？！

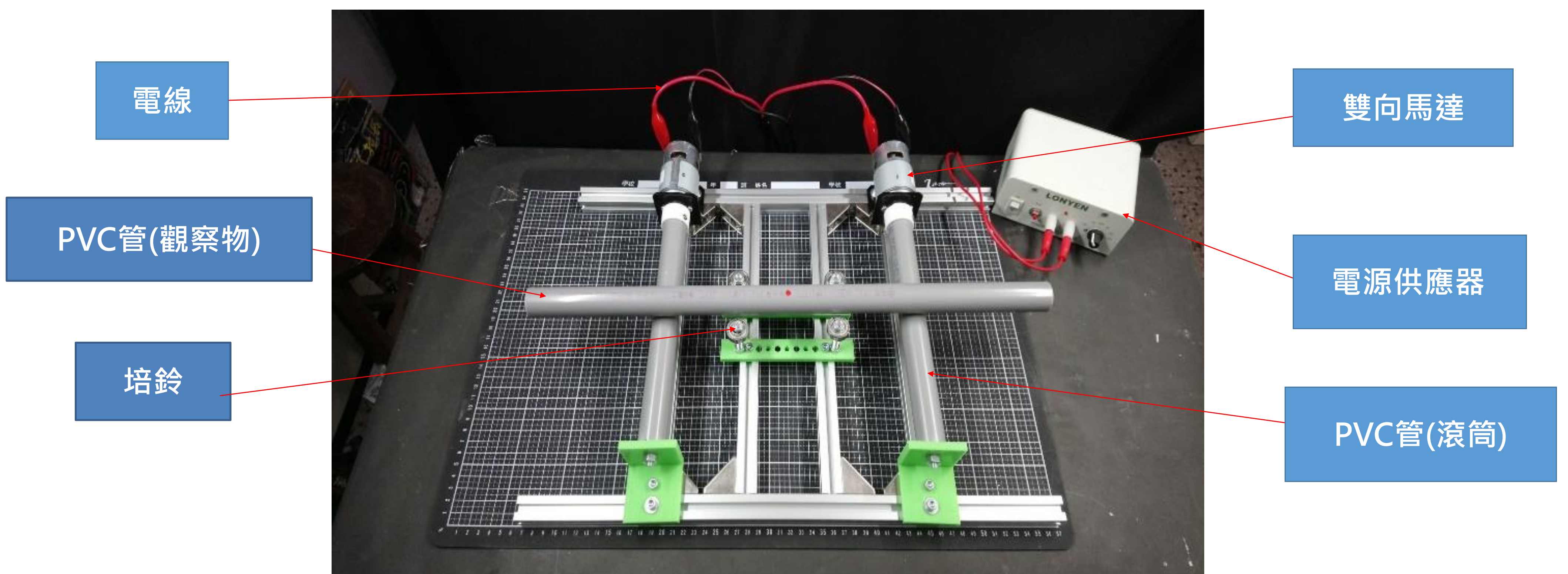
研究目的

1. 觀察並探討不同的質量對PVC管週期的影響
2. 觀察並探討不同的長度(l)對PVC管週期的影響
3. 觀察並探討不同的轉速對PVC管週期的影響
4. 觀察並探討不同的接觸面材質對PVC管週期的影響
5. 觀察並探討不同的管距($2L$)對PVC管週期的影響
6. 觀察並探討不同初始位置PVC管運動的衰減率

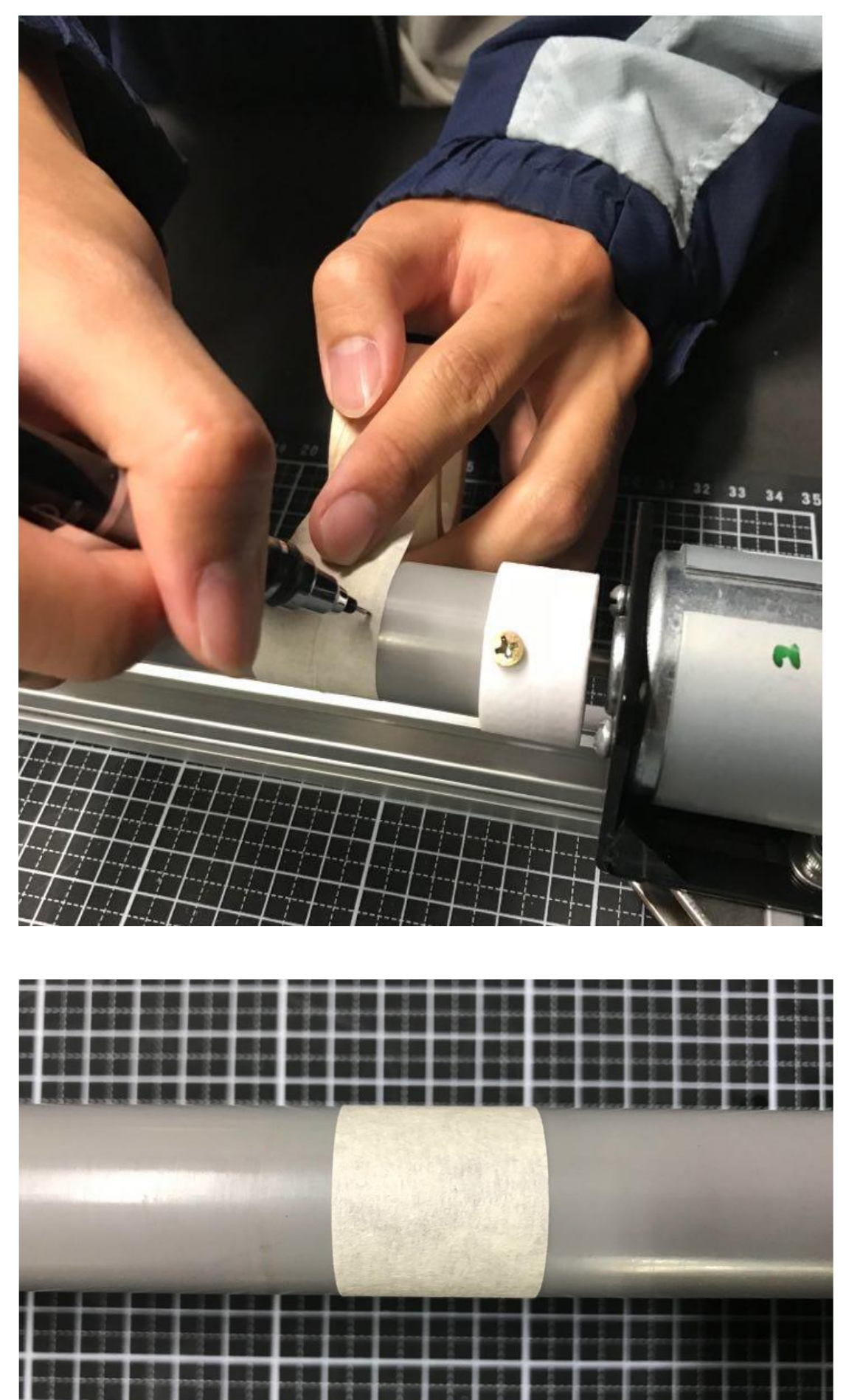
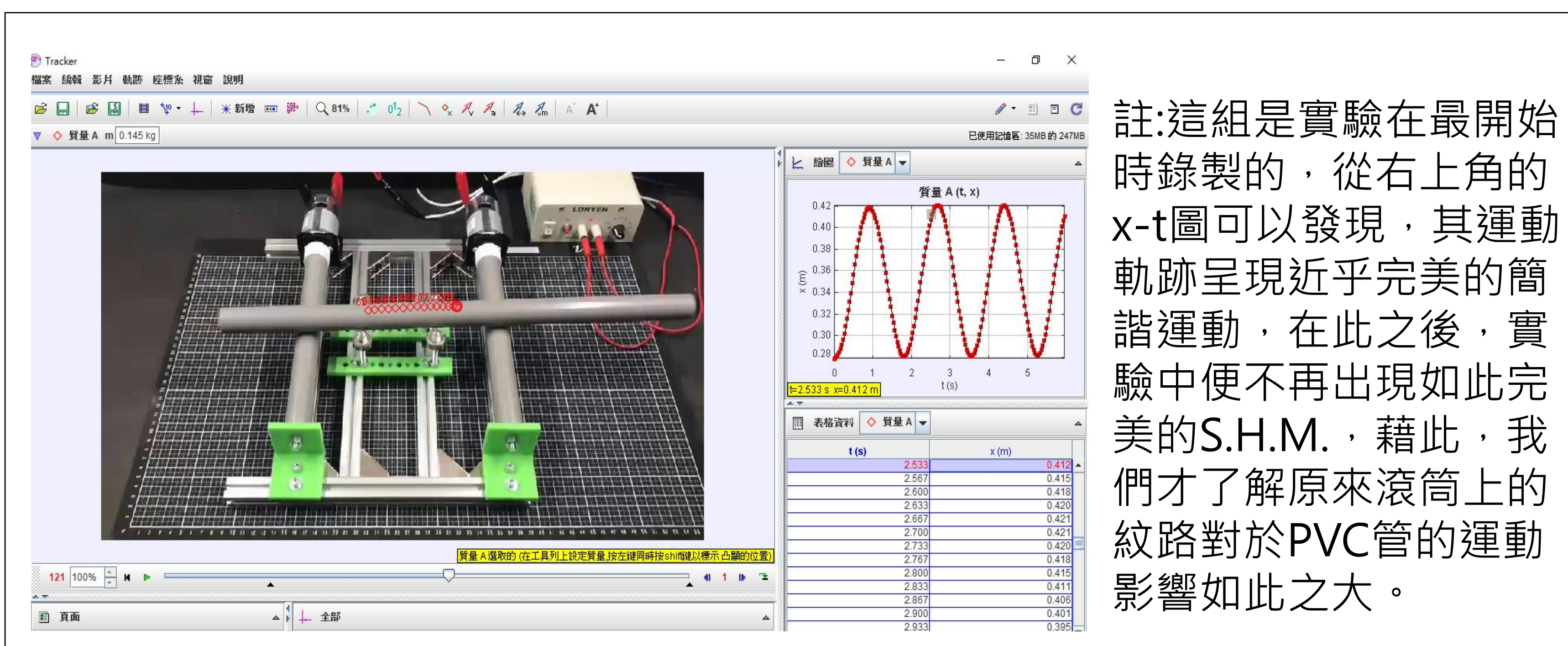
研究設備及器材



實驗裝置及圖示



在確立了研究主題後，我們開始假設究竟有那些參數會影響PVC管的運動，當然，最容易觀測的無非是週期。於是，我們初步的設想了幾個容易改變的參數:PVC管的質量、長度，馬達的轉速等等...。經過實驗並錄製成影片後，匯入Tracker進行分析，紀錄PVC管x-t圖中每形成一個波所花費的時間，並把所有數據進行平均，如此便得到PVC管在各狀況下的週期。



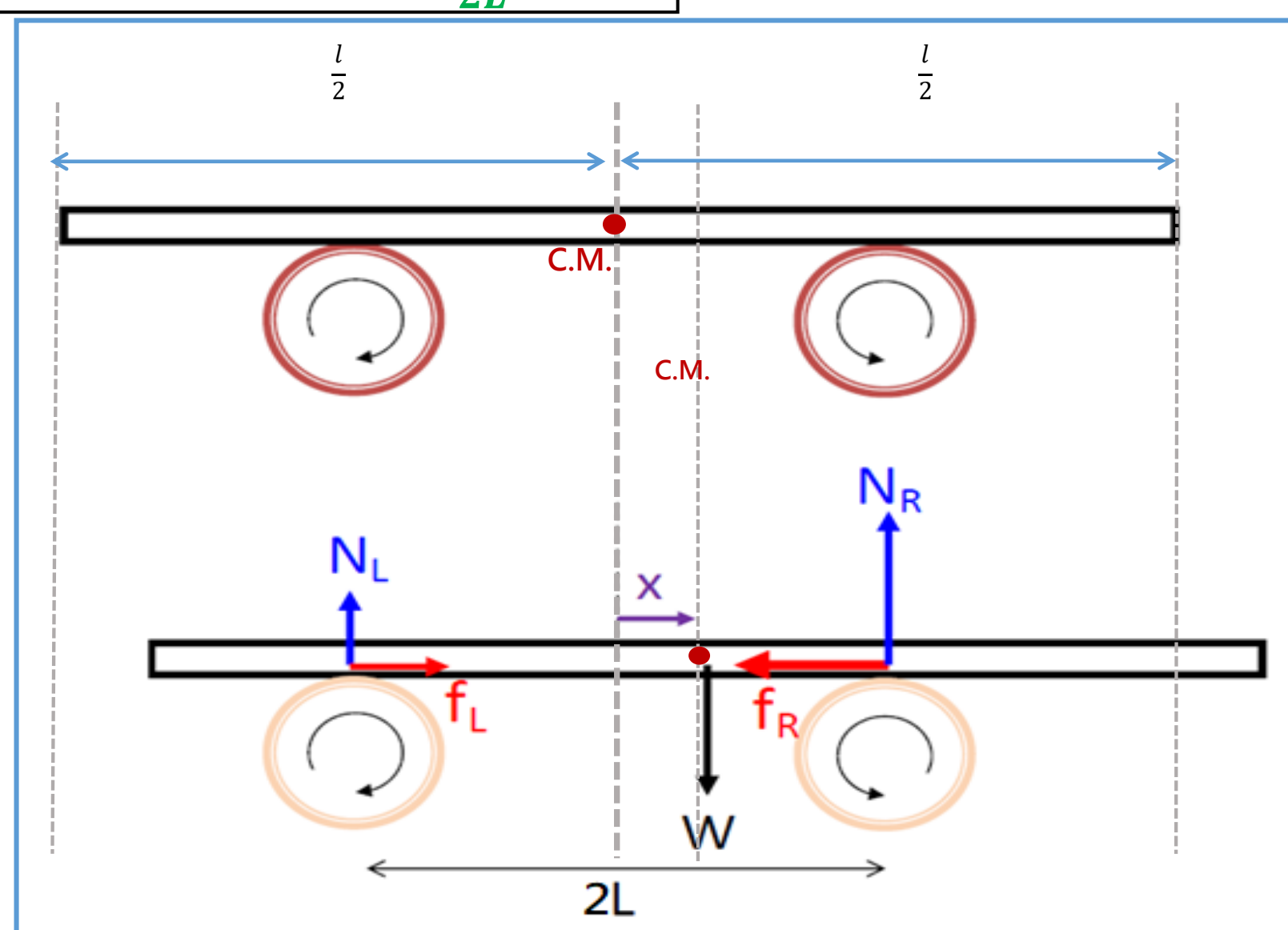
實驗理論

(一)、簡諧運動推導

將PVC管的位移設為 x ，左右兩側的摩擦力分別為 f_R 、 f_L ，而正向力則為 N_R 、 N_L 。此時合力為兩側的磨擦力差。經過以下的推導後可得知:PVC管的運動為S.H.M.

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_R - f_L \\ &= (N_R - N_L)\mu_k \\ &= \frac{-2x}{2L} mg\mu_k \\ &= -kx \\ &\rightarrow \text{S.H.M.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_R + N_L &= mg && \rightarrow N_L = \frac{(L-x)}{2L} mg \\ N_L \cdot 2L &= mg(L-x) && \rightarrow N_R = \frac{(L+x)}{2L} mg \end{aligned}$$



$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{mg\mu_k}} \propto \sqrt{\frac{L}{\mu_k}}$$

(三)、阻尼振盪

是指任何振動系統在振動中，由於外界作用（如流體阻尼、摩擦力等）和/或系統本身固有的原因引起的振動幅度逐漸下降的特性。舉單擺來作例子

在我們的系統中，外界作用是來自於上述的形變，造成摩擦力的改變，導致振幅變小。(圖三)

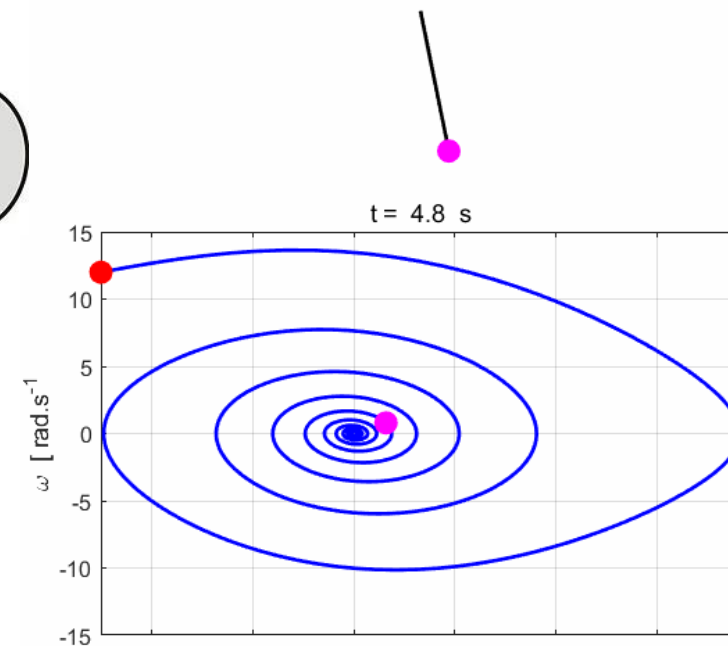
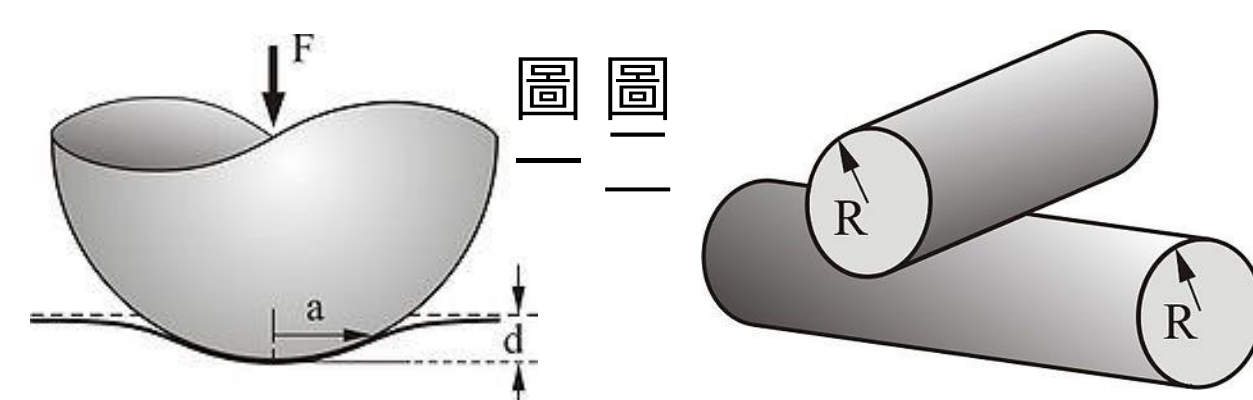
強迫阻尼運動：共振(圖四)

當阻尼力和外力作用在系統上時，阻尼力導致系統能量的耗散，但外力可能會增加或減少系統的能量。當外力的頻率等於擺的固有振動頻率時，會通過外力將最大能量傳遞到系統中，導致擺的最大振動幅度增加。

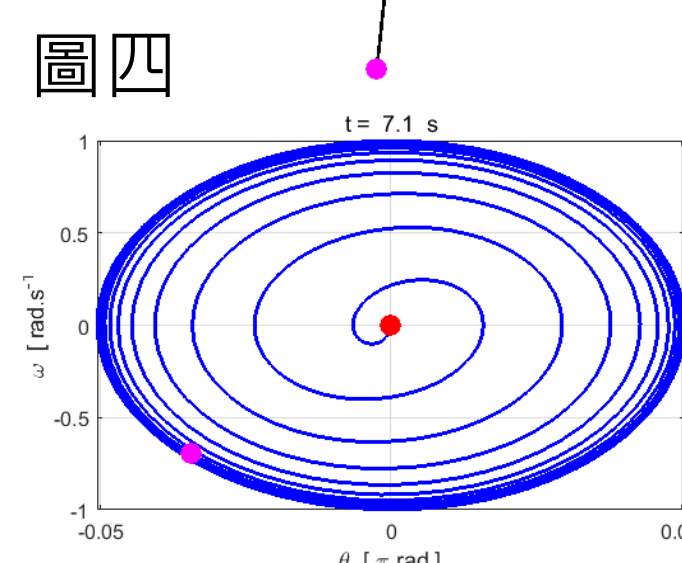
(二)、接觸力學

1.球體和彈性半空間體的接觸：一個半徑為 R 的球體在一個彈性半空間上壓出的凹痕深度為 d ，若產生的接觸區域的半徑為 $a = \sqrt{Rd}$ 則作用力 $F = \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}$ 。(圖一)

2.兩個等半徑圓柱體的交叉接觸，該接觸等同於一個半徑為 R 的其體和一個平面的接觸。(圖二)



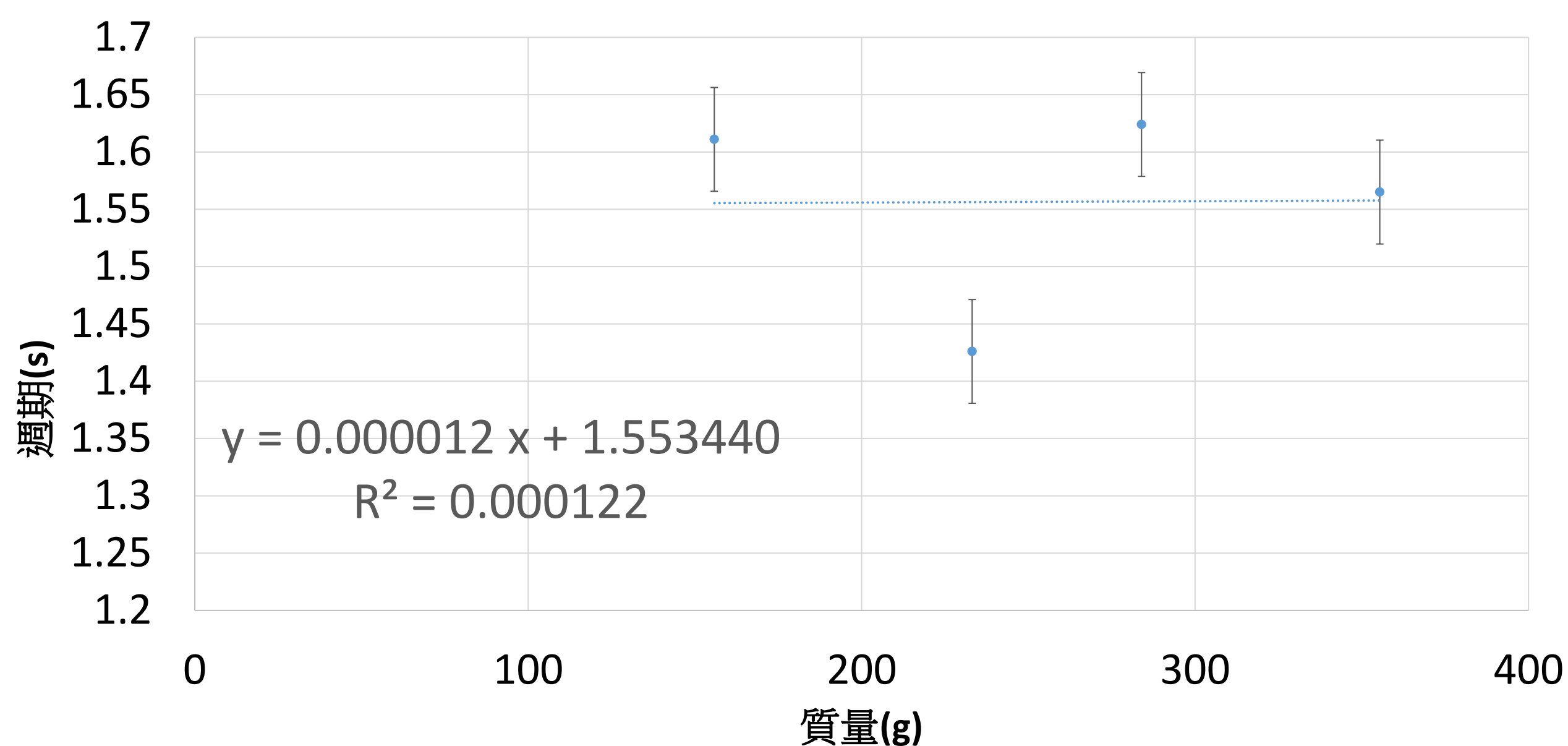
圖三



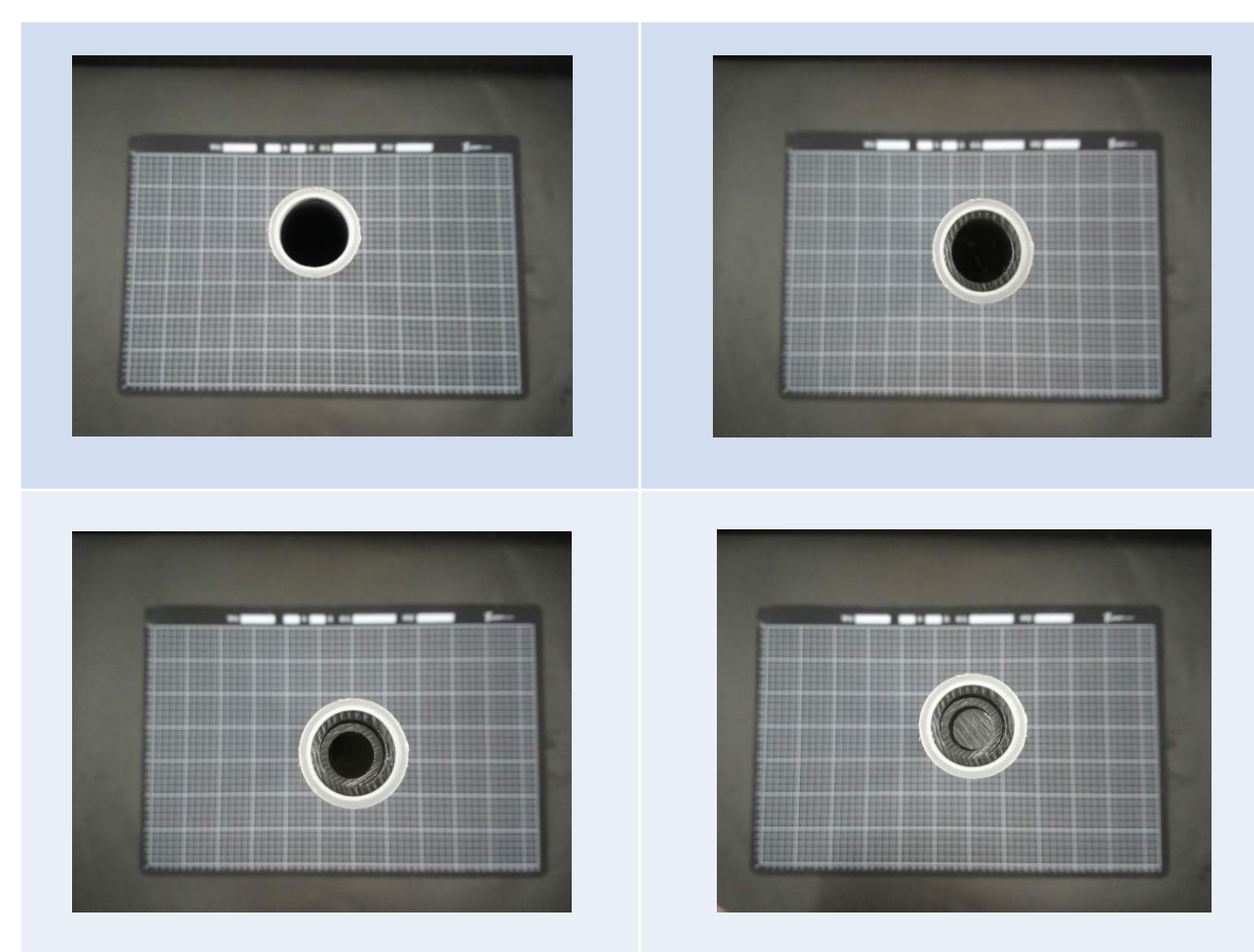
圖四

研究結果

(一)、不同的質量對PVC週期的影響

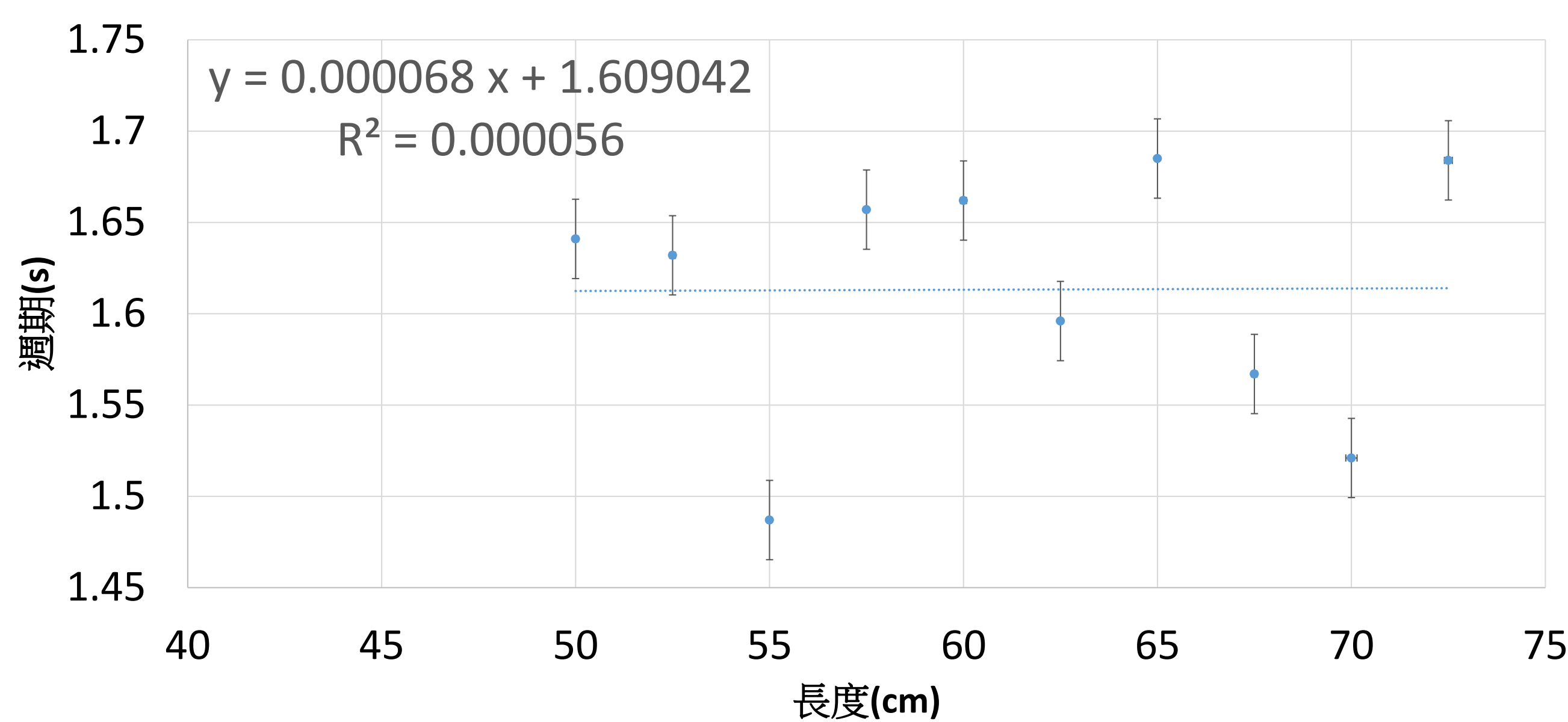


說明: 數據採集完畢並加入擬合線後，發現其圖形幾乎為一水平線，且斜率僅有0.000012。再將其與先前所推導的理論進行對照，結果吻合。因此，當質量改變時，PVC管的週期並不會受其影響。



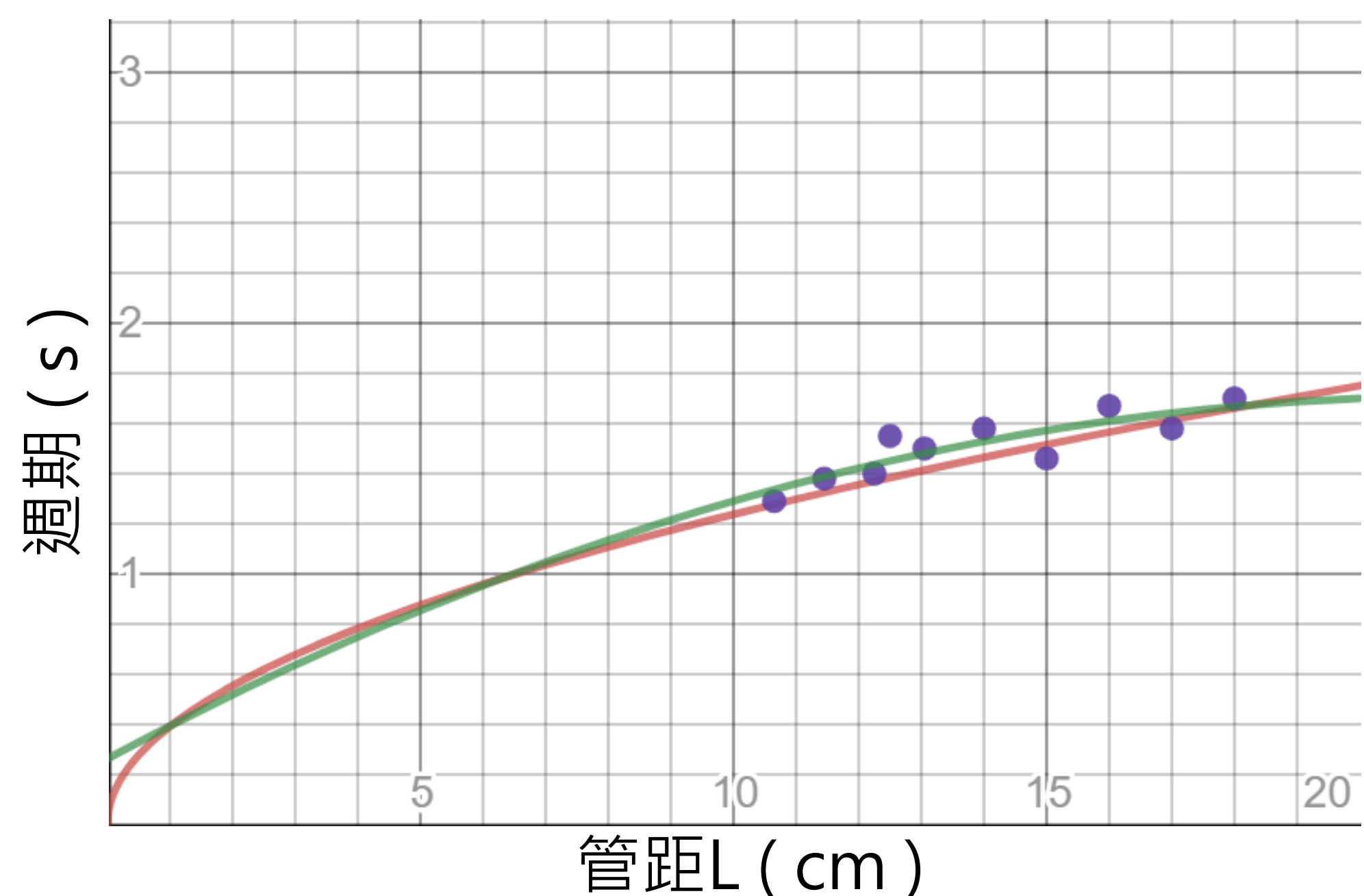
其中，在進行以PVC管的質量為操縱變因的實驗時，為了要確保管子的質量儘量分布均勻，於是決定以管子塞入管子方法進行實驗，並且選擇口徑相差不大的PVC管，以確保其在運動時，管間不會相對滑動。

(二)、不同的長度對PVC管週期的影響



說明: 經過實驗確認質量不會對週期造成影響後，我們進而改變PVC管的管長。將實驗數據匯入並加上擬合線後，發現其斜率僅有0.000068，幾乎是一條水平線。由此可知，當PVC管長改變時，PVC管的週期並不會受其影響。

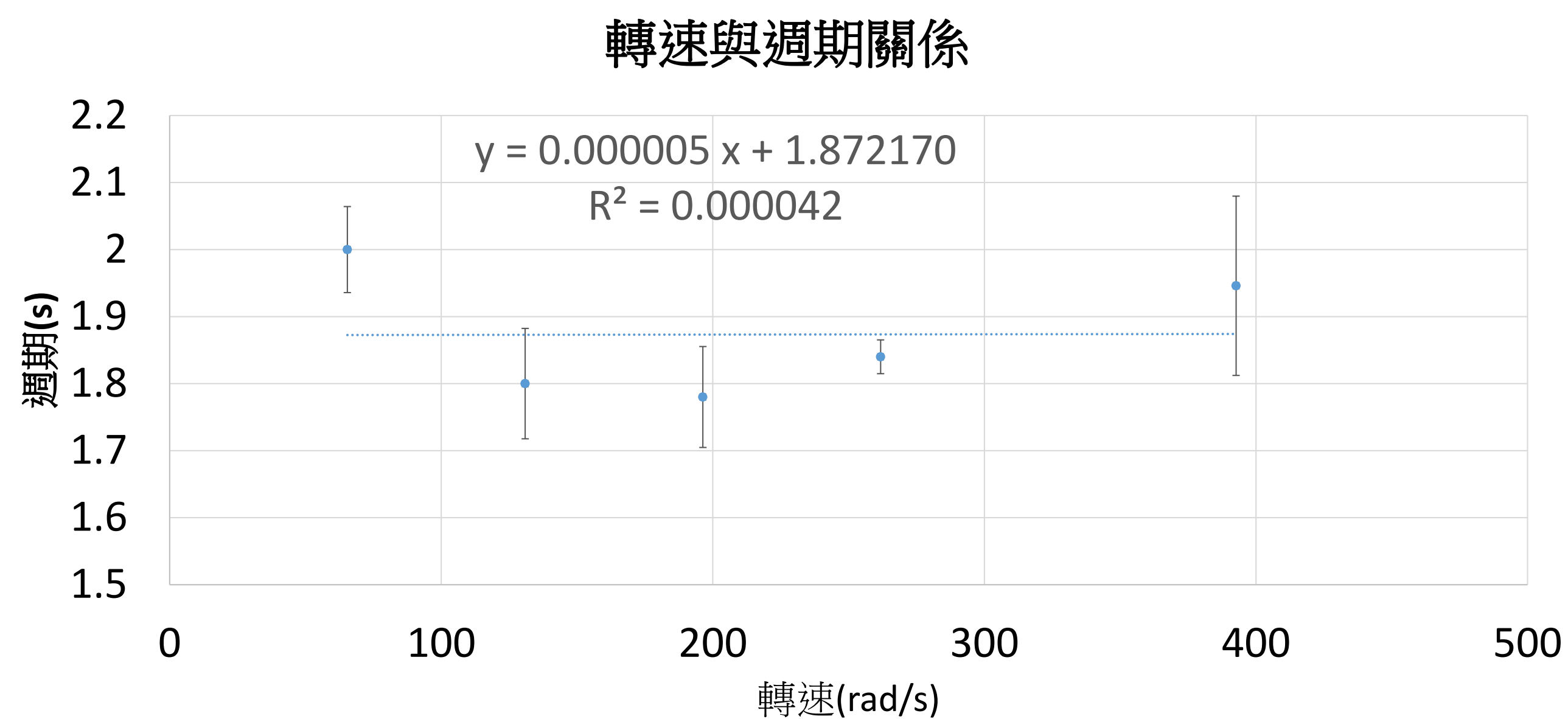
(四)、不同的管距對PVC管週期的影響



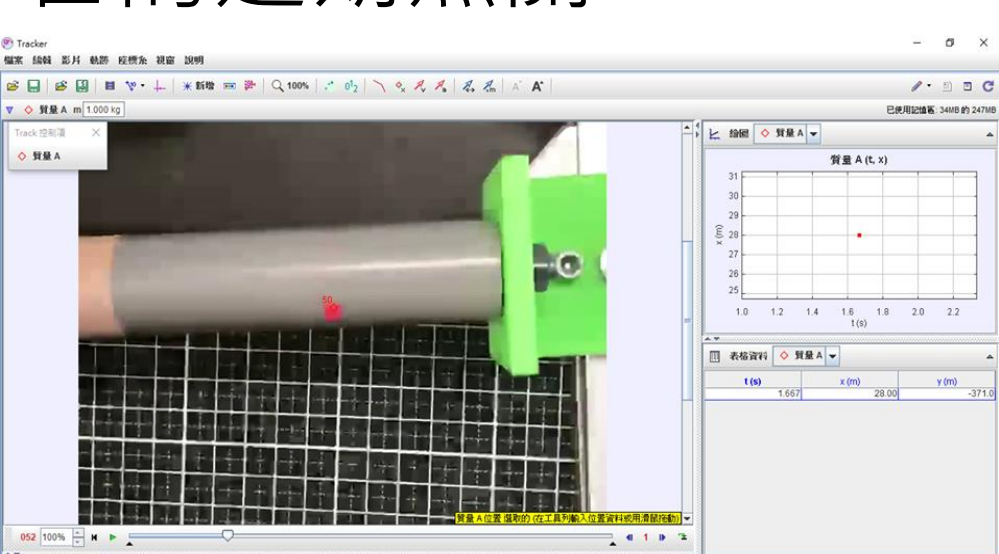
藉由S.H.M.的推導得知： $g\mu_k T = 4\pi^2 L$ ，也就是週期與管距呈現的關係理論線，經過實驗採集數據後，利用數學軟體擬合這些數據點，如上圖擬合線。

我們將動摩擦係數訂在0.262935，也就是淺色紙膠帶的動摩擦係數，如此一來，便可將其當作常數來計算。

(三)、不同的轉速對PVC管週期的影響

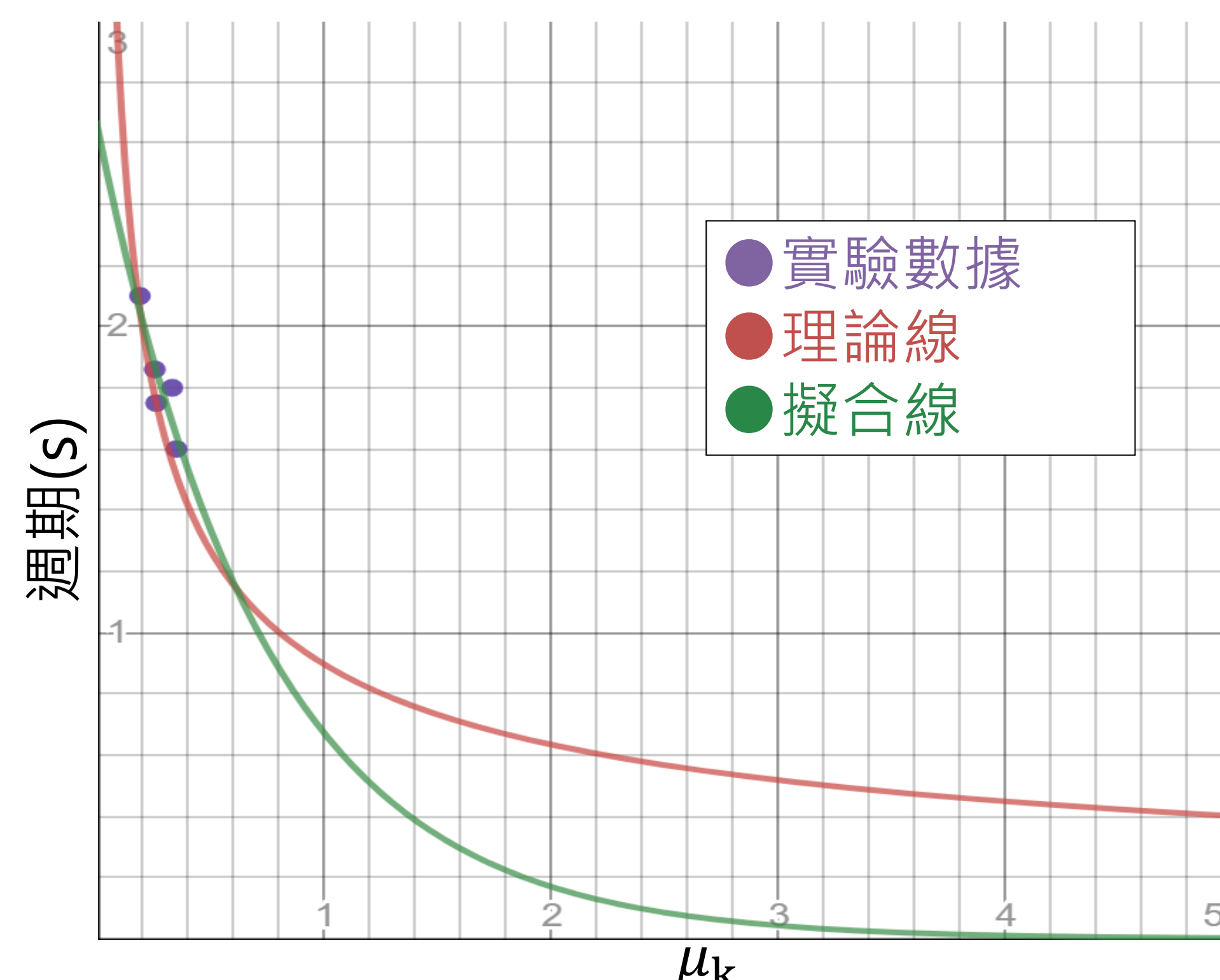


說明: 本實驗於長度為50cm的PVC管、管距固定為25cm、摩擦系之下進行，透過上圖可以得知，當滾筒的轉速逐漸增加時，PVC管的週期並不會隨之增加。因此，滾筒的轉速與PVC管的週期無關。



在進行以馬達轉速為操縱變因的實驗時，由於馬達所能觀測到的資訊僅有電壓，於是我們便在滾筒上貼上了紅點並進行錄製，接著利用tracker分析出馬達在各相異電壓時的轉速(rad/s)。

(五)、不同的接觸面材質對PVC管週期的影響



藉由上述的推導得知： $g\mu_k T = 4\pi^2 L$ ，也就是週期與管距呈現的關係理論線，經過實驗採集數據後，利用數學軟體擬合這些數據點，如上圖擬合線，經過實驗採集數據後，我們利用數學軟體Desmos擬合這些數據點，

如上圖擬合線，我們將管距 L 訂在20，如此一來，便可將其當作常數來計算。

60cm
手機
斜面
PVC管截片

$$Ft=ma$$

$$=mgsin\theta - f_k$$

$$=mgsin\theta - \mu_k \cdot mg\cos\theta$$

$$=mg(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)$$

$$\therefore \mu_k = \tan\theta - \frac{a}{g\cos\theta}$$

f_k
 $mg\sin\theta$
 θ

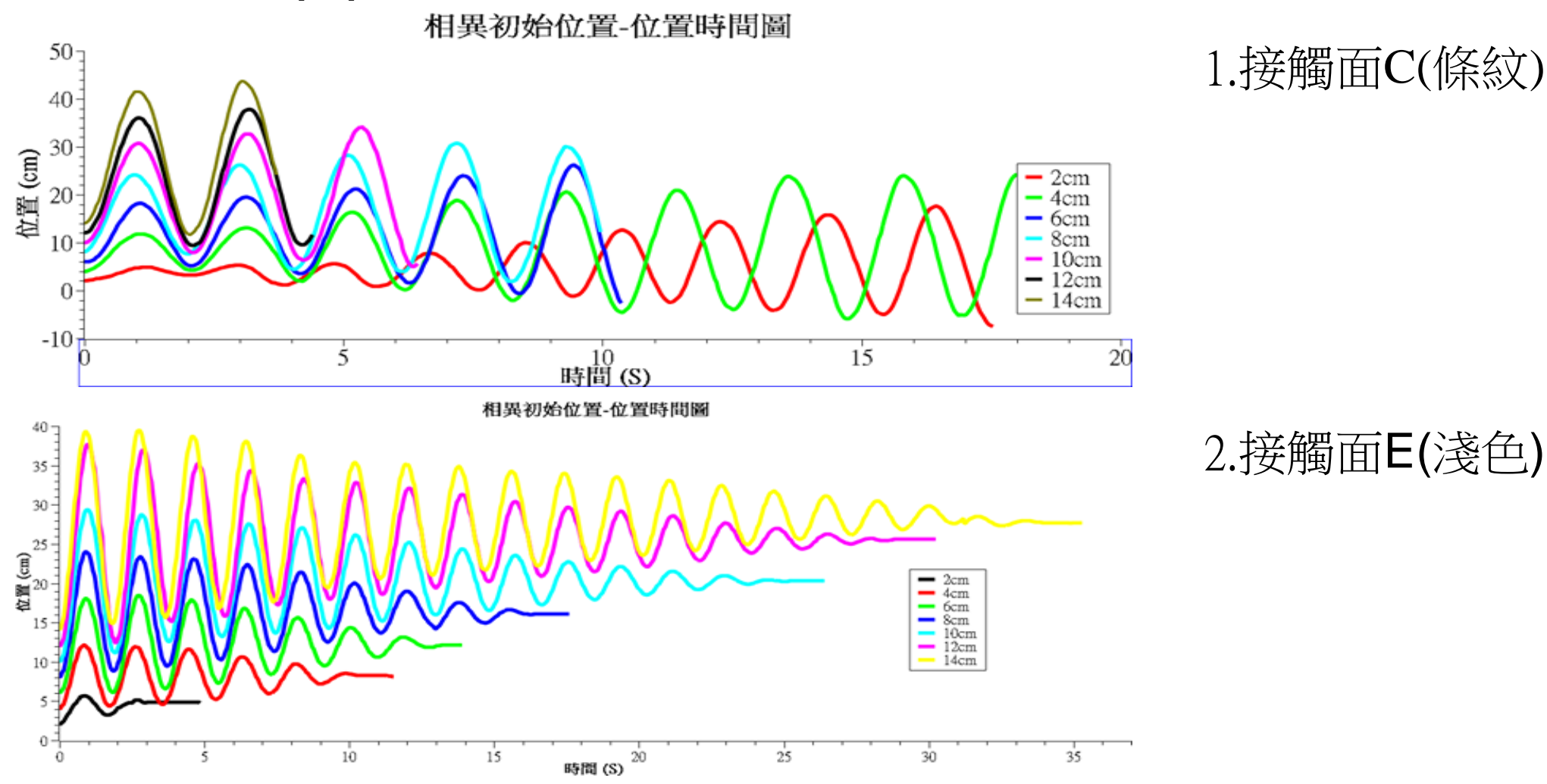
接觸面A	接觸面B	接觸面C	接觸面D	接觸面E
0.256593	0.333484	0.351752	0.191129	0.262935

為取得各膠帶與PVC管間的動摩擦係數，我們用木板當斜面，並用手機軟件量測出斜面與水平面間的夾角，接著將我們所使用的PVC管截切一小塊，經過影片錄製並利用Tracker進行分析，得到x-t圖後，再將數據進行二次微分，如此便能獲得物體的加速度，套入以下的推導結果後，便能得到欲求的動摩擦係數了。

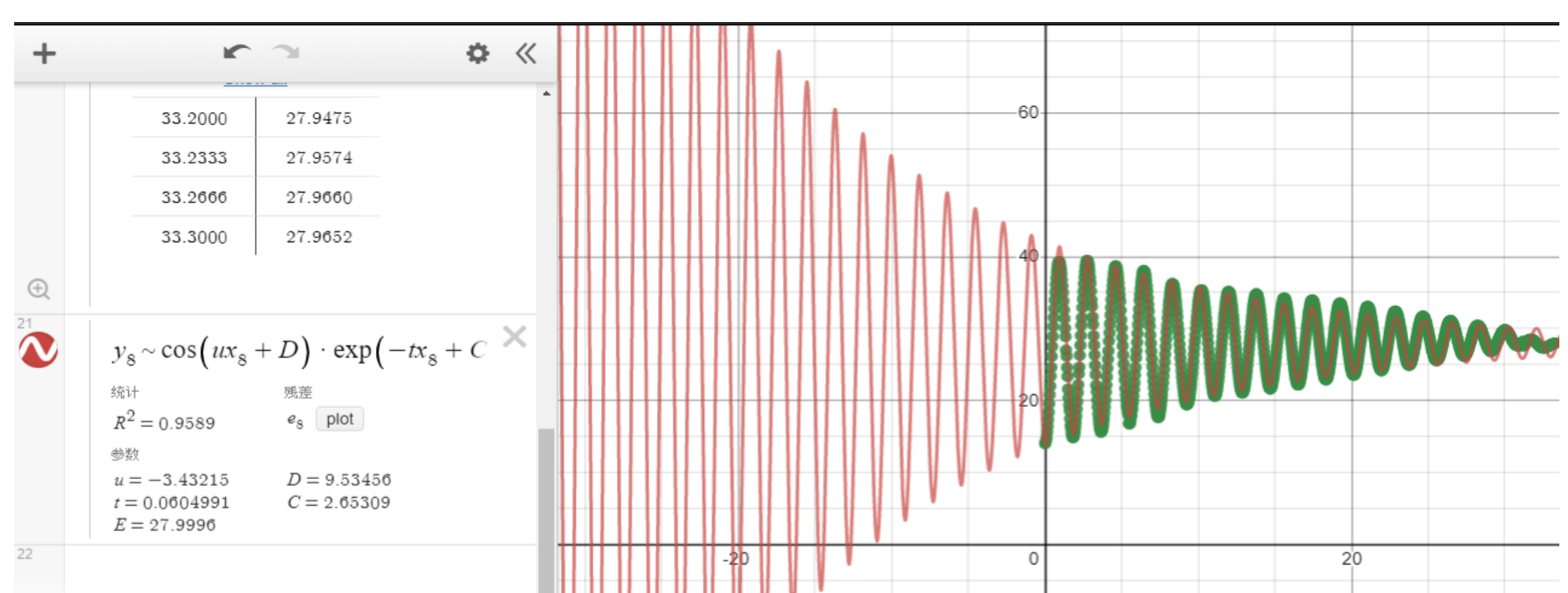
(六)、PVC管在相異條件下的衰減率

然而，在進行上述實驗時，我們發現現實狀況並非如模擬時PVC管能夠不斷地進行簡諧運動，其振幅會逐漸衰減，最終停止。在查閱相關文獻及論文後，我們便開始做了五組有關衰減率的實驗。發現除了會有阻尼振盪的現象外，在使用某些具有特定紋路或材質的膠帶時，竟然還出現了強迫阻尼振盪的現象。

(1)、不同膠帶的相異初始位置



(2)、阻尼係數 (接觸面E 偏離原點14cm)



$$y = \cos(\mu x + d) \times \exp(-tx + c) + e$$

t: 阻尼係數

由此得知阻尼係數後，我們可以進一步的推導，

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, 2B = \frac{t}{m}$$

T: 週期 t: 阻尼係數 m: 管重

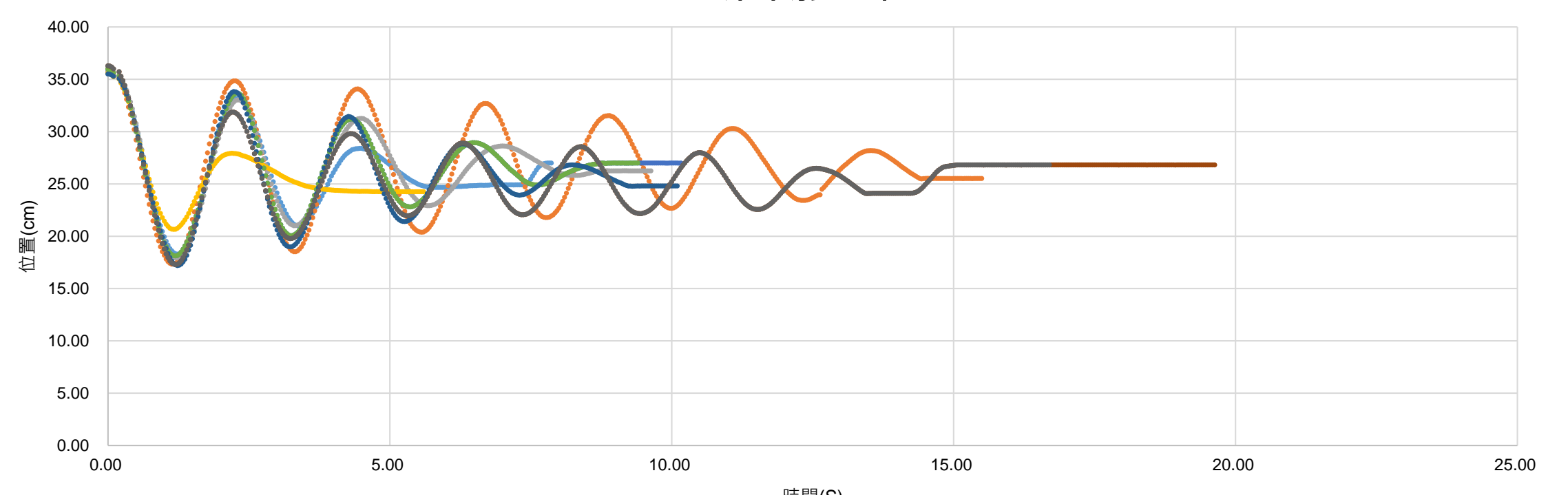
$\omega > B$ 時震幅會隨時間降低

上圖7的阻尼係數為0.060499 管重為201g 週期為1.75所帶入的值 $\omega = 3.59039$ $B = 0.0001504$, $\omega > B$

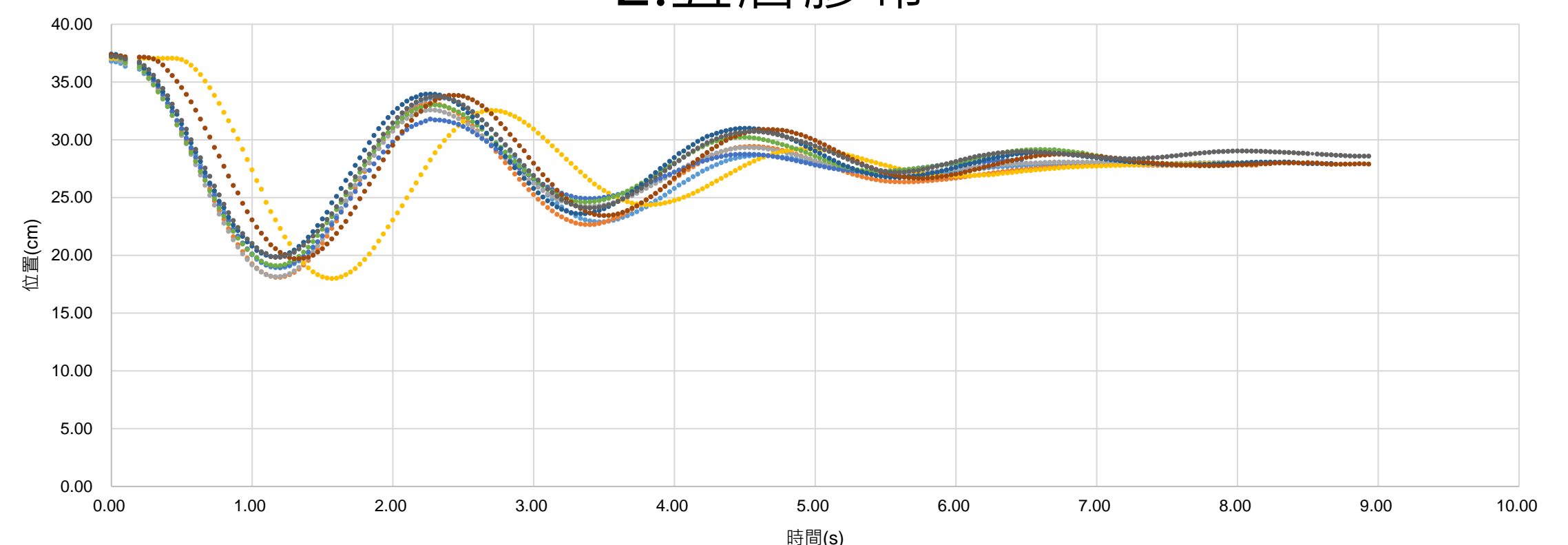
(七)、相異層數進行探討

在完成相異接觸面對於PVC管造成影響一實驗後，我們明顯的發現當接觸面愈軟，也就是當PVC管通過時，接觸面間會造成愈大的形變，使得阻尼振盪對PVC管運動之影響加劇，為更深入探討形變對於PVC管運動軌跡之影響，我們固定膠帶的材質(接觸面D)，並分別錄製1、2、3、...、10層的影片，每層均進行十次且將其疊圖，如此便能觀察出形變與PVC管運動之關聯。

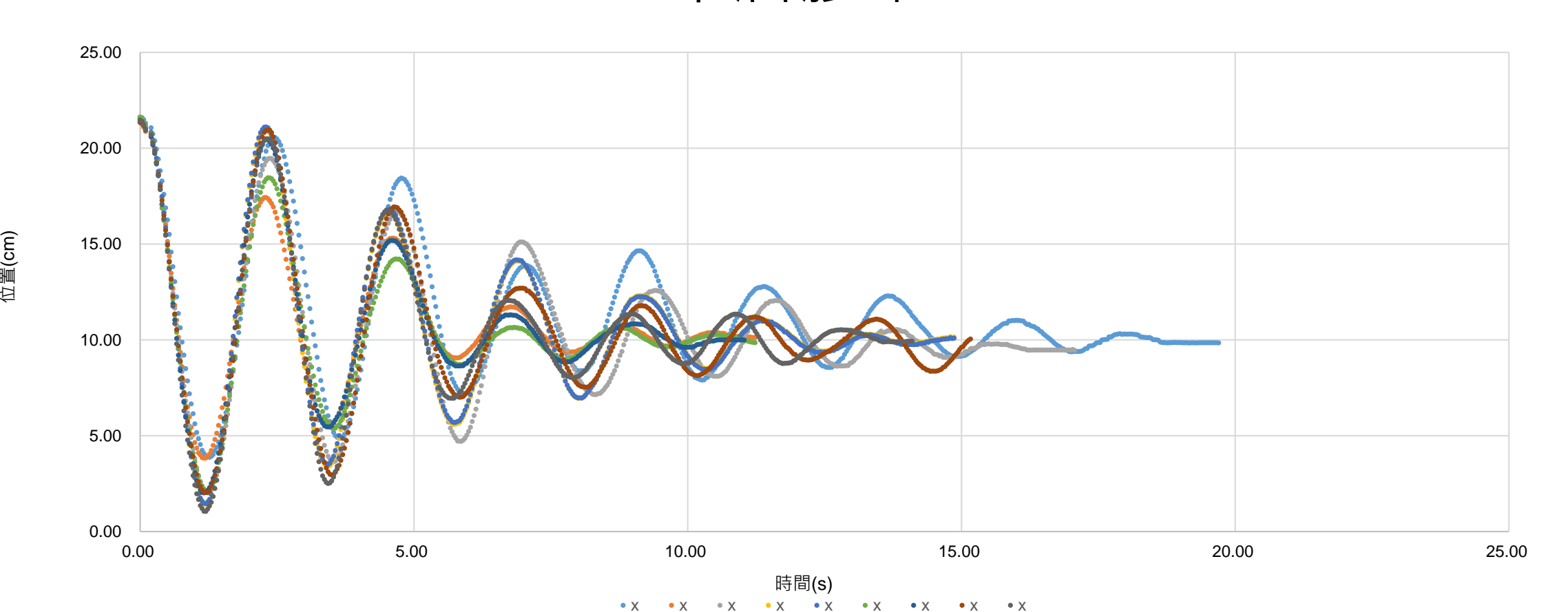
1.一層膠帶



2.五層膠帶

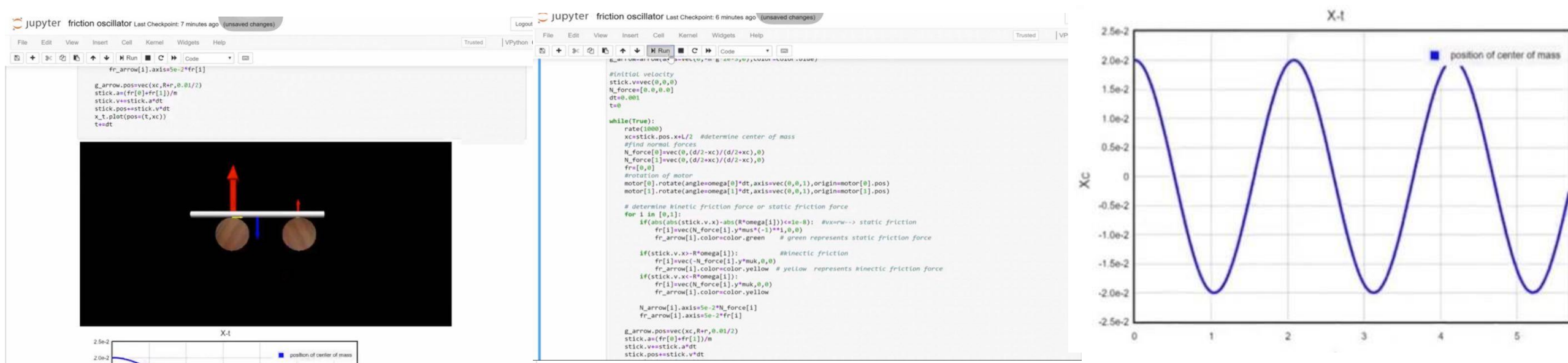


3.十層膠帶



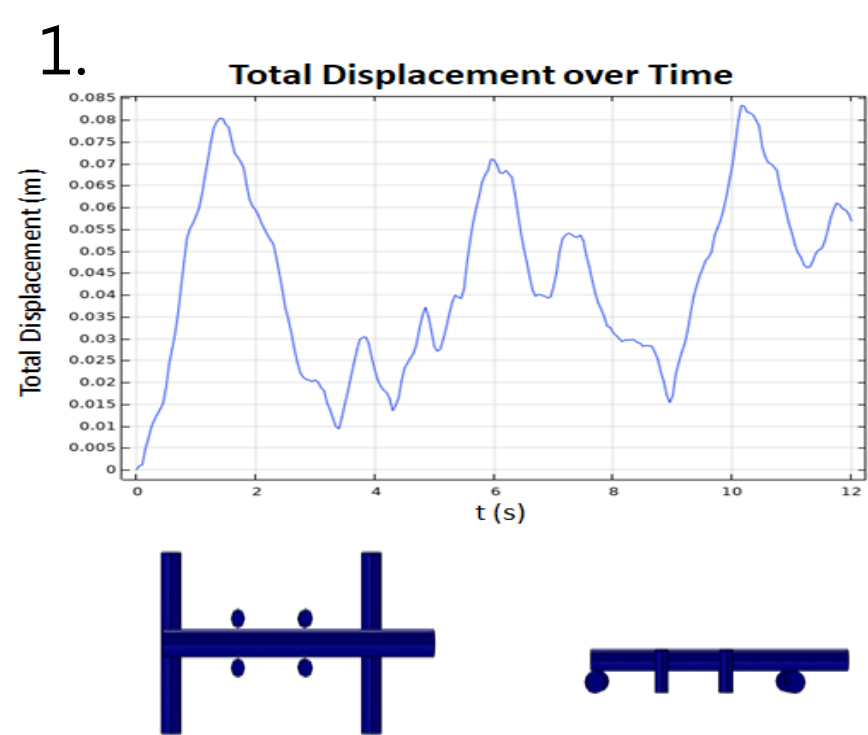
模擬比較

一、VPython



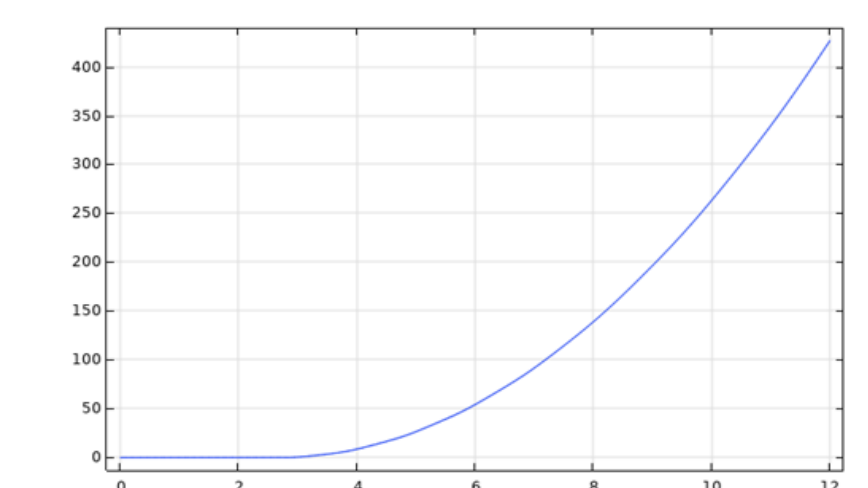
完成實驗後，我們便利用VPython對我們的實驗架設進行模擬，對照先前得到的實驗數據，模擬與真實的最大差異就在於：模擬是一個理想環境，除了正向力與動摩擦力外沒有任何阻力，且能量亦不會損耗。然而真實情況具有空氣阻力等諸多會影響PVC管運動的因素。甚至，在PVC管的運動過程中，也會導致滾筒形變，進而改變了動摩擦力。

二、Comsol



此圖是利用COMSOL模擬軟件進行模擬，由於這是三維的模擬，因此其上所呈現的圖會較VPython模擬出的圖看起來沒那麼向簡諧運動。但卻十分接近真實實驗的結果。

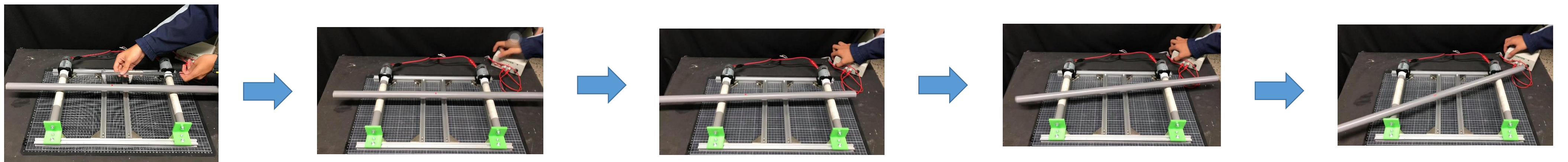
2.特殊情況討論



在進行模擬的時候發現一個現象，在所有條件皆不變的狀況下，當質量不斷增加時，到達某個臨界點，PVC管在滾筒上的運動會直接掉落。

誤差分析

本實驗使用了培鈴輔助
我們在沒有培林的情況下做了測試，在開始前拿游標尺確認管子與滾筒接垂直



結論

- PVC管的質量與其週期無關
- PVC管的長度與其週期無關
- 馬達的轉速與PVC管的週期無關
- 不同的接觸面材質與PVC管的週期呈指數關係($T \propto \sqrt{\frac{1}{\mu_k}}$)
- 不同的管距(2L)與PVC管週期呈現指數關係($T \propto \sqrt{L}$)

未來展望

- 滾筒的形變如何影響動摩擦係數。
- 那些參數會影響阻尼係數、其二者間的關係(ex.摩擦係數)。
- 質量不斷增加時，到達某個臨界點，PVC管在滾筒上的運動會直接掉落，探討其原理及找出關係。

參考及其他

- <https://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Oscillator.htm>
- <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8E%A5%E8%A7%A6%E5%8A%9B%E5%AD%A6?fbclid=IwAR1TGzBycXvmJKKnu-5vZ3ARP8Ze0LyL4y4TzCcaExZRPusrHa374jnYbJ0#%E4%B8%A4%E4%B8%AA%E7%AD%89%E5%8D%8A%E5%BE%84%E5%9C%86%E6%9F%B1%E4%BD%93%E7%9A%84%E4%BA%A4%E5%8F%89%E6%8E%A5%E8%A7%A6>
- http://www.physics.usyd.edu.au/teach_res/mp/doc/chaos07A.htm?fbclid=IwAR0opGfzS7hAR1Pscjtf0yJlWydCFi9O8q27z1bJ3dAuyJmhYABQAOKAgto
- <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BB%E5%B0%BC>