

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051806

懸崖勒馬測定法-摩擦係數

學校名稱：臺中市立長億高級中學

作者： 高二 陳柏廷 高二 湯瑋震 高二 戴千翔	指導老師： 曾俊雄
-----------------------------------	--------------

關鍵詞：懸崖勒馬、摩擦係數、不確定度

摘要

本實驗在木塊最上方綁一條棉線以砝碼拉動之，而木塊啟動後可能傾倒、停不下來或停止。我們觀察木塊在不同因素下啟動後能停止的情況，並依據觀察結果推測造成其停止的因素，我們的理論所運用的變因有木塊對砝碼的重量比值、棉線綁在木塊上的高度。我們在不同條件下，以手機錄影並配合軟體 Tracker 追蹤木塊啟動到停止的位置與時間的關係，再經由牛頓第二運動定律、動摩擦力公式結合推導出木塊的運動公式，並將此公式寫入 Excel 以疊代法演化出位置、速度及加速度隨時間的變化，將所得到的理論值和實驗結果數據加以討論，並建立有限制條件下的懸崖勒馬測定法-摩擦係數模型及其不確定度的探討。

壹、 研究動機

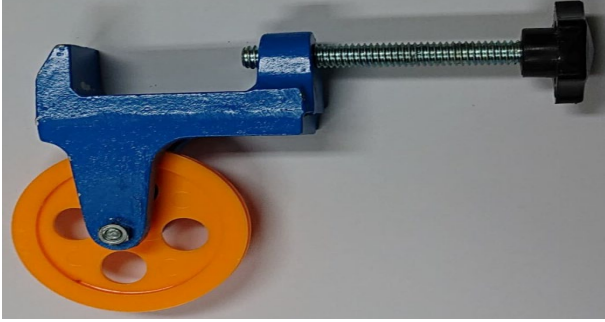
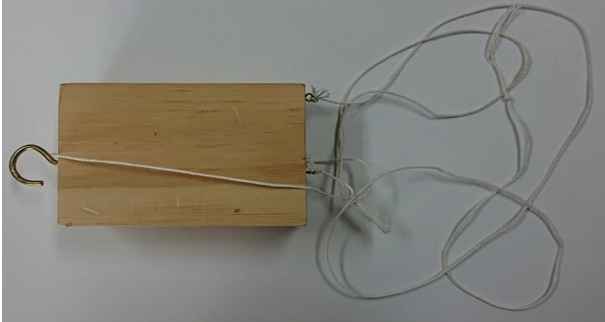
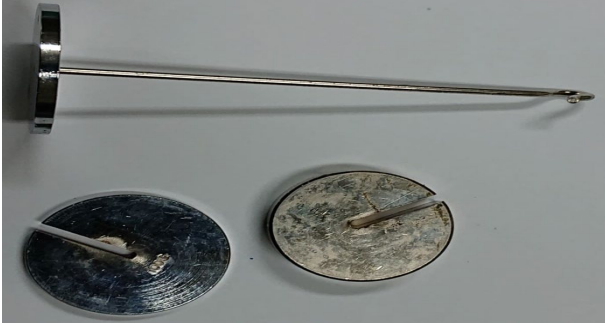
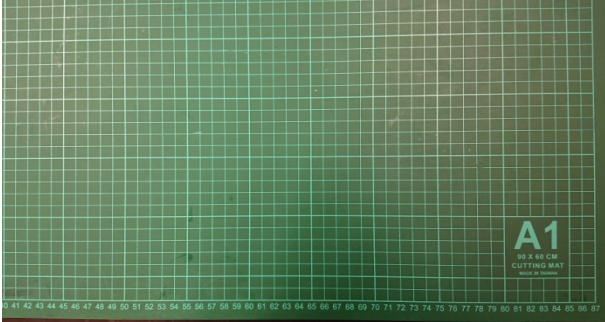
在日常生活中靜止的物體受拉力運動後，若拉力不變的情況下，通常會很直覺地認為會持續運動。在大多數情況下動摩擦力都小於最大靜摩擦力，因此能克服最大靜摩擦力的拉力，便可使物體持續的運動。但在高一時物理課的一項作業「製作一項科學玩具並解釋之」，我們在臺中教育大學的科學遊戲實驗室看到「懸崖勒馬」，在相同的砝碼拉動下木塊竟然會自行啟動後停止，詳加查詢後發現與繩張力的大小和方向有極大的關係，適逢物理正在上運動學，便決定以此做為研究主題。這個研究以高中物理為主，主要討論木塊對砝碼的重量比值、棉線綁在木塊上的高度對木塊運動造成的影響。

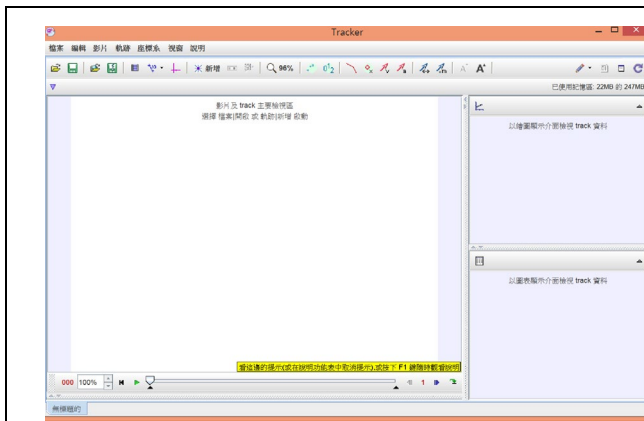
貳、 研究目的

為了探討木塊為何會自行運動後停止，又有哪些因素影響繩張力的大小？我們於實驗中的變因包含有木塊對砝碼的重量比值、棉線綁在木塊上的高度，使用到的理論有力平衡、力矩平衡、牛頓第二運動定律、最大靜摩擦力公式以及動摩擦力公式。為了解釋木塊違反直觀的運動行為，故設計此實驗與 Excel 疊代法的電腦模擬來討論之。

參、 研究設備及器材

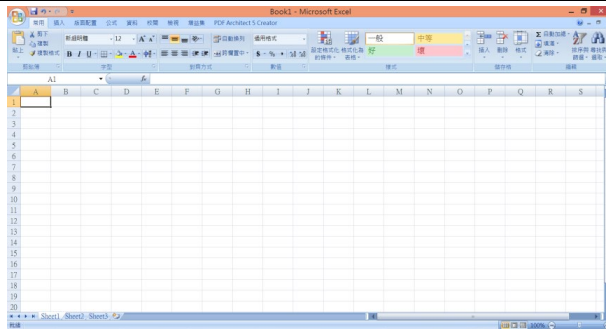
一、研究設備：

設備	用途
 <p>(圖一)</p>	<p>(圖一)為定滑輪，用於改變施力方向並降低棉繩與桌子邊緣的摩擦力。</p>
 <p>(圖二)</p>	<p>(圖二)為木塊，當作沒有馬腳的馬使用，並可在上方增加負重，藉以改變馬的質量。</p>
 <p>(圖三)</p>	<p>(圖三)為砝碼，其重量可以提供穩定的拉力。</p>
 <p>(圖四)</p>	<p>(圖四)為切割墊，用以提供木塊摩擦力。</p>



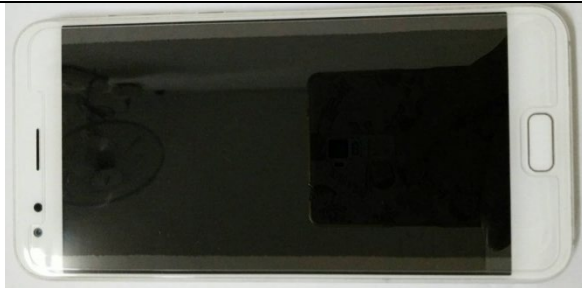
(圖五)

(圖五)為 Tracker 程式的介面，用於追蹤木塊隨時間變化的位置軌跡。



(圖六)

(圖六)為 Excel 程式的介面，用於計算測量到的數據、繪製圖表以及疊代法的電腦模擬。



(圖七)

(圖七)為手機，用於記錄木塊的移動軌跡。

二、實驗儀器架構：



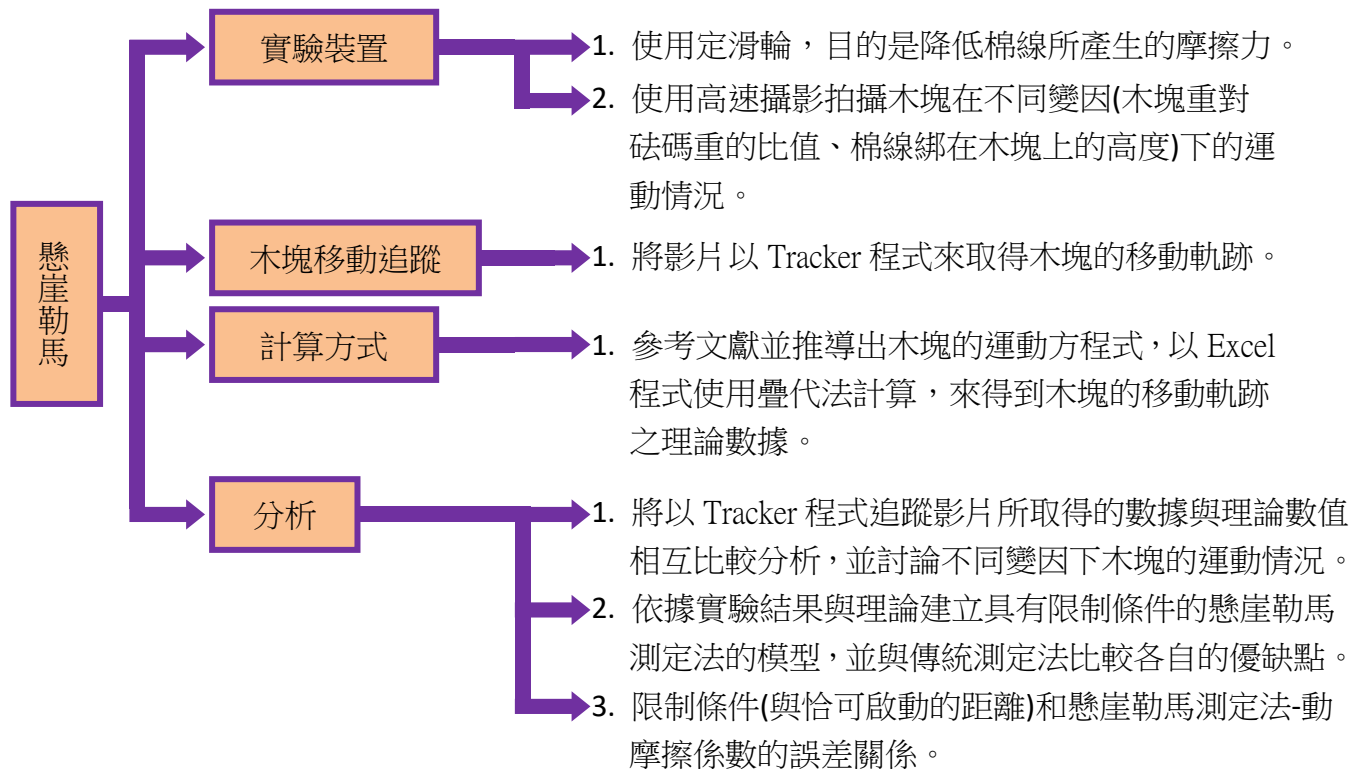
(圖八)傳統測定法



(圖九)懸崖勒馬測定法

肆、研究過程及方法

一、研究架構：



二、實驗數據的取得、計算與定義：

(一) 位置(\vec{X})與時間(t)

利用 Tracker 軟體取得位置與時間的數據。

首先將影片匯入程式後，並將校正桿(比例尺)設定於 30 公分的鐵尺上，長度設定為 30 公分。再來設定坐標軸的原點於定滑輪與棉繩接觸的最高點。接著將質點 A 標定在木塊的前端，然後開始取每一幀木塊前端的 x 數值。

(二) 位移量($\vec{S} = \Delta\vec{X} = \vec{X}_n - \vec{X}_{n-1}$)

以每一幀的 x 值減去前一幀的 x 值，即得木塊的位移量。

(三) 短時間內的平均速度($\vec{V} = \frac{\Delta\vec{X}}{\Delta t}$)

將木塊位移量除以每一幀的時間差，算得木塊在短時間之內的平均速度。

(四) 等加速度運動的加速度($\vec{V} = \vec{a}\Delta t + \vec{V}_0$)

藉由速度與時間關係圖，求其斜率的大小，即得木塊的加速度。

(五) 最大靜摩擦力(f_{smax})

外力恰可拉動物體時的量值。

(六) 靜摩擦係數($f_{smax} = \mu_s N$)

藉由最大靜摩擦力與正向力關係圖，求其斜率的大小，即得木塊與切割墊間的靜摩擦係數。

(七) 動摩擦係數($f_k = \mu_k N$)

藉由動摩擦力與正向力關係圖，求其斜率的大小，即得木塊與切割墊間的動摩擦係數。

三、懸崖勒馬的定義：

在放手後木塊會自行由靜止狀態加速至運動狀態，並在碰到定滑輪之前由運動狀態減速至靜止狀態，且整個運動過程中木塊不發生翻轉的現象。

四、實驗變因：

(一) 實驗一：傳統測定法-靜摩擦係數

控制變因：

接觸面的材料：木塊與切割墊

操縱變因：

木塊與其負重的總重量：186、286、386、486、586。(公克)

(二) 實驗二：傳統測定法-動摩擦係數

控制變因：

接觸面的材料	木塊與切割墊
木塊質量	386 公克
砝碼質量	147 公克

操縱變因：

時間：每 $\frac{1}{60}$ 秒測量一次。

(三) 實驗三：懸崖勒馬測定法-靜摩擦係數(恰可啟動條件)

控制變因：

接觸面的材料	木塊與切割墊
砝碼質量	100 公克
綁線的高度	9.5 公分

操縱變因：

木塊與其負重的總重量：286、306、326、346、366、386。(公克)

(四) 實驗四：懸崖勒馬-木塊與砝碼的重量比值

控制變因：

接觸面的材料	木塊與切割墊
綁線的高度	9.5 公分

操縱變因：

木塊重量與砝碼重量的比值：2.66、3.06、3.46、3.86。

(五) 實驗五：懸崖勒馬-綁線的高度

控制變因：

接觸面的材料	木塊與切割墊
木塊與負重的總質量	386 公克
砝碼質量	100 公克

操縱變因：

綁線的高度：5.5、6.5、7.5、8.5、9.5。(公分)

(六) 實驗六：懸崖勒馬測定法-啟動位置與動摩擦係數的誤差

控制變因：

接觸面的材料	木塊與切割墊	綁線的高度	9.5 公分
木塊與負重的總質量	386 公克	砝碼質量	100 公克

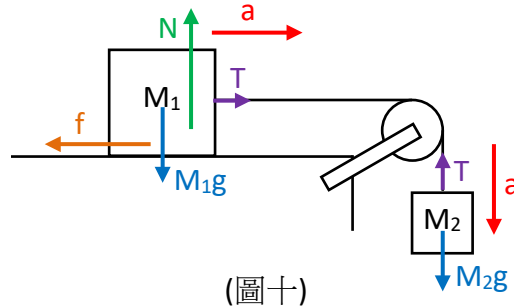
操縱變因：

啟動位置：46、50、54、58、62、66、70。(公分)

五、理論討論：

(一)傳統測定法：

1. 力圖分析：



2. 全系統運動方程式：

(1) 木塊靜止：

對木塊 M_1 的力分析：

$$\begin{cases} \text{水平：力平衡} \Rightarrow T \leq f_{\text{smax}} & \text{-(公式 1)} \\ \text{鉛直：力平衡} \Rightarrow N = M_1g & \text{-(公式 2)} \end{cases}$$

對砝碼 M_2 的力分析：

$$\text{鉛直：力平衡} \Rightarrow T = M_2g \quad \text{-(公式 3)}$$

由(公式 1)~(公式 3)得最終方程式：

$$M_2 = \mu_s M_1 \quad \text{-(公式 4)}$$

(2) 木塊運動：

對木塊 M_1 的鉛直力分析：

$$\text{力平衡} \Rightarrow N = M_1g \quad \text{-(公式 5)}$$

對全系統的水平力分析：

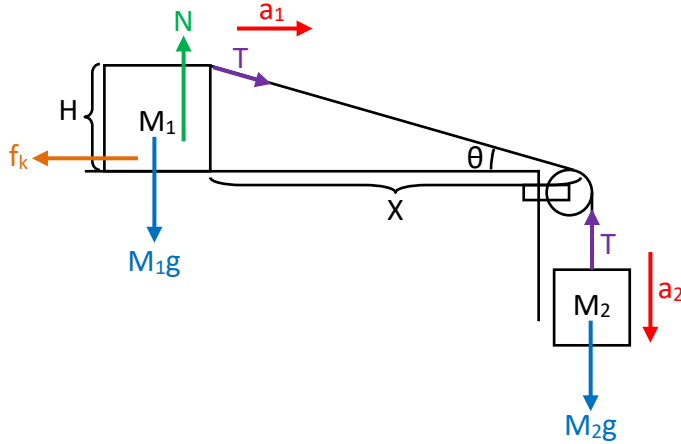
$$\text{牛頓第二運動定律} \Rightarrow M_2g - f_k = (M_1 + M_2)a \quad \text{-(公式 6)}$$

由(公式 5)與(公式 6)得最終方程式：

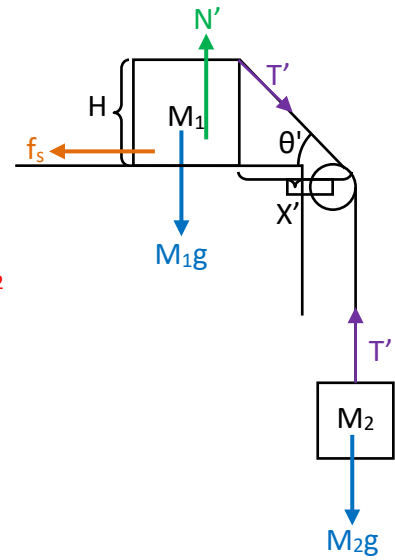
$$\mu_k = m - (1 + m) \frac{a}{g} \quad \text{-(公式 7)} \quad \text{定義：} m = \frac{M_2}{M_1}$$

(二)懸崖勒馬測定法：

1. 啟動與結束之力圖分析：



(圖十一)



(圖十二)

2. 木塊 M_1 與砝碼 M_2 運動方程式與 Excel 疊代法模擬：

(1) 木塊靜止：

對木塊 M_1 的力分析：

$$\begin{cases} \text{水平：力平衡} \Rightarrow T \cos \theta = f_{s\max} \text{-(公式 8)} \\ \text{鉛直：力平衡} \Rightarrow N = M_1g + T \sin \theta \text{-(公式 9)} \end{cases}$$

對砝碼 M_2 的力分析：

$$\text{鉛直：力平衡} \Rightarrow M_2g = T \text{-(公式 10)}$$

由(公式 8)~(公式 10)得：

$$M_2g \cos \theta = \mu_s(M_1g + M_2g \sin \theta) \text{-(公式 11)}$$

其中 $M_2g \cos \theta$ 為水平外力； $M_1g + M_2g \sin \theta$ 為正向力。

(2) 木塊運動：

對木塊 M_1 的力分析：

$$\begin{cases} \text{水平：牛頓第二運動定律} \Rightarrow T \cos \theta - f_k = M_1a_1 \text{-(公式 12)} \\ \text{鉛直：力平衡} \Rightarrow N = M_1g + T \sin \theta \text{-(公式 13)} \end{cases}$$

對砝碼 M_2 的力分析：

$$\text{鉛直：牛頓第二運動定律} \Rightarrow M_2g - T = M_2a_2 \text{-(公式 14)}$$

木塊 M_1 與砝碼 M_2 的加速度分析：

$$a_2 = a_1 \sec \theta \quad \text{-(公式 15)}$$

由(公式 12)~(公式 15)得最終方程式：

$$a_1 = \frac{m \cos \theta - \mu_k - \mu_k m \sin \theta}{1 + m - \mu_k m \tan \theta} \quad \text{-(公式 16)}$$

我們將以上方程式寫入 Excel 程式以疊代法來模擬木塊 M_1 之運動，並與實驗數值相互比較之。

3. 結束後木塊會靜止之分析：

若使砝碼 M_2 的加速度趨近於零 ($a_2 \rightarrow 0$)，那麼繩張力就會與砝碼重量相等 ($T = M_2 g$)，且啟動與結束木塊 M_1 的速度皆為零，故繩張力所做的正功與動摩擦力所做的負功相等 ($|W_{T \cos \theta}| = |W_{f_k}|$)。

繩張力所做的正功分析：

$$W_{T \cos \theta} = \int_X^{X'} T \cos \theta \, dx = M_2 g \left(\sqrt{X'^2 + H^2} - \sqrt{X^2 + H^2} \right)$$

動摩擦力所做的負功分析：
$$W_{f_k} = \int_X^{X'} f_k \, dx = \int_X^{X'} \mu_k (M_1 g + M_2 g \sin \theta) \, dx = \mu_k g \left[M_1 (X' - X) + M_2 H \ell_n \left| \frac{\sqrt{X'^2 + H^2} + X'}{\sqrt{X^2 + H^2} + X} \right| \right]$$

由 $|W_{T \cos \theta}| = |W_{f_k}|$ 關係可得動摩擦係數的近似解：

$$\mu_k = \frac{m(\sqrt{X'^2 + H^2} - \sqrt{X^2 + H^2})}{X' - X + mH \ell_n \left| \frac{\sqrt{X'^2 + H^2} + X'}{\sqrt{X^2 + H^2} + X} \right|} \quad \text{-(公式 17)}$$

(三)不確定度：

1. A 類不確定度：

以次數分配模式為基準，根據觀察所得之數據值為機率分布所推導之機率密度函數計算而得。

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{-(公式 18)}$$

2. B 類不確定度：

以經驗上的機率分配模式為基準，乃根據經驗值、原始數據、儀器規格表、解析度、環境條件、廠商說明書或先前測得之觀測值等等任何有效的資料作為機率分

布所推導之機率密度函數計算而得。

$$u_B = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ (公式 19), } a \text{ 為儀器的最小單位刻度。}$$

3. 誤差傳播公式：

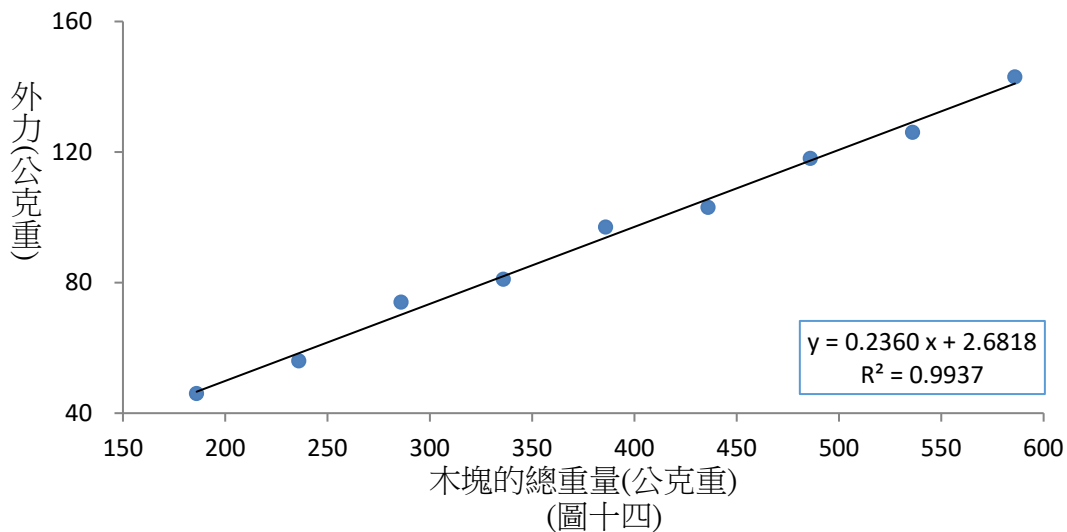
每個 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) u_i$ 代表每個獨立觀測量誤差對函數整體誤差之貢獻。當函數的推估誤差太大時，可偵測各獨立誤差的大小，來發現誤差的最大貢獻者（觀測量）。同時，檢視降低該觀測量誤差的方法，將可有效降低整體誤差。

$$u = \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_i^2} \text{ (公式 20)}$$

伍、 研究結果

一、 傳統測定法-靜摩擦係數-接觸面性質相同改變物重

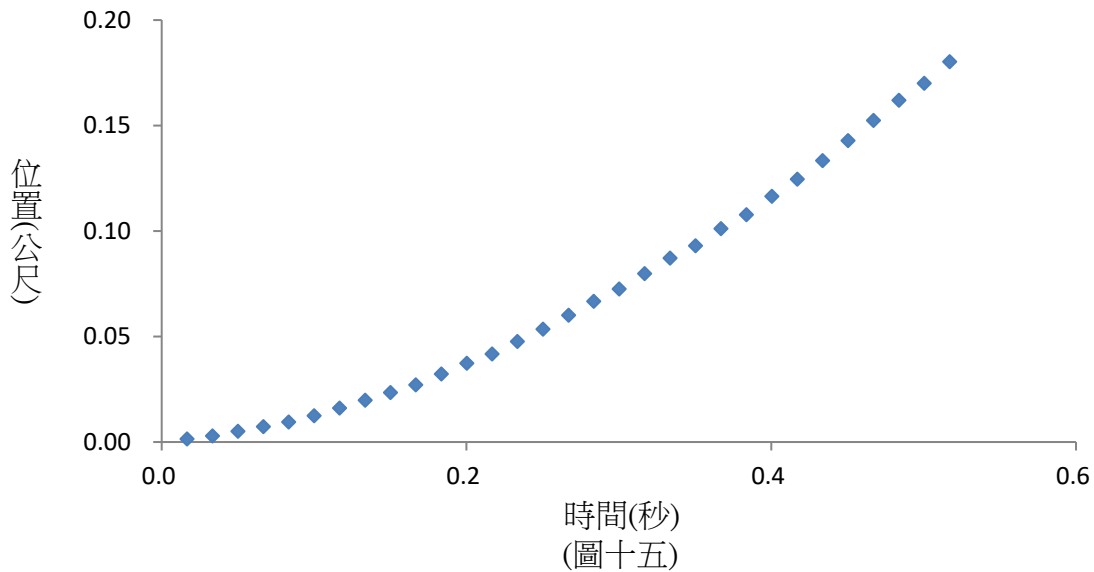
傳統測定法-靜摩擦係數



(圖十四)為使用傳統測定法，所得到的外力-木塊總重關係圖。根據(公式 1)至(公式 3)可以得知，外力大小即最大靜摩擦力大小；木塊與其負重的總重量大小即正向力大小。根據(公式 4)由(圖十四)的斜率可以得知木塊與切割墊間的靜摩擦係數為 0.2360。

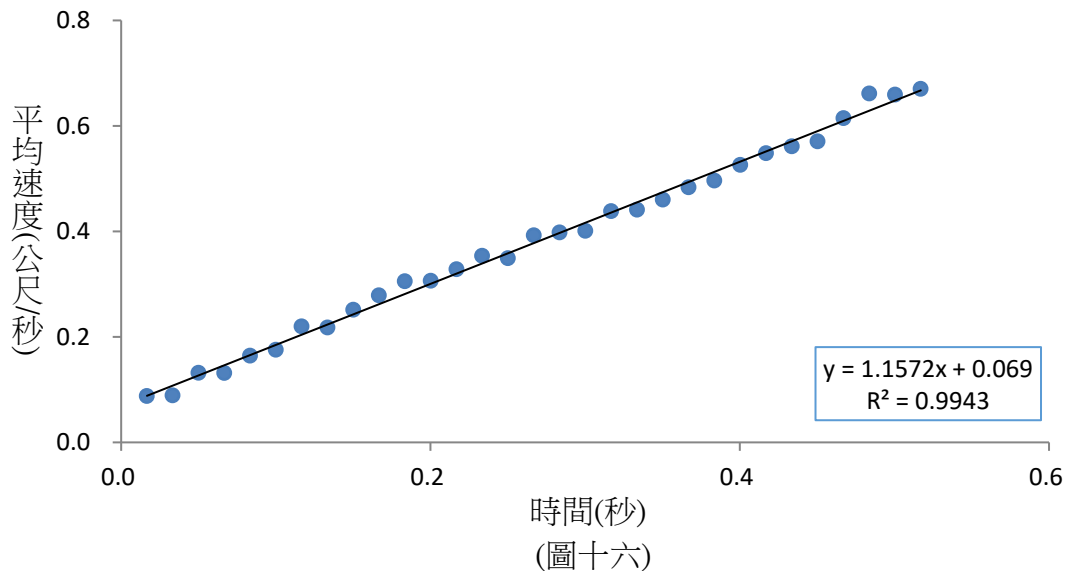
二、傳統測定法-動摩擦係數

傳統測定法-動摩擦係數



(圖十五)為使用傳統測定法，所得到木塊的位置-時間關係圖。由(圖十五)可以觀察出木塊運動有越來越快的現象，再藉由短時間內平均速度之定義可以將(圖十五)轉換成短時間內木塊的平均速度與時間的關係圖，即(圖十六)。

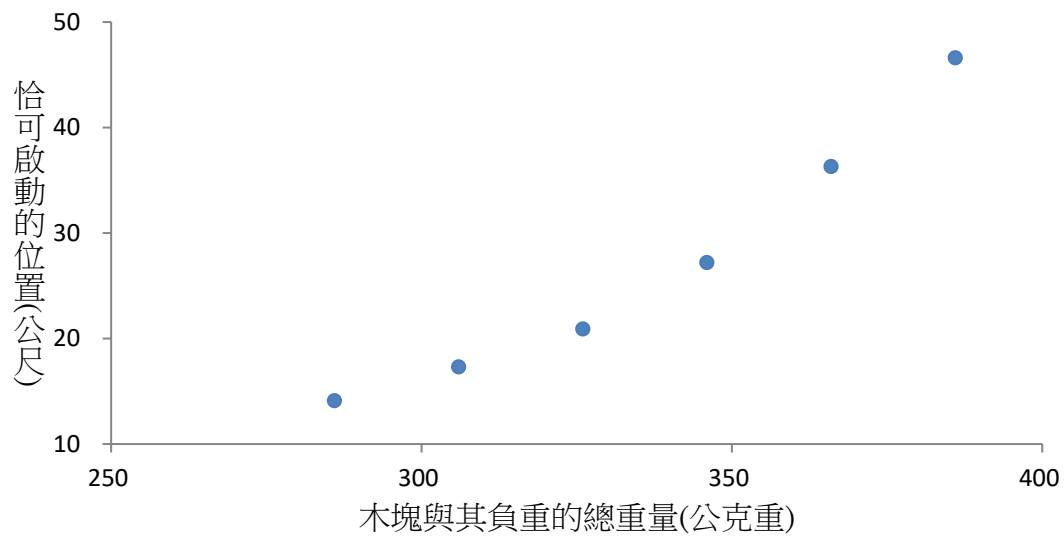
傳統測定法-動摩擦係數



(圖十六)為使用傳統測定法，所得到木塊的速度-時間關係圖。由(圖十六)可以得知這個運動為等加速度運動，其斜率即為加速度量值 1.1572m/s^2 。

三、懸崖勒馬測定法-靜摩擦係數(恰可啟動條件)-砝碼重相同改變木塊的負重

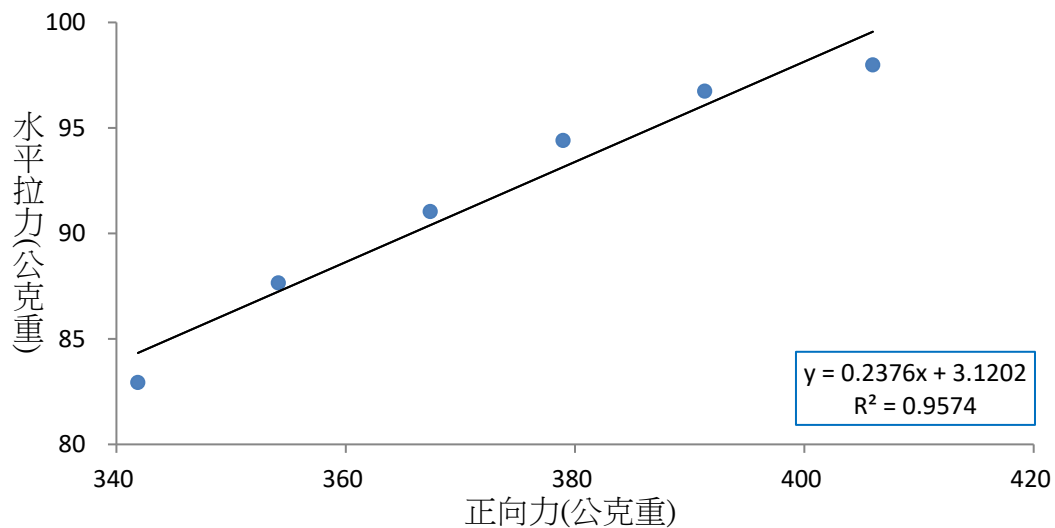
懸崖勒馬測定法-靜摩擦係數



(圖十七)

(圖十四)為使用懸崖勒馬測定法，所得到木塊恰可啟動的位置-木塊總重關係圖。由(圖十七)可以觀察出木塊其負重的總重量越大，則恰可啟動的位置就越遠，再藉由(公式 8)和(公式 9)則可以將(圖十七)轉換成水平拉力與正向力的關係圖，即(圖十八)。

懸崖勒馬測定法-靜摩擦係數

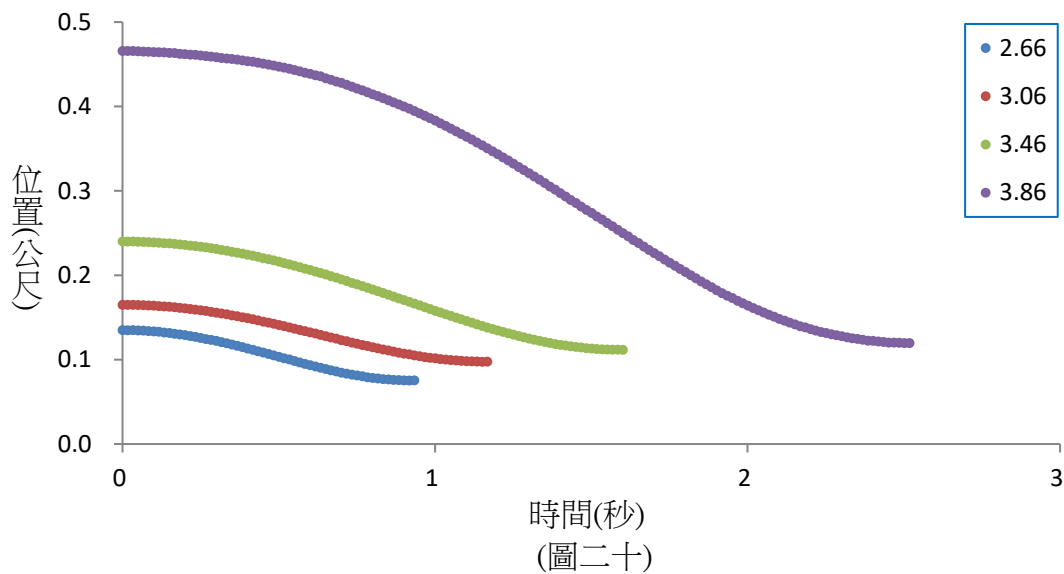


(圖十八)

(圖十八)為使用懸崖勒馬測定法，所得到木塊的水平拉力-正向力關係圖。根據(公式 11)由(圖十八)的斜率可以得知木塊與切割墊間的靜摩擦係數為 0.2376。

四、懸崖勒馬-改變木塊對砝碼重量的比值

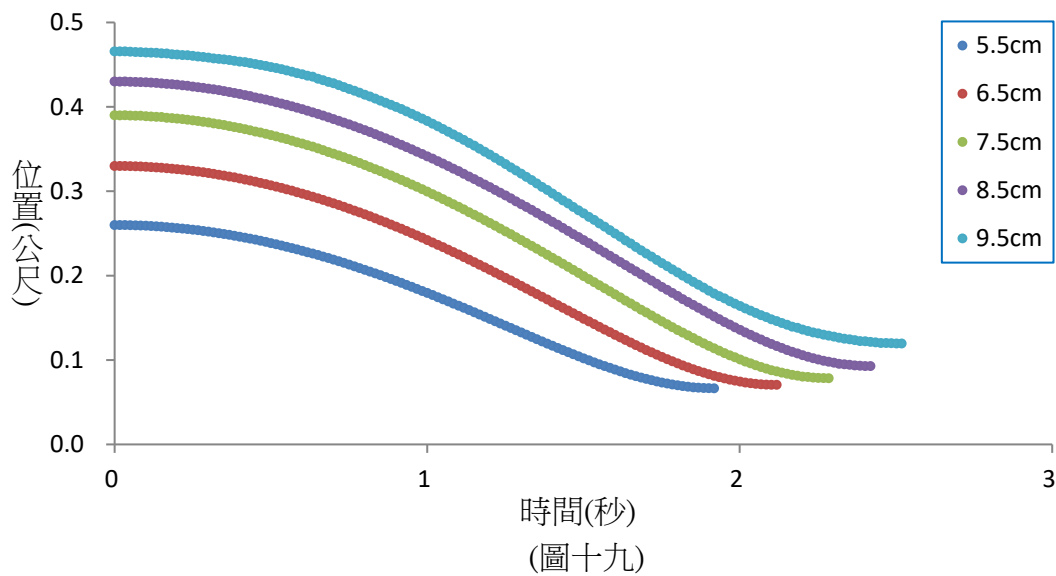
懸崖勒馬-木塊對砝碼重量比值



(圖二十)為懸崖勒馬在不同木塊對砝碼重量的比值下，木塊的位置-時間關係圖，(圖二十)可以看出木塊對砝碼重量的比值越大，則啟動位置隨之增大，而停止位置亦隨之增大。

五、懸崖勒馬-改變綁線在木塊上的高度

懸崖勒馬-綁線高度



(圖十九)為懸崖勒馬在不同綁線高度下，木塊的位置-時間關係圖，由(圖十九)可以看出綁線位置越高，則啟動位置隨之增大，而停止位置亦隨之增大。

六、懸崖勒馬測定法-啟動位置與動摩擦係數的誤差

表一 啟動位置與動摩擦係數的誤差

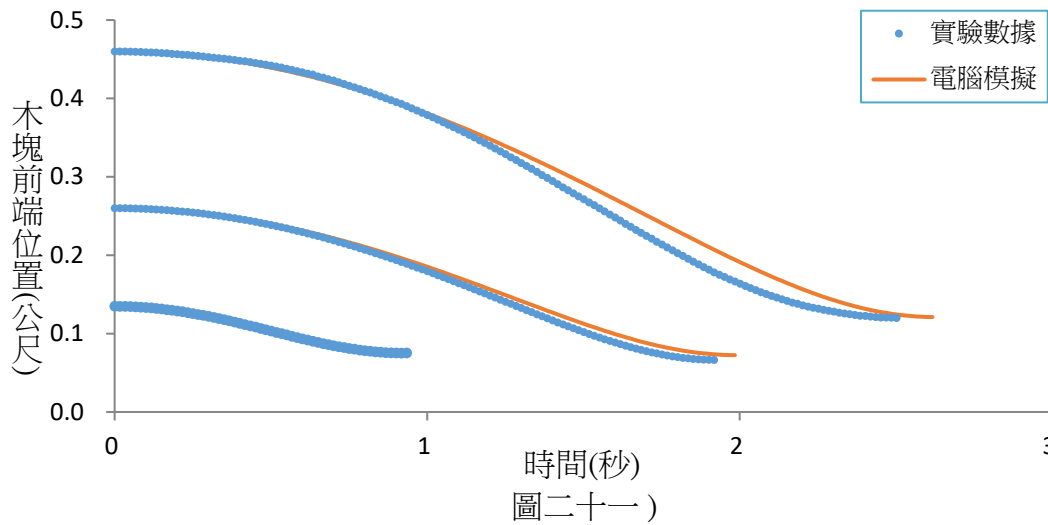
起始位置	停止位置	動摩擦係數	誤差
46.0 公分	12.0 公分	0.2213	0%
50.0 公分	12.0 公分	0.2233	0.90%
54.0 公分	11.8 公分	0.2249	1.63%
58.0 公分	11.8 公分	0.2265	2.35%
62.0 公分	11.0 公分	0.2270	2.58%
66.0 公分	10.5 公分	0.2278	2.94%
70.0 公分	9.5 公分	0.2277	2.89%

表一為在木塊對砝碼重量比值為 3.86、恰可啟動位置為 46 公分的條件下，起始位置與動摩擦係數誤差的關係表。由表一可以看出越遠離恰可啟動位置，則與恰可啟動的位置 46 公分做比較其誤差越大。

陸、 討論

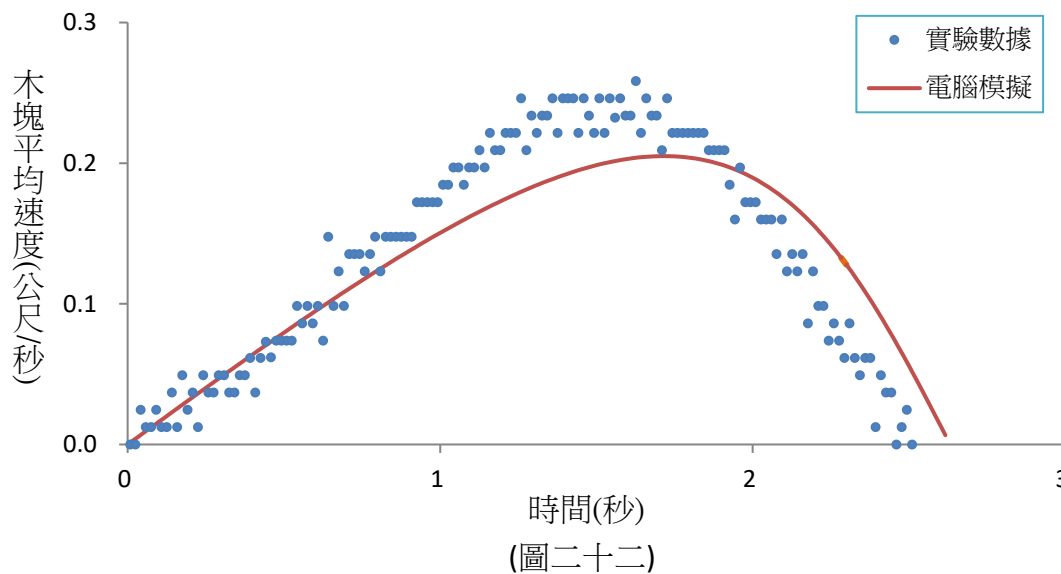
- 一、在靜摩擦係數的測量中，不論是傳統測定法還是懸崖勒馬測定法，即(圖十四)與(圖十八)皆顯示趨勢線沒有通過原點，推測可能的誤差來源為棉線壓在定滑輪上所產生的摩擦力，造成定滑輪兩側的棉繩張力不相同所致。
- 二、(圖十四)與(圖十八)所得到的靜摩擦係數，傳統測定法為 0.2360；懸崖勒馬測定法為 0.2376，其相互差距百分比僅 0.678%故在準確度上皆相當精準。但(圖十八)的 R^2 較小，故在測量的穩定度上懸崖勒馬測定法較差，且實驗操作與理論皆是傳統測定法較為方便與理解。
- 三、由實驗四與實驗五的實驗結果和 Excel 疊代法的電腦模擬相互比較，即(圖二十一)。

懸崖勒馬-運動軌跡



(圖二十一) 為懸崖勒馬的位置-時間關係圖，其實驗數據可以觀察到運動軌跡具有反趨點的存在，故可以分為兩個運動狀態。第一個運動狀態為加速的運動狀態；第二個運動狀態為減速的運動狀態。而能對水平運動造成影響的力只有水平繩張力與動摩擦力，因此可以看出隨著木塊的運動水平繩張力與動摩擦力會隨之變化。在第一個狀態下水平繩張力大於動摩擦力，故為加速的運動狀態；第二個狀態下水平繩張力小於動摩擦力，故為減速的運動狀態。依據(公式 12)用 Excel 程式的疊代法做電腦模擬發現與實驗數據吻合度極高。再藉由短時間內的平均速度之定義可以將(圖二十一)轉換成短時間內木塊的平均速度與時間的關係圖，即(圖二十二)。

懸崖勒馬-運動狀態

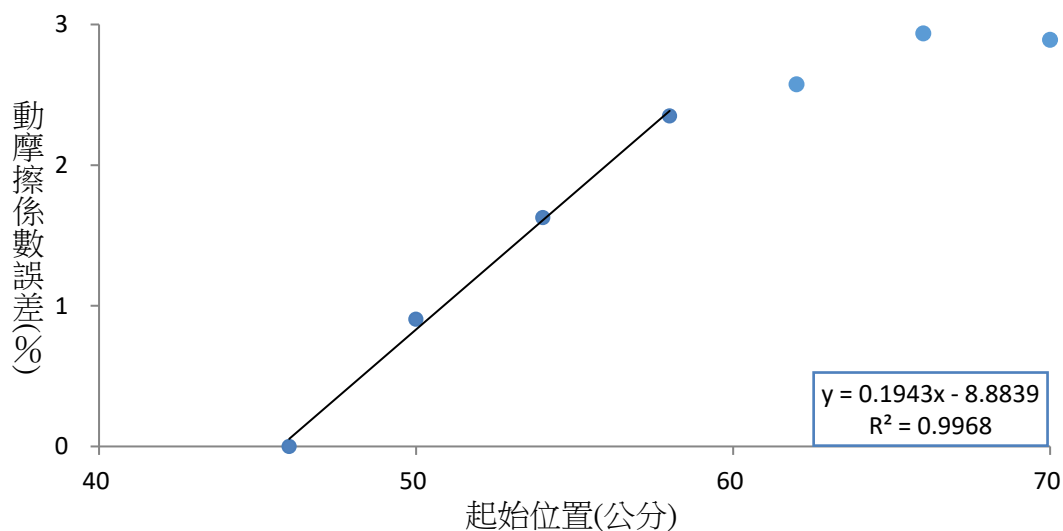


四、懸崖勒馬測定法-動摩擦係數的實驗數據與理論數據有些許誤差的產生，我們推論產生誤差的原因有三：

- (一)、 (圖二十二)可以發現 1 到 2 秒之間實驗值高於理論值，而 2 到 2.5 秒之間則是理論值高於實驗值，應該是鏡頭拍攝的過程中，在鏡頭兩側因透鏡折射所造成的長度扭曲所致。
- (二)、 與靜摩擦係數一樣由棉線壓在定滑輪上所產生的摩擦力，造成定滑輪兩側的棉繩張力不相同所致。
- (三)、 根據「力矩=轉動冠量 \times 角加速度」可以得知定滑輪在轉動的過程中，會造成定滑輪兩側的棉繩張力不相同。

五、傳統測定法，即(圖十六) 實驗所得的加速度 1.1572m/s^2 配合(公式 7)可得到木塊與切割墊間的動摩擦係數為 0.2197。懸崖勒馬測定法，即(圖二十二)的實驗結果利用(公式 17)可以得到木塊與切割墊間的動摩擦係數為 0.2213。傳統測定法須測量加速度，較不易測量，而懸崖勒馬測定法僅需測量速度皆為零的起點位置與終點位置即可。但是懸崖勒馬測定法必須被限制在砝碼加速度極小的條件下，故要找到恰可啟動的起始位置就是一個極為重要的事情。

懸崖勒馬測定法-動摩擦係數的誤差



(圖二十三)

(圖二十三)為懸崖勒馬測定法的動摩擦係數誤差-木塊起始位置關係圖，可觀察到三個現

象。首先是恰可啟動的位置誤差最小；再來是距離恰可啟動的位置較近者，誤差呈現線性變大的特性；最後是距離恰可啟動的位置越遠，誤差增大且可能有一極限值的存在。

六、將傳統測定法與懸崖勒馬測定法之人為測量不確定度(A 類不確定度)及儀器測量不確定度(B 類不確定度)，代入(公式 18)、(公式 19)以及(公式 20)可以得到其動摩擦係數分別為 0.2197 ± 0.0018 以及 0.2213 ± 0.00015 ，傳統測定法之不確定度較大的主因為傳統測定法對於加速度測量之 A 類不確定度較大所致。

柒、 結論

- 一、本實驗主要目的為找出木塊可啟動且掉落桌面前停止的原因，藉由實驗觀察及理論模擬證實為移動過程中繩子與水平面的角度變化，造成拉動外力與動摩擦力變化所致。
- 二、綁線在不同高度下，綁線位置越高，則啟動位置隨之增大，而停止位置亦隨之增大。
- 三、木塊對砝碼重量在不同比值下，木塊對砝碼重量的比值越大，則啟動位置隨之增大，而停止位置亦隨之增大。
- 四、在砝碼加速度很小的條件下(Excel 模擬中 $a_2 < 0.67m/s^2$)，建立動摩擦係數的近似解模型，我們稱此模型為懸崖勒馬測定法。
- 五、木塊起始位置在不同距離下，首先是恰可啟動的位置動摩擦係數誤差最小；再來是距離恰可啟動的位置較近者，動摩擦係數誤差呈現線性變大的特性；最後是距離恰可啟動的位置越遠，動摩擦係數誤差越大且可能有一極限值的存在。
- 六、靜摩擦係數的比較：

表二 不同靜摩擦係數測定法的優缺點

	傳統測量法	懸崖勒馬測定法
實驗裝置	優	優
測量難易度	優	差
穩定度	優	差
精準度	優	優

七、動摩擦係數的比較：

表三 不同動摩擦係數測定法的優缺點

	傳統測量法	懸崖勒馬測定法
實驗裝置	優	優
測量難易度	差(加速度不易測量)	優(僅須測量起、終點)
穩定度	優	優
不確定度	差(± 0.0018)	優(± 0.00015)

八、未來展望：

- (一)本研究是建立在砝碼加速度很小的條件下，但事實上能懸崖勒馬現象的砝碼加速度也可很大，因此我們認為懸崖勒馬現象皆可測定的動摩擦係數是很值得研究的方向，希望之後可以探討在砝碼加速度很大條件下和動摩擦係數的關係。
- (二)進一步研究接觸面間液體黏滯力對動摩擦係數的影響，希望未來可以將液體種類作為變因之一。

捌、 參考資料

一、 書籍：

- (一) 普通高級中學基礎物理(二 B)上冊,南一出版社。
- (二) Calculus A Complete Course,Robert A.Adams,FIFTH EDITION.

二、 網站：

- (一) 台中教育大學科學遊戲實驗室：scigame.ntcu.edu.tw/power/power-029.html。
- (二) 維基百科-測量不確定度 https://en.wikipedia.org/wiki/Measurement_uncertainty。

三、 Youtube：

- (一) 遠哲科學趣味競賽 2013 懸崖勒馬: https://www.youtube.com/watch?v=sB8R1y2Xo_0。

三、歷屆作品

- (三) 中華民國第四十八屆中小學科學展覽會「懸崖勒馬-力的探討」。

【評語】 051806

本作品設計一新方法來討論動摩擦係數的測量，有不錯的理論分析與實驗設計操作。作者實驗精神值得嘉許。唯本作品較缺創意，主題深度略顯不足，作者對部分實驗結果的詮釋有待進一步釐清。

壹、研究動機

日常生活中靜止的物體受拉力運動後，若拉力不變的情況下，通常會直覺地認為會持續運動。在多數情況下動摩擦力都小於最大靜摩擦力，故能克服最大靜摩擦力的拉力，便可使物體持續的運動。在高一物理課的一項作業「製作一項科學玩具並解釋之」，我們在臺中教育大學科學遊戲實驗室看到「懸崖勒馬」，在相同的砝碼拉動下木塊竟然會自行啟動後停止，詳加查詢後發現與繩張力的大小和方向有極大的關係，適逢物理正在上運動學，便決定以此做為研究主題。

貳、文獻探討與研究原理

一、文獻探討

在台中教育大學科學遊戲實驗室與遠哲科學趣味競賽皆有用此現象製作科學玩具與趣味競賽，僅用力圖簡易說明會產生此現象的定性解釋。

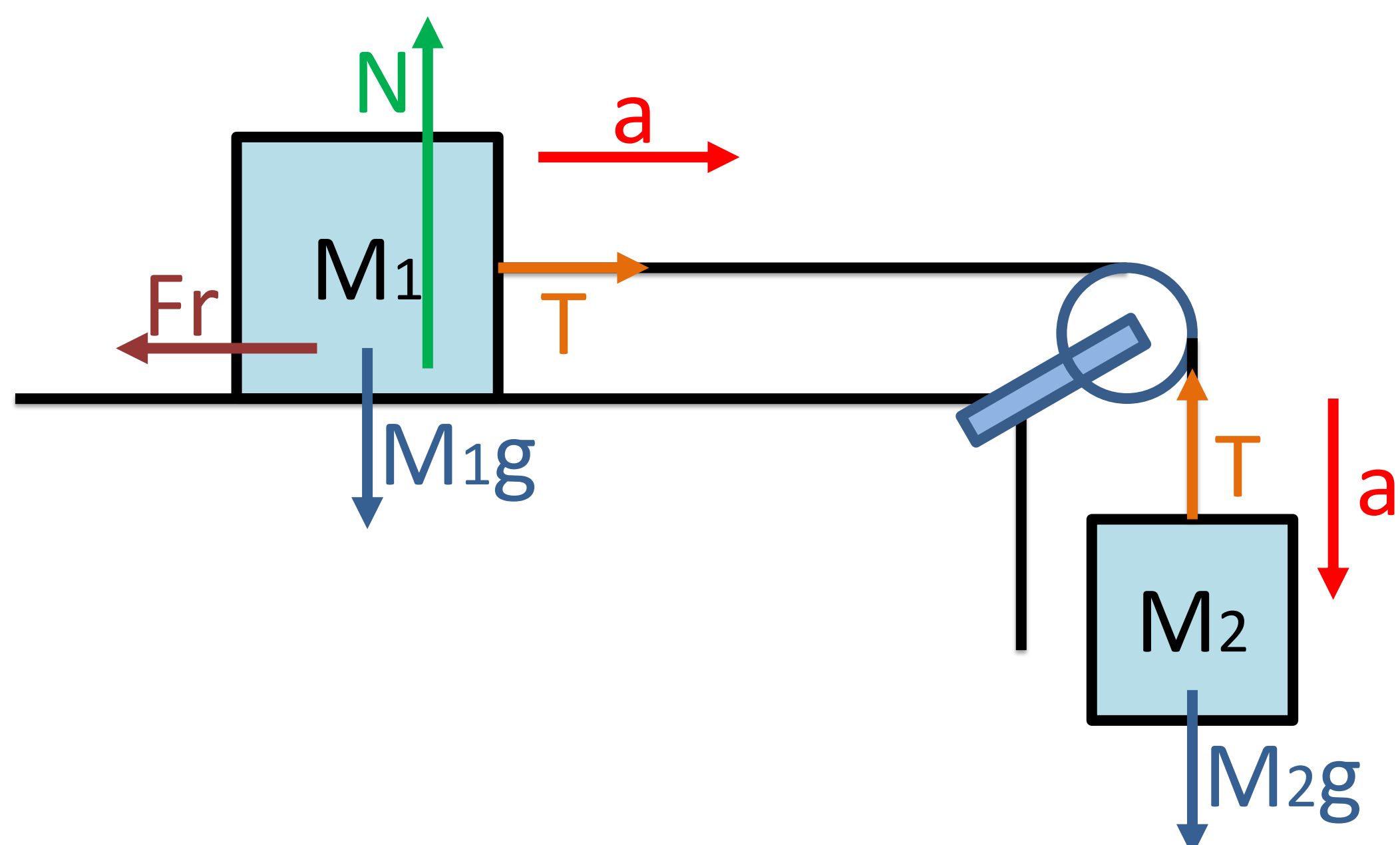
以「普通高級中學基礎物理(二B)上冊-摩擦係數的測定」中都必須測量到「加速度」這個相對不易測量的物理量，本研究希望以較易測量的物理量來得到摩擦係數。

從第四十八屆中小學科學展覽會「懸崖勒馬-力的探討」則是以「傳統測定法」對「懸崖勒馬」做摩擦係數定性的探討，故對於「懸崖勒馬」這個現象還有相當值得深入探討的內容。

本研究希望以Tracker分析「懸崖勒馬」的發生條件與運動軌跡，來建立「懸崖勒馬測定法」的模型，用以推廣簡易方法測量出摩擦係數。

二、傳統測定法-力分析圖

如下圖所示，分為靜摩擦係數與動摩擦係數兩種情況，再依各分量的力平衡與牛頓第二運動定律，可以列出下列方程式。



(一) 靜摩擦係數

1. 木塊M₁的力分析：

$$\begin{cases} \text{水平：} T = F_{s\max} \\ \text{鉛直：} N = M_1 g \end{cases}$$

2. 砝碼M₂的力分析：

$$\text{鉛直：} T = M_2 g$$

故得

$$M_2 = \mu_s M_1$$

(二) 動摩擦係數

1. 木塊M₁的力分析：

$$\text{鉛直：} N = M_1 g$$

2. 全系統的力分析：

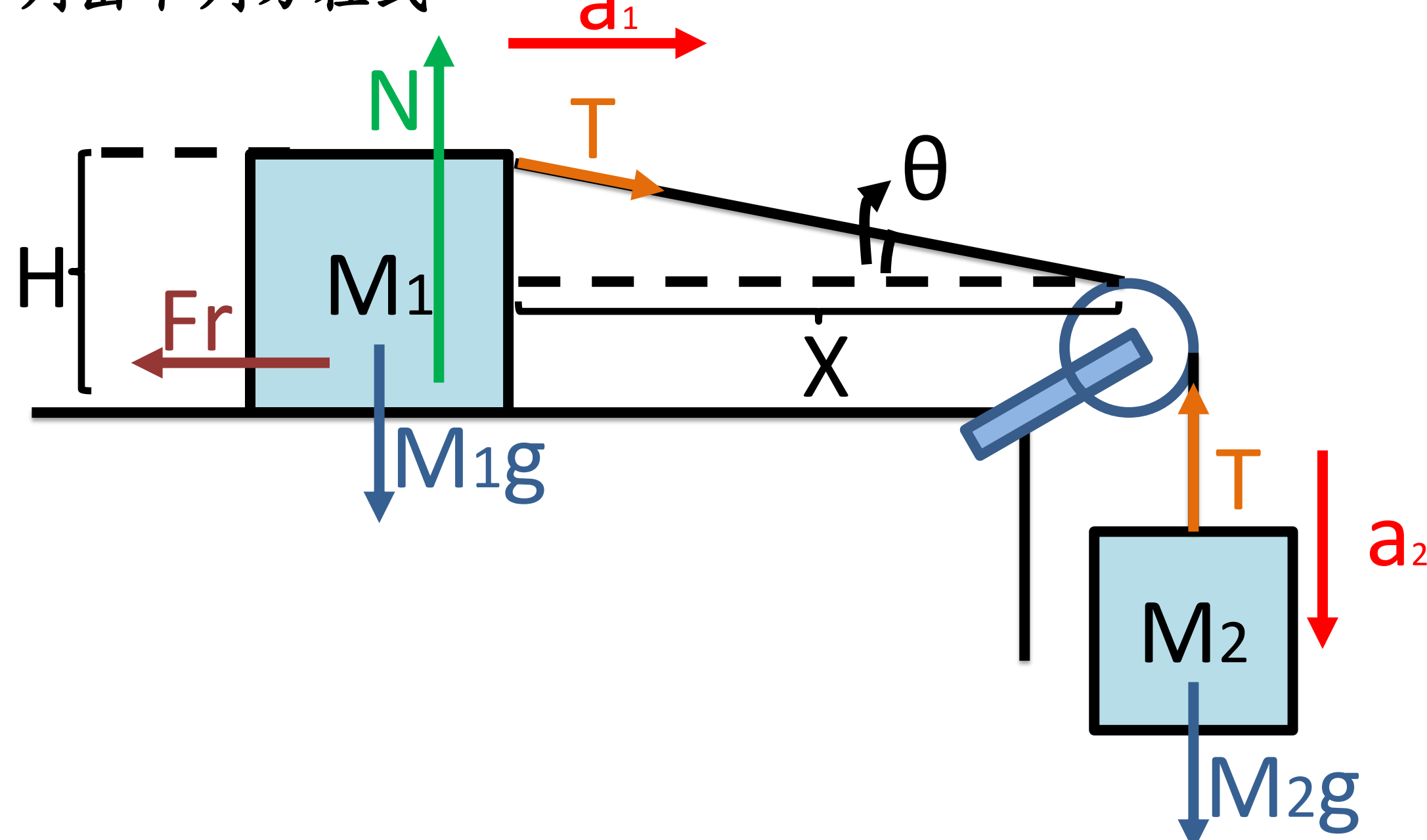
$$M_2 g - F_k = (M_1 + M_2) a$$

故得

$$\mu_k = m - (1 + m) \frac{a}{g} \quad m = \frac{M_2}{M_1}$$

三、懸崖勒馬測定法-力分析圖

如下所示，分為靜摩擦係數與動摩擦係數兩種情況，再依各分量的力平衡與牛頓第二運動定律，可以列出下列方程式。



(一) 靜摩擦係數

1. 木塊M₁的力分析：

$$\begin{cases} \text{水平：} T \cos \theta = F_{s\max} \\ \text{鉛直：} N = M_1 g \end{cases}$$

故得

$$M_2 g \cos \theta = \mu_s (M_1 g + M_2 g \sin \theta)$$

(二) 動摩擦係數

1. 木塊M₁的力分析：

$$\begin{cases} \text{水平：} T \cos \theta - F_k = M_1 a_1 \\ \text{鉛直：} N = M_1 g + T \sin \theta \end{cases}$$

2. 砝碼M₂的力分析：

$$\text{鉛直：} M_2 g - T = M_2 a_2$$

3. 木塊M₁與砝碼M₂的加速度分析：

$$a_2 = a_1 \sec \theta$$

故得木塊M₁的加速度方程式

$$a_1 = \frac{m \cos \theta - \mu_k - \mu_k m \sin \theta}{1 + m - \mu_k m \tan \theta}$$

4. 木塊最終會靜止之分析：

假設：砝碼的**加速度趨近於零**($a_2 \rightarrow 0$ ，即 $T = M_2 g$)且運動開始到結束木塊速度皆為零，故繩張力所做的正功與動摩擦力所做的負功大小相等。

(1) 繩張力所作的正功分析：

$$W_{T \cos \theta} = \int_X^{X'} T \cos \theta dx = M_2 g (\sqrt{X'^2 + H^2} - \sqrt{X^2 + H^2})$$

(2) 動摩擦力所作的負功分析：

$$W_{f_k} = \int_X^{X'} f_k dx = \mu_k g \left[M_1 (X' - X) + M_2 H \ell_n \left| \frac{\sqrt{X'^2 + H^2} + X'}{\sqrt{X^2 + H^2} + X} \right| \right]$$

故得動摩擦係數的**近似解**

$$\mu_k = \frac{m (\sqrt{X'^2 + H^2} - \sqrt{X^2 + H^2})}{X' - X + m H \ell_n \left| \frac{\sqrt{X'^2 + H^2} + X'}{\sqrt{X^2 + H^2} + X} \right|}$$

四、不確定度與誤差傳播公式

A類不確定度	B類不確定度	誤差傳播
$u_A = \frac{s}{\sqrt{n}}$	$u_B = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$u = \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_i^2}$

參、研究目的

- 一、實驗裝置特色
- 二、探討傳統測定法之靜摩擦係數
- 三、探討傳統測定法之動摩擦係數
- 四、探討懸崖勒馬測定法之靜摩擦係數
- 五、探討在不同木塊對砝碼質量比值下對懸崖勒馬運動軌跡的變化情形
- 六、探討不同的綁線高度對懸崖勒馬運動軌跡的變化情形
- 七、探討理論模型與實驗結果的對照分析
- 八、探討懸崖勒馬測定法-啟動位置與動摩擦係數的誤差之關聯性。

肆、研究過程

一、組裝研究儀器

(一) 傳統測定法與懸崖勒馬測定法之實驗裝置

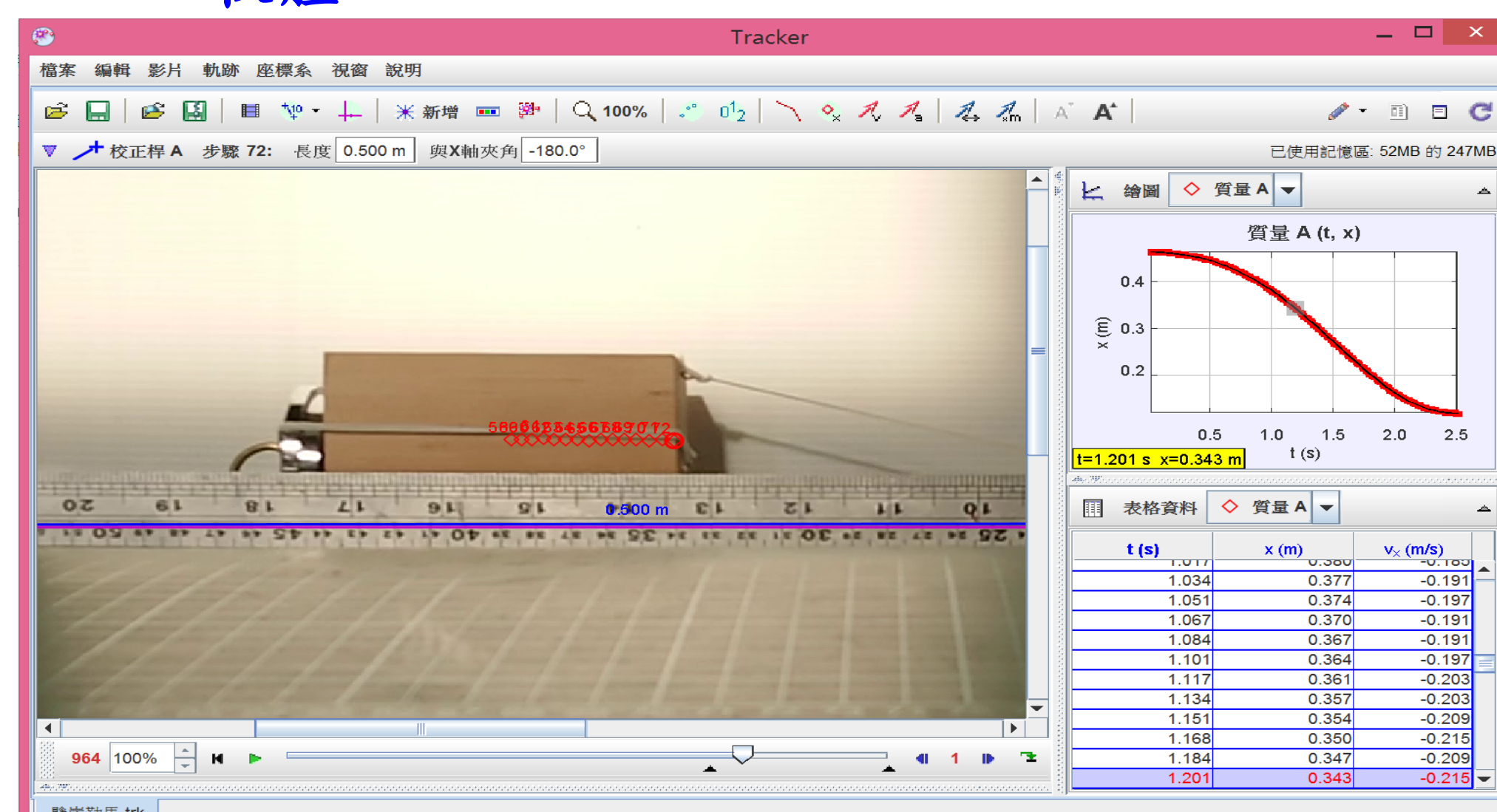


傳統測定法實驗裝置

懸崖勒馬測定法實驗裝置

利用手機的錄影功能，以幀數60fps紀錄木塊完整的運動軌跡。

(二) Tracker軟體



利用Tracker軟體將木塊運動的影片，拆解成每秒60張照片，來記錄木塊位置隨時間的關係。

(三) Excel軟體

t (s)	x (m)	v (m/s)	a (m/s²)	傳統	懸崖勒馬
0.0000	0.4657	0.0000	0.1770	0.9798	0.2040
0.0100	0.4657	0.0018	0.1769	0.9798	0.2040
0.0200	0.4656	0.0035	0.1769	0.9798	0.2040
0.0300	0.4656	0.0053	0.1769	0.9798	0.2040
0.0400	0.4655	0.0071	0.1769	0.9798	0.2041
0.0500	0.4654	0.0088	0.1769	0.9798	0.2041
0.0600	0.4653	0.0106	0.1768	0.9798	0.2042
0.0700	0.4652	0.0124	0.1768	0.9798	0.2042
0.0800	0.4651	0.0142	0.1767	0.9798	0.2043
0.0900	0.4649	0.0159	0.1767	0.9798	0.2043
0.1000	0.4647	0.0177	0.1766	0.9797	0.2044
0.1100	0.4645	0.0195	0.1765	0.9797	0.2045
0.1200	0.4643	0.0212	0.1765	0.9797	0.2046

利用Excel軟體來執行木塊運動方程式在疊代法下的模擬結果，並與實驗結果相互比較分析之。

伍、研究結果與討論

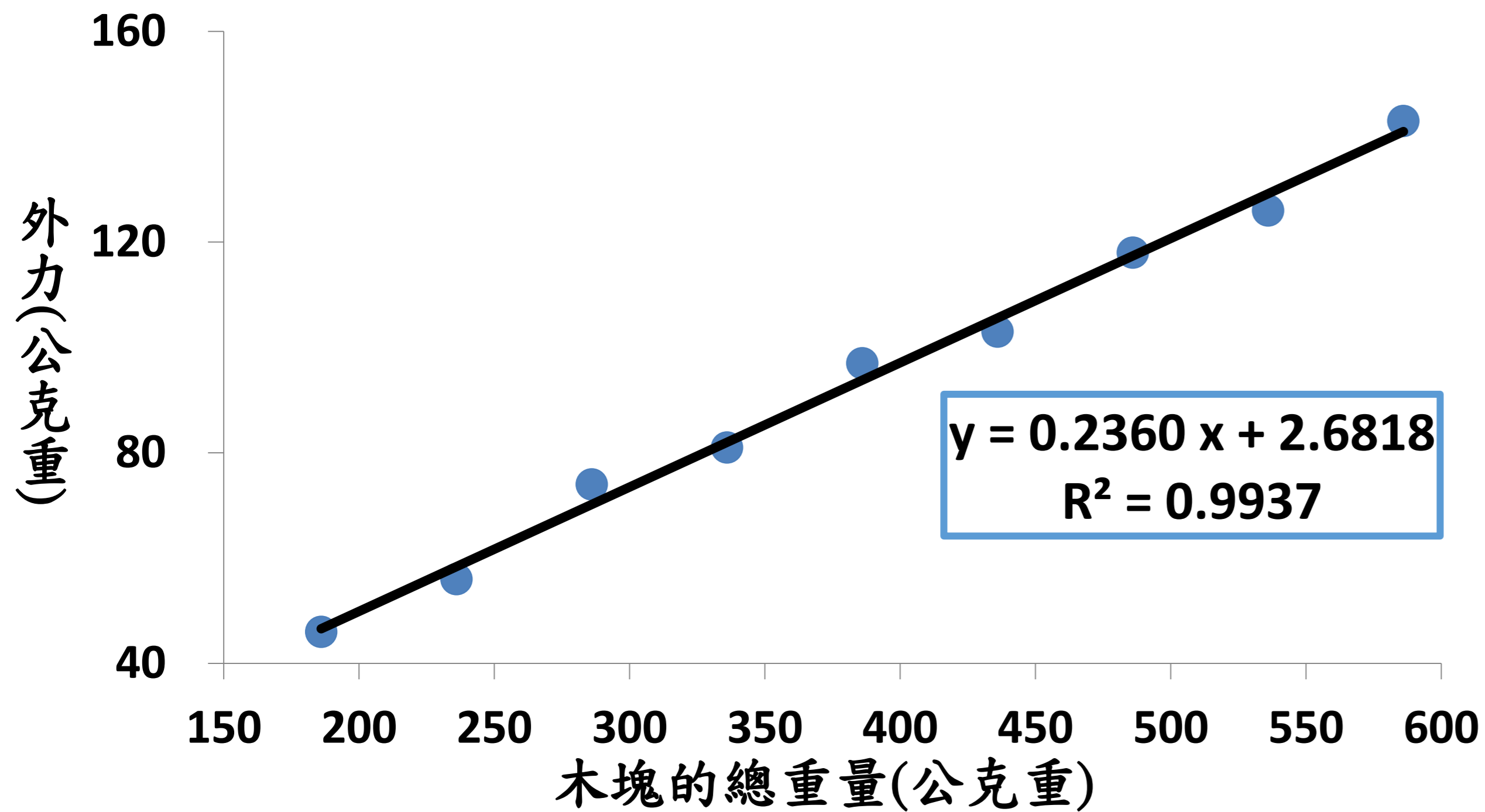
一、實驗裝置特色

- 1.所有材料皆為日常生活中容易取得且裝置架設容易。
- 2.因應時代進步，以手機為錄影媒介再運用免費軟體，即可以新科技來改良舊有的實驗方法。

二、探討傳統測定法之靜摩擦係數

- 1.控制變因：接觸面性質。
- 操作變因：改變木塊重量。
- 應變變因：恰可啟動時的外力大小。

傳統測定法-靜摩擦係數



藉由力平衡條件可以得知，最大靜摩擦力大小即恰可啟動時的外力大小，且正向力大小即木塊的總重量。由圖中可以得知最大靜摩擦力與正向力成正比，依據

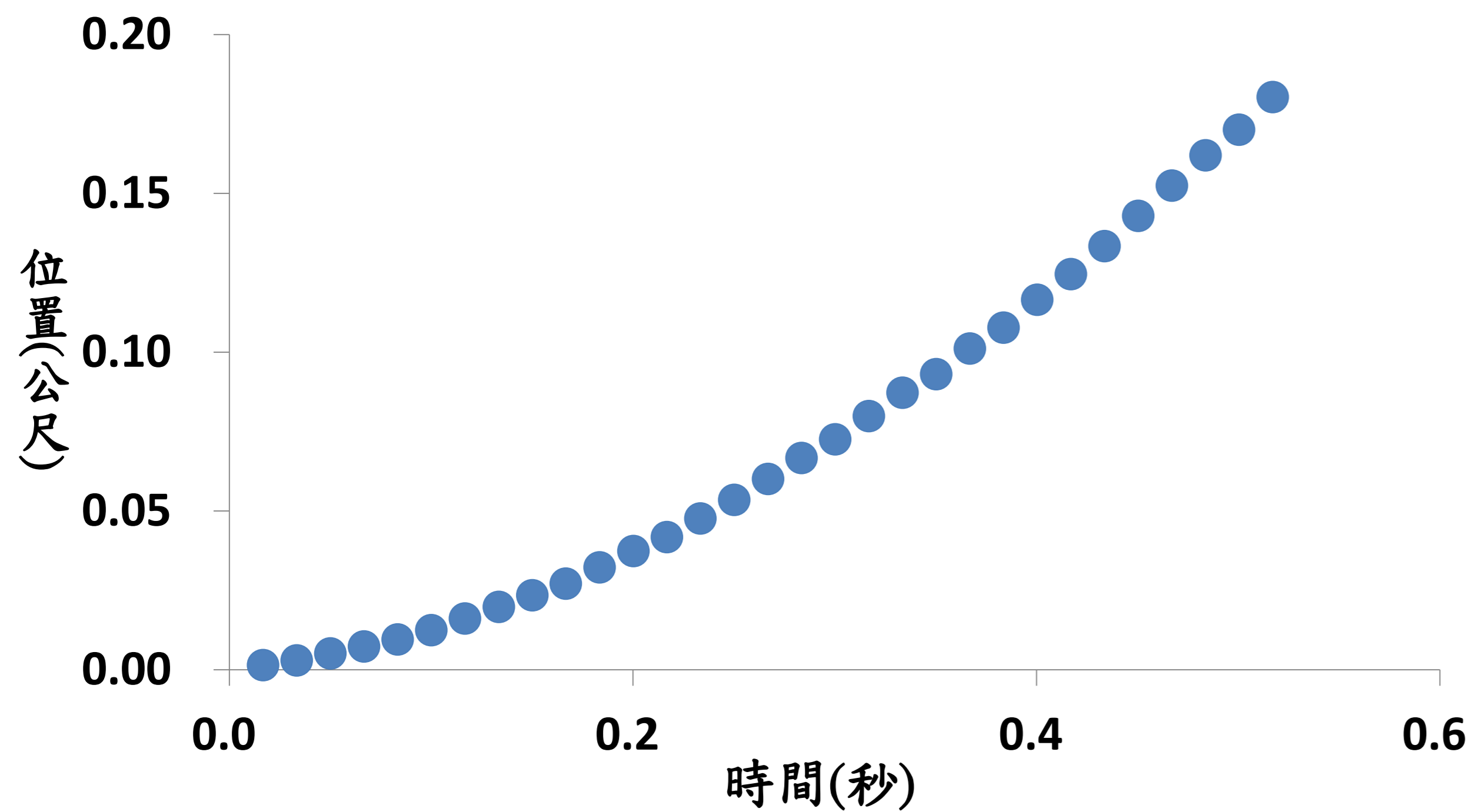
$$M_2 = \mu_s M_1$$

可以得知靜摩擦係數即圖中的斜率，故可得木塊與切割墊間的靜摩擦係數為**0.2360**。

三、探討傳統測定法之動摩擦係數

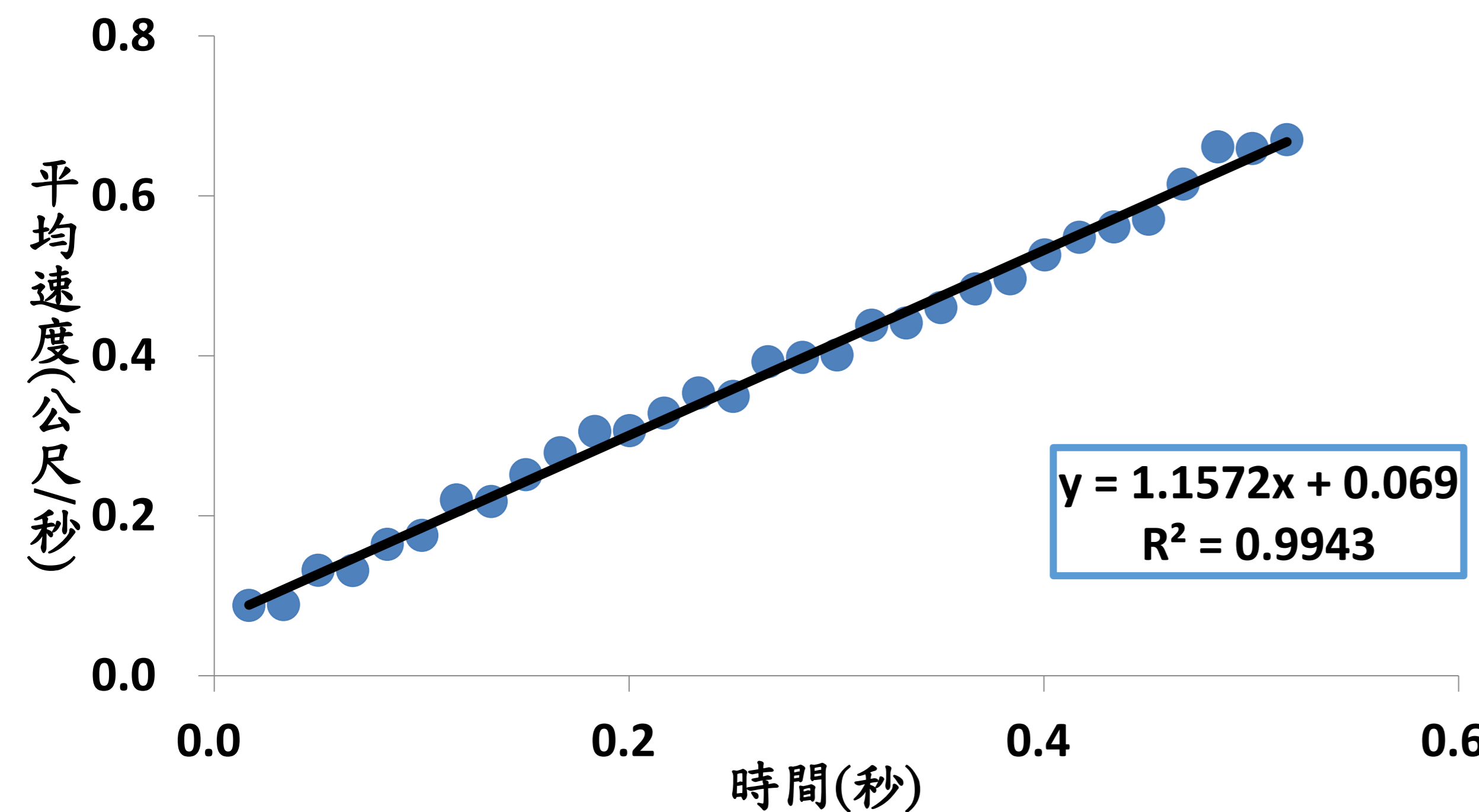
- 1.控制變因：接觸面性質、木塊=386公克、砝碼=147公克。
- 操作變因：每次時間間隔1/60秒。
- 應變變因：木塊的位置。

傳統測定法-動摩擦係數



由圖中可以觀察出木塊的運動具有越來越快的趨勢，再依據短時間內木塊的平均速度即短時間內木塊的位置變化量，將此圖轉換成短時間內木塊平均速度與時間的關係圖，如下圖所示。

傳統測定法-動摩擦係數



由圖中可以觀察出木塊為等加速度運動，木塊的平均速度與時間成正比，因此可以得知加速度即圖中的斜率即加速度為**1.1572m/s**。依據

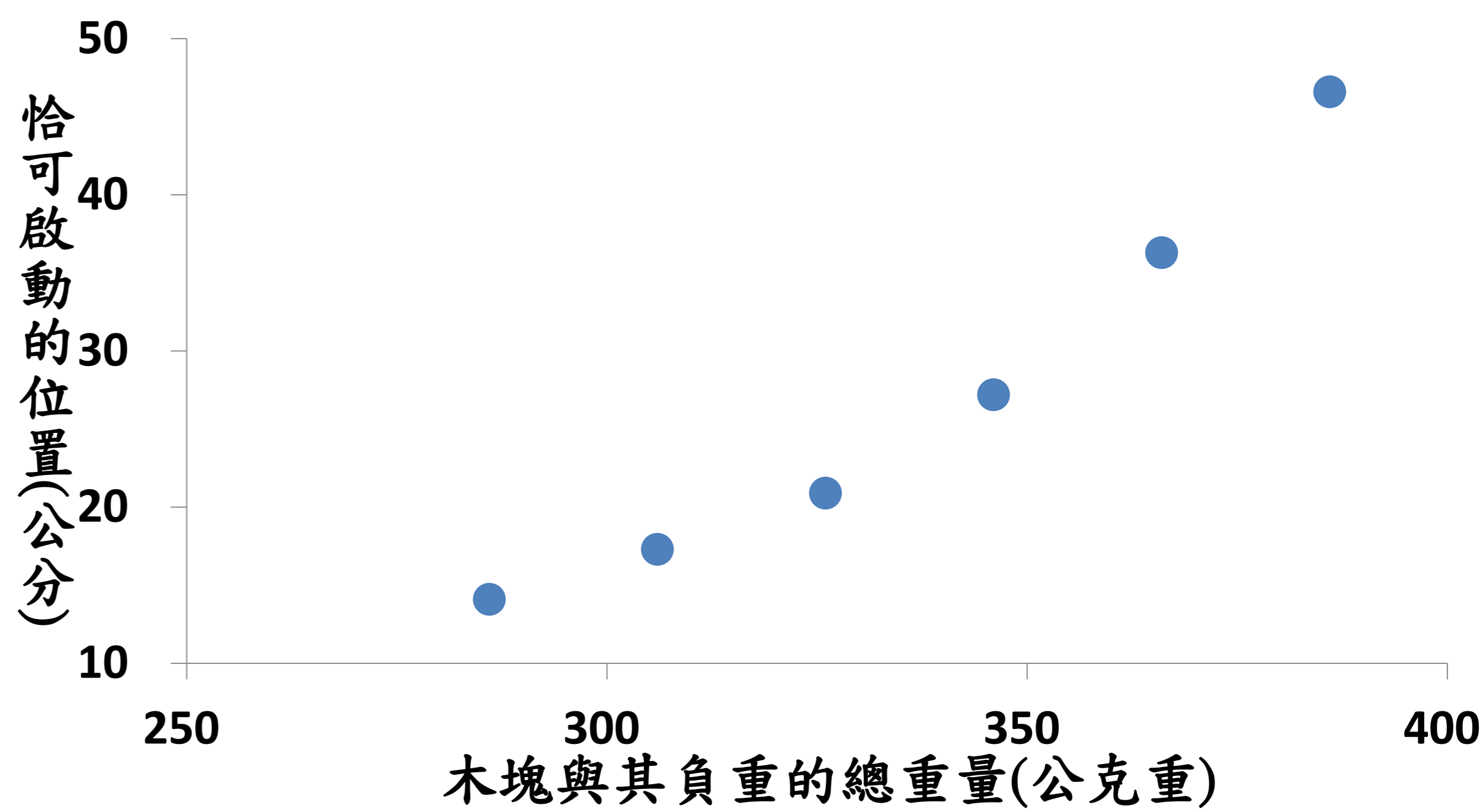
$$\mu_k = m - (1 + m) \frac{a}{g}$$

將木塊質量、砝碼質量、木塊加速度與重力加速度代入其中，故可得木塊與切割墊間的動摩擦係數為**0.2197 ± 0.0018**。

四、探討懸崖勒馬測定法之靜摩擦係數

- 1.控制變因：接觸面性質、綁線高度=9.5公分、砝碼=100公克。
- 操作變因：木塊總重=286至386公克，每20公克為一個間距。
- 應變變因：木塊恰可啟動的位置。

懸崖勒馬測定法-靜摩擦係數



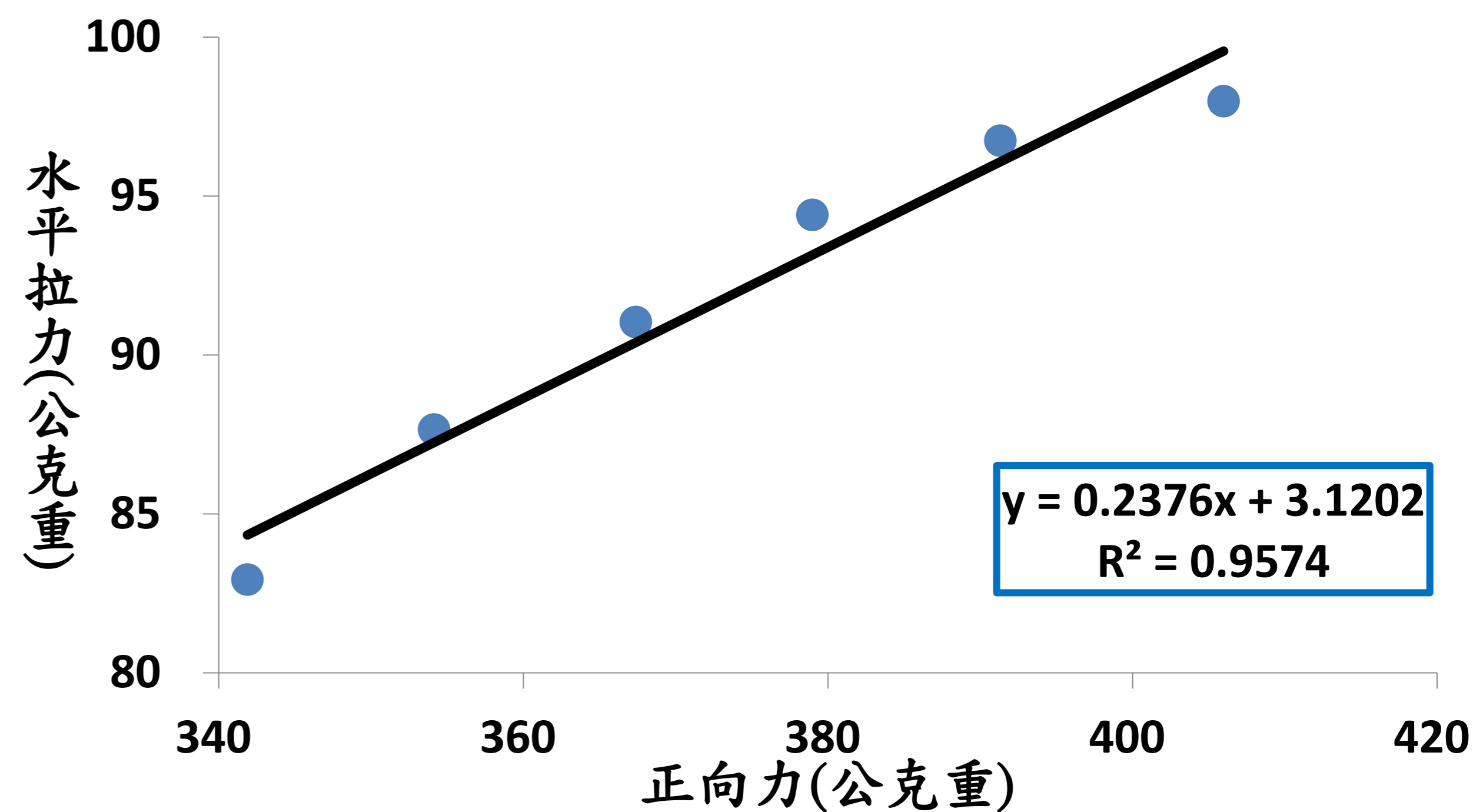
由圖中可以觀察出木塊的負重越大，則啟動所需的距離也具有越來越大的趨勢，再依據

$$\text{水平外力} : T \cos \theta$$

$$\text{正向力} : M_1 g + T \sin \theta$$

將此圖轉換成木塊所受的水平外力與正向力的關係圖，如下圖所示，在作進一步的分析。

懸崖勒馬測定法-靜摩擦係數



由圖中可以觀察出資料較為分散，其誤差原因為測量距離時的誤差，經過三角函數的轉換後將誤差給放大所致。由理論分析水平拉力與正向力成正比，依據

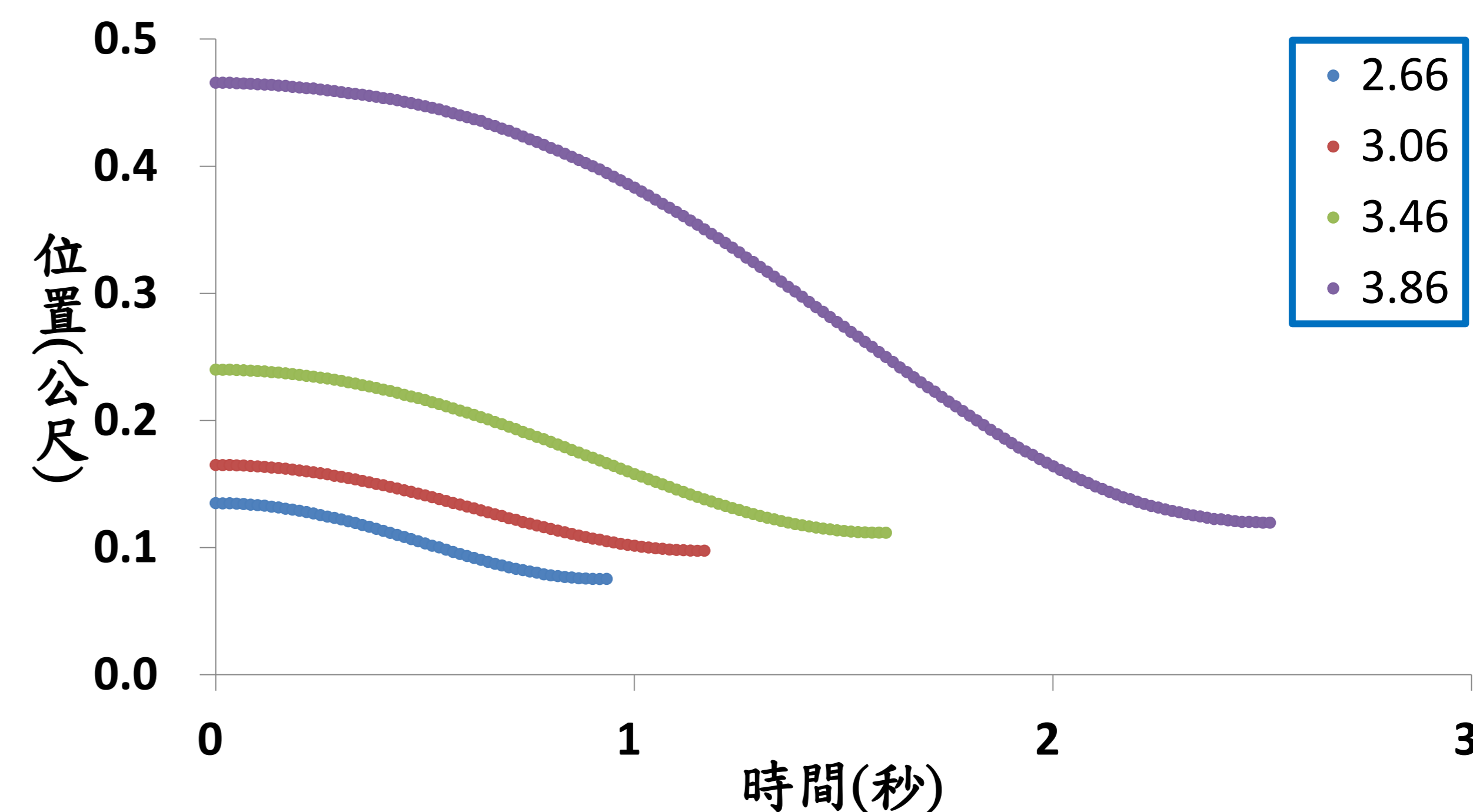
$$M_2 g \cos \theta = \mu_s (M_1 g + M_2 g \sin \theta)$$

可以得知靜摩擦係數即圖中的斜率，故可得木塊與切割墊間的靜摩擦係數為**0.2376**。與傳統測定法的0.2360比較，其差距百分比為**0.68%**。就測量的精準度兩個測定法都相當準確，但就測量的穩定度則是傳統測定法為優。

五、探討在不同木塊對砝碼質量比值下對懸崖勒馬運動軌跡的變化情形

- 1.控制變因：接觸面性質、綁線高度=9.5公分。
- 操作變因：木塊對砝碼質量比值=2.66至3.86，每0.4為一個間距。
- 應變變因：木塊的運動軌跡。

懸崖勒馬-木塊對砝碼質量比值



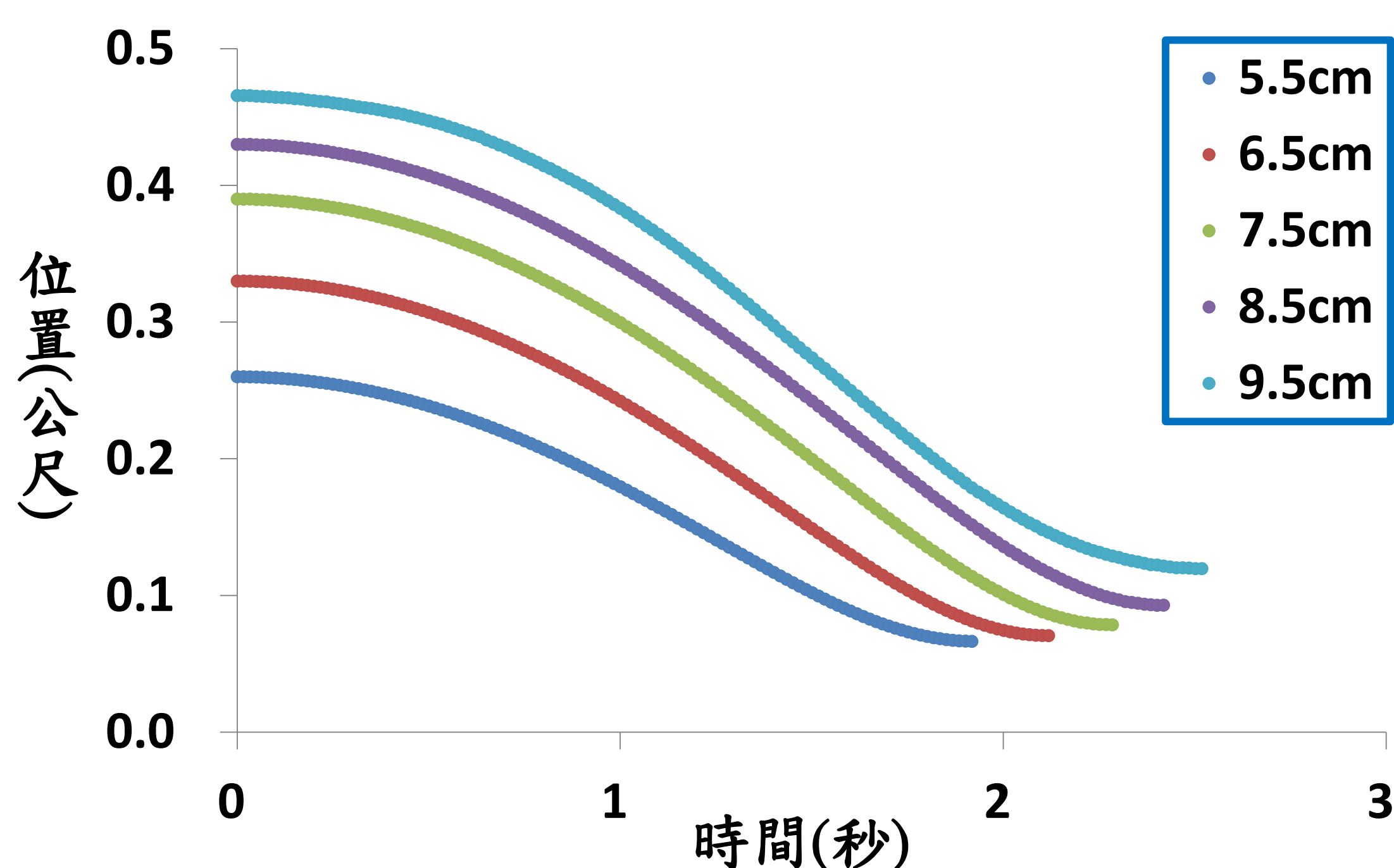
由圖中可以觀察出木塊對砝碼質量越大，則恰可啟動的位置也會隨之離定滑輪越來越遠，而木塊停止的位置也會隨之離定滑輪越來越遠。這個現象也可由正向力增加，因此需要依靠增加啟動位置離定滑輪的距離來提升水平分力。

由圖中還可以觀察出整個曲線具有反曲點存在的現象，這也代表木塊的運動過程是先加速再減速，最終在懸崖之前停了下來，也就觀察出木塊運動的起點與終點，其速度皆為零的特殊現象。造成此特殊現象的原因是摩擦力的存在，故尋找此現象與動摩擦係數的關聯性就成了我們最為主要的研究問題。

六、探討不同的綁線高度對懸崖勒馬運動軌跡的變化情形

- 1.控制變因：接觸面性質、木塊=386公克、砝碼=100公克。
- 操作變因：綁線高度=5.5至9.5公分，每1公分為一個間距。
- 應變變因：木塊的運動軌跡。

懸崖勒馬-綁線高度



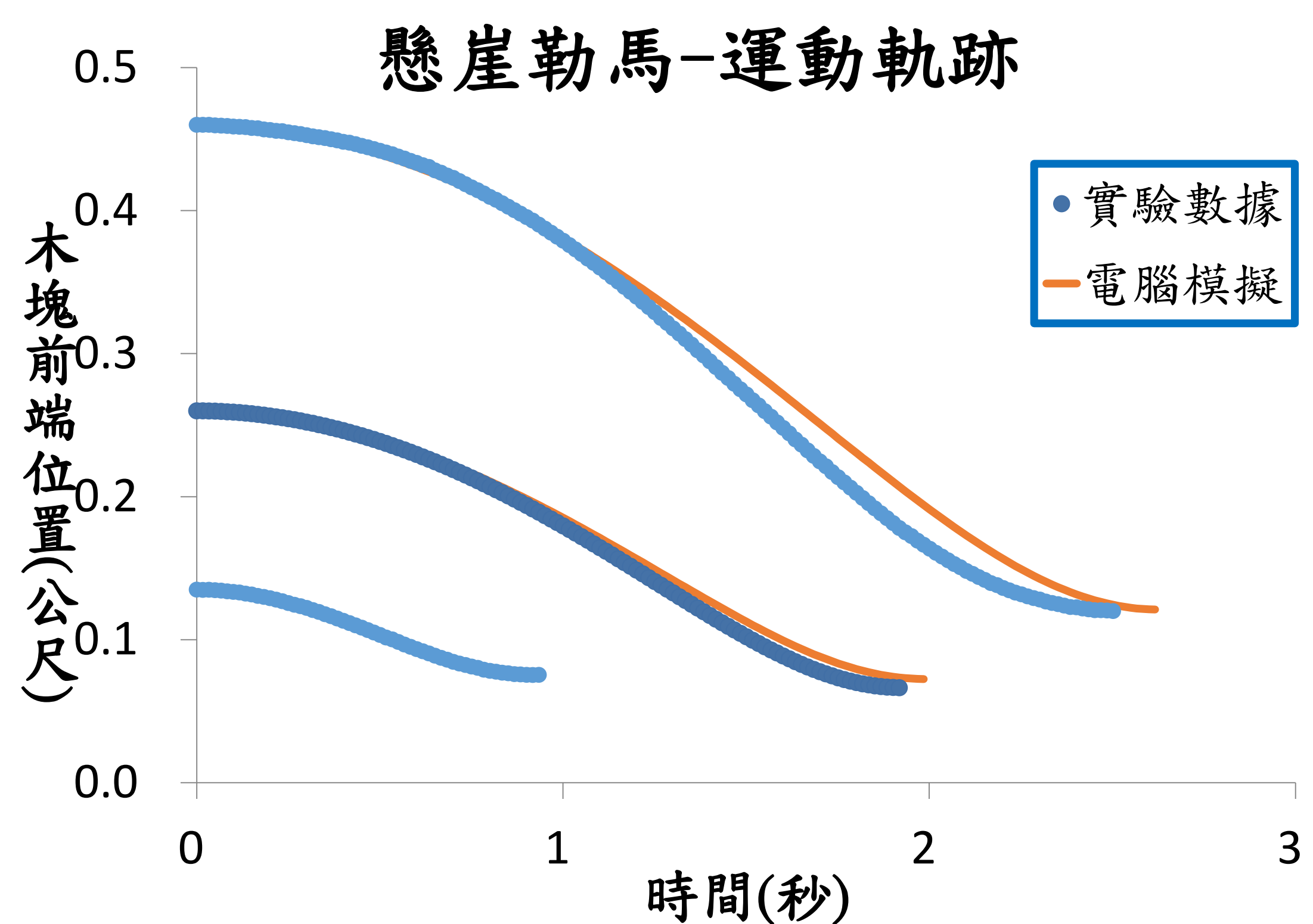
由圖中可以觀察出綁線的高度越高，則恰可啟動的位置也會隨之離定滑輪越來越遠，而木塊停止的位置也會隨之離定滑輪越來越遠。這個現象也可由綁線高度越高，造成角度越來越大導致水平分力變小，因此需要依靠增加啟動位置離定滑輪的距離來提升水平分力。

七、探討理論模型與實驗結果的對照分析

依據木塊的運動方程式

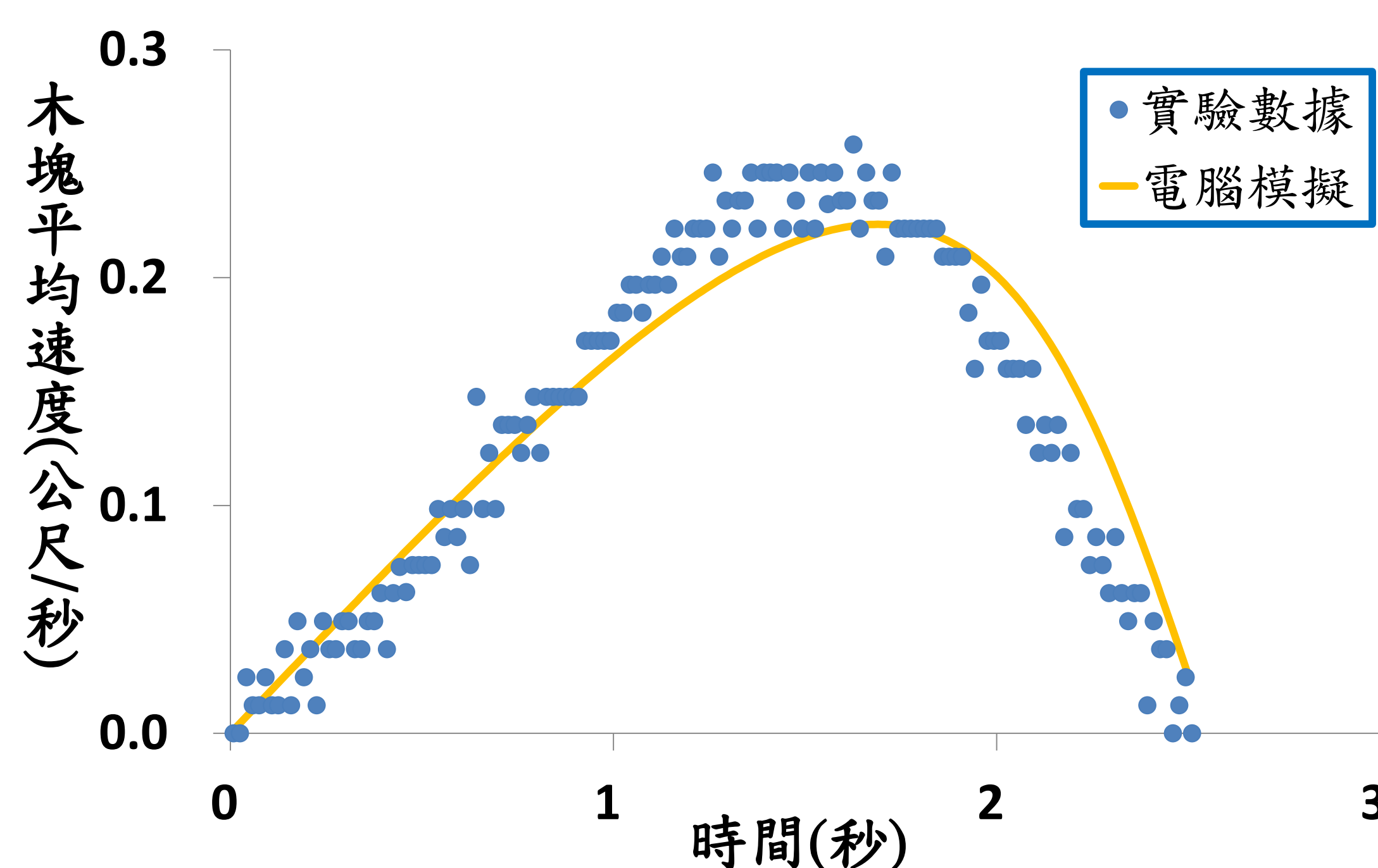
$$a_1 = \frac{m \cos \theta - \mu_k - \mu_k m \sin \theta}{1 + m - \mu_k m \tan \theta}$$

使用Excel軟體與疊代法，來推演木塊的位置、速度、加速度與受力隨時間變化的結果。利用電腦模擬的結果和實驗結果的對照，來判斷懸崖勒馬模型的適用性，其對照結果如下圖所示。



用Excel程式的疊代法做電腦模擬發現與實驗數據吻合度極高。再藉由短時間內的平均速度之定義可以將轉換成短時間內木塊的平均速度與時間的關係圖如下圖所示。

懸崖勒馬-運動狀態



由懸崖勒馬-運動軌跡與運動狀態，可以看出電腦模擬與實驗數據吻合度雖高，但仍有些許的差距，我們認為造成此現象的因素有三個如下：

- (1) 由懸崖勒馬-運動狀態途中可以發現1到2秒之間實驗值高於理論值，而2到2.5秒之間則是理論值高於實驗值，應該是鏡頭拍攝的過程中，在鏡頭兩側因透鏡折射所造成的長度扭曲所致。
- (2) 與靜摩擦係數一樣由棉線壓在定滑輪上所產生的摩擦力，造成定滑輪兩側的棉繩張力不相同所致。
- (3) 根據「力矩=轉動慣量×角加速度」可以得知定滑輪在轉動的過程中，會造成定滑輪兩側的棉繩張力不相同。

依據

$$\mu_k = \frac{m(\sqrt{X'^2 + H^2} - \sqrt{X^2 + H^2})}{X' - X + mH\ell_n \left[\frac{\sqrt{X'^2 + H^2} + X'}{\sqrt{X^2 + H^2} + X} \right]}$$

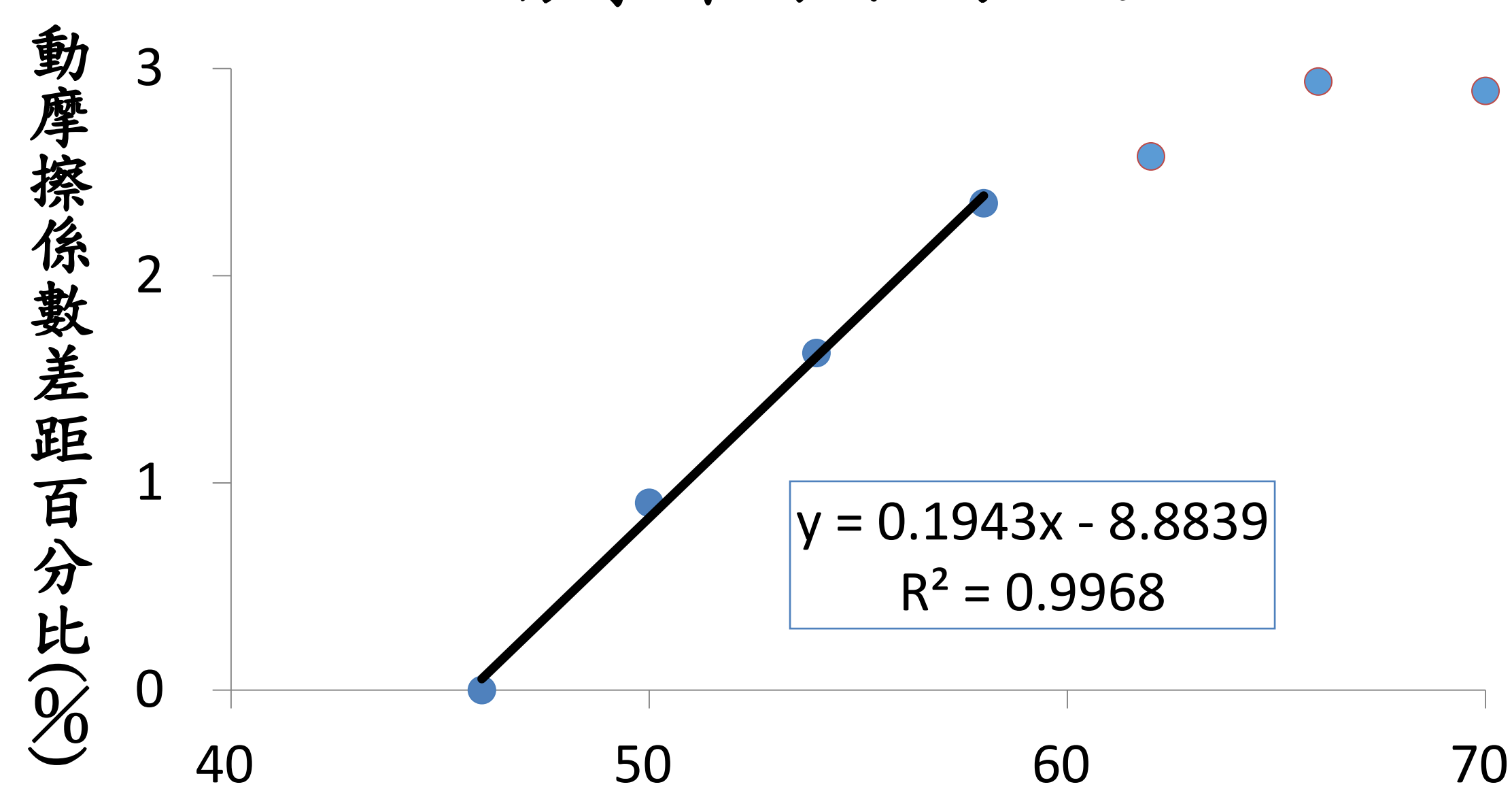
可得木塊與切割墊間的動摩擦係數為**0.2213±0.00015**，其與傳統測定法的**0.2197±0.0018**。

八、探討懸崖勒馬測定法-啟動位置與動摩擦係數的誤差之關聯性。

啟動位置與動摩擦係數的誤差							
起始位置(公分)	46.0	50.0	54.0	58.0	62.0	66.0	70.0
停止位置(公分)	12.0	12.0	11.8	11.8	11.0	10.5	9.5
動摩擦係數	0.2213	0.2233	0.2249	0.2265	0.2270	0.2278	0.2277
誤差	0.00	0.90	1.63	2.35	2.58	2.94	2.89

上表為木塊對砝碼重量比值為3.86、恰可啟動位置為46公分的條件下，起始位置與動摩擦係數差距百分比關係表。由表中可以看出越遠離恰可啟動位置，則與傳統測定法的動摩擦係數做比較其誤差越大。

懸崖勒馬測定法-動摩擦係數的誤差



起始位置(公分)

由圖中可以看出木塊的起始位置在不同距離下，其與傳統測定法之差距百分比具有三個特性：

- (1) 恰可啟動的位置動摩擦係數誤差最小
- (2) 距離恰可啟動的位置較近者，動摩擦係數誤差呈現線性變大的特性
- (3) 距離恰可啟動的位置越遠，動摩擦係數誤差越大且可能有一極限值的存在。

陸、結論

一、懸崖勒馬測定法的適用性

具有限制條件為砝碼加速度必須很小(Excel模擬中 $a_2 < 0.67 \text{m/s}^2$)，則可建立動摩擦係數近似解的模型。

二、靜摩擦係數測定

不同靜摩擦係數測定法的優缺點		
	傳統測定法	懸崖勒馬測定法
實驗裝置	優	優
測量難易度	優	差
穩定度	優	差
精確度	優	優

三、動摩擦係數測定

不同動摩擦係數測定法的優缺點		
	傳統測定法	懸崖勒馬測定法
實驗裝置	優	優
測量難易度	差	優
穩定度	優	優
精確度	優(±0.0018)	優(±0.00015)

柒、未來展望

- 一、進一步研究接觸面間液體黏滯力對動摩擦係數的影響，希望未來可以將液體種類作為變因之一。
- 二、事實上懸崖勒馬現象的砝碼加速度也可很大，故我們認為懸崖勒馬現象皆可測定的動摩擦係數是很值得研究的方向，期望之後可以探討在砝碼加速度很大條件下與動摩擦係數的關係。

捌、參考文獻

- 一、普通高級中學基礎物理(二B)上冊，南一出版社。
- 二、Calculus A Complete Course, Robert A. Adams, FIFTH EDITION.
- 三、台中教育大學科學遊戲實驗室：
scigame.ntcu.edu.tw/power/power-029.html。
- 四、遠哲科學趣味競賽2013懸崖勒馬：
https://www.youtube.com/watch?v=sB8R1y2Xo_0。
- 五、維基百科-測量不確定度
https://en.wikipedia.org/wiki/Measurement_uncertainty。
- 六、中華民國第四十八屆中小學科學展覽會「懸崖勒馬-力的探討」。