

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051802

日本高塔倒下來-敲敲達摩運動狀態分析

學校名稱：國立花蓮女子高級中學

作者： 高二 梅可親 高二 蔡卉欣 高二 張芷芸	指導老師： 尤聖涵
---	------------------

關鍵詞：轉動、滑動、摩擦力

摘要

本次研究將使用相同的圓盤垂直疊放，放置於一平面，形成一個獨立的塔。當塔最底部的圓盤通過施加一個瞬間的水平力移除，塔身其餘的部分會掉落至平面上，且有機會保持直立狀態。因此透過本次科展，我們將分析底塊移除後至塔身落至地面的運動過程，設計相關實驗，並試著建立相符的理論模型，探討能使塔身保持靜止直立的條件。

經過初步的現象觀察與背景資料查詢，我們認為會影響塔身直立與否的相關參數有底塊移除速率快慢、底塊厚度、塔身高度、圓盤的摩擦係數。本作品將針對以上參數進行較為深入的研究。

壹、 研究動機





上學期我們與日本學校進行學術交流活動，在某個環節中，我們相互介紹彼此獨特的文化以及傳統玩具，其中令我們最感興趣的日本傳統玩具是「敲打達摩」。敲打達摩，是日本的一種不倒翁擺飾，使用相同的圓盤垂直疊放，放置於一平面，形成一個獨立的塔。玩家的目標是將最下面的圓盤移除，且要讓上方的圓盤掉落在平面上依然保持站立。我們在試玩幾次後發現：一、底塊移除速率越快，塔身越容易保持站立。二、塔由越少圓盤組成(即塔之高度越矮)，塔身越容易保持站立。有了以上觀察結果後，我們希望能更加精確地找到使塔保持站立的條件，因此展開了以下研究。

貳、 研究目的

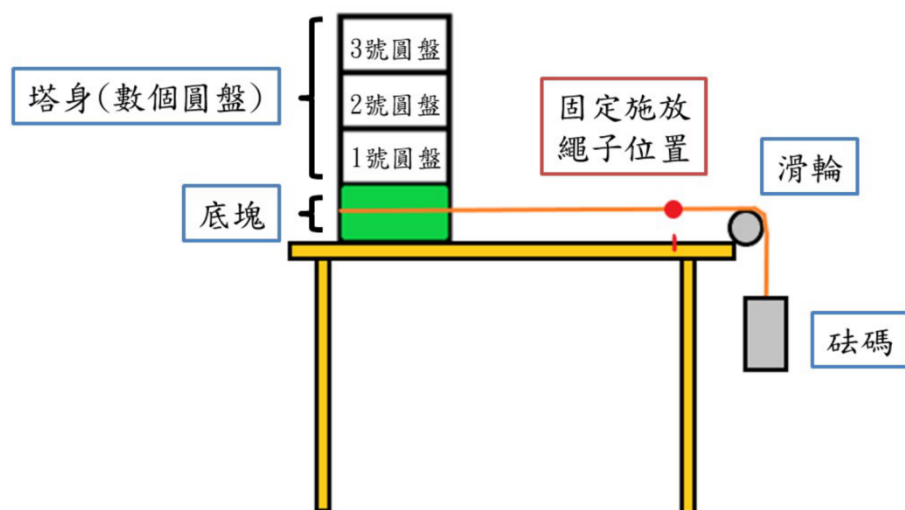
- 一、分析底塊移除後塔身的運動過程。
- 二、探討底塊移除速率對塔身傾倒情況之影響。
- 三、探討底塊厚度、塔身高度對塔身傾倒情況之影響。
- 四、比較摩擦係數對塔身傾倒情況之影響。

參、 研究設備及器材

一、 實驗器材與相關資訊

名稱	達摩	自製平滑圓盤
照片 與 資訊	直徑：5.00 cm/個 厚度：3.00 cm/個 質量：40 g/個 圓盤間動摩擦係數：0.27 圓盤間靜摩擦係數：0.39 	直徑：4.00 cm/個 厚度：1.70 cm/個 質量：58.38g/個 圓盤間動摩擦係數：0.42 圓盤間靜摩擦係數：0.47 
名稱	自製砂紙圓盤	方格紙
照片 與 資訊	直徑：4.00 cm/個 厚度：1.75 cm/個 質量：59.08 g/個 砂紙間動摩擦係數：0.72 砂紙間靜摩擦係數：1.01 	長：35cm / 寬：25cm 方格紙標線間距：0.1cm 紙與達摩間動摩擦係數：0.27 紙與圓盤間動摩擦係數：0.33 

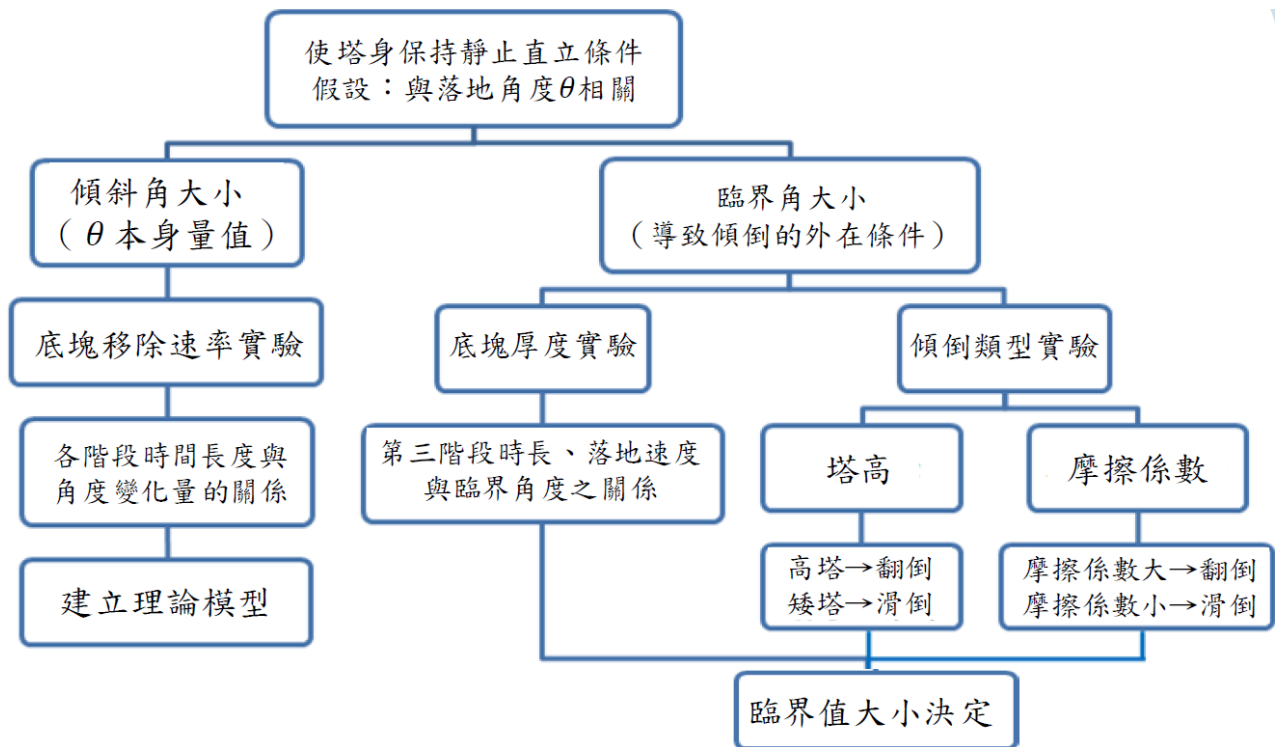
二、 實驗裝置



▲圖 3-2-1 實驗裝置示意圖

肆、研究過程或方法

一、研究流程圖



▲圖 4-1-1 研究流程圖

二、實驗相關原理

(一) 轉動

$$\vec{\tau} = \vec{x} \times \vec{F}$$

其中 $\vec{\tau}$ 為力矩(牛頓·公尺)； \vec{x} 為施力點到支點距離(公尺)； \vec{F} 為作用力(牛頓)。轉動為剛體對一固定軸旋轉的運動。

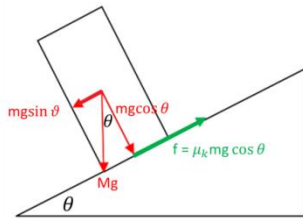
(二) 轉動慣量：平行軸定理

$$I = I_{com} + Ml^2$$

其中 I_{com} 為剛體對質心軸的轉動慣量(公斤·公尺平方)； M 為剛體質量； l 代表另一支直軸與質心軸垂直距離。此公式可以計算出剛體對平行於質心軸的另外一支直軸的轉動慣量。

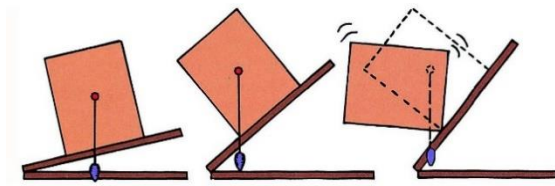
(三) 斜面上的物體

1. 下滑條件： $\tan \theta = \mu_s$



▲圖 4-2-1 當 $\tan \theta$ 等於 μ_s 時，物體恰沿斜面下滑。

2. 翻倒條件：重心鉛垂線通過底端邊緣時。



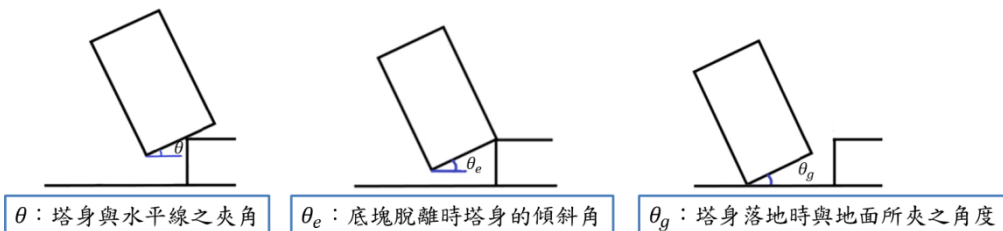
▲圖 4-2-2 重心鉛垂線通過底端邊緣時，物體翻倒。

三、實驗名詞定義

- (一) 底塊：放置於塔最底部的圓盤。
- (二) 塔身：放置於底塊之上的所有圓盤。
- (三) 1 號圓盤：塔身最下面的圓盤。
- (四) 起始位置：塔在開始運動前所被置於方格紙上的位置。
- (五) 傾斜角度 θ ：塔身與水平線所夾之角度，其會隨時間變化。
- (六) 脫離角度 θ_e ：底塊脫離時塔身的傾斜角度，稱脫離角度，符號為 θ_e 。
- (七) 落地角度 θ_g ：塔身落至地面第一瞬間的傾斜角度，稱落地角度，符號為 θ_g 。



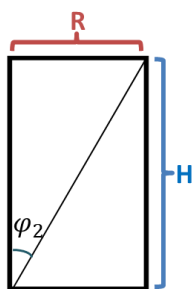
▲圖 4-3-1：1 號圓盤



▲圖 4-3-2 各階段角度定義

- (八) 臨界角度：塔身落地後能繼續維持站立的最大落地角度(即當落地角度超過臨界角度，塔身傾倒)。

(九) RH 比：圓柱體直徑與高的比值，即 R/H ，其值等於 $\tan \varphi_2$ 。



▲圖 4-3-3 RH 比定義

四、定義運動階段與運動過程分析

(一) 定義運動階段

					
1.底塊受力 (運動開始)	2.底塊邊緣恰 過塔身質心 (開始轉動)	3.繼續轉動	4.底塊脫離	5.塔身落地	6.站立/傾倒 (運動結束)

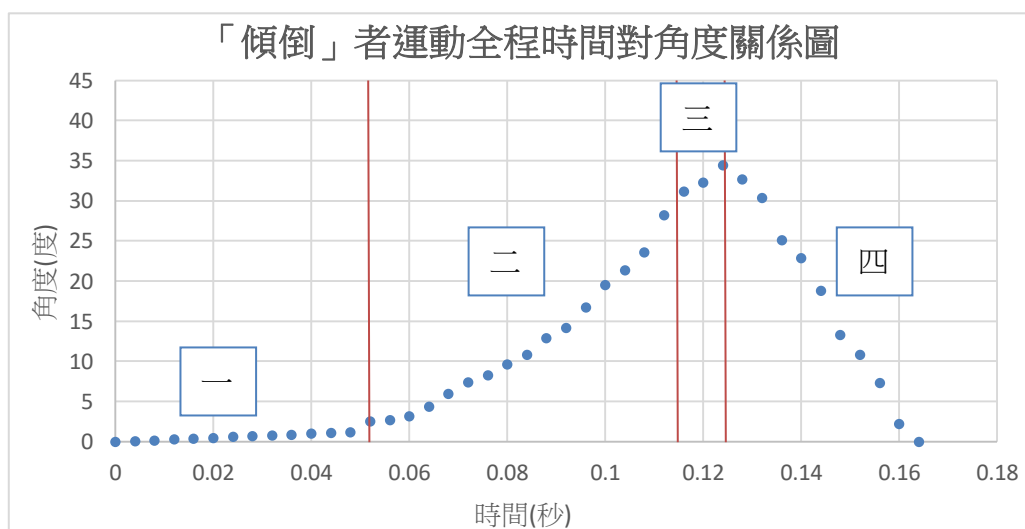
註：「4.底塊脫離」與「5.塔身落地」的次序在某些情況下會交換，稍後將詳細談論。

我們將整個運動過程分成四階段討論，分別如下：

1. 第一階段：從「1.底塊受力(運動開始)」至「2.底塊邊緣恰過塔身質心(開始轉動)」。
2. 第二階段：從「2.底塊邊緣恰過塔身質心(開始轉動)」至「4.底塊脫離」。
3. 第三階段：從「4.底塊脫離」至「5.塔身落地」。
4. 第四階段：從「5.塔身落地」至「6.站立/傾倒(運動結束)」。

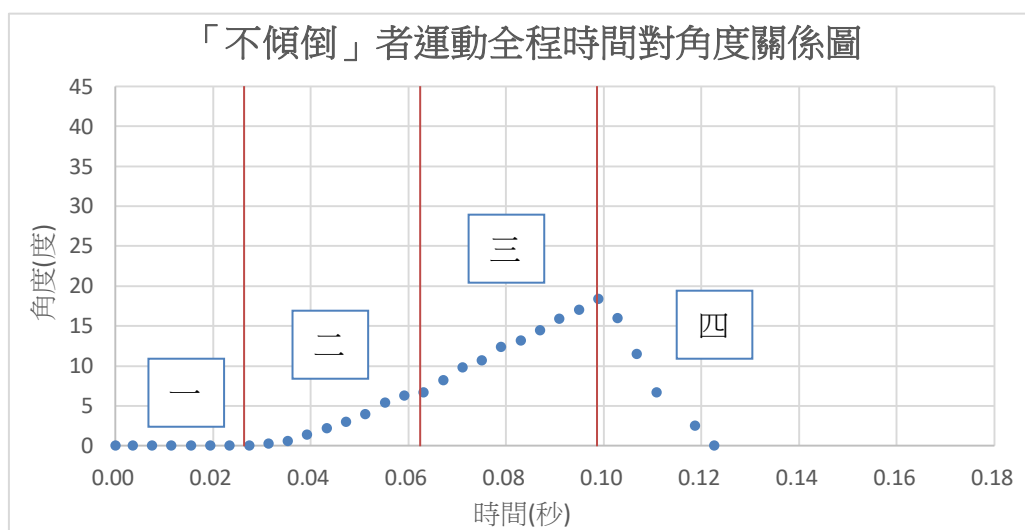
(二) 運動全程角度對時間關係圖：

1. 最終狀態為「傾倒」者



▲4-4-1 傾倒者運動全程角度對時間關係圖(方框標示一至四階段)

2. 最終狀態為「不傾倒」者



▲4-4-2 不傾倒者運動全程角度對時間關係圖(方框標示一至四階段)

(三) 觀察結果：

1. 第一階段角度變化量通常小於 1° 。
2. 第二階段為一開口向上的曲線。
3. 第三階段皆可視為等角速度轉動。
4. 塔身落地瞬間傾斜角為最大值。

五、傾倒定義與類型介紹

(一) 定義：移除底塊之後，當塔身落回平面時，圓盤沒有全數堆疊並保持站立，稱其發生傾倒。

(二) 成因：1 號圓盤上方其餘圓盤(2 號、3 號...)之質心，超出 1 號圓盤垂直向上延伸的區域，此時重力造成上方圓盤轉動，造成塔身發生傾倒。

(三) 類型：

1. 滑倒：圓盤間發生劇烈錯動，使得 1 號圓盤上方其餘圓盤之質心超出 1 號圓盤垂直向上延伸的區域，造成塔身傾倒。此傾倒類型稱為滑倒，且圓盤間摩擦係數愈小、高度愈矮之塔身愈傾向於此(如圖 4-5-1)。
2. 翻倒：圓盤間幾乎沒有發生錯動，主要因為塔身傾斜而使得上方圓盤(2 號、3 號...)之質心超出 1 號圓盤垂直向上延伸的區域，造成塔身傾倒。此傾倒類型稱為翻倒，且圓盤間摩擦係數愈大、高度愈高之塔身愈傾向於此(如圖 4-5-2)。



▲圖 4-5-1 滑倒

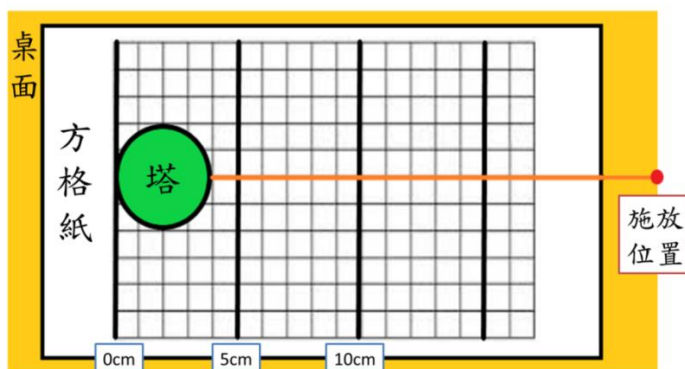


▲圖 4-5-2 翻倒

六、實驗方法

(一) 提供底塊速度的方法：

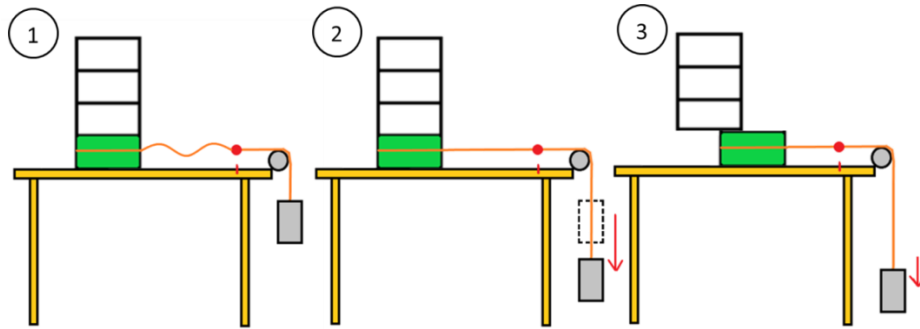
1. 固定棉線長度及記錄施放砝碼位置。



▲圖 4-6-1 固定棉線長度及記錄施放砝碼位置。

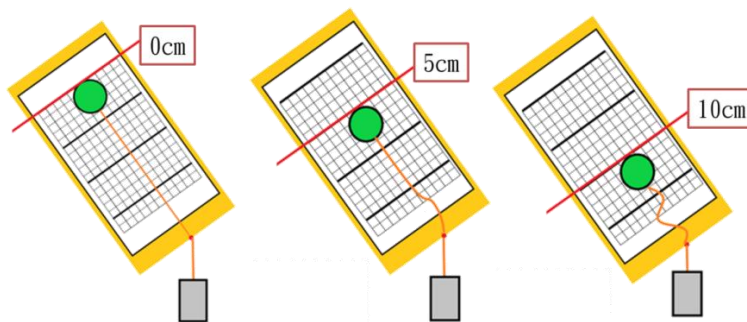
2. 施放砝碼後整個運動過程

- (1) 施放砝碼使其開始下降，此時棉線仍為捲曲狀，無拉力。
- (2) 棉線從捲曲狀至繃緊狀態，此時砝碼已有速度。
- (3) 底塊受到砝碼拉力開始脫離上方圓盤。



▲圖 4-6-2 施放砝碼後整個運動過程

3. 改變起始位置，使底塊受到不同下降速率的砝碼所給予的拉力，藉此改變底塊的脫離速率。

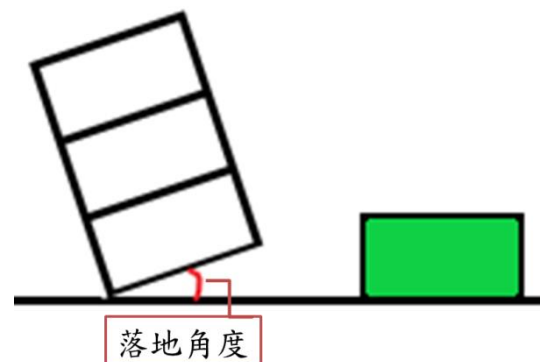


▲圖 4-6-3 藉改變起始位置以改變底塊的脫離速率。

(二) 測量落地角度：利用 Tracker 內建量角器測量落地角度。



▲圖 4-6-4 Tracker 內建量角器測量落地角度



▲圖 4-6-5 由落地角度尋找臨界角度

(三) 不斷實驗至找到臨界角度。

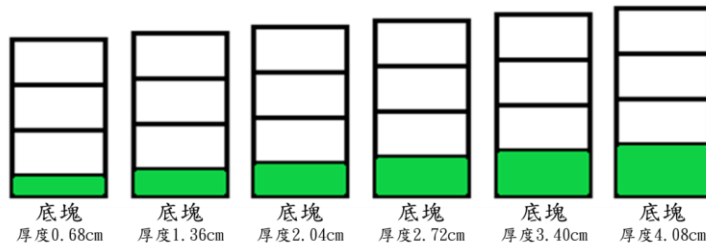
七、實驗

(一) 實驗一：移除速率實驗

1. 實驗目的：
 - (1) 探討起始位置對各階段角度之影響。
 - (2) 探討起始位置對各階段時長之影響。
 - (3) 探討各階段時長對角度變化量之影響。
2. 塔身圓盤：達摩
3. 操作變因：改變塔位於方格紙上位置(0.10cm、0.20cm、0.30cm...)，藉此改變底塊脫離速率。
4. 實驗步驟：
 - (1) 將底塊(達摩)綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方再放置三個達摩。
 - (2) 將塔放置於方格紙上我們定義 0 cm 的位置。
 - (3) 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
 - (4) 使用 Tracker 分析影片，將資料匯入 Excel 並作圖。
 - (5) 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置藉此改變底塊脫離速率，接著每個不同的起始位置皆重複上述實驗步驟三遍。

(二) 實驗二：底塊厚度實驗

1. 實驗目的：探討底塊厚度對臨界角度之影響。
2. 塔身圓盤：自製平滑圓盤。
3. 操作變因：改變底塊厚度(0.68cm~4.08cm，每次間格 0.68cm)，並尋找各厚度相對應之臨界角度。
4. 實驗步驟：
 - (1) 將底塊綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方放置三個自製平滑圓盤。
 - (2) 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
 - (3) 使用 Tracker 分析影片，將資料匯入 Excel 並作圖。
 - (4) 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置，尋找其臨界角度。
 - (5) 改變底塊厚度，並重複上述實驗步驟。



▲圖 4-7-1 改變底塊厚度

(三) 實驗三：傾倒類型實驗-探討 RH 比與摩擦係數對臨界角度之影響

1. 實驗三-1：自製平滑圓盤之塔高實驗

- (1) 實驗目的：探討在摩擦係數較小的情況下 RH 比與臨界角度之關係。
- (2) 塔身圓盤：自製平滑圓盤。
- (3) 操作變因：改變塔高(3~8 個圓盤，每次間隔一個)，並尋找各個塔高相對應之臨界角度。
- (4) 實驗步驟：
 - a. 將底塊綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方放置相同平滑圓盤。
 - b. 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
 - c. 使用 Tracker 分析影片，將資料匯入 Excel 並作圖。
 - d. 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置，尋找其臨界角度。
 - e. 改變塔高，並重複上述實驗步驟。

2. 實驗三-2：自製砂紙圓盤之塔高實驗

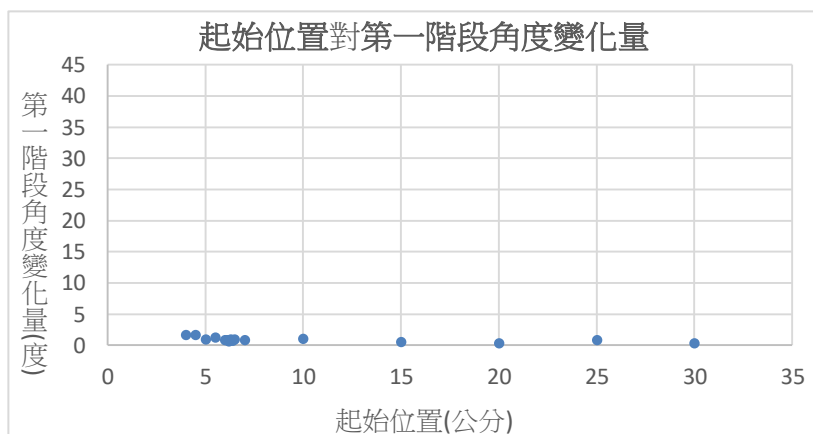
- (1) 實驗目的：探討在摩擦係數較大的情況下 RH 比與臨界角度之關係。
- (2) 塔身圓盤：自製砂紙圓盤。
- (3) 操作變因：改變塔高(3~7 個圓盤，每次間隔一個)，並尋找各個塔高相對應之臨界角度。
- (4) 實驗步驟：
 - a. 將底塊綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方放置相同砂紙圓盤。
 - b. 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
 - c. 使用 Tracker 分析影片，將資料匯入 Excel 並作圖。
 - d. 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置，尋找其臨界角度。
 - e. 改變塔高，並重複上述實驗步驟。

伍、 研究結果

一、 實驗一：探討底塊移除速率對塔身傾倒情況之影響。

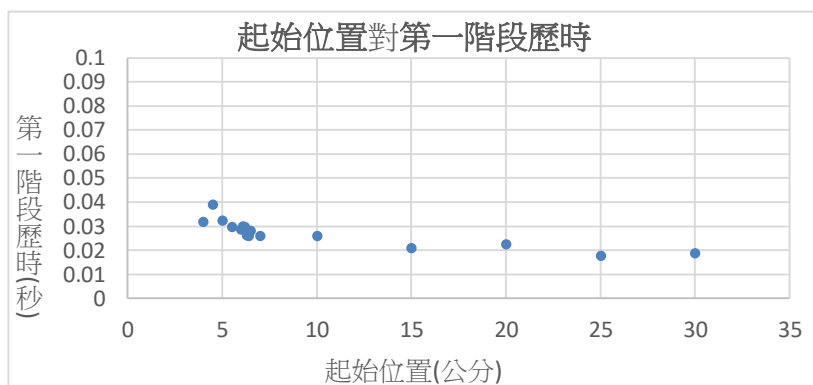
(一) 第一階段

1. 起始位置與第一階段角度變化量之關係圖



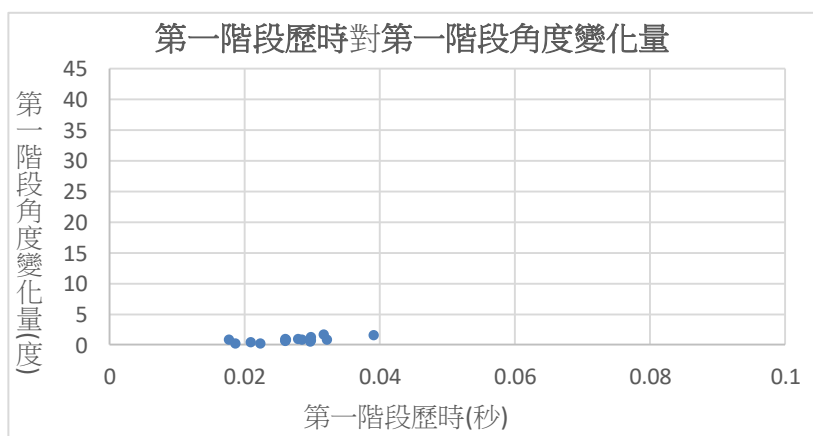
▲圖 5-1-1 第一階段對塔身傾斜角之大小影響極小。

2. 起始位置與第一階段歷時之關係圖



▲圖 5-1-2 起始位置與第一階段歷時呈負相關，且圖形傾斜程度小。

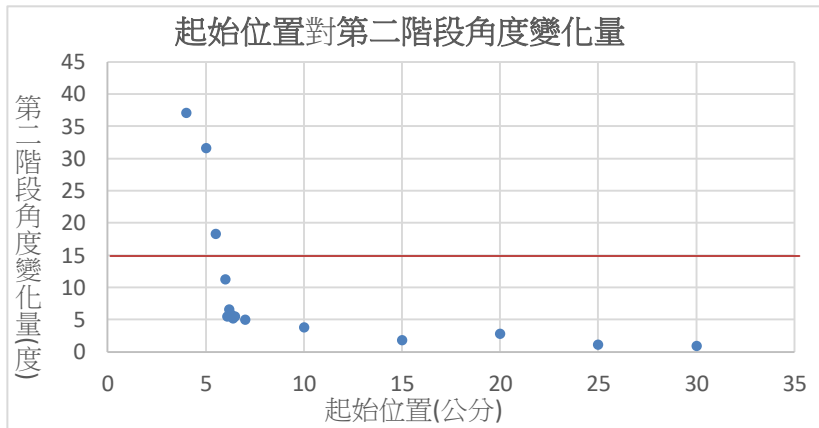
3. 第一階段歷時與第一階段角度變化量之關係圖



▲圖 5-1-3 第一階段歷時幾乎不影響第一階段角度變化量。

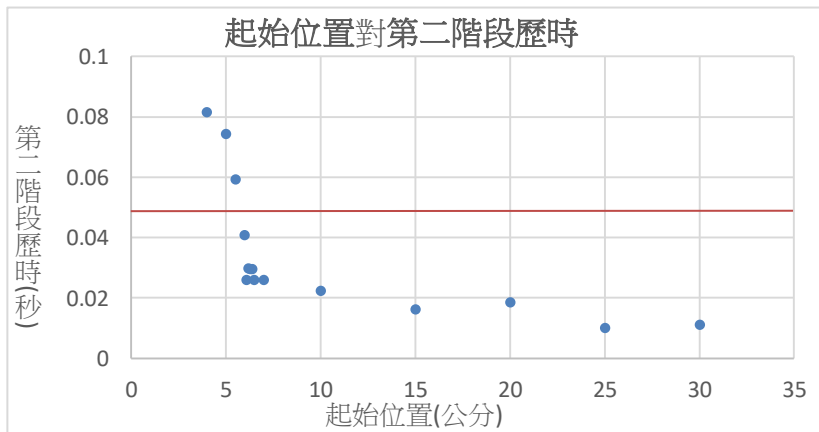
(二) 第二階段

1. 起始位置與第二階段角度變化量之關係圖



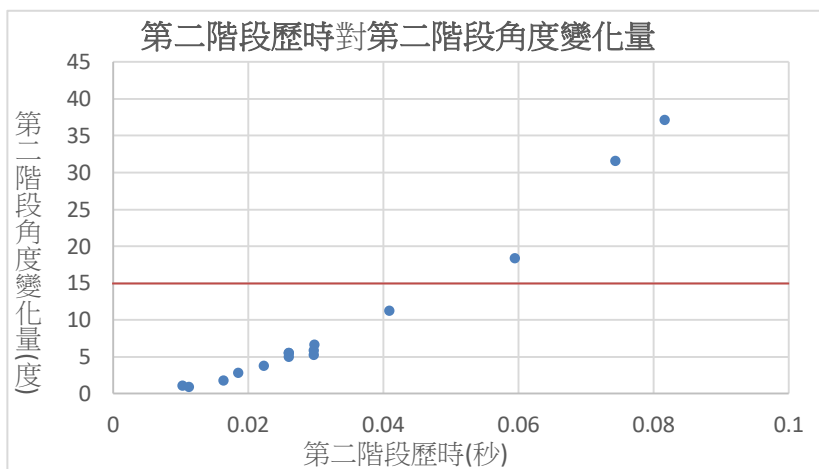
▲圖 5-1-4 起始位置與第二階段角度變化量呈負相關。(紅線以上者倒塌)

2. 起始位置與第二階段歷時之關係圖



▲圖 5-1-5 起始位置與第二階段歷時呈負相關。(紅線以上者倒塌)

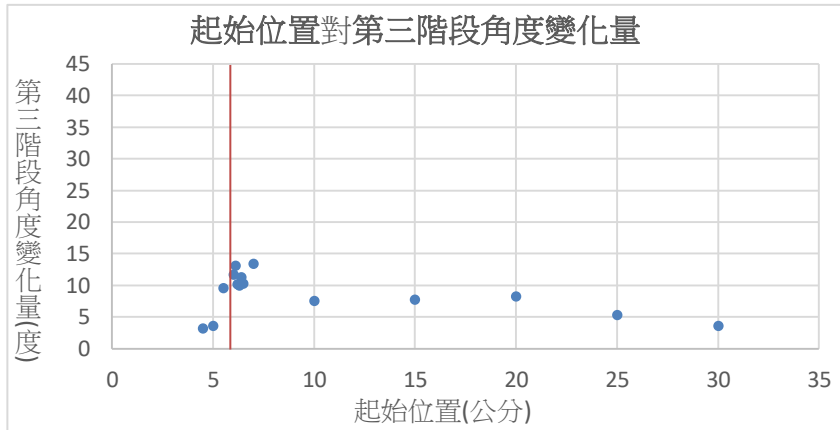
3. 第二階段歷時與第二階段角度變化量之關係圖



▲圖 5-1-6 第二階段歷時對角度變化量成嚴格遞增曲線。(紅線以上者倒塌)

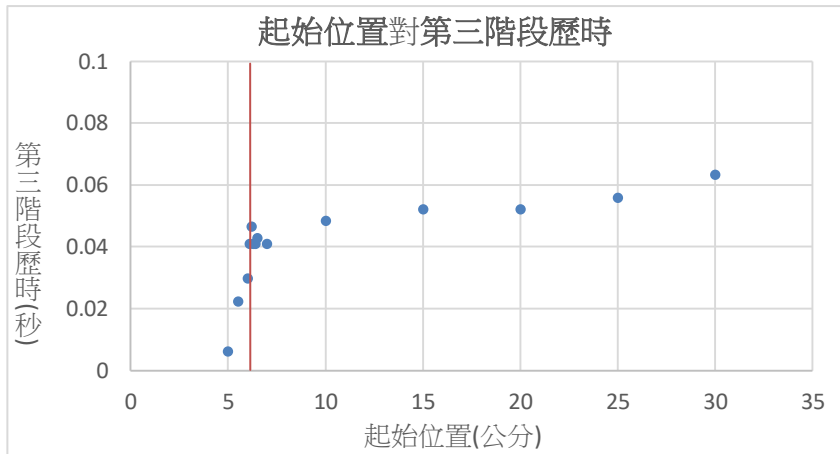
(三) 第三階段

1. 起始位置與第三階段角度變化量之關係圖



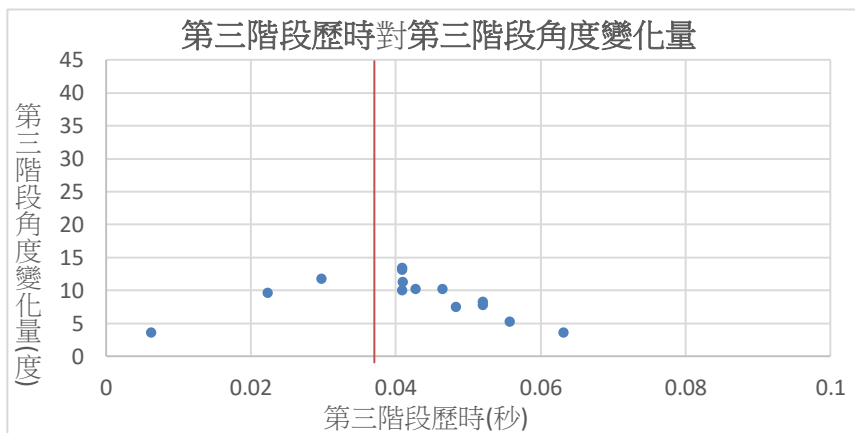
▲圖 5-1-7 起始位置與角度變化量之圖形左右兩側較低。(紅線以左者倒塌)

2. 起始位置與第三階段歷時之關係圖



▲圖 5-1-8 起始位置與第三階段歷時呈正相關。(紅線以下者倒塌)

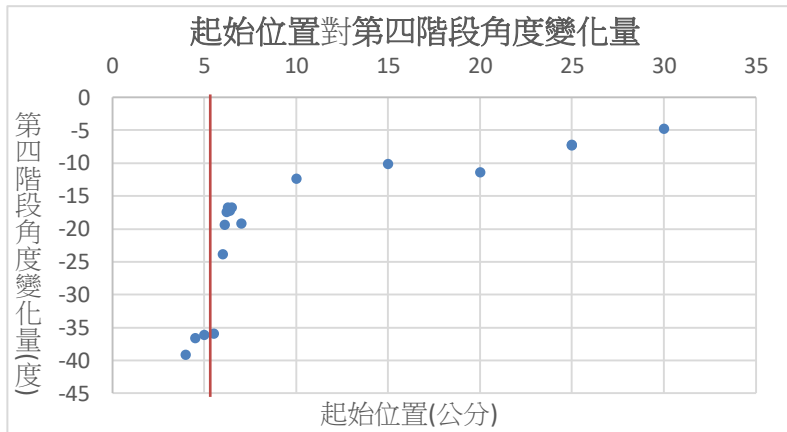
3. 第三階段歷時與第三階段角度變化量之關係圖



▲圖 5-1-9 第三階段中，歷時與角度變化量的圖形中間處有明顯高峰。(紅線以左者倒塌)

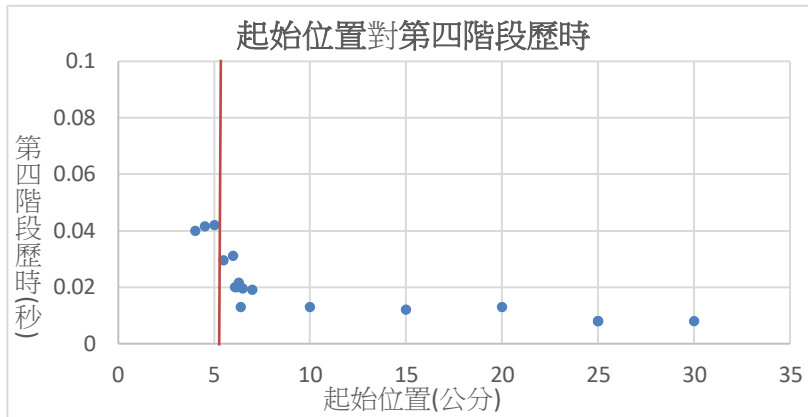
(四) 第四階段

1. 起始位置與第四階段角度變化量之關係圖



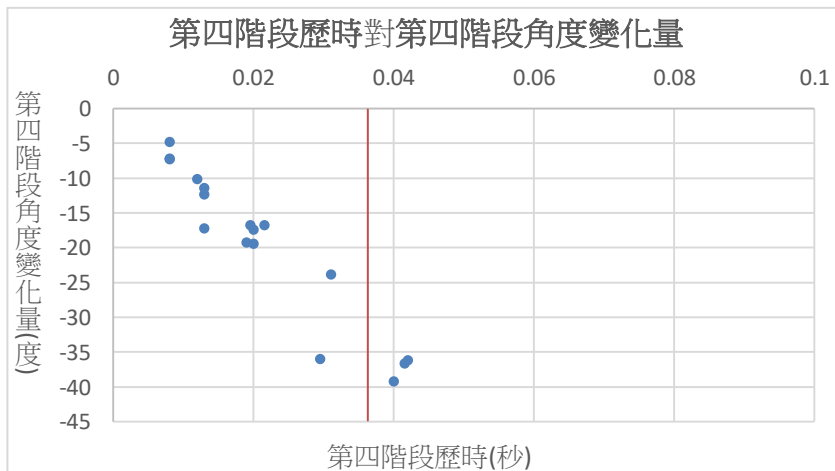
▲圖 5-1-10 第四階段角度變化量為負值。(紅線以左者倒塌)

2. 起始位置與第四階段歷時之關係圖



▲圖 5-1-11 起始位置與第四階段歷時呈負相關。(紅線以左者倒塌)

3. 第四階段歷時與第四階段角度變化量之關係圖



▲圖 5-1-12 第四階段歷時與第四階段角度變化量大致呈線性負相關。(紅線以左者倒塌)

二、實驗二：探討底塊厚度對臨界角度之影響

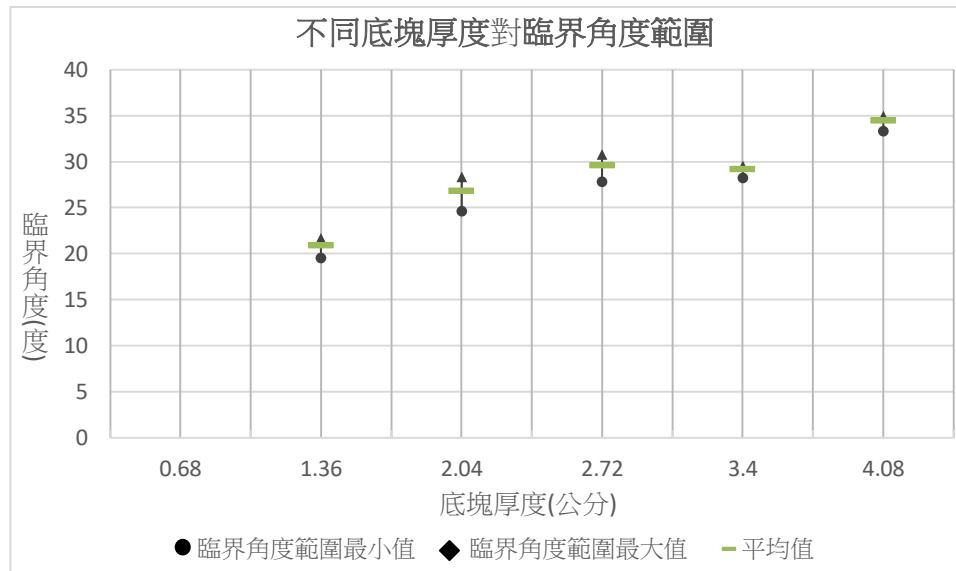
(一) 數據紀錄

1. 數據

底塊厚度(cm)	臨界角度範圍	底塊厚度(cm)	臨界角度範圍
0.68	不傾倒	2.72	27.8°~31.3°
1.36	19.5°~22.2°	3.40	28.2°~30.1°
2.04	24.6°~28.9°	4.08	33.3°~35.5°

註：實驗難以測量出精確的臨界角度大小，因此我們在上表中「臨界角度範圍」一欄所列出的數值為實驗時所測得的臨界角度大小之範圍。

2. 圖表



▲圖 5-2-1 臨界角度平均值隨底塊增厚而變大。

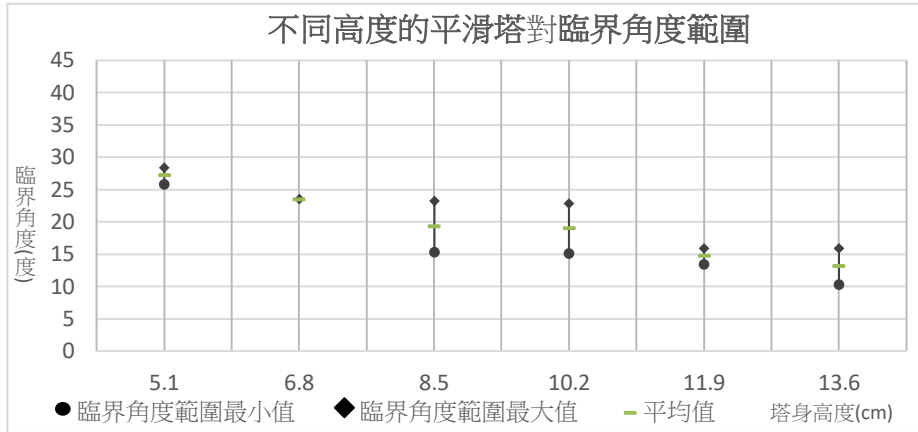
三、實驗三：傾倒類型實驗-探討 RH 比與摩擦係數對臨界角度之影響

(一) 實驗三-1：自製平滑圓盤之塔高實驗

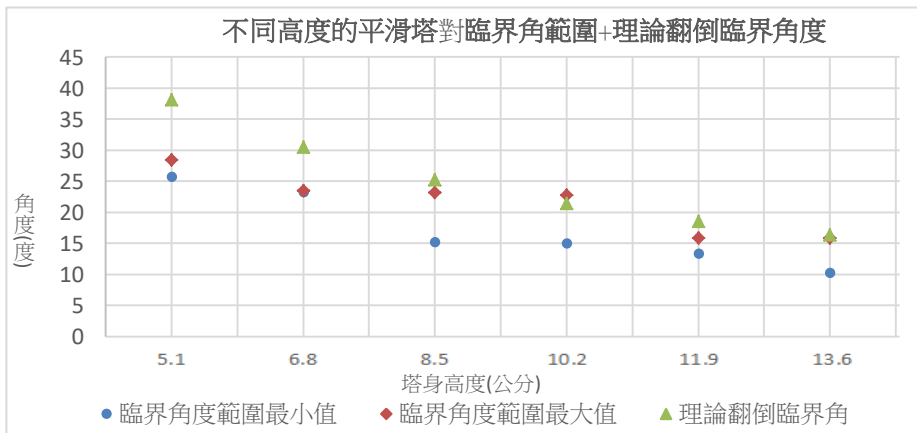
1. 數據

塔身高度(cm)	臨界角度範圍	塔身高度(cm)	臨界角度範圍
5.10	25.8°~28.4°	10.20	15.1°~22.8°
6.80	23.3°~23.5°	11.90	13.4°~15.9°
8.50	15.3°~23.2°	13.60	10.3°~15.9°

2. 圖表

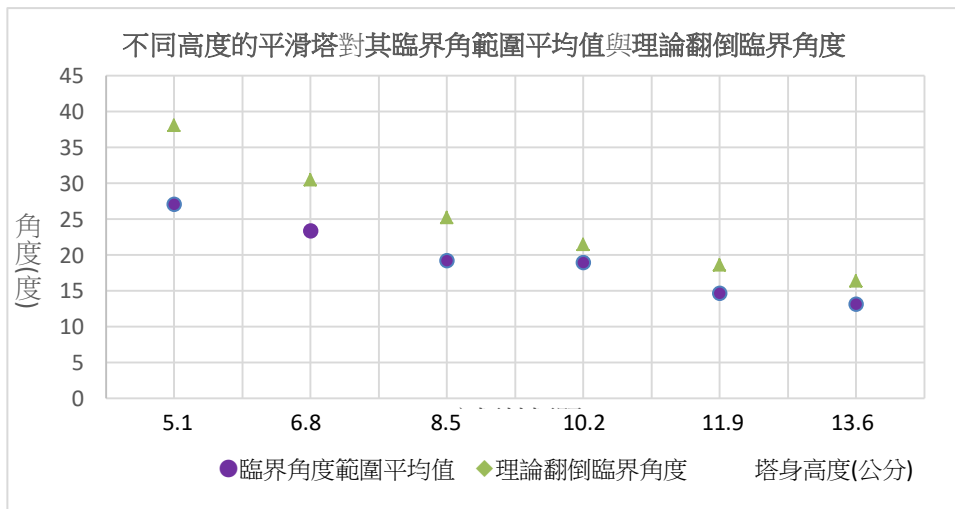


▲圖 5-3-1 隨著塔身高度增加，臨界角度平均值愈來愈小。



▲圖 5-3-2 臨界角度範圍之最小值恆小於理論翻倒臨界角度。

註：此處「理論翻倒臨界角」定義：塔身各圓盤之間尚未發生錯動前(視塔身為一圓柱體時)，其 $\tan^{-1} \frac{R}{H}$ 即為理論翻倒臨界角度。 $\frac{R}{H}$ 即本文先前所定義「RH 比」。



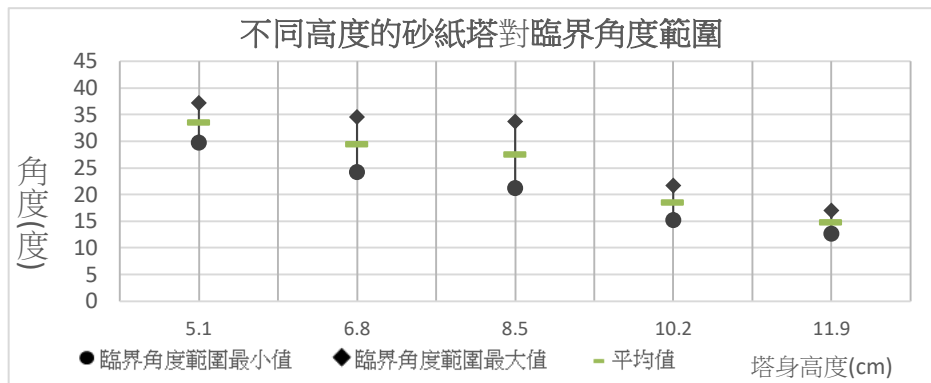
▲圖 5-3-3 隨著塔身高度增加，臨界角度範圍之平均值與理論翻倒臨界角度愈來愈接近。

(二) 實驗三-2：自製砂紙圓盤之塔高實驗

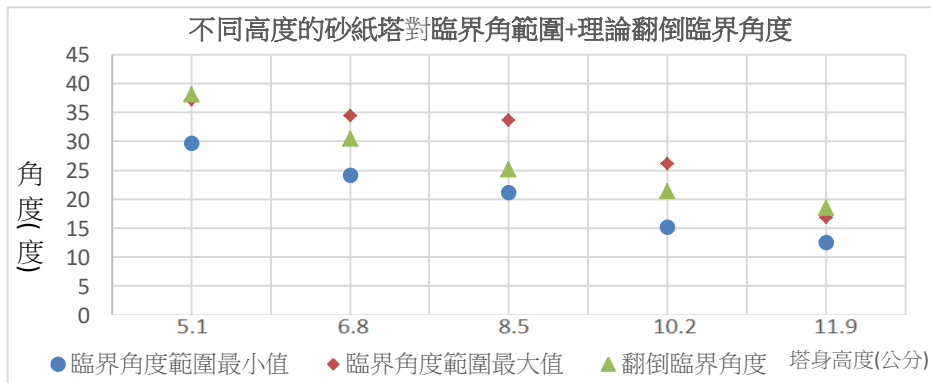
1. 數據

塔身高度(cm)	臨界角度範圍	塔身高度(cm)	臨界角度範圍
5.10	29.7°~37.2°	10.20	15.2°~21.6°
6.80	24.2°~34.5°	11.90	12.6°~16.9°
8.50	21.2°~33.7°		

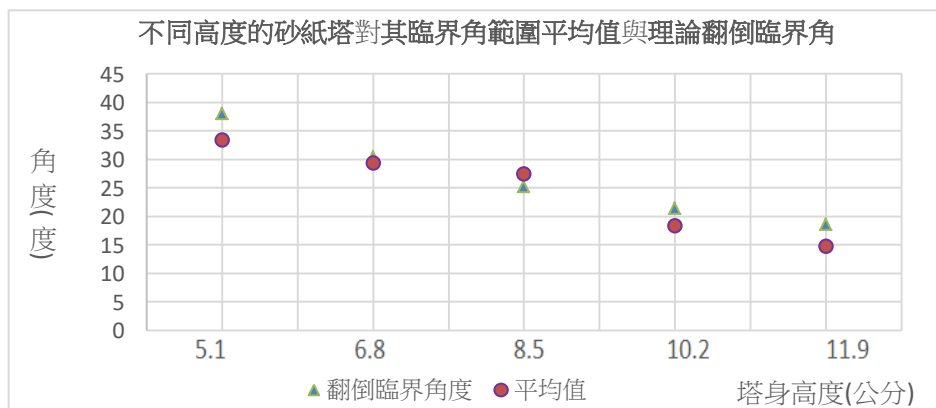
2. 圖表



▲圖 5-3-4 臨界角度範圍平均值與塔身高度呈負相關。



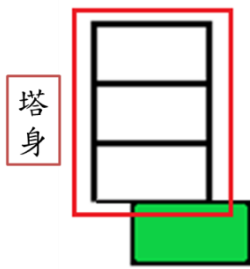
▲圖 5-3-5 理論翻倒臨界角度幾乎皆居於臨界角度範圍內。



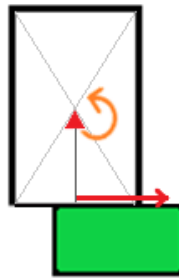
▲圖 5-3-6 各塔身高度的臨界角度範圍平均值與理論翻倒臨界角度之差值大約相等。

陸、 討論

一、由運動過程初步觀察，發現第一階段過程中，塔身圓盤間無相互錯動，視其為一體(如圖 6-1-1)。且實驗一的第一階段中，我們發現該階段的角速度變化量(平均約 0.84°)相對於總體運動角速度變化量(約 $4.80^\circ\sim 39.42^\circ$)而言非常微小，表示以塔身質心為支點時，摩擦力對塔身產生的力矩難以推動塔身轉動(如圖 6-1-2)，得知第一階段對總體運動的角速度變化量影響不大。

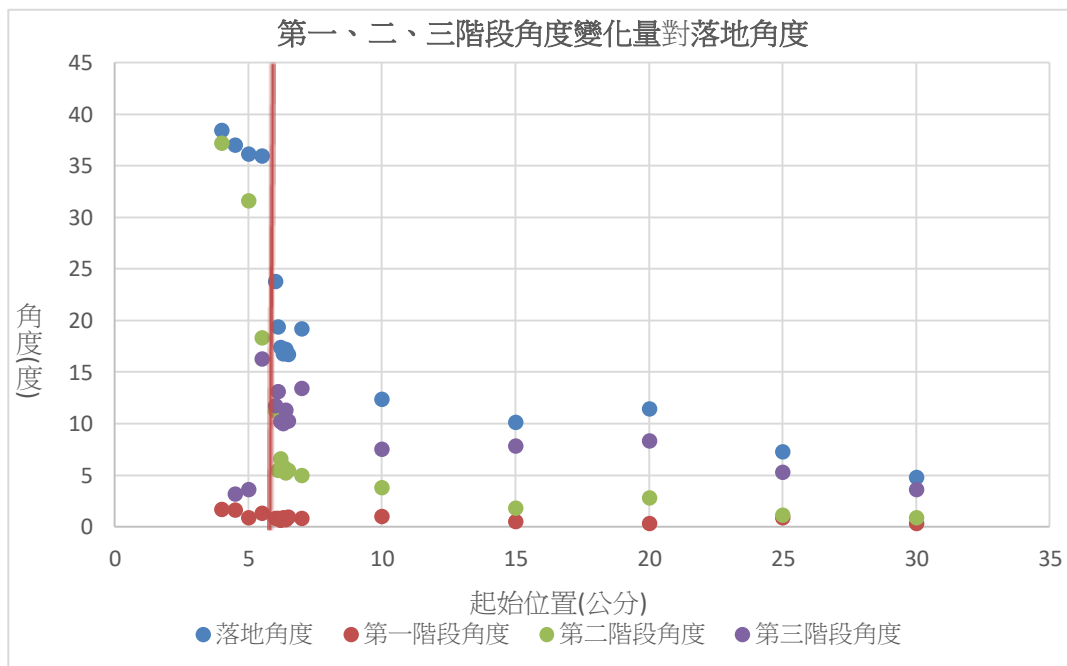


▲圖 6-1-1 視塔身為一體



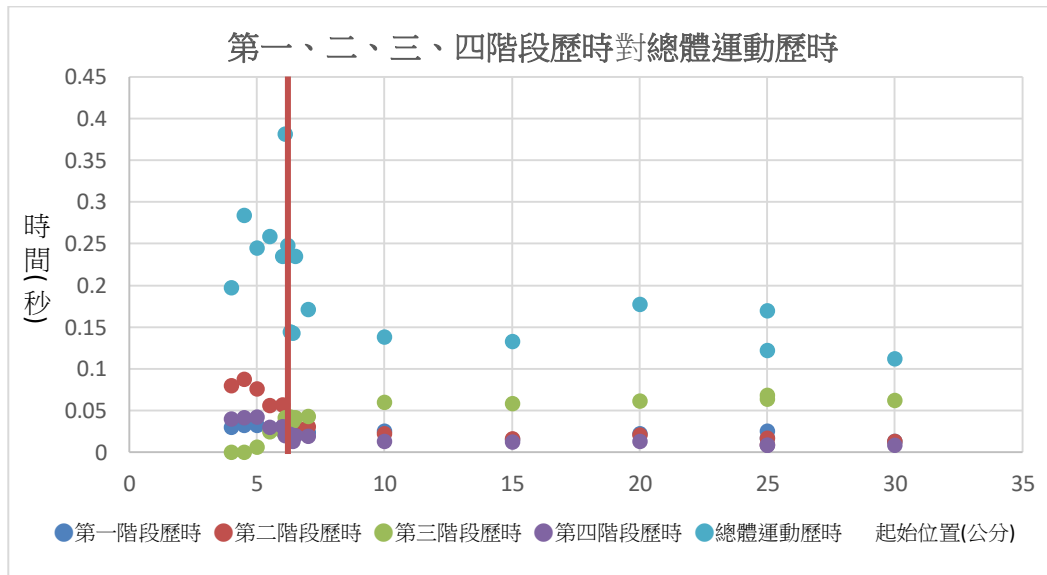
▲圖 6-1-2 質心支點與摩擦力矩

二、利用實驗一的結果，將第一階段、第二階段、第三階段與落地角度(其值等於 $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3$)疊圖(如圖 6-2-1)，我們得知在較小的起始位置 (即底塊移除速率較慢者)，對落地角度影響最大者為第二階段角速度變化量(即圖 6-2-1 中紅線以左)；而在較大的起始位置 (即底塊移除速率較快者)，對落地角度影響最大者為第三階段角速度變化量(即圖 6-2-1 中紅線以右)。



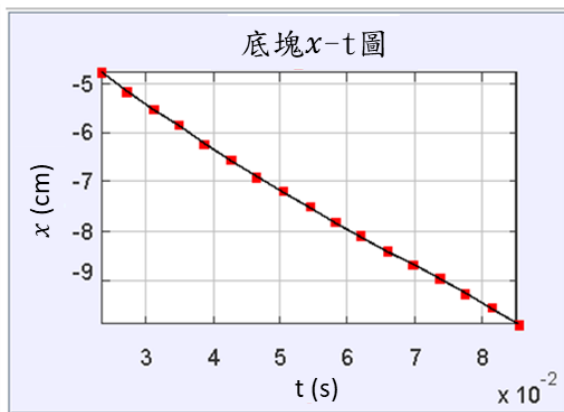
▲圖 6-2-1

三、利用實驗一的結果，將第一階段、第二階段、第三階段歷時與總體運動歷時疊圖(如圖 6-3-1)，我們得知在較小的起始位置 (即底塊移除速率較慢者)，對總體運動歷時影響最大者為第二階段歷時(即圖 6-3-1 中紅線以左)；而在較大的起始位置 (即底塊移除速率較快者)，對總體運動歷時影響最大者為第三階段歷時(即圖 6-3-1 中紅線以右)。



▲圖 6-3-1

四、由實驗一的實驗影片分析，發現第二階段中，底塊移除接近等速率運動(如圖 6-4-1)。



▲圖 6-4-1 利用 Tracker 分析底塊運動的 X-t 圖，其運動狀況接近等速率移動。

以「底塊接近等速率運動」為基礎，建立第二階段之理論模型，並使用 Excel 作圖與實驗一之中第二階段數據(圖 5-1-6)進行比對，過程如下：

(一) 力學分析：

第二階段力學分析的目標為「第二階段歷時($\Delta t_2 = t_e - t_m$)與角度變化量($\Delta\theta_2$)之關係」，且根據現象觀察發現第二階段各圓盤間錯動不明顯，因此以下推導過程視塔身為一圓柱體。欲推得底塊脫離角度 θ_e ，我們將塔身轉動支點定為塔身下緣與底塊的

接觸點，故此時惟重力產生力矩。利用每一瞬間底塊與塔身之相對速度，得到重力矩力臂 $\overline{x(t)}$ ，進而得出該瞬間之角加速度 $\overline{\alpha(t)}$ 與角速度變化量 $d\overline{\omega(t)}$ ，再得該瞬間的角度變化量 $d\overline{\theta_2(t)}$ ：

$$\overline{\tau_g} = \overline{x(t)} \times M\overline{g} = I(t) \cdot \overline{\alpha(t)} \quad \text{---①}$$

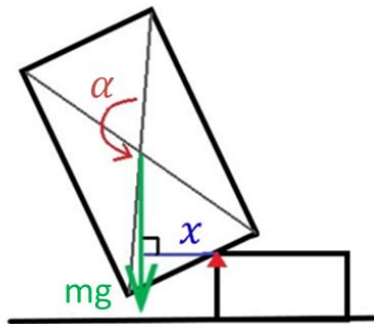
$$dt \overline{\alpha(t)} = d\overline{\omega(t)} \quad \text{-----②}$$

$$dt \overline{\omega(t)} = d\overline{\theta(t)} \quad \text{-----③}$$

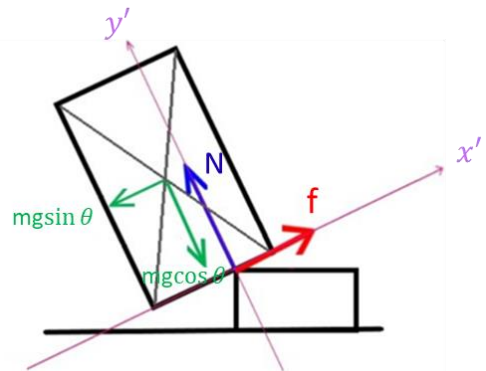
其中 M 為塔身質量， $I(t)$ 為轉動慣量。最後，第二階段每一瞬間之 $d\overline{\theta_2(t)}$ 總和量值為第二階段之總角度變化量 $\Delta\theta_2$ ，且第一階段之角度變化量 $\Delta\theta_1$ 極小可忽略，因此 $\Delta\theta_2$ 即為 θ_e 。以下為詳細推導過程。

1. 重力矩力的計算

將轉動支點定在塔身下緣與底塊的接觸點(如圖 6-4-2)。



▲圖 6-4-2 支點、力臂、角加速度



▲圖 6-4-3 塔身受力情形

某一瞬間塔身於 x' 軸方向(如圖 6-4-3)之受力：

$$\overline{F_{x'}} = M\overline{g} \sin \theta - M\overline{g} \cos \theta \mu_k \quad \text{-----④}$$

則 x' 軸方向之加速度為：

$$\overline{a_{x'}} = \frac{\textcircled{4}}{M} = \overline{g} \sin \theta - \overline{g} \cos \theta \mu_k \quad \text{-----⑤}$$

得底塊質心與塔身質心在一瞬間沿 x' 軸之相對速度 $\overline{v_{x'}}$ ：

$$\overline{v_{x'}} = \textcircled{5} \times dt + \overline{v_0'} - \overline{v_b'} \quad \text{-----⑥}$$

其中 \vec{v}'_0 為上一瞬間塔身質心沿 x' 軸之速度，而 \vec{v}_b 為底塊移除速度在 x' 軸上的分量(即 $\vec{v}_b \cos \theta$)。

得底塊質心與塔身質心在一瞬間沿 x' 軸之相對位移 $d\vec{x}'$ ：

$$d\vec{x}' = \textcircled{6} \times dt \text{ -----}\textcircled{7}$$

由於此處底塊運動可視為剛體運動，則極短時間內「底塊質心與塔身質心之相對位移」等於「支點與塔身質心之相對位移」，因此：

$$\vec{x}' = \vec{x}'_0 + \textcircled{7} = \vec{x}'_0 + (\vec{g} \sin \theta - \vec{g} \cos \theta \mu_k) dt^2 - \vec{v}_b' dt + \vec{v}'_0 dt \text{ -----}\textcircled{8}$$

其中 \vec{x}'_0 為上一瞬間的力臂。則重力矩：

$$\vec{\tau}_g = \textcircled{8} \times M\vec{g} \cos \theta \text{ -----}\textcircled{9}$$

2. 轉動慣量

由於我們所使用的達摩並非理想的圓柱體，而是中間有孔洞的圓盤，使得轉動慣量的計算難度增加。因此我們轉向以實驗測量的方式求得轉動慣量。

3. 角度的計算：

由 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{9}$ 得角加速度 $\vec{\alpha}$ ：

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}_g}{I} = \frac{\textcircled{9}}{I} \text{ -----}\textcircled{10}$$

得塔身在一瞬間之角速度 $\vec{\omega}$ ：

$$\vec{\omega} = \textcircled{10} \times dt + \vec{\omega}_0 \text{ -----}\textcircled{11}$$

其中， $\vec{\omega}_0$ 為塔身上一瞬間之角速度。

再得塔身於第二階段中一瞬間之角度變化量 $d\vec{\theta}_2$ ：

$$d\vec{\theta}_2 = \textcircled{11} \times dt = \frac{\vec{x}' \times M\vec{g}}{\frac{1}{16}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 + Ml^2} dt^2 \text{ -----}\textcircled{12}$$

將第二階段每一瞬間之 $d\vec{\theta}_2$ 加總，所得為第二階段之總角度變化量 $\Delta\theta_2$ ：

$$\int_{t_m}^{t_e} d\theta_2 = \Delta\theta_2$$

因第一階段之角度變化量 $\Delta\theta_1$ 極小，則：

$$\Delta\theta_2 \approx \theta_e$$

(二) 運算與作圖

利用 Excel 作為積分工具，依循上述推導過程，逐步計算出重力力矩，並結合轉動慣量，進而得出第二階段總角度變化量。

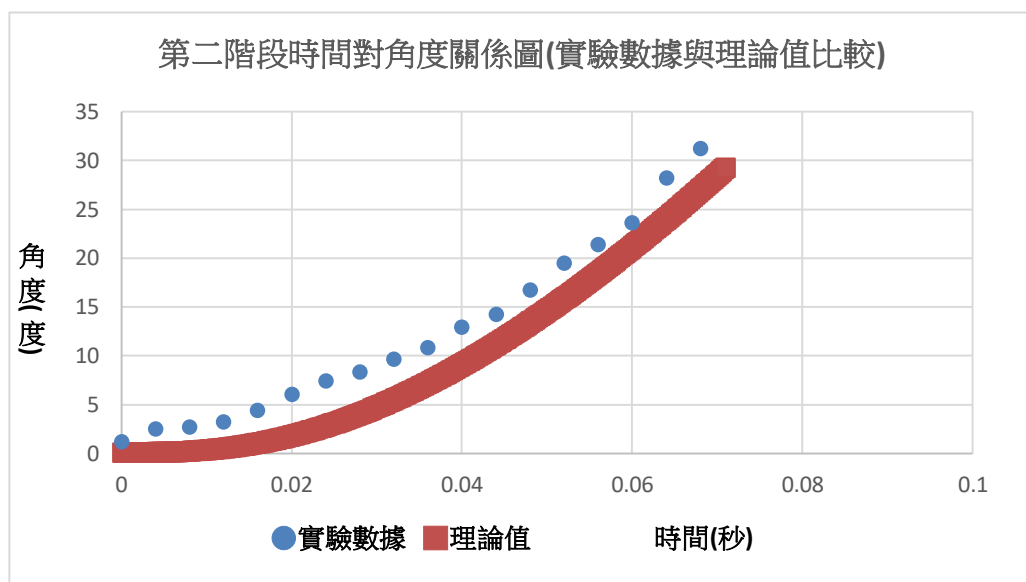
1. 重力矩力的計算										2. I	3. 角度的計算
重力力矩	方向角速度	方向角速度	方向角速度	方向角速度	方向角速度	重力力矩	重力力矩	重力力矩	重力力矩		
0	-382.6	-0.1813	0	-0.1813	37.8187	0.0180935	0	0.0180935	3200.31792	2106.23	116460.21
4.7907E-07	-382.595365	-0.181299765	-0.1813	-0.362599765	37.63740023	0.0181817	0.0180935	0.03772805	6385.891365	4201.47	232926.512
1.01389E-06	-382.5981244	-0.181299062	-0.362599765	-0.543898827	37.45610117	0.0182691	0.03772805	0.056456101	9555.322489	6302.94	352926.024
4.7798E-06	-382.595317	-0.181297658	-0.543898827	-0.725196486	37.27480351	0.0183565	0.056456101	0.075186502	12716.91663	8104.41	472925.536
5.54478E-06	-382.5999481	-0.181295323	-0.725196486	-0.906494350	37.09350585	0.0184439	0.075186502	0.093916903	15846.15663	9875.88	592925.048
1.68813E-05	-382.5836323	-0.181291826	-0.906494350	-1.087790205	36.91220819	0.0185313	0.093916903	0.112647304	18922.55689	11646.35	712924.56
2.66542E-05	-382.5783787	-0.181289439	-1.087790205	-1.269086084	36.73091053	0.0186187	0.112647304	0.131377705	22011.96114	13427.82	832924.072
3.9207E-05	-382.5698715	-0.181287048	-1.269086084	-1.450381963	36.54961287	0.0187061	0.131377705	0.150108106	25104.36539	15209.29	952923.584
5.0959E-05	-382.5441796	-0.1812799	-1.450381963	-1.631677842	36.36831521	0.0187935	0.150108106	0.168838507	28200.76964	17000.76	1072923.096
7.8208E-05	-382.5225248	-0.181281677	-1.631677842	-1.812973721	36.18701755	0.0188809	0.168838507	0.187568908	31297.17389	18792.15	1192922.608
0.000104129	-382.497562	-0.181288976	-1.812973721	-2.000000000	36.00571989	0.0189683	0.187568908	0.206299309	34393.57814	20583.54	1312922.120
0.000135171	-382.467594	-0.181237078	-2.000000000	-2.175387518	35.82442223	0.0190557	0.206299309	0.225029710	37489.97239	22374.93	1432921.632
0.000177382	-382.431641	-0.181212824	-2.175387518	-2.350780033	35.64312457	0.0191431	0.225029710	0.243760111	40586.36664	24166.32	1552921.144
0.000234407	-382.3898726	-0.181194936	-2.350780033	-2.526172548	35.46182691	0.0192305	0.243760111	0.262490512	43682.76089	25957.71	1672920.656
0.000293487	-382.3417765	-0.181170885	-2.526172548	-2.701565063	35.28052925	0.0193179	0.262490512	0.281220913	46779.15514	27749.10	1792920.168
0.000394528	-382.2891129	-0.181143436	-2.701565063	-2.876957578	35.09923159	0.0194053	0.281220913	0.300000000	49875.54939	29540.49	1912919.680
0.000509754	-382.2294743	-0.181119437	-2.876957578	-3.052350093	34.91793393	0.0194927	0.300000000	0.318830000	52971.94364	31331.88	2032919.192
0.000649386	-382.1552225	-0.181091916	-3.052350093	-3.227742608	34.73663627	0.0195801	0.318830000	0.337660000	56068.33789	33123.27	2152918.704
0.000814394	-382.0673689	-0.181067874	-3.227742608	-3.403135123	34.55533861	0.0196675	0.337660000	0.356490000	59164.73214	34914.66	2272918.216
0.000999819	-381.991684	-0.180995734	-3.403135123	-3.578527638	34.37404095	0.0197549	0.356490000	0.375320000	62261.12639	36706.05	2392917.728
0.001208924	-381.9256193	-0.18089826	-3.578527638	-3.753920153	34.19274329	0.0198423	0.375320000	0.394150000	65357.52064	38497.44	2512917.240
0.001433038	-381.8702138	-0.1808015	-3.753920153	-3.929312668	34.01144563	0.0199297	0.394150000	0.412980000	68453.91489	40288.83	2632916.752
0.001663086	-381.8247259	-0.180707259	-3.929312668	-4.104705183	33.83014797	0.0199881	0.412980000	0.431810000	71550.30914	42080.22	2752916.264
0.001898668	-381.7879167	-0.180617167	-4.104705183	-4.280097698	33.64885031	0.0199881	0.431810000	0.450640000	74611.80339	43871.61	2872915.776
0.002139286	-381.7578915	-0.180531446	-4.280097698	-4.455490213	33.46755265	0.0199881	0.450640000	0.469470000	77673.29764	45663.00	2992915.288

▲6-4-4 第二階段 Excel 計算過程

接著改變底塊移除速率的設定值，取得各底塊移除速率相對應之塔身脫離角度，並且作圖。

(三) 比對與討論

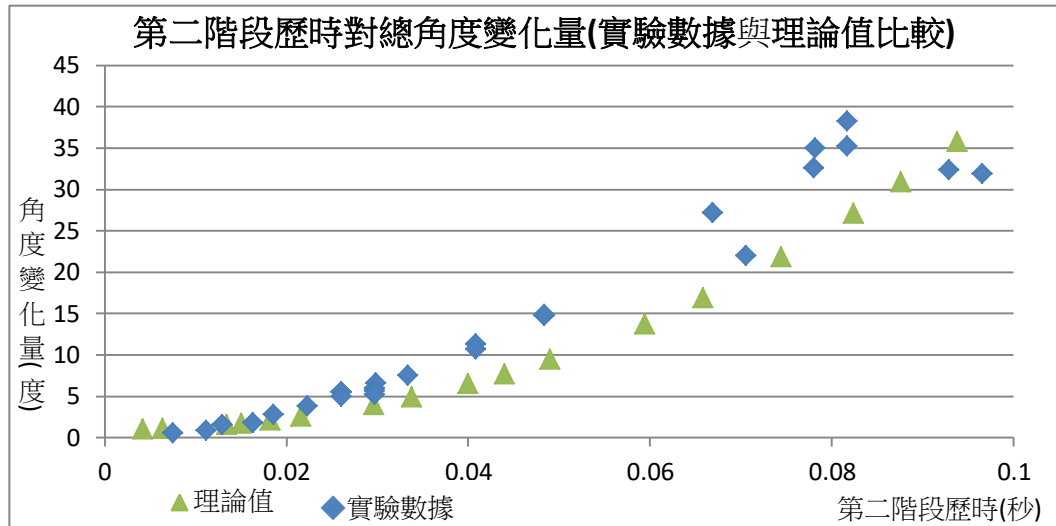
1. 第二階段時間對角度關係圖



▲圖 6-4-5 第二階段時間對角度關係圖(實驗數據與理論值比較)

由圖 6-4-5 可得知第二階段時間對角度關係為一開口向上之曲線，即角速度隨時間愈來愈快。由於第二階段過程中，重力不斷對塔身質心造成重力力矩，使其擁有順時針方向之角加速度，故圖形為一開口向上之曲線。

2. 第二階段歷時對總角度變化量



▲圖 6-4-6 第二階段時間對角度關係圖(實驗數據與理論值比較)

根據圖 6-4-6，理論值大致吻合實驗數據，仍有些微差異，推測可能來自轉動慣量的測量。無論是實驗數據或理論值皆指出第二階段歷時與總角度變化量成正相關，即第二階段作用時間愈長，所累積出的角度變化量愈大。

五、由第三階段的現象觀察，我們發現塔身在該階段作等角速度運動。以「塔身作等角速度運動」為基礎，我們建立第三階段之理論模型，並使用 Excel 作圖與實驗數據比對，過程如下：

(一) 力學分析

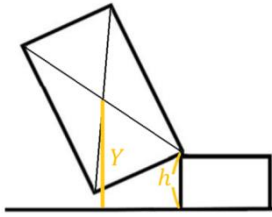
第三階段的力學分析目標為「第三階段歷時($\Delta t_3 = t_g - t_e$)與角度變化量($\Delta\theta_3$)之關係」。經由底塊脫離時($t = t_e$)塔身質心至地面的距離 Y ，以及第二階段末塔身的角速度(即第三階段全程之角速度 ω_3)計算出第三階段的歷時 Δt_3 。再藉由 Δt_3 與 ω_3 得到 $\Delta\theta_3$ ，進而得出 θ_g ：

$$\Delta\theta_3 = \omega_3 \times \Delta t_3 \text{ -----⑬}$$

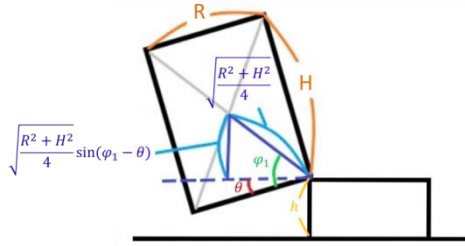
$$\theta_g = \theta_e + \Delta\theta_3 \text{ -----⑭}$$

以下為詳細推導過程。

1. 在此階段的分析中，我們將支點定在塔身質心處，且塔身對質心作等角速度轉動。脫離底塊瞬間 t_e ，塔身質心距地高度 Y ：



▲圖 6-5-1 塔身質心距地高度 Y



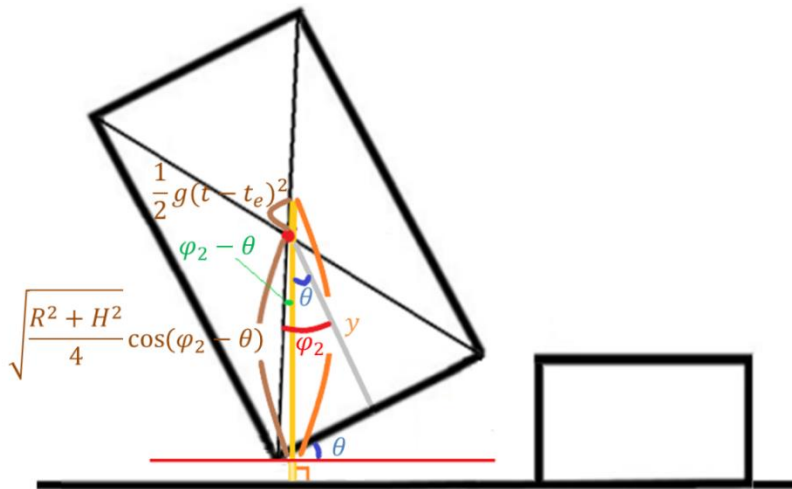
▲圖 6-5-2 Y 的計算

$$Y = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2} \cdot \sin(\varphi_1 - \theta_e) + h$$

$$\because \varphi_1 = \tan^{-1} \frac{H}{R}$$

$$\therefore Y = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2} \cdot \sin\left(\tan^{-1} \frac{H}{R} - \theta_e\right) + h \text{ -----⑮}$$

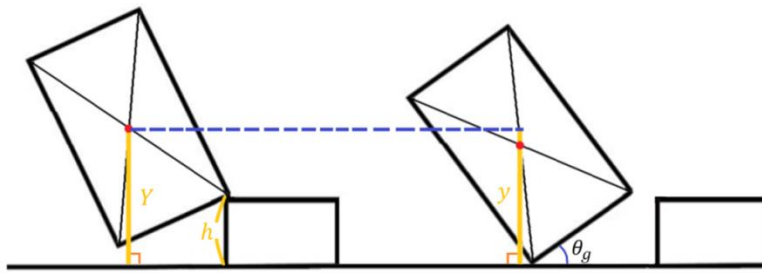
2. 將某一瞬間 t 塔身質心至塔身最低點水平延伸線之距離定義為 y (如圖 6-5-3)：



▲圖 6-5-3 「 y 」的定義與其計算示意圖

$$y = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2} \cdot \cos(\varphi_2 - \theta) + \frac{1}{2} \vec{g}(t - t_e)^2 \text{ -----⑯}$$

當 $y = Y$ (⑯=⑮)時，塔身落地(如圖 6-5-4)，此時($t = t_g$)第三階段之等角速度運動結束。



▲圖 6-5-4 當 $y = Y$ ，第三階段結束

3. 第三階段歷時 Δt_3 與塔身落地角度 θ_g ：

$$\Delta t_3 = t_g - t_e \text{ -----(17)}$$

$$\Delta \theta_3 = \omega_3 \times \Delta t_3 \text{ -----(13)}$$

$$\theta_g = \theta_e + \Delta \theta_3 \text{ -----(14)}$$

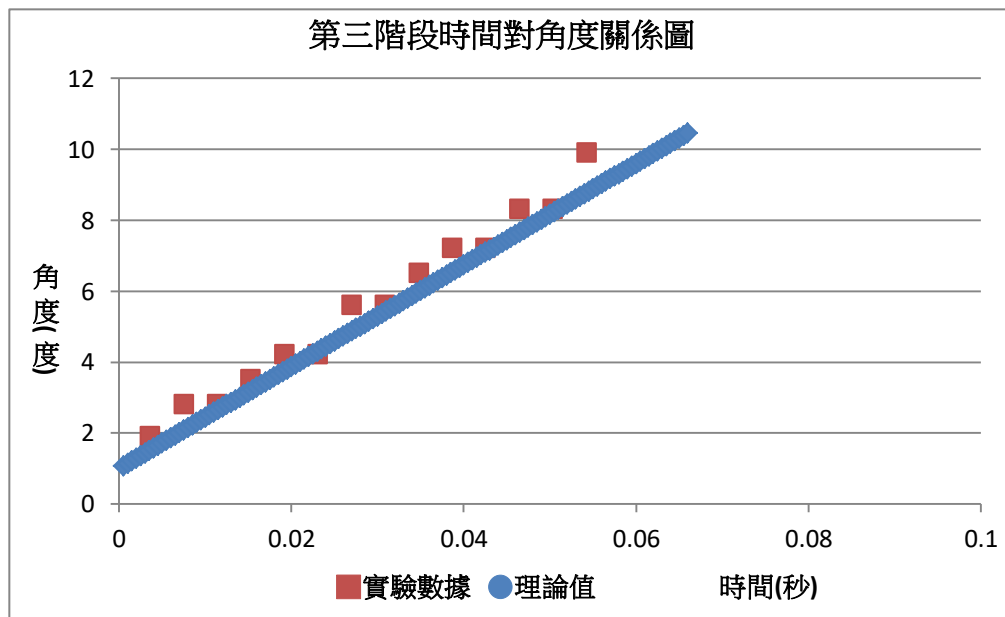
(二) 運算與作圖

接續第二階段計算所得的 θ_e 與 ω_3 ，利用 Excel 積分，逐步計算出 Y 、各瞬間之 y ，進而求得 $\Delta \theta_3$ 與 θ_g 。

H	R	h	φ_1 (角度)	φ_2 (角度)	θ (角度)	$\varphi_1 - \theta$ (角度)	$\varphi_1 - \theta$ (弧度)	Y						
	9	5	3	60.9453959	29.0546041	10.033505	50.91189123	0.88858013	6.995617107					
θ	對角線*1/2	$\varphi_2 - \theta$ (弧度)	第一項	原t	新t	平均t	自由落體位移	y	omega(弧度)	omega(角度)	delta theta	new theta (角度)		
10.0335047	5.14781507	0.331980812	4.866737261	0	0.0005	0.00025	0.000030625	4.866767886	4.60399521	263.789495	0.13189	10.16539942	-2.128849221	
10.16539942	5.14781507	0.329678815	4.870586556	0.0005	0.001	0.00075	0.000275625	4.870862181	4.603995213	263.789495	0.13189	10.29729416	-2.124754926	
10.29729416	5.14781507	0.327376817	4.87441004	0.001	0.0015	0.00125	0.000765625	4.875175665	4.603995213	263.789495	0.13189	10.42918891	-2.120441442	
10.42918891	5.14781507	0.32507482	4.878207693	0.0015	0.002	0.00175	0.001500625	4.879708318	4.603995213	263.789495	0.13189	10.56108366	-2.115908789	
10.56108366	5.14781507	0.322772822	4.881979496	0.002	0.0025	0.00225	0.002480625	4.884460121	4.603995213	263.789495	0.13189	10.69297841	-2.11156986	
10.69297841	5.14781507	0.320470824	4.885725429	0.0025	0.003	0.00275	0.003705625	4.889431054	4.603995213	263.789495	0.13189	10.82487315	-2.106186053	
10.82487315	5.14781507	0.318168827	4.889445471	0.003	0.0035	0.00325	0.005175625	4.894621096	4.603995213	263.789495	0.13189	10.9567679	-2.100996011	
10.9567679	5.14781507	0.315866829	4.893139603	0.0035	0.004	0.00375	0.006890625	4.900030228	4.603995213	263.789495	0.13189	11.08866265	-2.095586879	
11.08866265	5.14781507	0.313564832	4.896807805	0.004	0.0045	0.00425	0.008850625	4.90565843	4.603995213	263.789495	0.13189	11.2205574	-2.089958677	

▲6-5-5 第三階段 Excel 計算過程

(三) 比對與討論



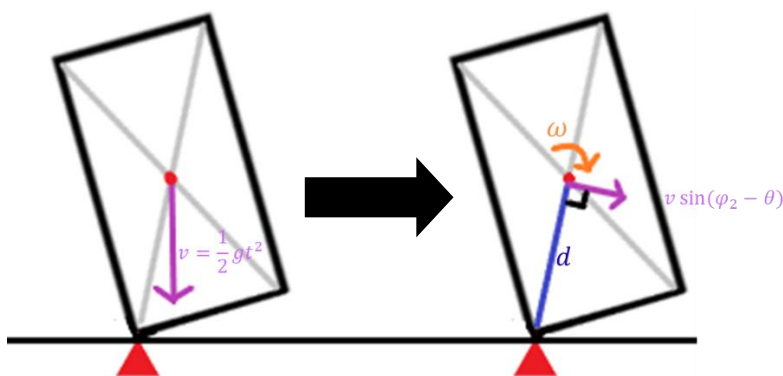
▲圖 6-5-6 第三階段時間對角度關係圖

根據圖 6-5-6，可發現第三階段無論是實驗數據或理論值，時間對角度皆呈線性正相關，可知第三階段運動過程為等角速度轉動。且圖形的縱軸截距所代表之意義為脫離角度。

六、根據圖 5-1-9，我們發現第三階段歷時與角度變化量之曲線的高峰在圖形中間處。認為是因為當底塊移除速率緩慢時，第二階段結束時傾斜角大、角速度大，傾斜角大使得第三階段歷時縮短，因此即便此時角速度大，但由於受到歷時牽制而無法產生較大角度變化量。且當底塊移除速率快速時，第二階段結束時傾斜角小、角速度小，傾斜角小表示第三階段歷時較長，但即使此階段歷時較長，由於角速度過小而難以產生較大的角度變化量。






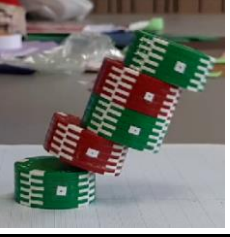



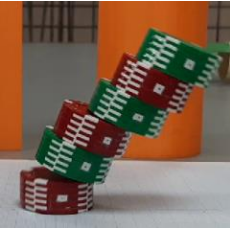

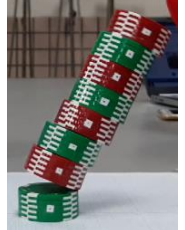
七、若塔身先落地再脫離，其落地角度必大於底塊之 $\tan^{-1} \frac{R}{H}$ ；且若塔身同時落地與脫離，則其落地角度等於底塊之 $\tan^{-1} \frac{R}{H}$ 。在實驗一中， $\tan^{-1} \frac{R}{H} \approx 36.87^\circ \geq$ 臨界角度範圍 $19.4^\circ \sim 21.6^\circ$ ，可知凡「先落地再脫離」以及「同時落地與脫離」之塔身皆會傾倒。

八、在底塊厚度實驗中，臨界角度平均值隨底塊增厚而變大。推測是因為較厚的底塊，會使第三階段歷時增長，造成塔身在第四階段開始時，擁有較大的落地角度 θ_g 以及鉛直向下的速度。而鉛直向下的速度會使塔身加快轉動回到地面(即 $\theta = 0^\circ$) (如圖 6-8-1)。因此就算落地角度大，若塔身具有較大的鉛直向下速度，則第四階段歷時變短，1 號圓盤上方其餘圓盤沒有足夠時間滑動，進而讓塔身不易傾倒。




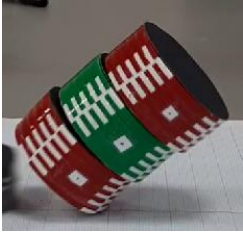
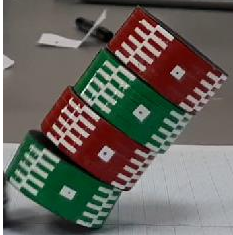




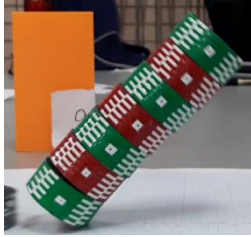


▲圖 6-8-1 鉛直向下的速度使塔身加快轉動回到地面

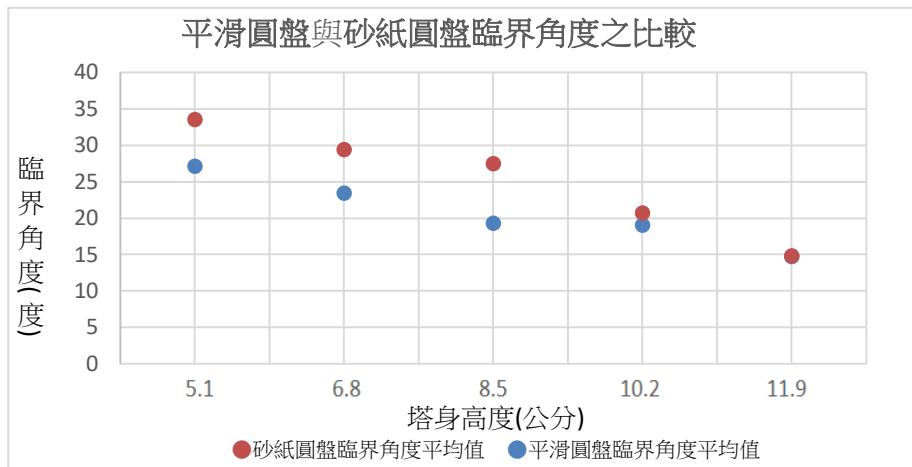
九、在實驗三-1 當中，因為自製平滑圓盤動摩擦係數較小($\mu_k = 0.42$)，因此在第四階段，圓盤間容易發生較大滑動，導致 1 號圓盤上方所有圓盤的質心，較容易超過 1 號圓盤垂直向上延伸的區域而發生滑倒。在圖 5-3-3 中我們得知，隨著塔身高度增加，臨界角度範圍之平均值與理論翻倒臨界角度之值愈來愈接近。推測其原因為塔身高度較高時，圓盤間尚未發生明顯滑動，就先滿足翻倒條件(即重心鉛垂線通過 1 號圓盤垂直向上延伸的區域)而翻倒。

塔身高度	5.1 cm	6.8 cm	8.5 cm
脫離狀況			
傾倒狀況			
塔身高度	10.2 cm	11.9 cm	13.6 cm
脫離狀況			
傾倒狀況			

十、在實驗三-2 當中，因為自製砂紙圓盤動摩擦係數較大($\mu_k = 0.72$)，因此在第四階段，圓盤間不易發生較大滑動，而會直接滿足翻倒條件(即重心鉛垂線通過 1 號圓盤垂直向上延伸的區域)而翻倒。

塔身高度	5.1 cm	6.8 cm	8.5 cm
脫離狀況			
傾倒狀況			
塔身高度	10.2 cm		11.9 cm
脫離狀況			
傾倒狀況			

十一、由下圖可知平滑圓盤臨界角度範圍平均值皆比砂紙圓盤臨界角度範圍平均值小。推測其原因為平滑圓盤動摩擦係數較小，圓盤間容易發生較大滑動，而先滿足滑倒條件而滑倒，且滑倒條件臨界角度比翻倒條件臨界角度小。



▲圖 6-10-1 平滑圓盤臨界角度範圍平均值比砂紙圓盤臨界角度範圍平均值小。

柒、 結論

- 一、在移除速率實驗中，我們得知在較小的起始位置（即底塊移除速率較慢者），對落地角度影響最大者為第二階段角度變化量；而在較大的起始位置（即底塊移除速率較快者），對落地角度影響最大者為第三階段角度變化量。
- 二、在底塊厚度實驗中，發現底塊厚度與臨界角度平均值呈正相關。
- 三、在傾倒類型實驗中，發現不管是自製平滑圓盤或砂紙圓盤，臨界角度皆隨著塔身高度增加而減小。
- 四、摩擦係數較小的圓盤較容易滑動，因此平滑圓盤臨界角度較砂紙圓盤臨界角度小。

捌、 未來展望

- 一、在本次研究中，雖然已有理論模型推導，趨勢與實驗雷同，但仍有些微差異，推測是因為轉動慣量的測量不夠精準，期待日後能測出更加準確的轉動慣量並進行修正。
- 二、建立第四階段理論模型，並期待能與底塊厚度實驗結果吻合。

玖、 參考文獻

- 一、 Tablecloth Trick – Cool Science Experiment, (YouTube, SpanglerScienceTV, Dec 16, 2011), <https://youtu.be/PcGIUZzWoVc>
- 二、 Tablecloth Tricks! (Dear Ryan), (YouTube, nigahiga, Mar 29, Tablecloth Tricks!)
- 三、 Inertia Checkers Project, (YouTube, XxemoXxAnimeXx) https://youtu.be/s6O6m3A_ViM
- 四、 How far can you overhang blocks? By Data Genetics <http://datagenetics.com/blog/may32013/index.html>

【評語】 051802

本作品探討瞬間的水平力可以讓物體因慣性維持不倒的機制，實驗以相同的圓盤垂直疊放於平面上，形成一個獨立的塔，再施加水平力移除塔最底部的圓盤使塔身其餘的部分會掉落至平面上。一個瞬間的水平力可以讓物體因慣性維持不倒的現象所謂的 tablecloth trick 是一個常在科普看到的現象，但是並沒有定量的研究，本實驗雖然能將此問題定量化分析，並找出控制的變因，是一個有深度的實驗，然而在設計，所施加的水平力並不是一個瞬間(pulse)的力，而是一個固定力，如果能改進將是一個完整的實驗。

摘要

本次研究將使用相同的圓盤垂直疊放，放置於一平面，形成一個獨立的塔。當塔最底部的圓盤通過施加一個瞬間的水平力移除，塔身其餘的部分會掉落至平面上，且有機會保持直立狀態。因此透過本次科展，我們將分析底塊移除後至塔身落至地面的運動過程，設計相關實驗，並試著建立相符的理論模型，探討能使塔身保持靜止直立的條件。

經過初步的現象觀察與背景資料查詢，我們認為會影響塔身直立與否的相關參數有底塊移除速率快慢、底塊厚度、塔身厚度、圓盤之間的摩擦力。本作品將針對以上參數進行較為深入的研究。

研究目的

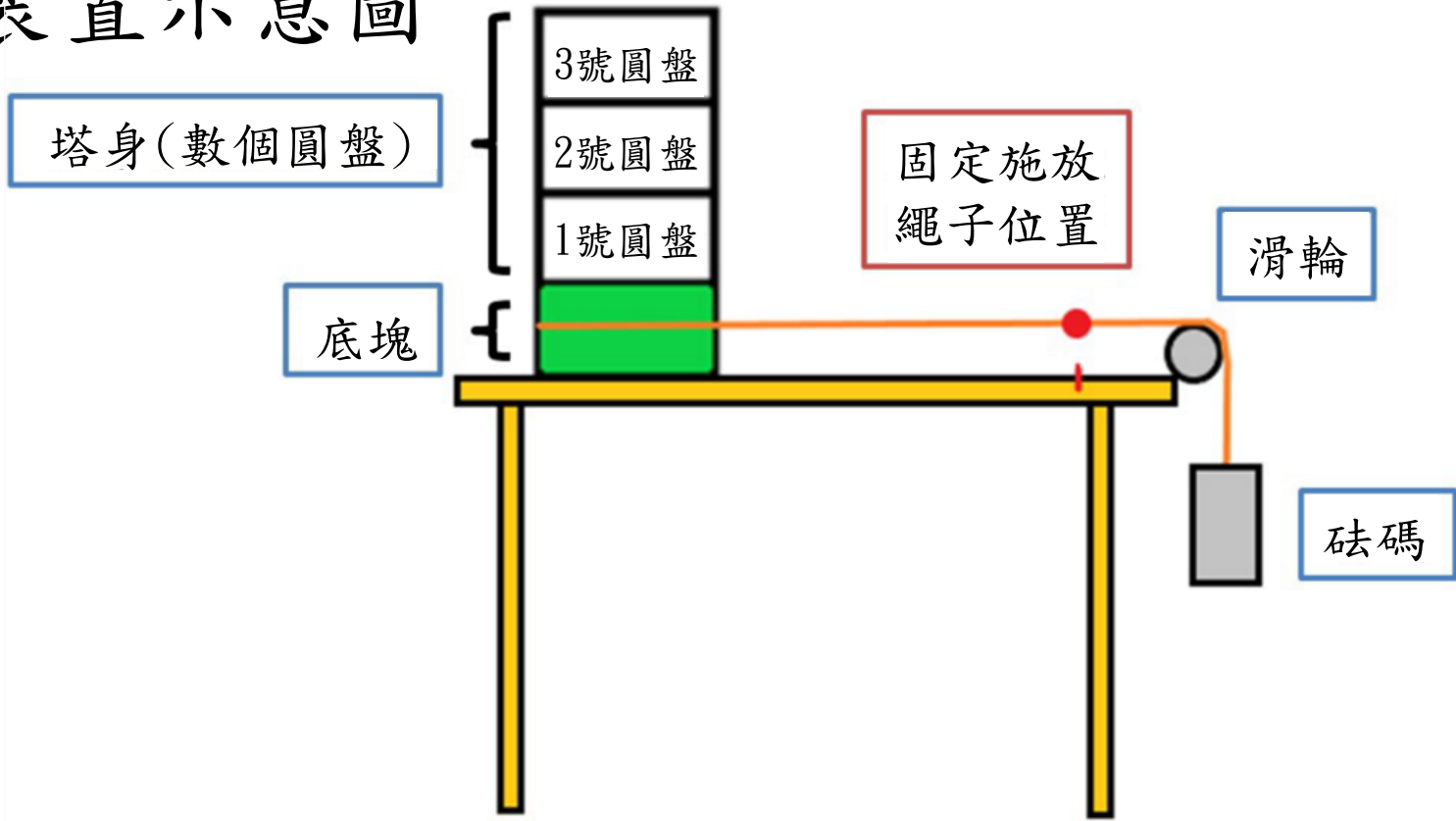
- 一. 分析底塊移除後至塔身的運動過程。
- 二. 探討底塊移除速率對塔身傾倒情況之影響。
- 三. 探討底塊厚度、塔身高度對塔身傾倒情況之影響。
- 四. 比較摩擦係數對塔身傾倒情況之影響。

研究設備及器材

一. 實驗器材與相關資訊

名稱	照片與資訊
達摩	直徑：5.00 cm/個 厚度：3.00 cm/個 質量：40 g/個 圓盤間動摩擦係數：0.27 圓盤間靜摩擦係數：0.39
自製平滑圓盤	直徑：4.00 cm/個 厚度：1.70 cm/個 質量：58.38g/個 圓盤間動摩擦係數：0.42 圓盤間靜摩擦係數：0.47
自製砂紙圓盤	直徑：4.00 cm/個 厚度：1.75 cm/個 質量：59.08 g/個 砂紙間動摩擦係數：0.72 砂紙間靜摩擦係數：1.01
方格紙	長：35cm / 寬：25cm 方格紙標線間距：0.1cm 紙與達摩間動摩擦係數：0.27 紙與圓盤間動摩擦係數：0.33

二. 實驗裝置示意圖



實驗相關原理

一. 轉動

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$

其中 τ 為力矩(牛頓·公尺)； r 為施力點到支點垂直距離(公尺)； F 為作用力(牛頓)。轉動為剛體對一固定軸旋轉的運動。

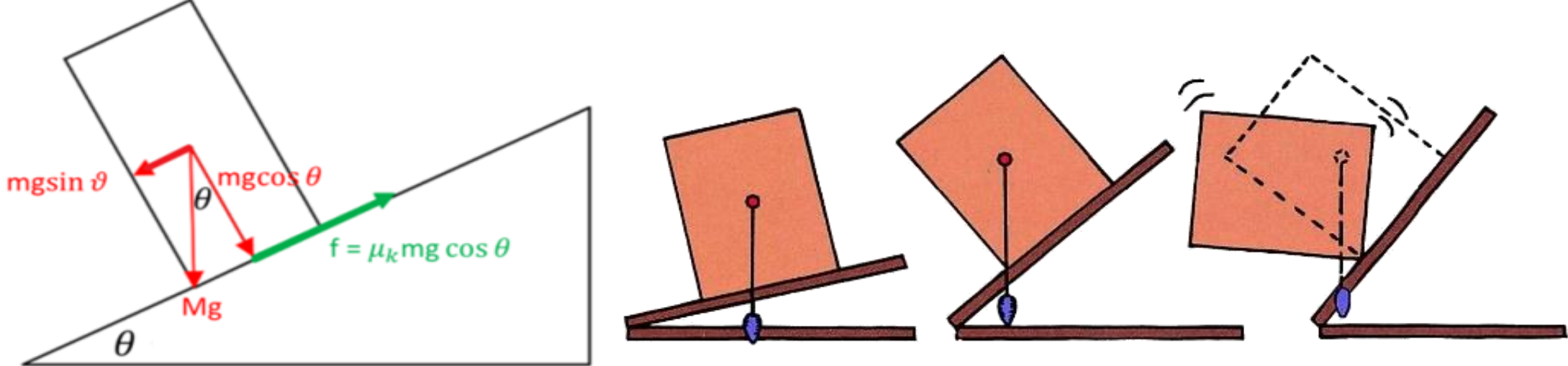
二. 轉動慣量：平行軸定理

$$I = I_{com} + Ml^2$$

其中 I_{com} 為剛體對質心軸的轉動慣量(公斤·公尺平方)； M 為剛體質量； l 代表另一支直軸與質心軸垂直距離。此公式可以計算出剛體對平行於質心軸的另外一支直軸的轉動慣量。

三. 斜面上的物體

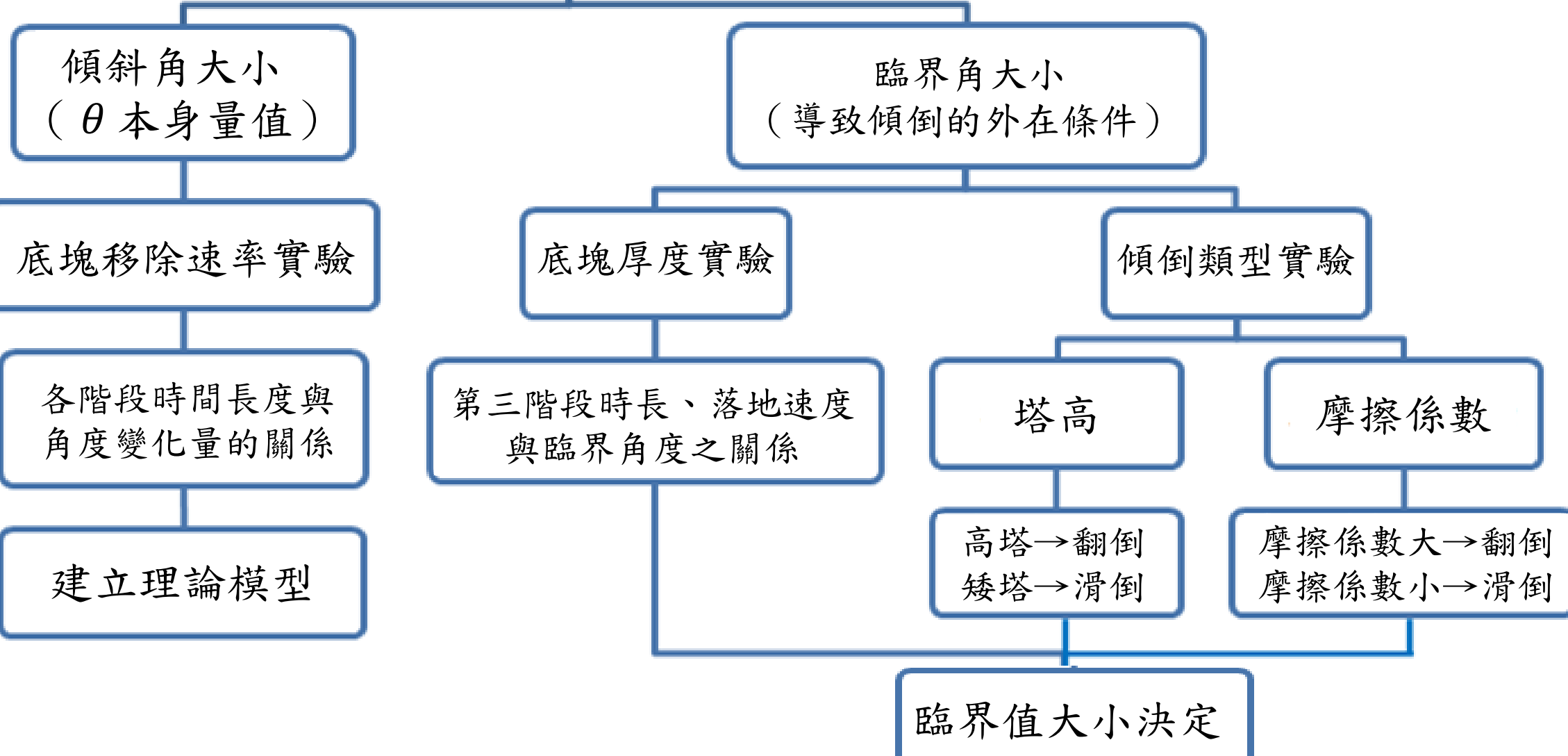
1. 下滑條件： $\tan\theta = \mu_s$
2. 翻轉條件：重心鉛垂線通過底端邊緣時。



▲重心鉛垂線通過底端邊緣時，物體翻倒

研究過程或方法

使塔身保持靜止直立條件
假設：與落地角度 θ 相關



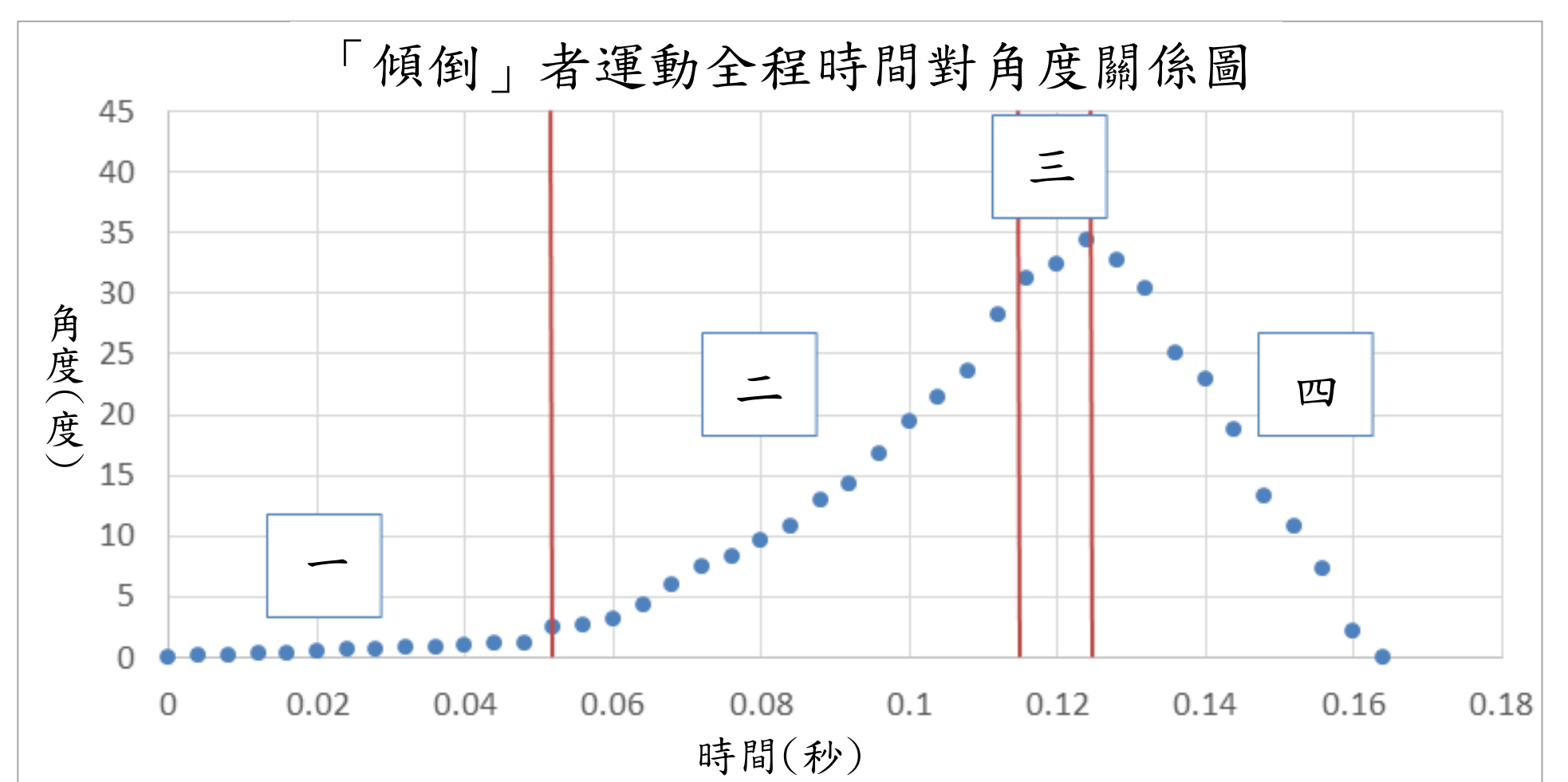
運動過程初步觀察

一. 定義運動階段

第一階段	第二階段	第三階段	第四階段		
1	2	3	4		
5	6				
底塊受力 (運動開始)	底塊邊緣 恰過 塔身質心 (開始轉動)	繼續轉動	底塊脫離	塔身落地	站立/傾倒 (運動結束)

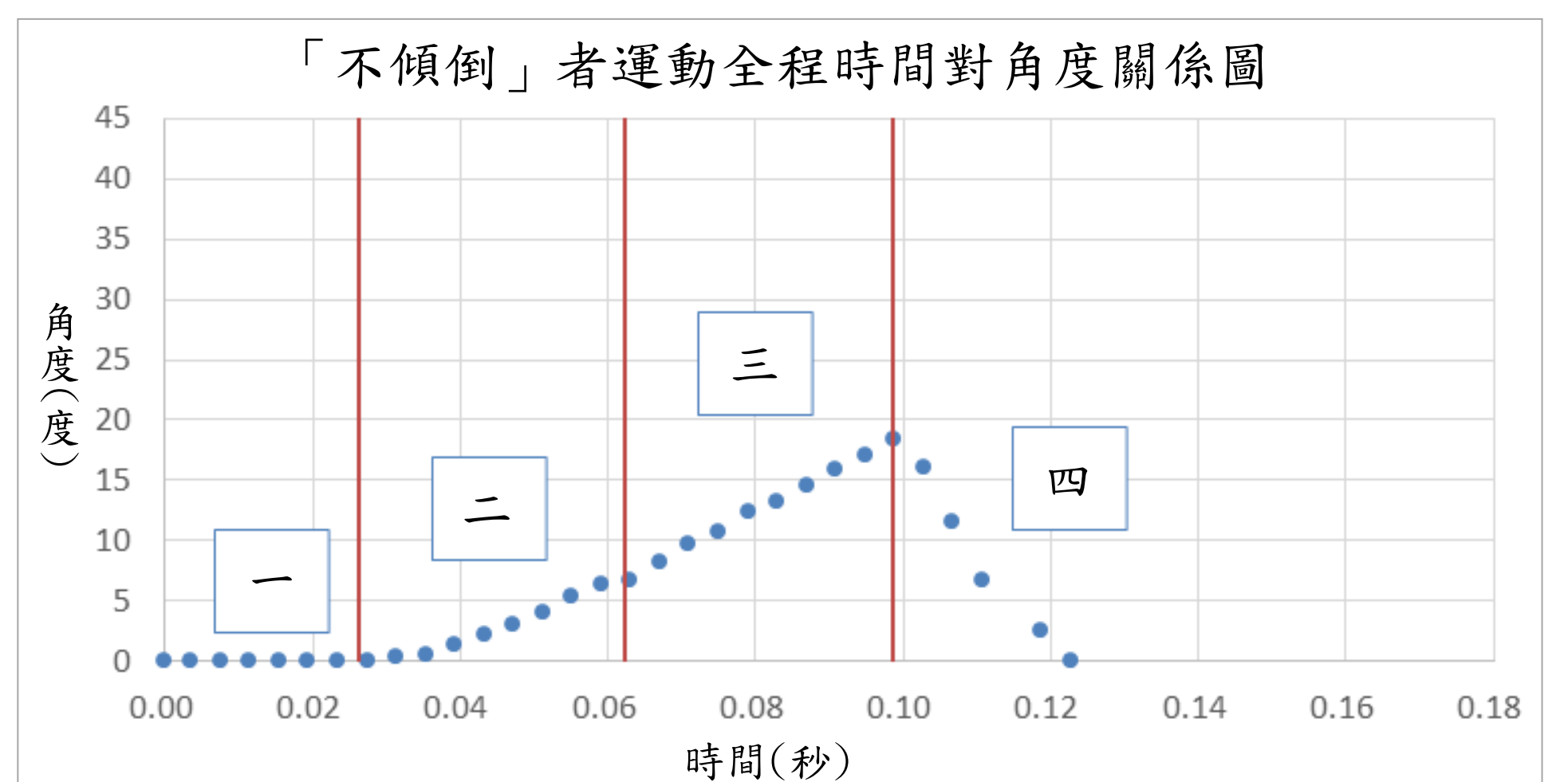
二. 運動全程角度對時間關係圖

(一) 最終狀態為傾倒者



▲傾倒者運動全程角度對時間關係圖(方框標示為一至四階段)

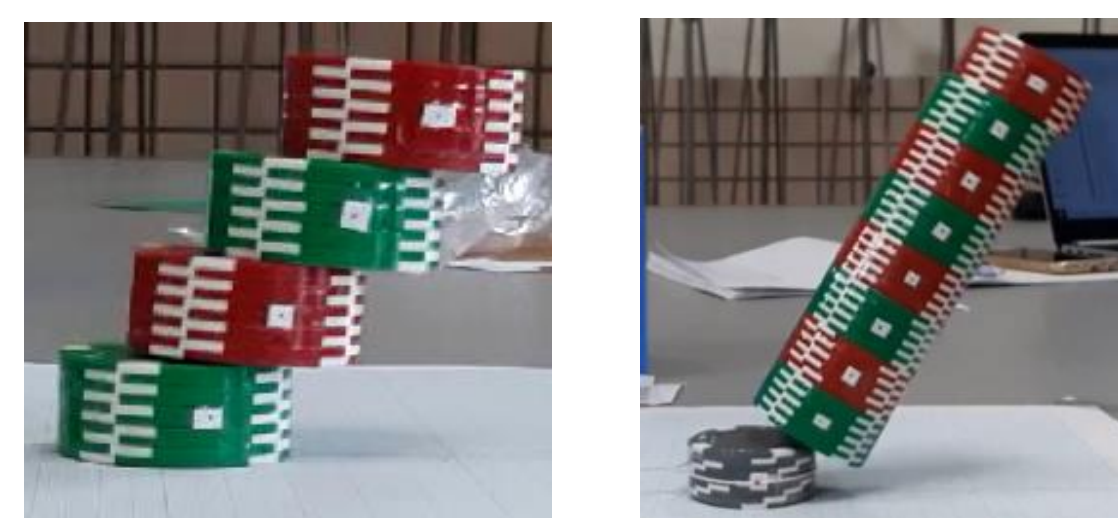
(二) 最終狀態為不傾倒者



▲不傾倒者運動全程角度對時間關係圖(方框標示為一至四階段)

三. 傾倒類型

- (一) 滑倒：圓盤摩擦係數小、塔身越矮較傾向於此。
- (二) 翻倒：圓盤摩擦係數大、塔身越高較傾向於此。

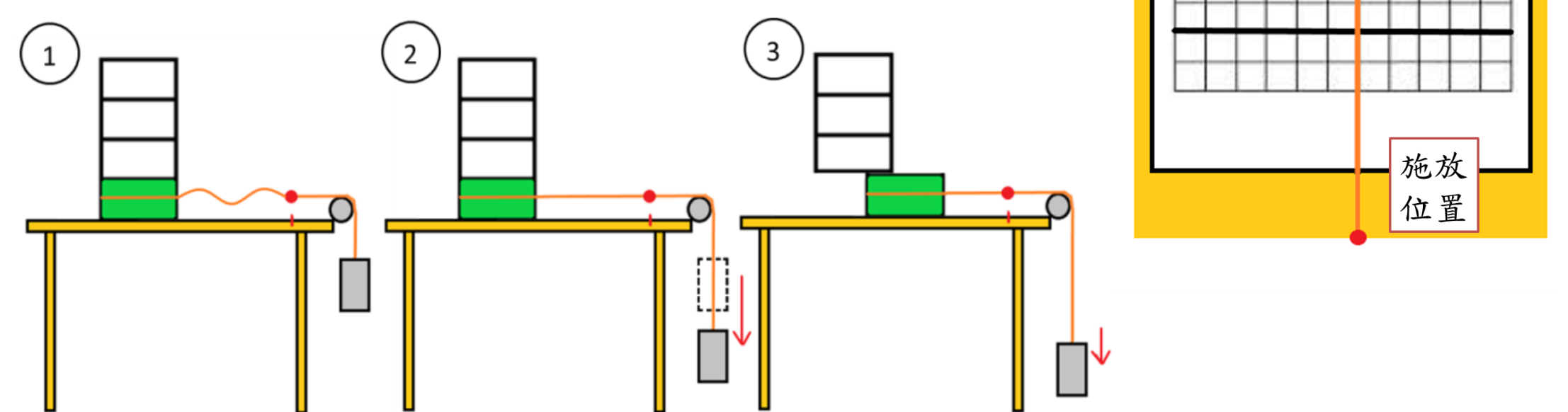


左圖：滑倒
右圖：翻倒

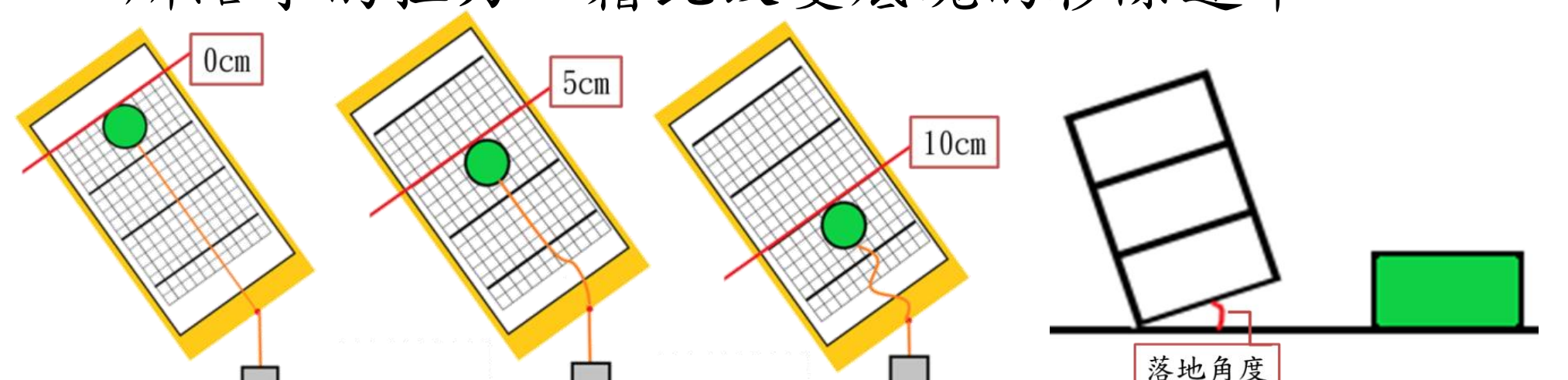
實驗方法

一. 提供底塊速率的方法：

- (一) 固定棉線長度及記錄施放砝碼位置。
- (二) 施放砝碼後整個運動過程
 1. 施放砝碼使其開始下降，此時棉線仍為捲曲狀，無拉力。
 2. 棉線從捲曲狀至繃緊狀態，此時砝碼已有速率。
 3. 底塊受到砝碼拉力開始脫離上方圓盤。



- (三) 改變起始位置，使底塊受到不同下降速率的砝碼所給予的拉力，藉此改變底塊的移除速率。



二. 測量落地角度：利用 tracker 內建量角器測量落地角度

三. 不斷實驗至找到臨界角度。

實驗方法

一. 實驗一：移除速率實驗

(一) 實驗目的：

1. 探討起始位置對各階段角度之影響。
2. 探討起始位置對各階段時長之影響。
3. 探討各階段時長對角度變化量之影響。

(二) 塔身圓盤：達摩

(三) 操作變因：改變塔位於方格紙上位置，藉此改變底塊脫離速率。

(四) 實驗步驟：

1. 將底塊(達摩)綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方放置三個達摩。
2. 將塔放置於方格紙0cm的位置上。
3. 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
4. 使用Tracker分析影片，將資料匯入Excel並作圖。
5. 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置以改變底塊脫離速率，各起始位置皆重複上述實驗步驟三遍。

二. 實驗二：底塊厚度實驗

(一) 實驗目的：探討底塊厚度對臨界角度之影響。

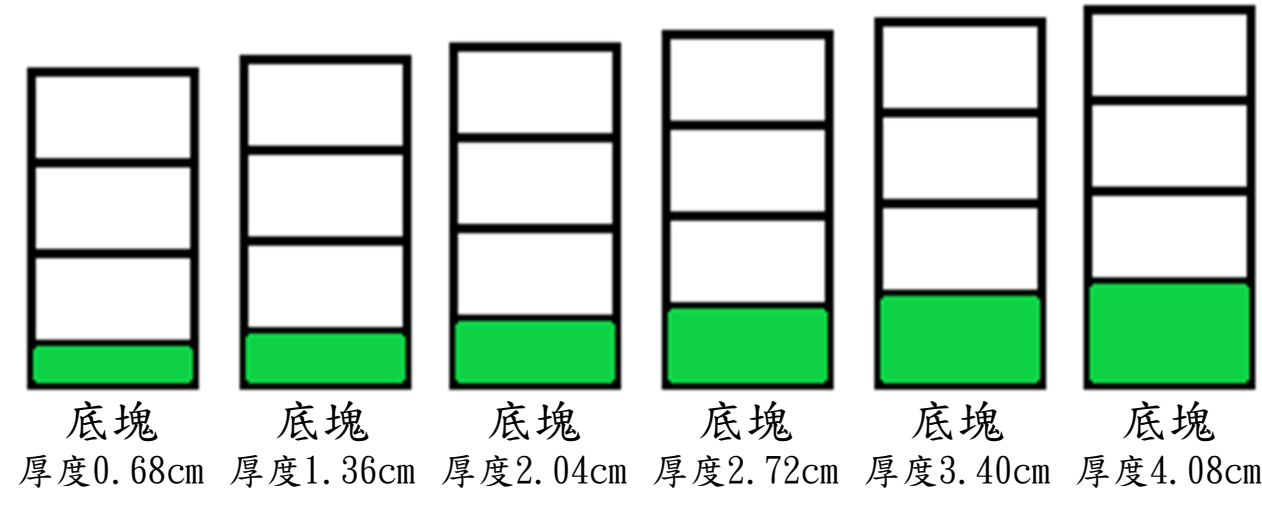
(二) 塔身圓盤：自製平滑圓盤。

(三) 操作變因：改變底塊厚度

(0.68cm~4.08cm，每次間格0.68cm) 並尋找各厚度相對應之臨界角度。

(四) 實驗步驟：

1. 將底塊綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方放置三個平滑圓盤。
2. 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
3. 使用Tracker分析影片，將資料匯入Excel並作圖。
4. 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置，尋找其臨界角度。
5. 改變底塊厚度，並重複上述實驗步驟。



三. 實驗三-1：自製平滑圓盤之塔高實驗

(一) 實驗目的：探討在摩擦係數較小的情況下RH比與臨界角度之關係。

(二) 塔身圓盤：自製平滑圓盤

(三) 操作變因：改變塔高(3~8個圓盤，每次間隔1個)，並尋找各個塔高相對應之臨界角度。

(四) 實驗步驟：

1. 將底塊綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方放置相同平滑圓盤。
2. 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
3. 使用Tracker分析影片，將資料匯入Excel並作圖。
4. 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置，尋找其臨界角度。
5. 改變塔高，並重複上述實驗步驟。

四. 實驗三-2：自製砂紙圓盤之塔高實驗

(一) 實驗目的：探討在摩擦係數較大的情況下RH比與臨界角度之關係。

(二) 塔身圓盤：自製砂紙圓盤

(三) 操作變因：改變塔高(3~7個圓盤，每次間隔一個)，並尋找各個塔高相對應之臨界角度。

(四) 實驗步驟：

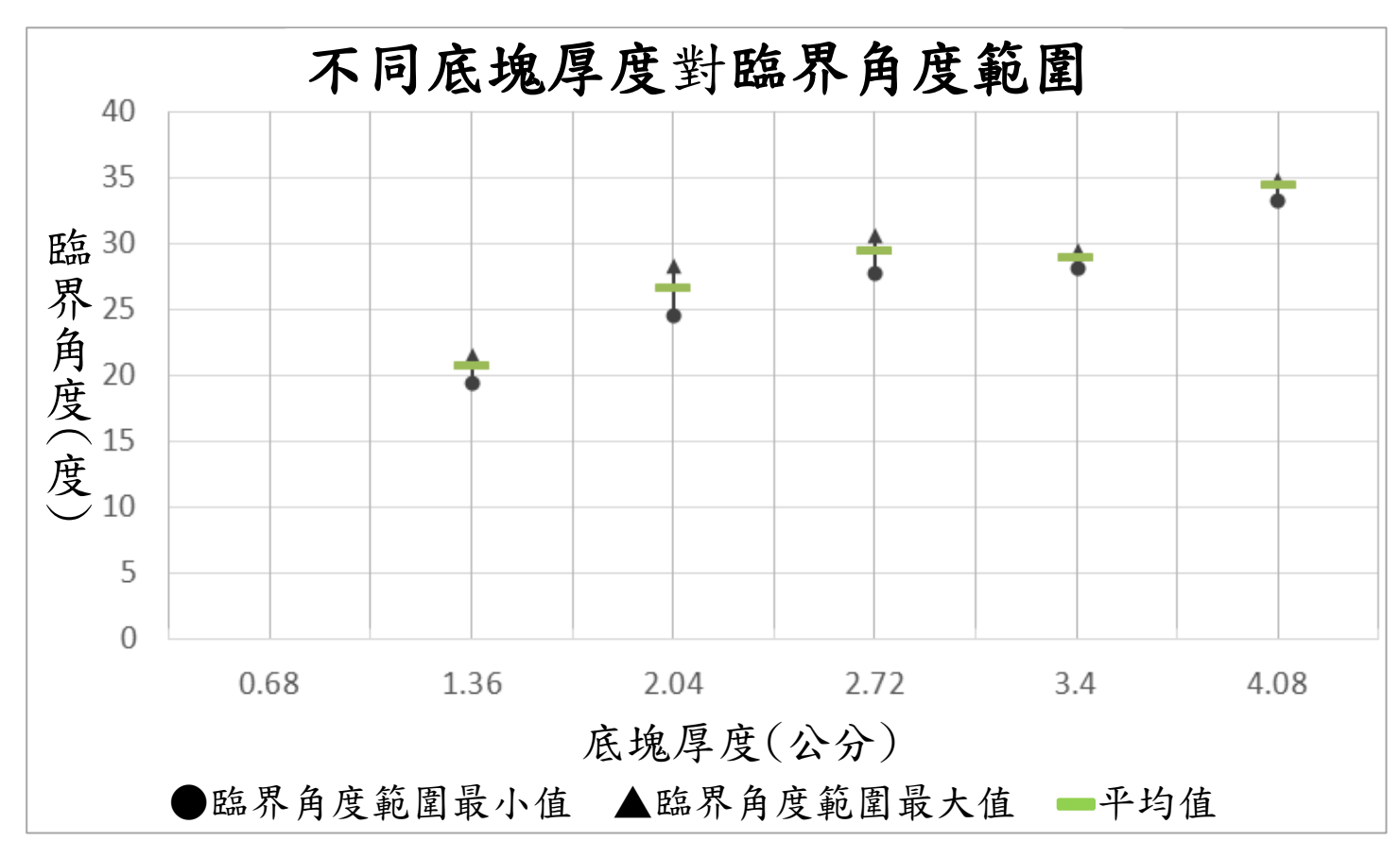
1. 將底塊綁上棉線與砝碼連接，並在底塊上方放置相同砂紙圓盤。
2. 施放砝碼，使底塊脫離塔身，並以手機慢速錄影整個運動過程。
3. 使用Tracker分析影片，將資料匯入Excel並作圖。
4. 固定砝碼施放位置及棉線長度，改變起始位置，尋找其臨界角度。
5. 改變塔高，並重複上述實驗步驟。

研究結果(二)

二. 實驗二：探討底塊厚度對臨界角度之影響

(一) 數據與圖表

底塊厚度(cm)	臨界角度範圍
0.68	不傾倒
1.36	19.5°~22.2°
2.04	24.6°~28.9°
2.72	25.2°~36.5°
3.40	28.2°~30.1°
4.08	33.3°~35.5°



▲臨界角度平均值隨底塊增厚而變大

註：實驗難以測出精確的臨界角大小，因此我們在表中「臨界角度範圍」一欄所列出的數值為實驗時所測得的臨界角度大小之範圍。

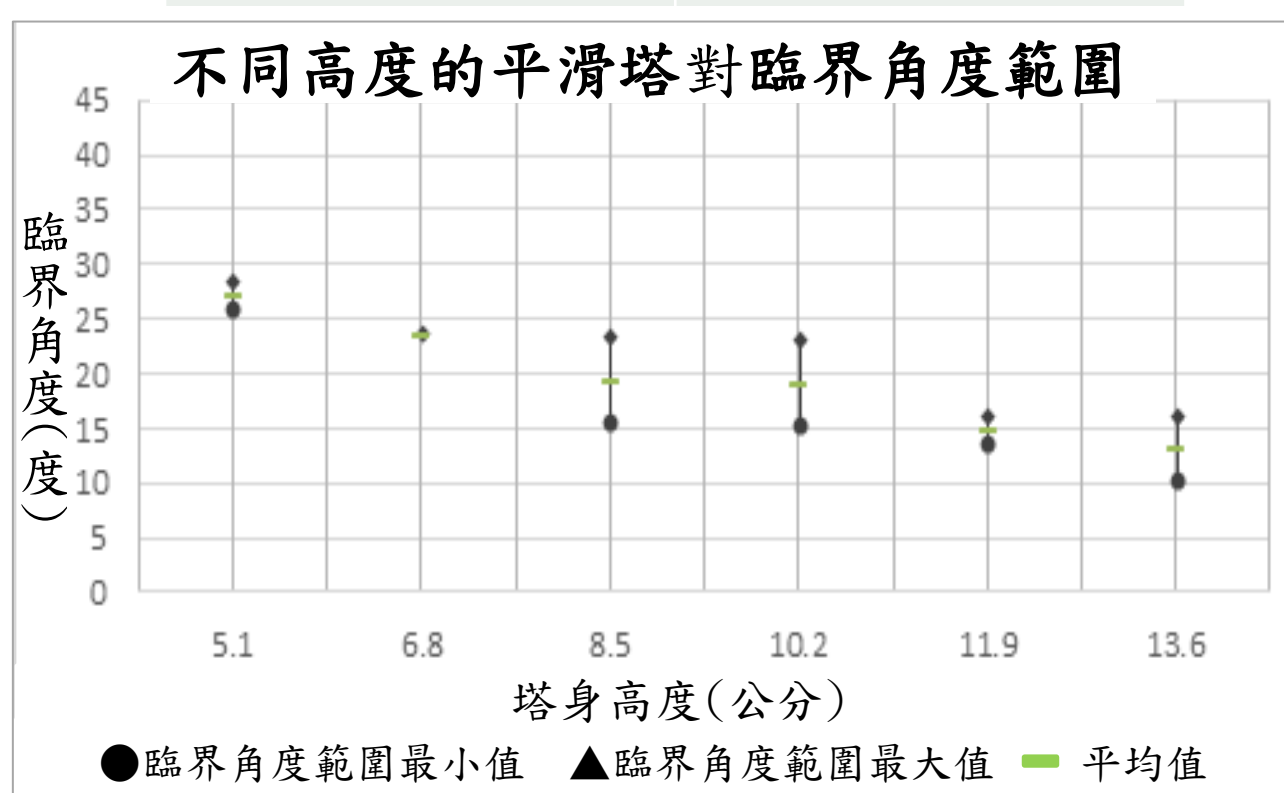
研究結果(三)

三. 實驗三-1：

自製平滑圓盤之塔高實驗

(一) 數據與圖表

塔身高度(cm)	臨界角度範圍
5.10	25.8°~28.4°
6.80	23.3°~23.5°
8.50	15.3°~23.2°
10.20	15.1°~22.8°
11.90	13.4°~15.9°
13.60	10.3°~15.9°



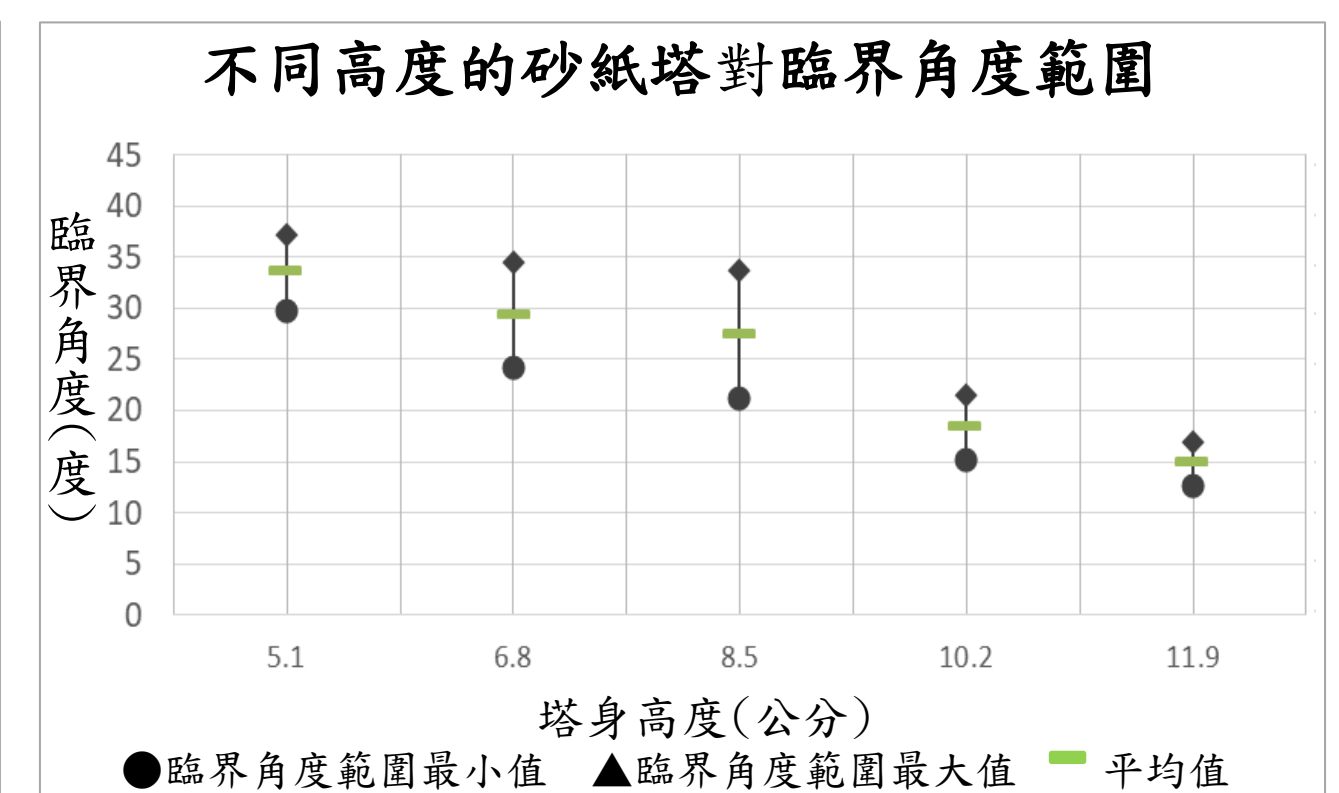
▲隨著圓盤數量增加，臨界角度越來越小

四. 實驗三-2：

自製砂紙圓盤之塔高實驗

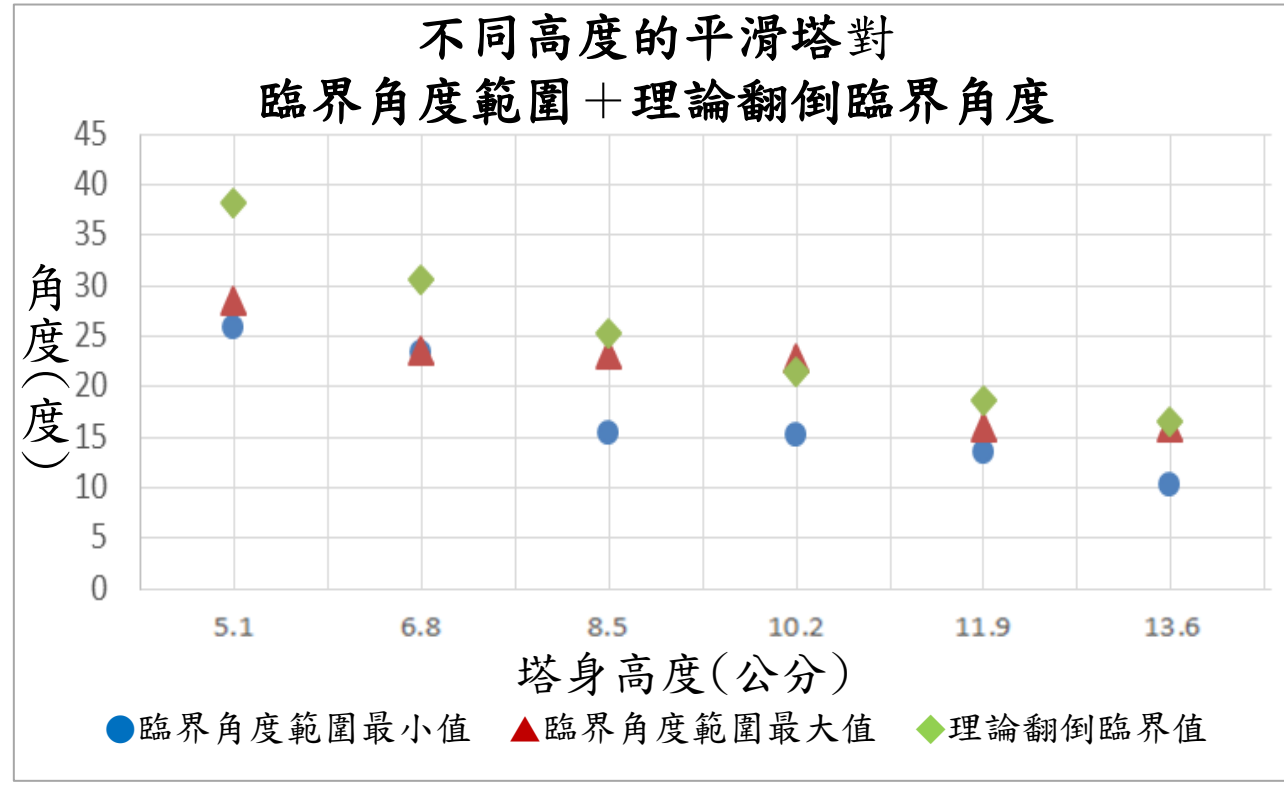
(一) 數據與圖表

塔身高度(cm)	臨界角度範圍
5.10	29.7°~37.2°
6.80	24.2°~34.5°
8.50	21.2°~33.7°
10.20	15.2°~21.6°
11.90	12.6°~16.9°

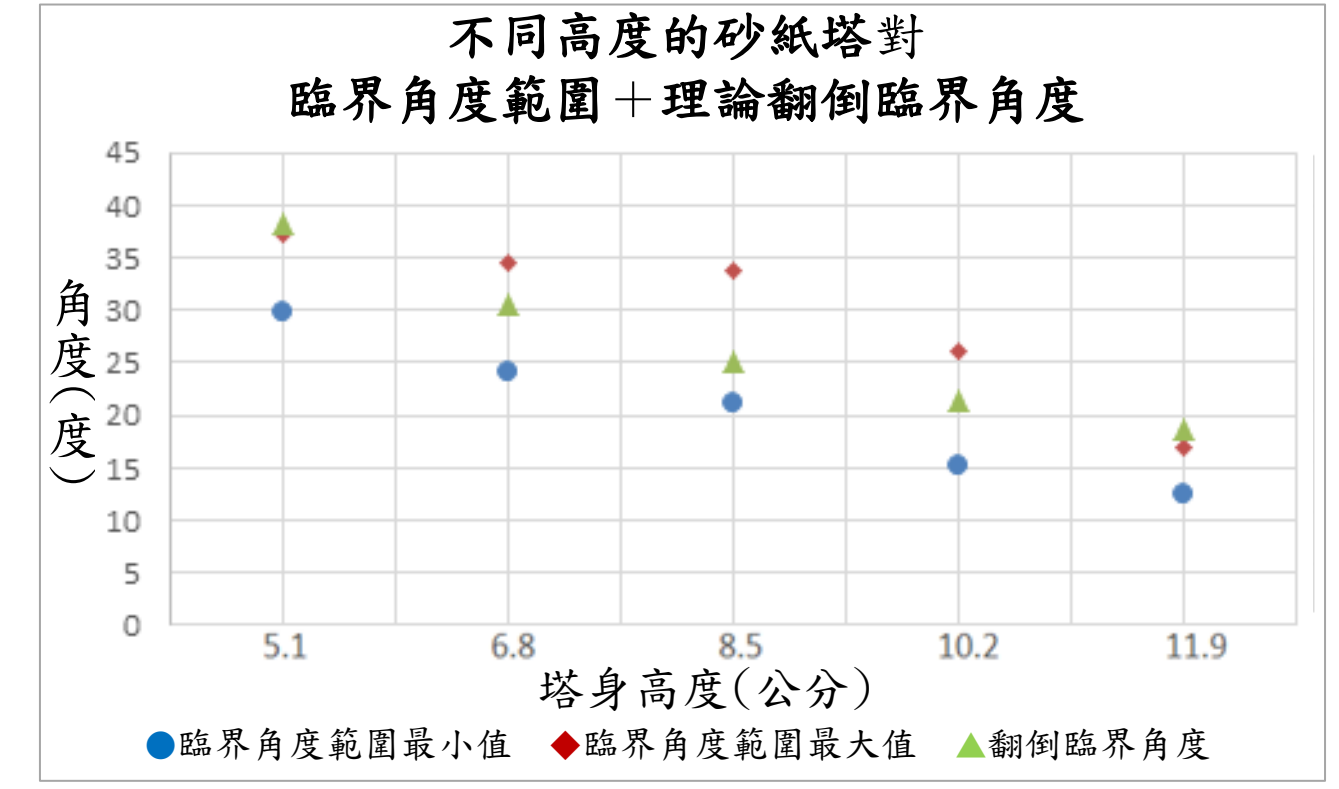


▲臨界角度範圍平均值與塔身高度呈負相關

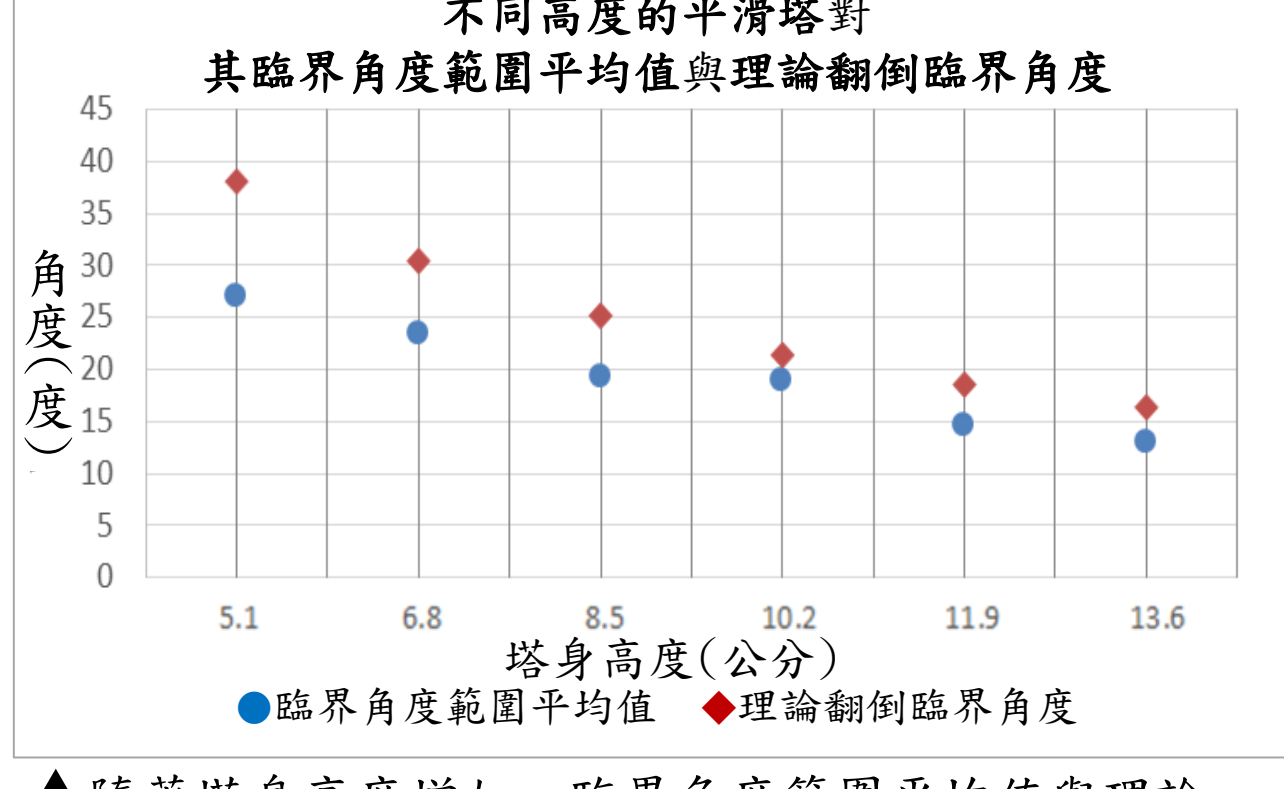
傾倒類型實驗



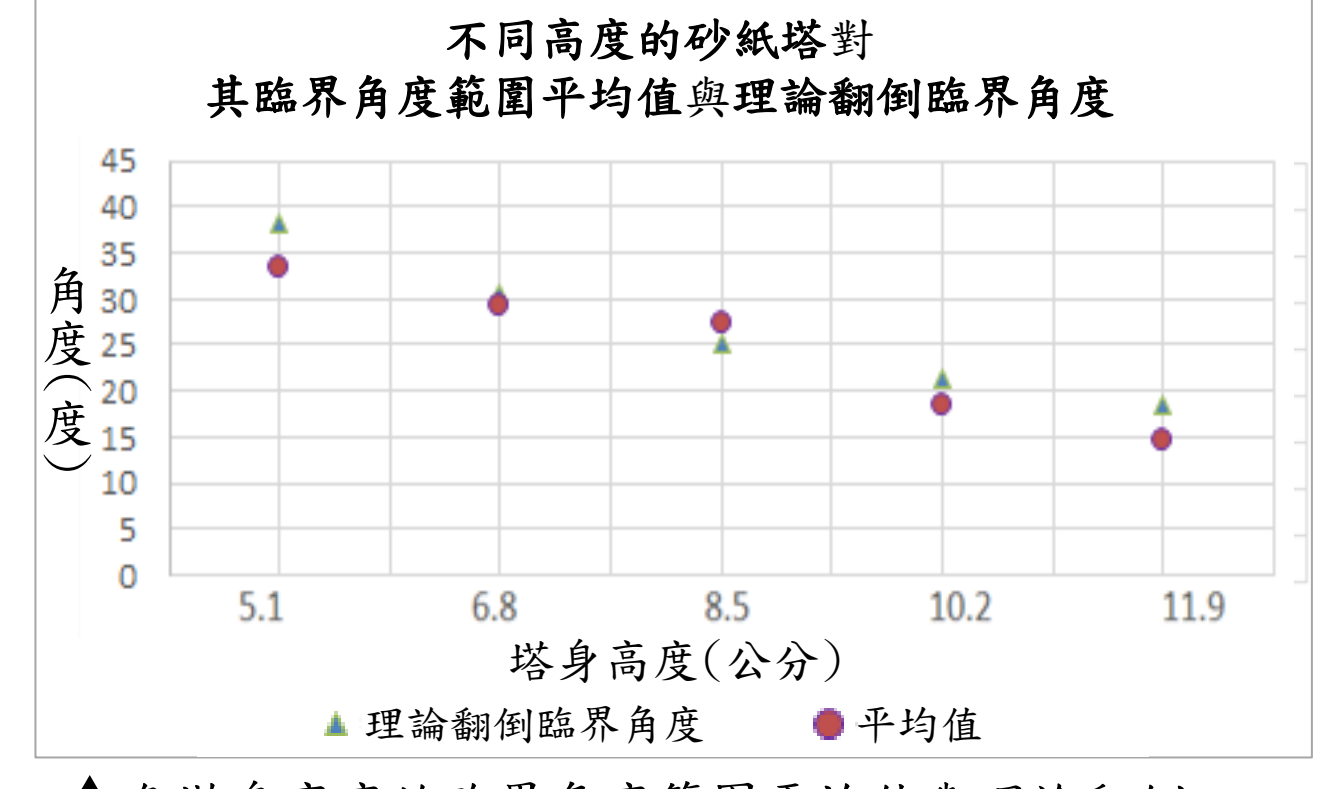
▲臨界角度範圍之最小值恆小於理論翻倒臨界角度



▲理論翻倒臨界角度幾乎皆居於臨界角度範圍內



▲隨著塔身高度增加，臨界角度範圍平均值與理論翻倒臨界角度愈來愈接近



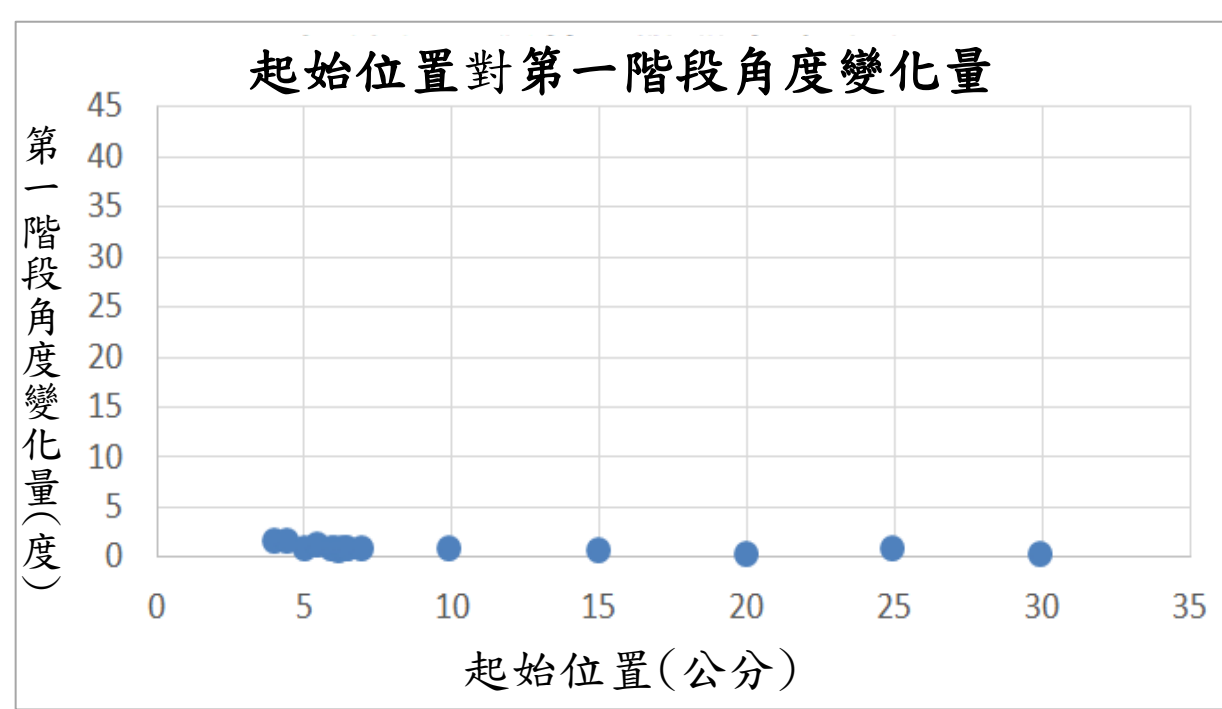
▲各塔身高度的臨界角度範圍平均值與理論翻倒臨界角度之差值大約相等

研究結果(一)

一. 實驗一：探討底塊移除速率對塔身傾倒之影響

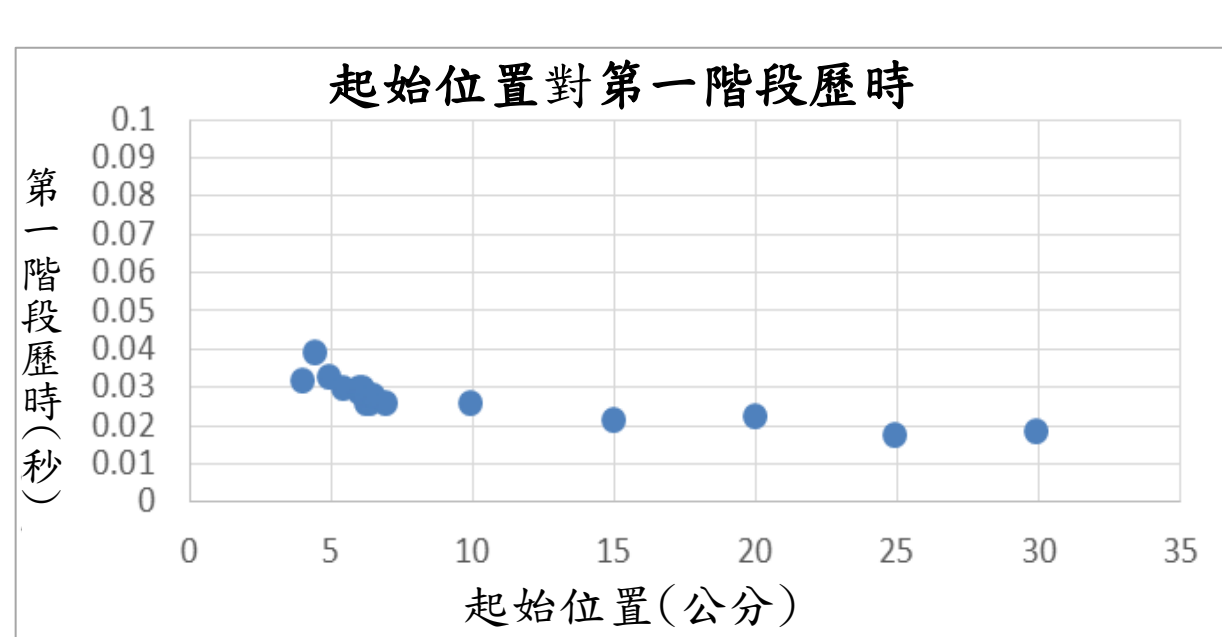
(一) 第一階段

1. 起始位置與第一階段角度變化量之關係圖



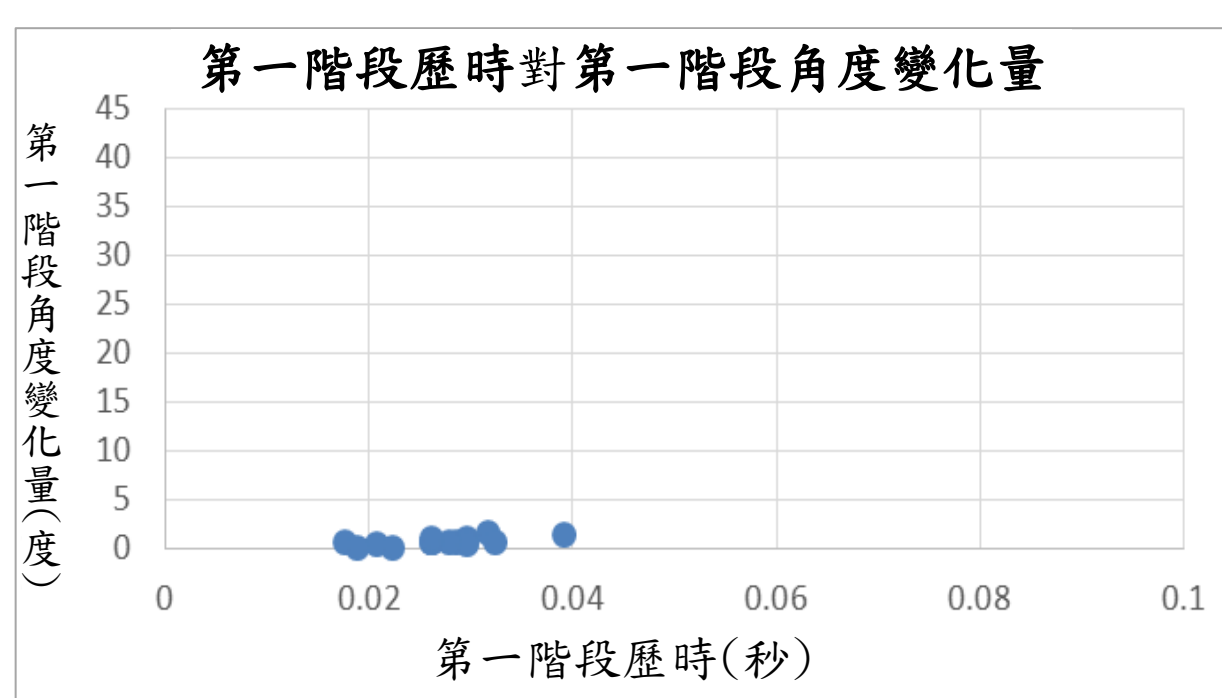
▲第一階段對塔身傾斜角之大小影響極小

2. 起始位置與第一階段歷時之關係圖



▲起始位置與第一階段歷時呈負相關

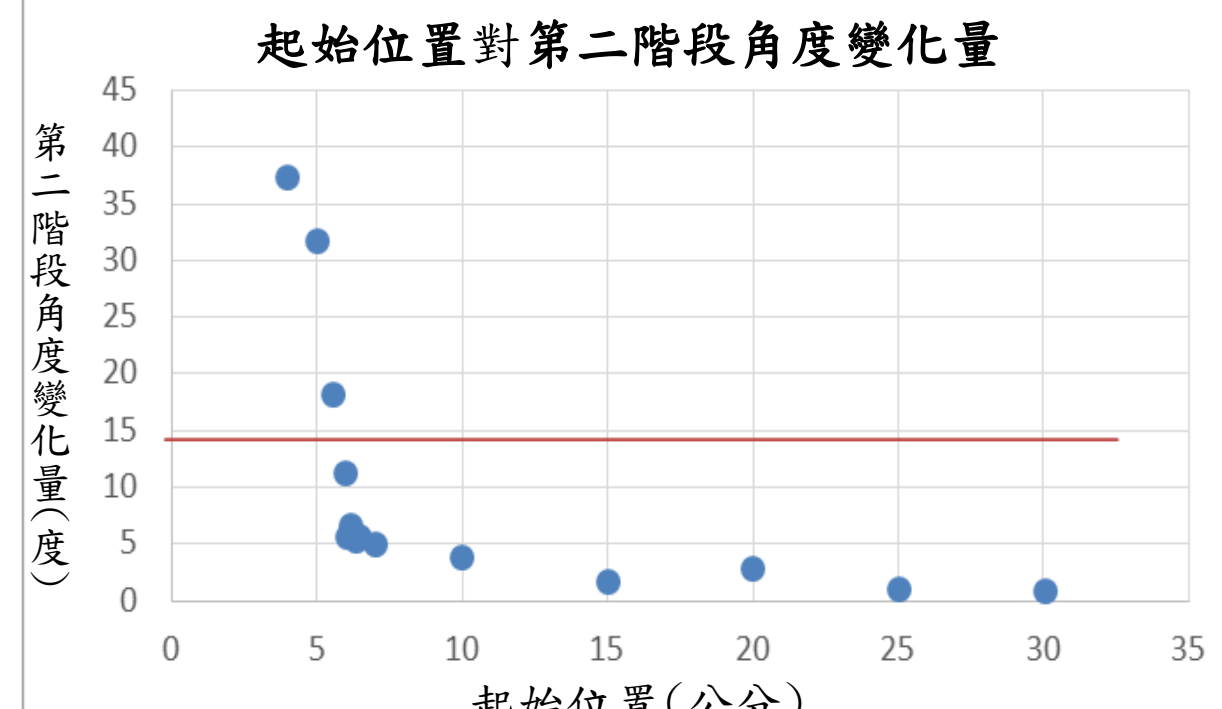
3. 第一階段歷時與第一階段角度變化量之關係圖



▲第一階段歷時對塔身傾斜角之大小影響極小

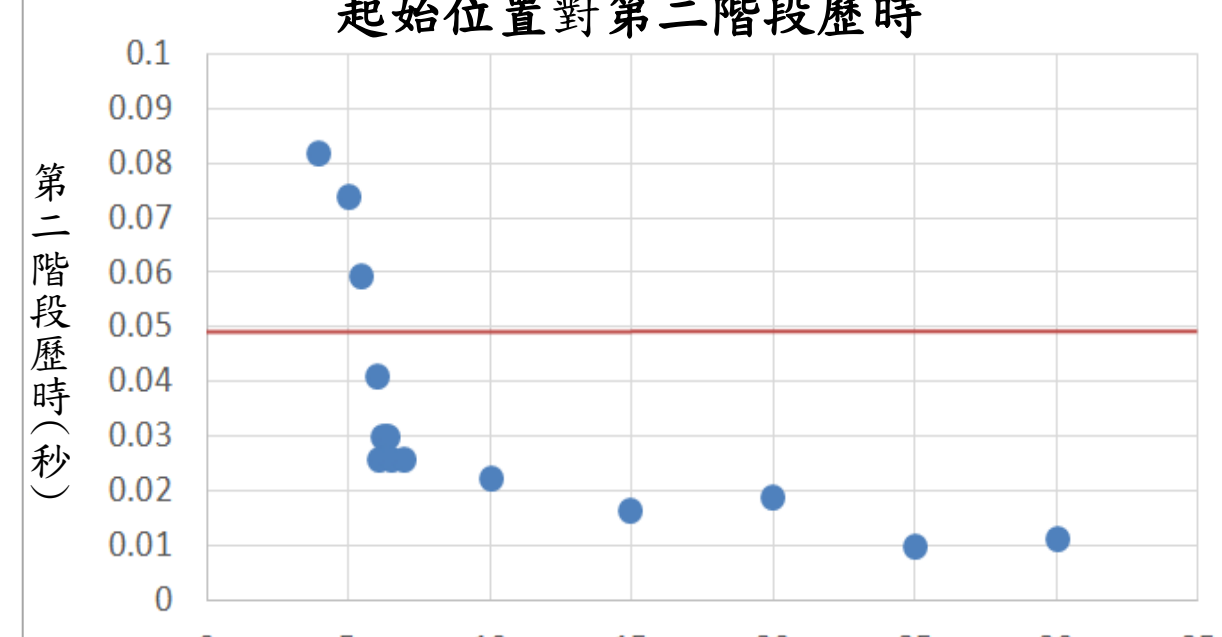
(二) 第二階段

1. 起始位置與第二階段角度變化量之關係圖



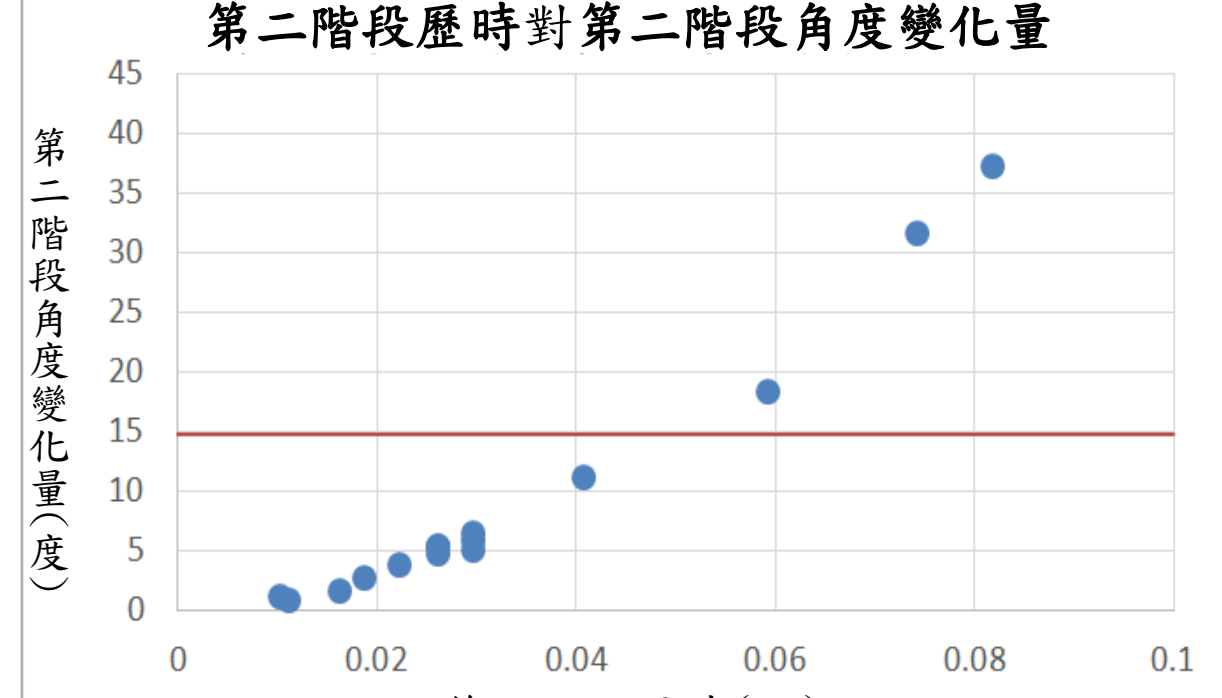
▲起始位置與第二階段角度變化量呈現負相關(紅線以上者倒榻)

2. 起始位置與第二階段歷時之關係圖



▲起始位置與第二階段歷時呈負相關(紅線以上者倒榻)

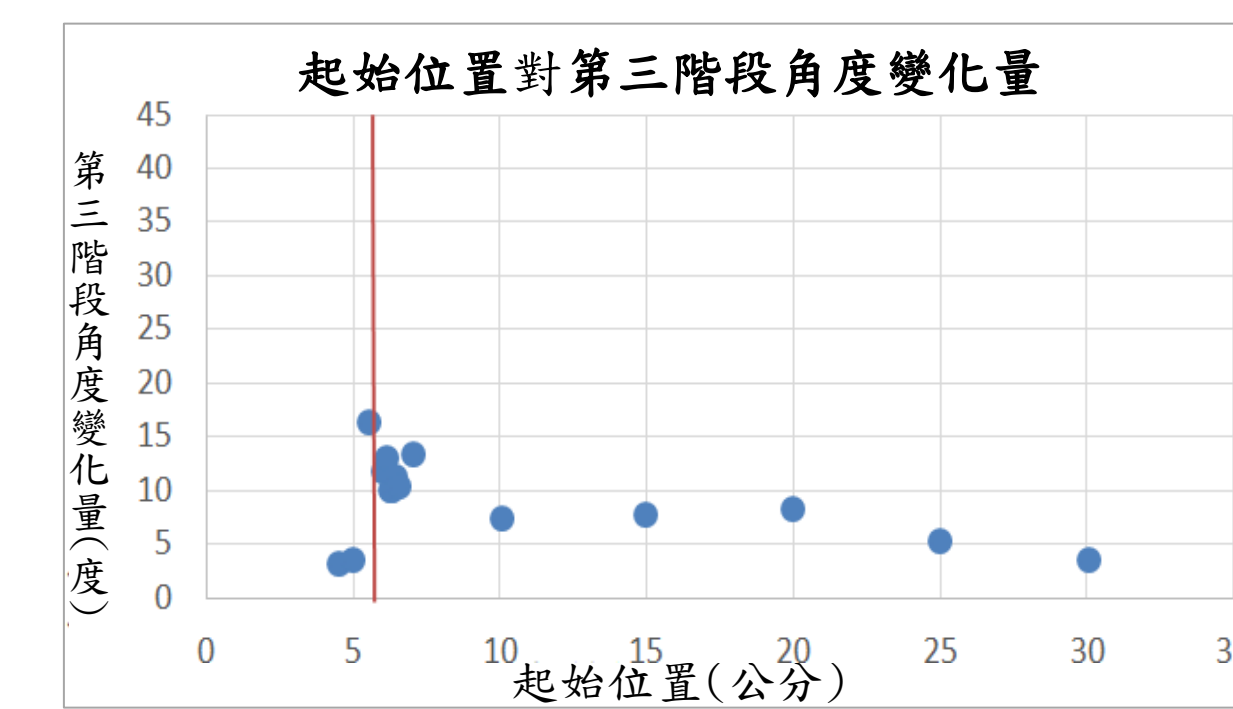
3. 第二階段歷時與第二階段角度變化量之關係圖



▲第二階段歷時對角度變化量的圖形成嚴格遞增曲線(紅線以上者倒榻)

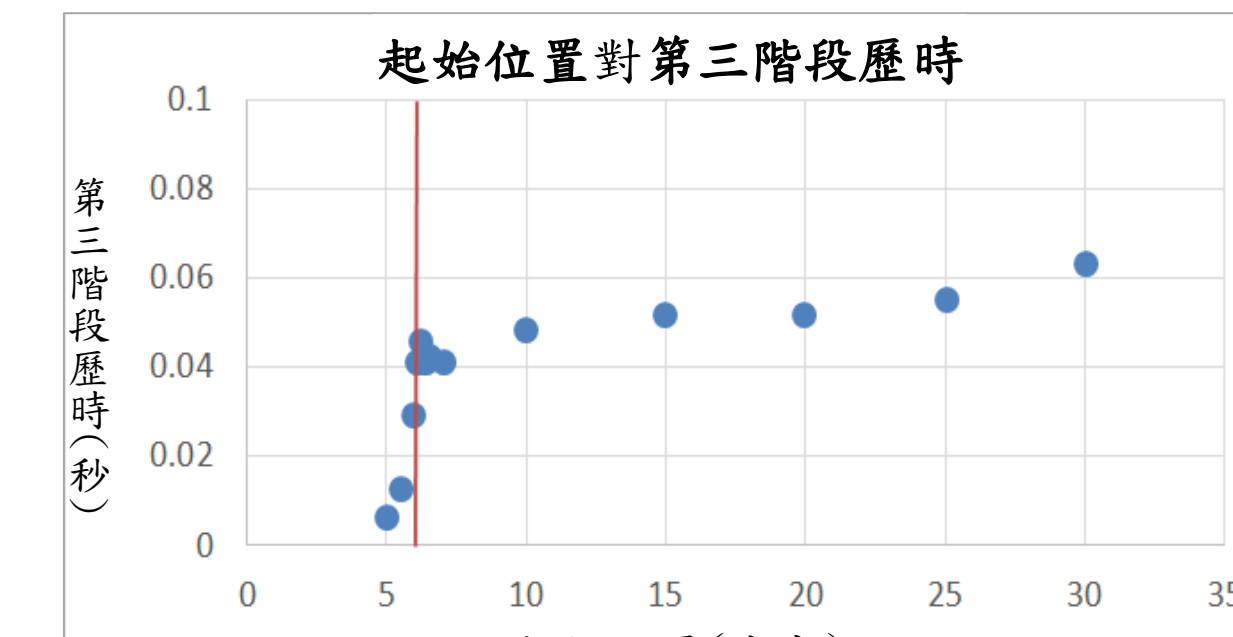
(三) 第三階段

1. 起始位置與第三階段角度變化量之關係圖



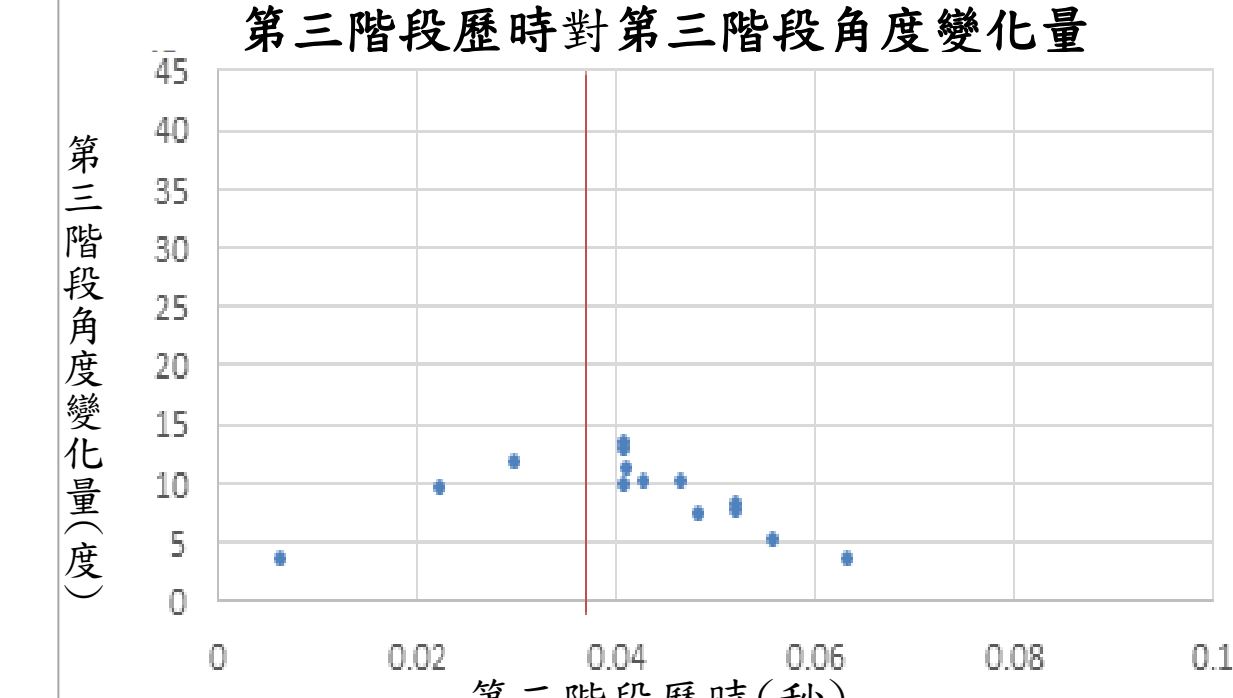
▲起始位置與角度變化量之圖形左右兩側較低(紅線以左者倒榻)

2. 起始位置與第三階段歷時之關係圖



▲起始位置與第三階段歷時呈正相關(紅線以左者倒榻)

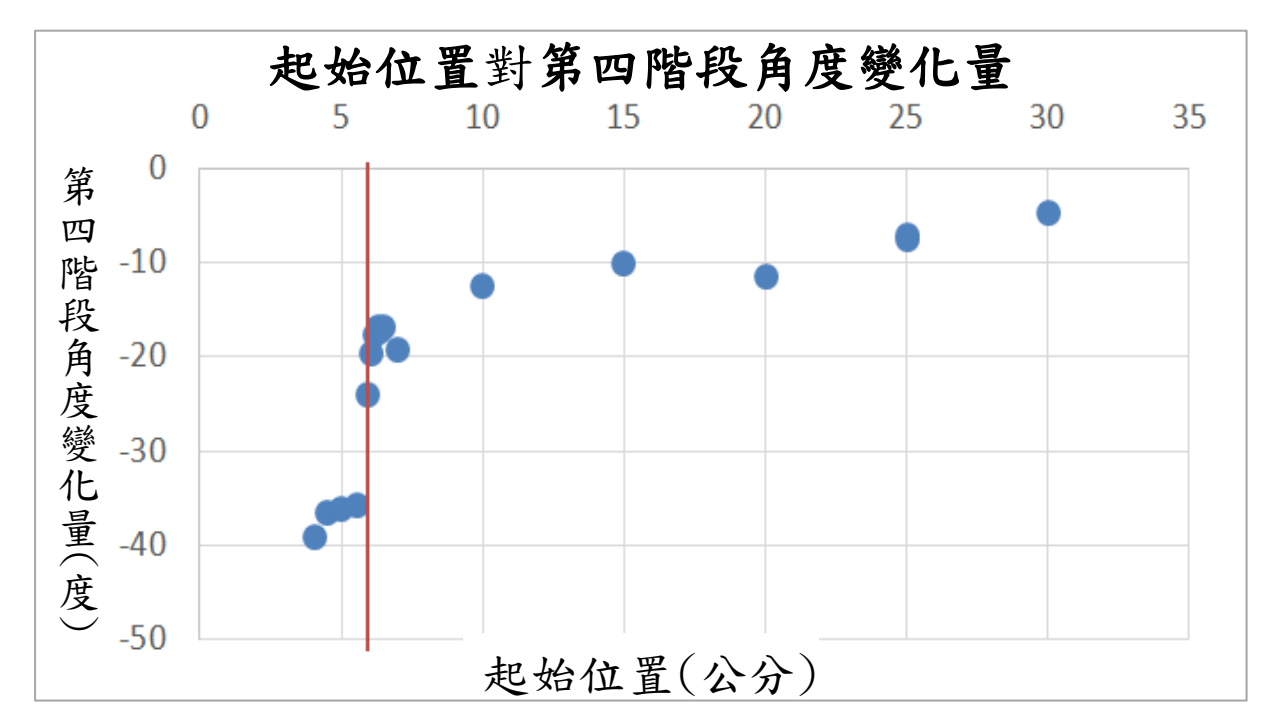
3. 第三階段歷時與第三階段角度變化量之關係圖



▲第三階段中，歷時與角度變化量的圖形中間處有明顯高峰(紅線以左者倒榻)

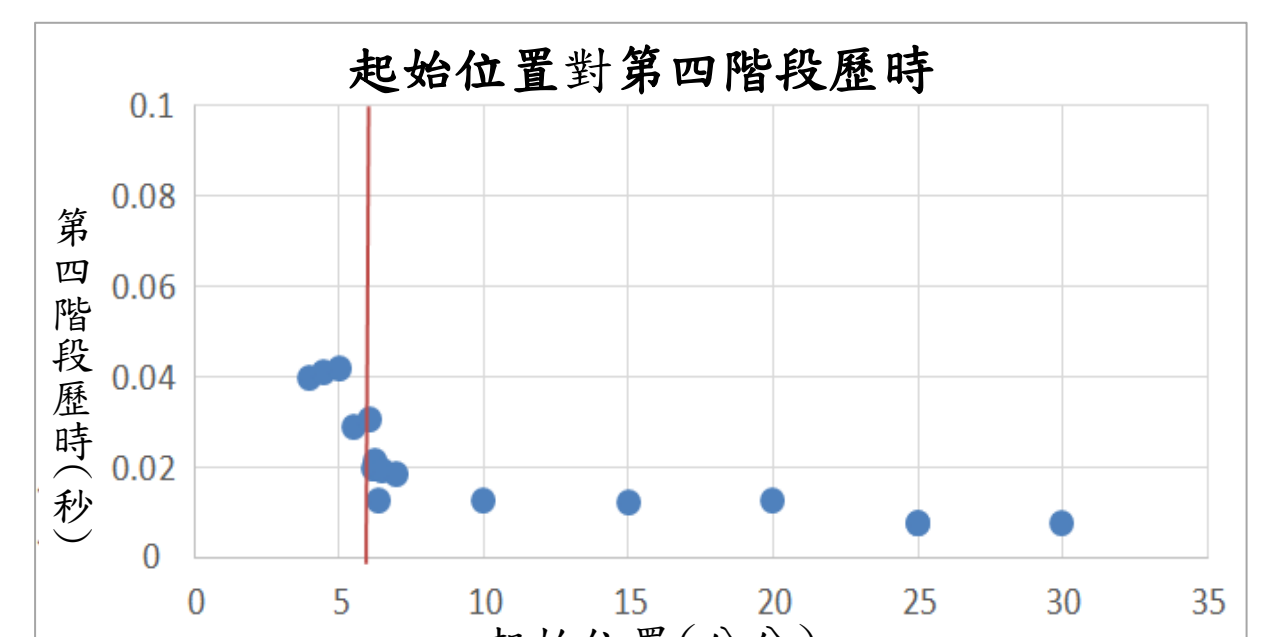
(四) 第四階段

1. 起始位置與第四階段角度變化量之關係圖



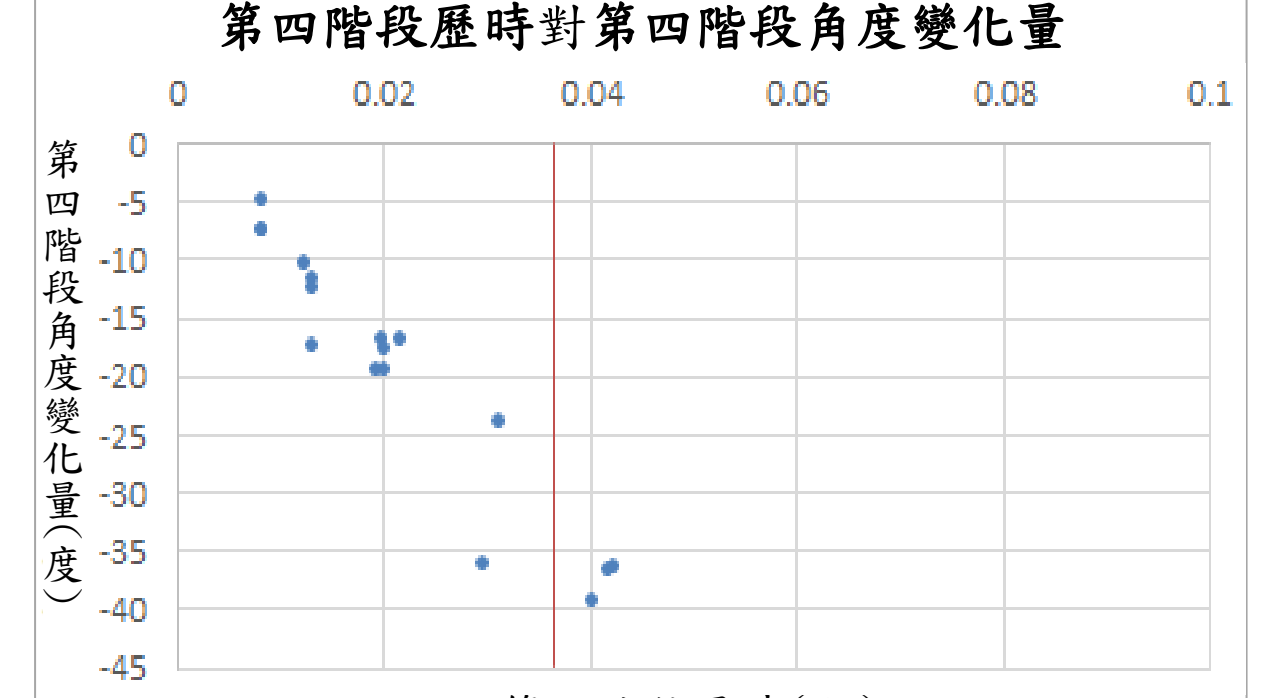
▲第四階段角度變化量為負值(紅線以左者倒榻)

2. 起始位置與第四階段歷時之關係圖



▲起始位置與第四階段歷時呈負相關(紅線以左者倒榻)

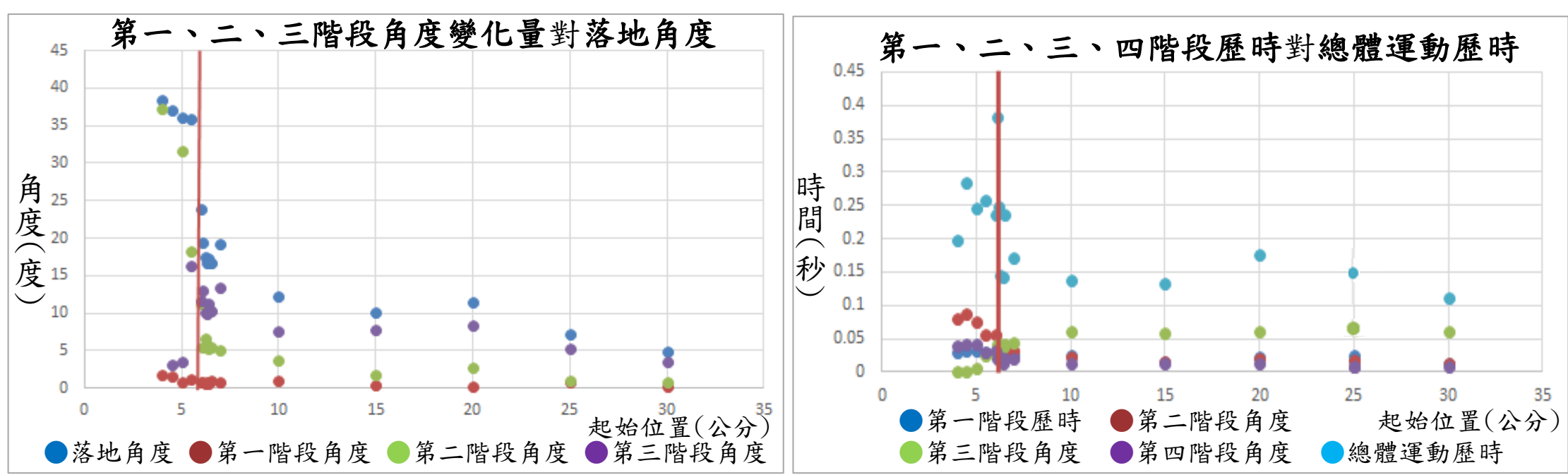
3. 第四階段歷時與第四階段角度變化量之關係圖



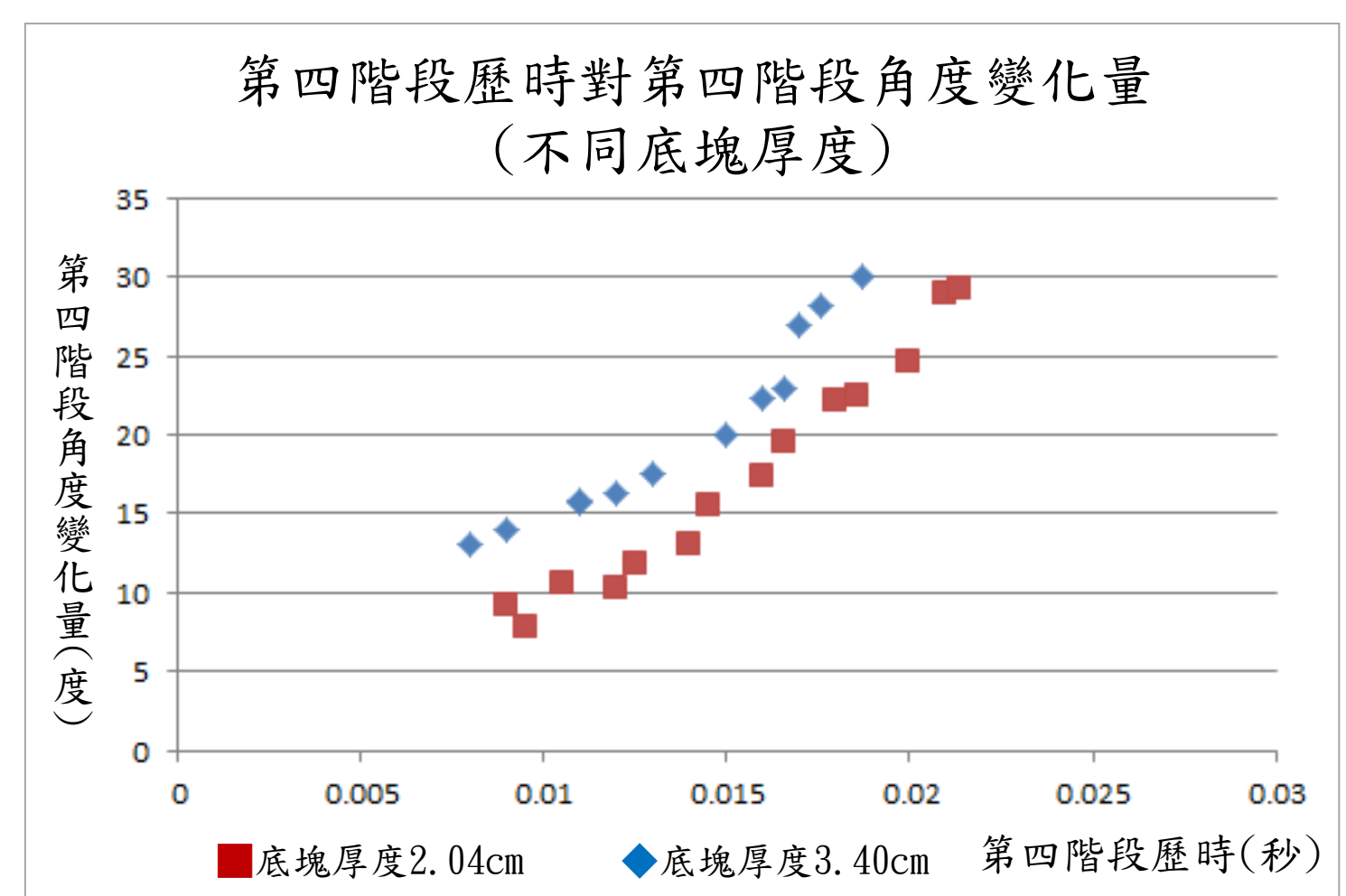
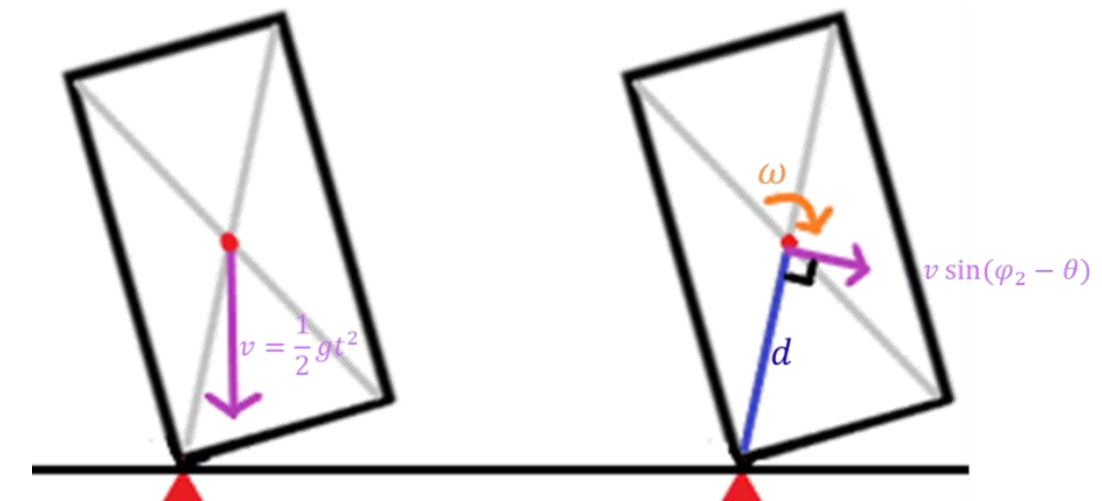
▲第四階段歷時與第四階段角度變化量大致呈線性負相關(紅線以左者倒榻)

討論

- 由運動過程初步觀察，發現第一階段過程中，塔身圓盤間無相互錯動，且該階段的角速度變化量(平均約 0.84°)相對於總體運動角速度變化量(約 $4.80^\circ \sim 39.42^\circ$)而言非常微小，表示以塔身質心為支點時，摩擦力對塔身產生的力矩難以推動塔身轉動，得知第一階段對總體運動的角速度變化量影響不大。
- 利用實驗一的結果，得知底塊移除速率較慢者，對落地角度影響最大者為第二階段角速度變化量；而底塊移除速率較快者，對落地角度影響最大者為第三階段角速度變化量。
- 利用實驗一的結果，我們得知底塊移除速率較慢者，對總體運動歷時影響最大者為第二階段歷時；而底塊移除速率較快者，對總體運動歷時影響最大者為第三階段角速度變化量歷時。

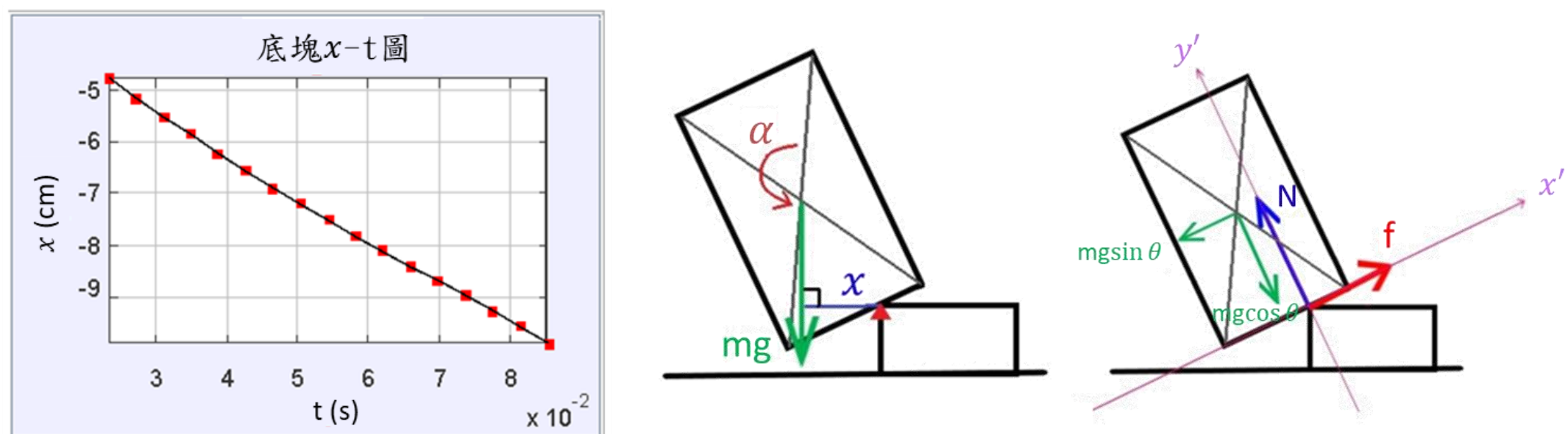


- 若塔身先落地再脫離，其落地角度必大於底塊之 $\tan^{-1} \frac{R}{H}$ ；且若塔身同時落地與脫離，則其落地角度等於底塊之 $\tan^{-1} \frac{R}{H}$ 。在實驗一中， $\tan^{-1} \frac{R}{H} \approx 36.87^\circ \geq$ 臨界角度範圍 $19.4^\circ \sim 21.6^\circ$ ，可知凡「先落地再脫離」以及「同時落地與脫離」之塔身皆會傾倒。
- 在底塊厚度實驗中，臨界角度平均值隨底塊增厚而變大。推測是因為較厚的底塊，會使第三階段歷時增長，造成塔身在第四階段開始時，擁有較大的落地角度 θ_g 以及鉛直向下的速度。而鉛直向下的速度會使塔身加快轉動回到地面(即 $\theta = 0^\circ$)。因此就算落地角度大，若塔身具有較大的鉛直向下速度，則第四階段歷時變短，1號圓盤上方其餘圓盤沒有足夠時間滑動，進而讓塔身不易傾倒。



四. 目標：第二階段歷時與角度變化量之關係

(一)前提假設：底塊接近等速率運動



▲利用Tracker分析底塊運動的X-t圖，其運動狀況接近等速率移動。

(二)推導路線：

$$\vec{\tau}_g = \vec{x}(t) \times M\vec{g} = I(t) \cdot \vec{\alpha}(t) \text{ ---- (1)}$$

$$\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \text{ ---- (2)}$$

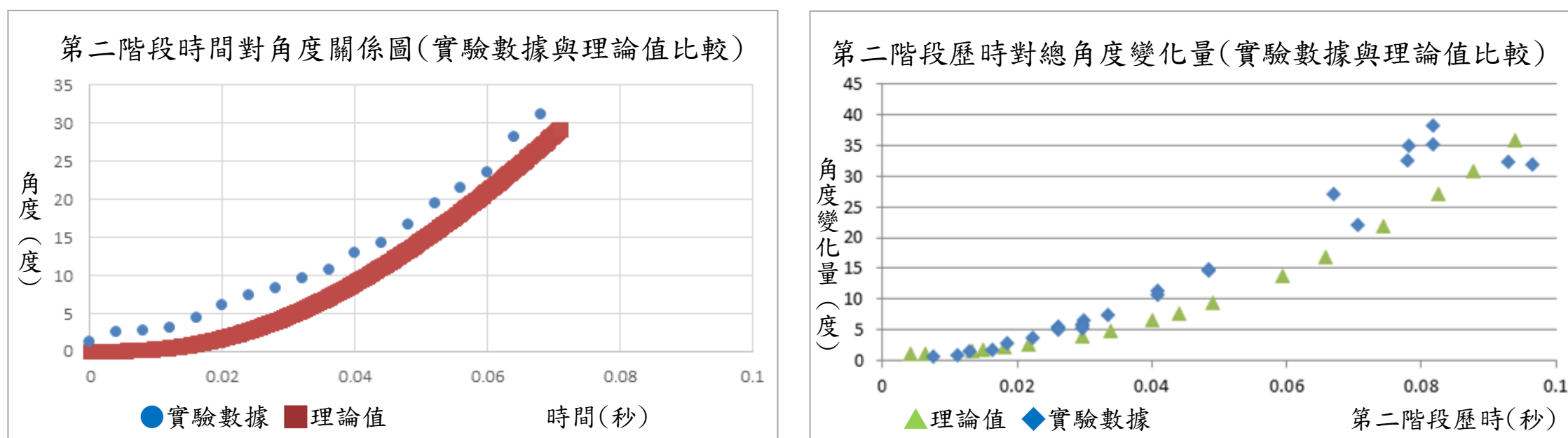
$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ ---- (3)}$$

(三)推導過程：

- 重力力矩的計算
- 轉動慣量的計算
- 第二階段角速度變化量的計算

1. 重力力矩的計算										2. I										3. 角度的計算									
[Detailed data tables for torque, moment of inertia, and angle calculations]																													

(四)比對與討論：



▲第二階段時間對角度關係圖 ▲第二階段歷時對總角度變化量

五. 目標：第三階段歷時與角度變化量之關係

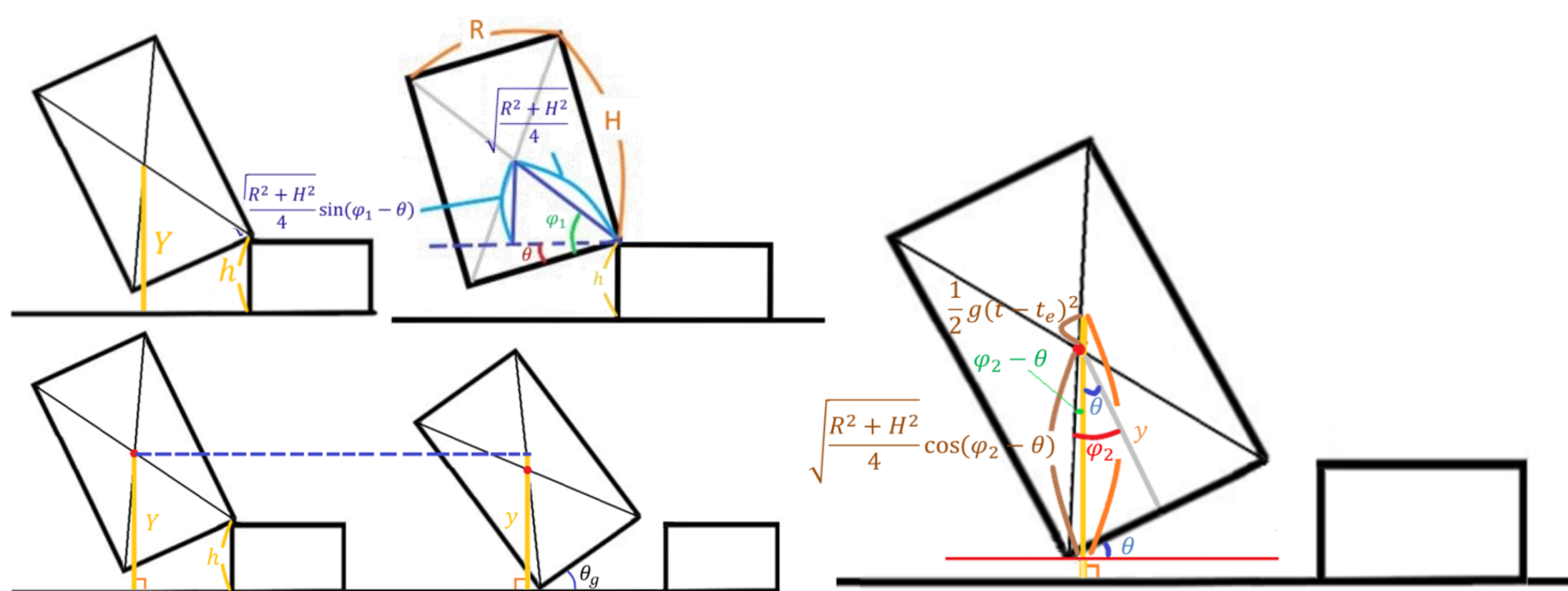
(一)前提假設： ω_3 為定值

(二)推導路線：

$$\Delta\theta_3 = \omega_3 \times \Delta t_3 \text{ ---- (15)}$$

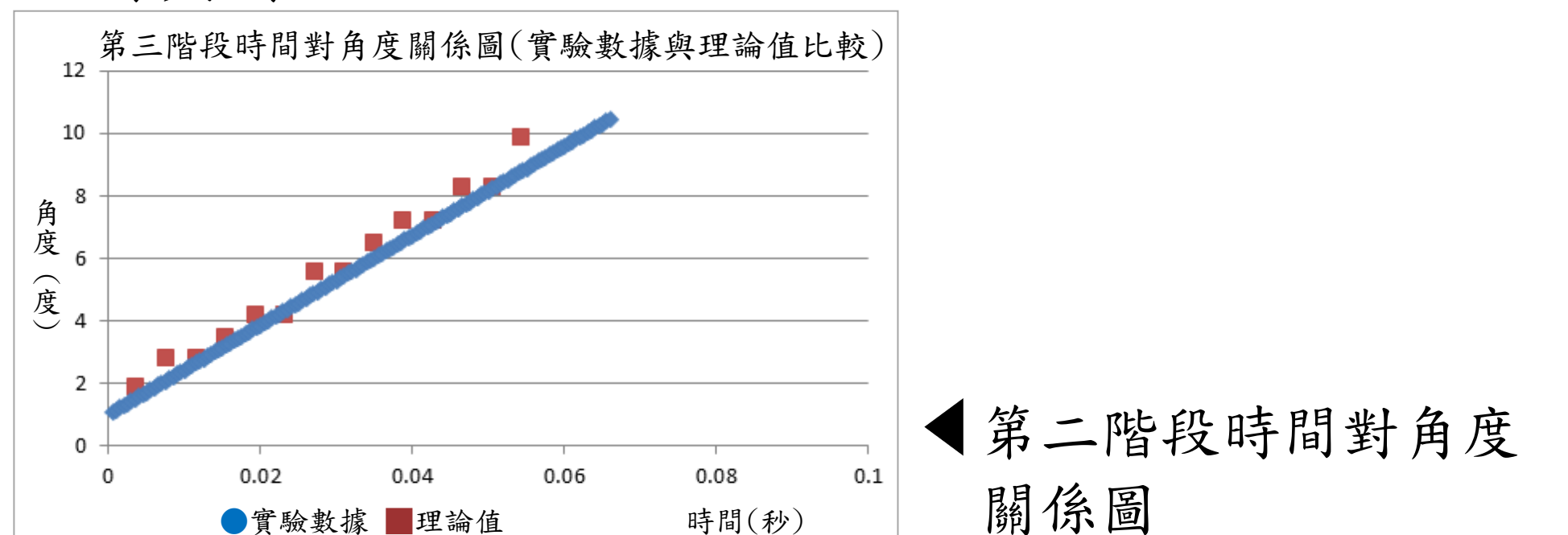
$$\theta_g = \theta_e + \Delta\theta_3 \text{ ---- (16)}$$

(三)推導過程：



H	R	h	phi 1 (度)	phi 2 (度)	phi 3 (度)	phi 4 (度)	phi 5 (度)	phi 6 (度)	phi 7 (度)	phi 8 (度)	phi 9 (度)	phi 10 (度)	phi 11 (度)	phi 12 (度)	phi 13 (度)	phi 14 (度)	phi 15 (度)	phi 16 (度)	phi 17 (度)	phi 18 (度)	phi 19 (度)	phi 20 (度)	phi 21 (度)	phi 22 (度)	phi 23 (度)	phi 24 (度)	phi 25 (度)	phi 26 (度)	phi 27 (度)	phi 28 (度)	phi 29 (度)	phi 30 (度)	phi 31 (度)	phi 32 (度)	phi 33 (度)	phi 34 (度)	phi 35 (度)	phi 36 (度)	phi 37 (度)	phi 38 (度)	phi 39 (度)	phi 40 (度)	phi 41 (度)	phi 42 (度)	phi 43 (度)	phi 44 (度)	phi 45 (度)	phi 46 (度)	phi 47 (度)	phi 48 (度)	phi 49 (度)	phi 50 (度)	phi 51 (度)	phi 52 (度)	phi 53 (度)	phi 54 (度)	phi 55 (度)	phi 56 (度)	phi 57 (度)	phi 58 (度)	phi 59 (度)	phi 60 (度)	phi 61 (度)	phi 62 (度)	phi 63 (度)	phi 64 (度)	phi 65 (度)	phi 66 (度)	phi 67 (度)	phi 68 (度)	phi 69 (度)	phi 70 (度)	phi 71 (度)	phi 72 (度)	phi 73 (度)	phi 74 (度)	phi 75 (度)	phi 76 (度)	phi 77 (度)	phi 78 (度)	phi 79 (度)	phi 80 (度)	phi 81 (度)	phi 82 (度)	phi 83 (度)	phi 84 (度)	phi 85 (度)	phi 86 (度)	phi 87 (度)	phi 88 (度)	phi 89 (度)	phi 90 (度)	phi 91 (度)	phi 92 (度)	phi 93 (度)	phi 94 (度)	phi 95 (度)	phi 96 (度)	phi 97 (度)	phi 98 (度)	phi 99 (度)	phi 100 (度)
[Detailed data table for the third stage derivation]																																																																																																						

(四)比對與討論：



結論與未來展望

一. 結論

- 在移除速率實驗中，我們得知底塊移除速率較慢者，對落地角度影響最大者為第二階段角速度變化量；而底塊移除速率較快者，對落地角度影響最大者為第三階段角速度變化量。
- 在底塊厚度實驗中，發現底塊厚度與臨界角度平均值呈正相關。
- 在傾倒類型實驗中，發現不管是自製平滑圓盤或砂紙圓盤，臨界角度皆隨著塔身高度增加而減小。
- 摩擦係數較小的圓盤較容易滑動，因此平滑圓盤臨界角度較砂紙圓盤臨界角度小。

二. 未來展望

- 在本次研究中，雖然已有理論模型推導，趨勢與實驗雷同，但要完全吻合仍須修正。
- 建立第四階段理論模型，並期待能與底塊厚度實驗結果吻合。

參考文獻

- Tablecloth Trick - Cool Science Experiment, (YouTube, SpanglerScienceTV, Dec 16, 2011), <https://youtu.be/PCGIUzZWoVc>
- Tablecloth Tricks! (Dear Ryan), (YouTube, nigahiga, Mar 29, Tablecloth Tricks!)
- Inertia Checkers Project, (YouTube, XxemoXxAnimeXx) https://youtu.be/s606m3A_ViM
- How far can you overhang blocks? By Data Genetics <http://datagenetics.com/blog/may32013/index.html>