中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050418

正多邊形下探討 *Sperner* 引理之延伸性質

學校名稱：臺北市立陽明高級中學

作者：	指導老師：
高一　陳昱丞	吳林建宏
高一　李珮筠	王聖淵
高一　洪暐涵	

關鍵詞：*Sperner* 引理、圖論

摘要

$Sperner$ 引理常用於遊戲必勝法以及一些塗色的相關問題，本篇研究將先針對 $Sperner$ 引理的內容進行探討，並且進行相關內容的證明，而後將$Sperner$ 引理中的規則進行延伸：原先此引理在三角形內進行討論，本篇研究嘗試將問題假設為在任意正多邊形下其中頂點的標號為 1、2、3 且相鄰頂點需為不同標號下進行探討，而後在多邊形內部放入點後進行三角化，在三角化的過程中若其中三角形分別為 1、2、3，則命名為公正三角形，對此成功探討出在不同正多邊形下公正三角形個數的狀況，並且將三角化後每個三角形皆為公正三角形的狀況定義為完美$G(m,n)$圖，在研究最後針對在三角形下的公正三角形個數進行一些特例整理。

壹、 研究動機

$Sperner$ 引理常用於遊戲當中的必勝法,也可以視為一種塗色問題,針對一般的 $Sperner$ 引理，多數使用握手理論進行證明，本篇研究將針對$Sperner$ 引理進行延伸，將問題本身延伸至任意正多邊形，並且探討**公正三角形的個數**狀況，而本篇研究期望在不使用電腦輔助的情況下能夠建立出一套方式找尋公正三角形的個數建立方式。

貳、 研究目的

一、探討 $Sperner$ 定理之相關延伸性質。

二、探討正多邊形下，公正三角形個數規則。

三、探討完美$G(m,n)$圖之可能狀況。

四、探討 $Sperner$ 定理之完美$G(m,n)$圖的特殊狀況。

參、 研究設備及器材

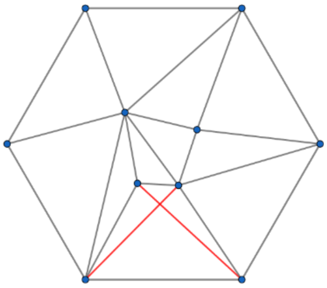
電腦、筆、紙

肆、 研究過程或方法

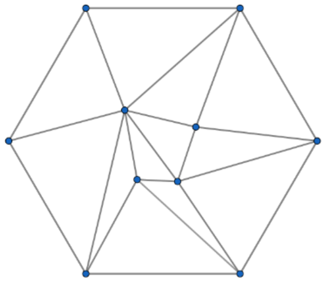
一、名詞定義

(一)三角化

將多邊形內部點連接至各頂點，內部連接線段不重疊，內部皆為三角形，稱之為三角化。



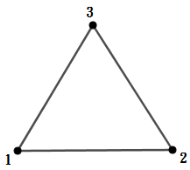
(圖 1：非三角化，因重疊。)



(圖 2：為三角化，不重疊，內部皆為三角形)

(二)公正三角形

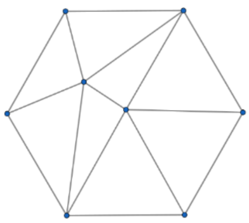
在三角化且進行標號後的三角形中，三頂點標號皆不同的三角形。



(圖 3：公正三角形)

(三)$G(m,n)$圖

對於正m邊形內部有n個點，經由三角化後的圖稱為$G(m,n)$圖。



(圖 4：$G(6,2)$圖)

(四)$G(m,n)$圖產生個數之定義

定義 1：$F(G(m,n))$表對於$G(m,n)$圖產生的可能公正三角形個數的集合。

針對形成可能公正三角形個數進行以上的定義，其定義的$F(G(m,n))$ 會是一種集合的形式，舉例來說，$F(G(3,0)) = \{1\}$。

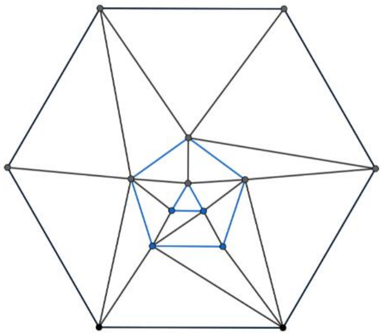
定義 2：$max\ F(G(m,n))$表對於$G(m,n)$圖產生的最多公正三角形個數。

針對最多公正三角形個數，我們有了以上的定義，舉例來說，$max\ F(G(3,0)) = 1$。

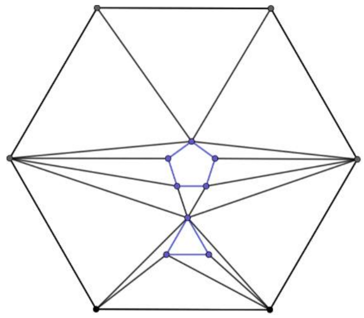
定義 3：$E(a,b)$為標號a,b所連線的線段；$n(E(a,b))$表 $G(m,n)$圖中所有$E(a,b)$線段數量。

定義 4：若多邊形內部點和多邊形頂點所連接的點有k個，則將其k個點連成的圖定義為H_K圖。

以下左圖為例，內部點為8個點，但其中和外部多邊形所連接為5個點，在此假設為此圖的H_5圖。下右圖內部點為8個點，其中和多邊形連接的點為8個點，則為此圖的H_8圖。



(圖 5：H_5圖)



(圖 6：H_8圖)

定義 5：$\boldsymbol{n}(F(G(m,n)))$表對於$G(m,n)$圖產生的可能公正三角形個數的集合的元素個數。

(五)完美$G(m,n)$圖

$G(m,n)$圖三角化後所有的三角形皆為公正三角形則稱完美$G(m,n)$圖。

二、文獻探討

(一)尤拉公式

對於任意凸 m 邊形，必定滿足：$V-E+F=2$(V為頂點數； E為邊數； F為面數)。本次專題探討之圖皆為二維空間內的凸 m 邊形，因此 F 為小三角形個數+1。

(二)$sperner$引理

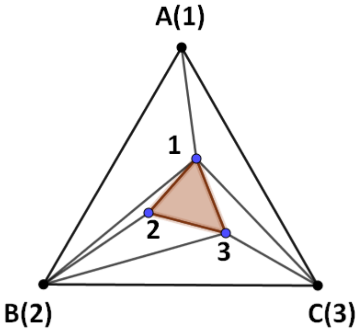
給定一大三角形，其中三個頂點定義為 A、B、C，在此三角形內部點出 n 個點，並將各點和 A、B、C 三頂點連接成數個小三角形。將所有頂點(包含 A、B、C)以下述的規定標記：

①頂點 A、B、C 的標號為 1、2、3。

②在 AB 邊上只能用 1 或 2 作為標號；在 BC 邊上只能用 2 或 3 作為標號；在 CA 邊上只能用 3 或者 1 作為標號。(六邊形的話要是2個1、2個2 、2個3；五邊形的話要是2個1、2個2 、1個3)

③大三角形內部可以隨意以 1、2、3 作為標號。

滿足以上①②③三點，則至少會存在一個小三角形的標號分別為 1、2、3。



(圖 7：$sperner$引理的相關大三角形)

(三) $sperner$引理之證明過程

[公式 1]假設一大三角形三頂點內部點有 m 個點，大三角形上三邊(除三頂點外)有 n 個點，經由三角化後，三角形個數為$S_{\Delta}=1+2m+n$，線段個數為$S_e=3m+2n+3$。

proof：

考慮一大三角形三頂點內部點有 m 個點，大三角形上三邊(除三頂點外)有 n 個點，經由三角化後，其三角形個數為S_{Δ}，線段個數為S_{e}。對於每個三角形皆有三個邊，而在大三角形的邊被數一次，而內部形成的三角形則被數兩次，因此內部有$\dfrac{3S_{\Delta}-(n+3)}{2}$，而總線段數

$$S_e=\frac{3S_{\Delta}-(n+3)}{2}+n+3=\frac{3S_{\Delta}+n+3}{2}\ldots\ldots(1)$$

藉由尤拉公式以及(1)式，可得到：$2=V-E+F=(m+n+3)-\dfrac{3S_{\Delta}+n+3}{2}+(S_{\Delta}+1)$，則可得

$S_{\Delta}=1+2m+n$，$S_e=3m+2n+3$。■

[性質 1]在一條線段上，若兩端的標號為 1、2，且將此線段上點出 n 個點、分割成(n+1)個線段，此 n 個點的標號皆為 1 或 2，則此(n+1)個線段中兩端為 1、2 標號的個數必為奇數個。

proof：

在一條線段上，若兩端的標號為 1、2，且將此線段上點出 n 個點、分割成(n+1)個線段，此 n 個點的標號皆為 1 或 2，定義 $E(a,b)$表一個線段兩端的標號分別為a,b(沒有順序上的差別)。假設 $E(1,2)$在(n+1)個線段中有 x 個，$E(1,1)$在(n+1)個線段中有 y 個，則針對標號 1 的個數進行討論，可知$x+2y+1$為此線段上標號 1 的兩倍，故可假設$x+2y+1=2t,t$為標號 1 的個數，則$x=2t-2y-1$為奇數。■

[*Sperner* 引理延伸]在符合 Sperner 引理的規定下，公正三角形的個數必為奇數個。

<u>*proof*</u>：

一大三角形三頂點內部點有 m 個點，大三角形上三邊(除三頂點外)有 n 個點，經由三角化後，可分成三角形個數$S_{\Delta}=1+2m+n$，定義 $T(a,b,c)$表由標號 a,b,c 所形成的三角形，且此三角形內部及邊上沒有其他標號(a,b,c 沒有順序上的差別)，定義 $E(a,b)$表一個線段兩端的標號分別為 a,b (沒有順序上的差別)；假設 $T(1,2,3)$、$T(1,1,2)$和 $T(1,2,2)$的三角形個數分別為 x,y,z；假設 $E(1,2)$在內部中的個數為 t 個，$E(1,2)$在大三角形邊上的個數為 u 個。

則 $T(1,2,3)$、$T(1,1,2)$和 $T(1,2,2)$的三角形中 $E(1,2)$個數分別為 1,2,2，可得 $E(1,2)$個數為 $x+2y+2z$，又 $E(1,2)$在內部中的個數能提供 2 個 $E(1,2)$個數，$E(1,2)$在大三角形邊上的個數能提供 1 個 $E(1,2)$個數，則得到等式：$x+2y+2z=2t+u \Rightarrow x=2(t-y-z)+u$。由**公式 2** 可知 u 為奇數，故可得 x 為奇數。故在符合 Sperner 引理的規定下，公正三角形個數為奇數個。■

截至此部分，我們探討 ***Sperner* 引理**的內容，定義出三角化的方式並且證明出 ***Sperner* 引理**；接著我們將針對此引理進行延伸，將原先三角形的狀況延伸至多邊形。

三、問題說明

本篇針對 Sperner 引理性質進行延伸至正 m 邊形的狀況進行討論。

(一)正m多邊形標號條件

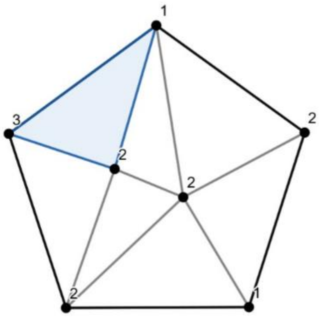
給定一個正m多邊形內部有n個點，其中正m多邊形上的頂點定義為A、B、C ……，並且將各點隨機連接成數個小三角形(三角化)。將所有頂點以下述的規定標記：

①頂點 A、B、C ……上的標號為 1、2、3。

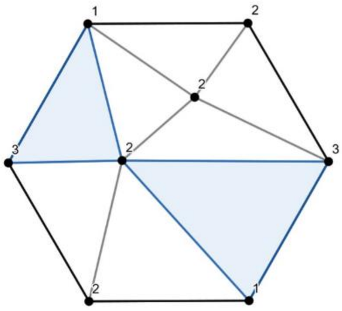
②m個頂點以標號1、2、3標示，且正m多邊形上的相鄰頂點不相同，假設標號1、2、3的個數分別為a、b、c，$a\geq b\geq c$，並符合$|a-b|\leq 1$、$|b-c|\leq 1$、$|a-c|\leq 1$。

③正m多邊形內部n個點可以隨意以 1、2、3 作為標號。

在滿足以上①②③三點，探討公正三角形的存在狀況。



(圖 8：G(5,2)圖一例)



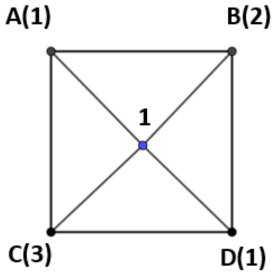
(圖 9：G(6,2)圖一例)

(二) 正m多邊形標號說明

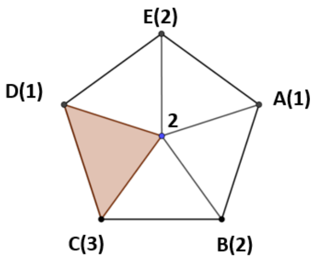
針對條件②的部分，我們先以正四邊、正五邊及正六邊為例：

當為正四邊形，可知 1、2、3 三個標號其中一個會多一個，即為 1、1、2、3(若為 1、2、2、3 也會有相同結果)；當為正五邊形，可知五個頂點為 1、1、2、2、3；當為正六邊形，可知六個頂點為 1、1、2、2、3、3。

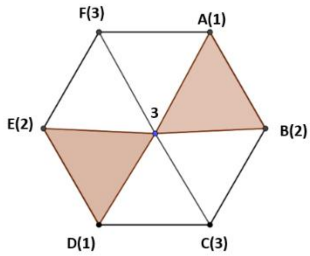
如下所示，此為$G(m,1)$圖相關公正三角形的例子。



(圖 10：$G(4,1)$圖一例)



(圖 11：$G(5,1)$圖一例)



(圖 12：$G(6,1)$圖一例)

[性質 2]在多邊形中滿足多邊形的標號條件下，奇多邊形外邊的$E(1,2)$個數必為奇數；偶多邊形外邊的 $E(1,2)$個數必為偶數。

四、標號下$sperner$相關延伸性質探討

(一)多邊形內部點分割的三角形個數情形

[公式 2]對每一個$G(m,n)$圖，三角形個數$S_\Delta = m+2n-2$，線段個數$S_e = 2m+3n-3$。

$\underline{proof}$：

考慮某個$G(m,n)$圖，其三角形個數為S_Δ，線段個數為S_e。 每個三角形皆有三個邊，而多邊形的邊被數一次，內部形成的三角形被數兩次，因此內部有$\frac{3S_\Delta-m}{2}$個邊，而總線段數$S_e = \frac{3S_\Delta-m}{2}+m=\frac{3S_\Delta+m}{2}$ …… (1)藉由尤拉公式以及(1)式，可得到：

$2=V-E+F=(m+n)-\dfrac{3S_\Delta+m}{2}+(S_\Delta+1)$，

則可得$S_\Delta=m+2n-2$，$S_e=2m+3n-3$。

(二)在$G(m,n)$圖下公正三角形的奇偶個數討論

[定理一]對於$G(m,n)$圖在符合標號條件下，奇多邊形內公正三角形的個數必為奇數個；偶多邊形內公正三角形的個數必為偶數個。

$\underline{proof}$：

對於在$G(m,n)$圖下，可分成三角形個數$S_\Delta=m+2n-2$，定義$T(a,b,c)$表由標號a、b、c所形成的三角形，且三角形內部及邊上沒有其他標號a、b、c(沒有順序上的差別)；假設$T(1,2,3)$、$T(1,1,2)$和$T(1,2,2)$的三角形個數分別為x、y、z；$E(1,2)$在內部中的個數為k個，$E(1,2)$在奇多邊形外邊的個數為 u 個。則$T(1,2,3)$、$T(1,1,2)$和$T(1,2,2)$的三角形中的$E(1,2)$個數分別為1、2、2，故可得$E(1,2)$個數為$x+2y+2z$，又$E(1,2)$在內部中的個數能提供2個$E(1,2)$個數，則能得到等式：$x+2y+2z=2k+u\Rightarrow x=2(k-y-z)+u$。由**性質2**可知 u 為奇數，故可得x為奇數。因此對於$G(m,n)$圖在符合$sperner$引理的規定下，奇多邊形內公正三角形的個數必為奇數個。同理，假設$E(1,2)$在內部中的個數為 k 個，$E(1,2)$在偶多邊形上的個數為 v 個。由**性質2**可知 v 為偶數，故可得 x 為偶數。因此對於$G(m,n)$圖在符合$sperner$引理的規定下，偶多邊形內公正三角形的個數必為偶數個。

五、探討正m多邊形內的相關分割問題

(一)內部點個數不同下，$F(G(m,n_1))$公正三角形個數性質探討

針對上表的相關整理，我們嘗試探討各$F(G(m,n))$圖之狀況，並且發現其集合有相關的性質。

[定理二]若m_1<m_2，m_1，$m_2\in N$，則$F(G(m,n_1))\subseteq F(G(m,n_2))$

$\underline{proof}$：

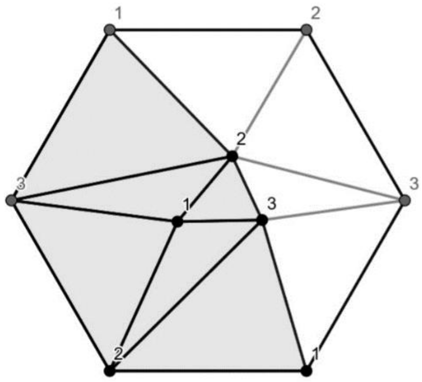
假設$x\in F(G(m,n))$，則代表$G(m,n)$圖有 x 個公正三角形。當圖為$G(m,n_1)$時，可知若在 x 個公正三角形其中一個公正三角形給予一個點，則不會影響其公正三角形的個數，

故$\forall x\in F(G(m,n_1)), x\in F(G(m,n_1+1))\Rightarrow F(G(m,n_1))\subseteq F(G(m,n_1+1))$，則

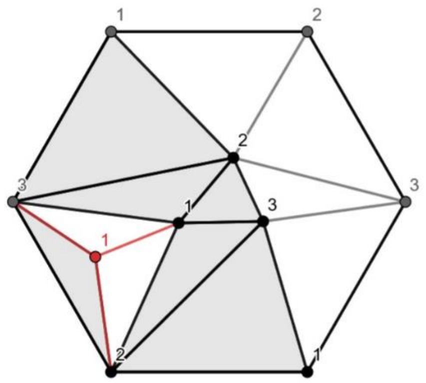
$F(G(m,n_1))\subseteq F(G(m,n_1+k))$，$k\in N$。

故由此可知若n_1<n_2，n_1，$n_2 \in N$，則$F(G(m,n_1)) \subseteq F(G(m,n_2))$。

由**定理二**的整理我們可以知道可形成公正三角形種類的個數一定會隨著內部點個數 n 的增加而遞增，因此能將**定理二**延伸出另一個性質。



(圖 13：$G(6,3)$圖)



(圖 14：$G(6,4)$圖)

[性質 3] $n(F(G(m,n_1))) \leq n(F(G(m,n_2)))$。

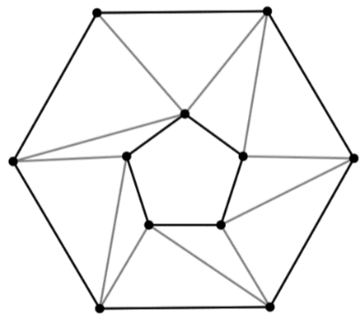
以上性質可由**定理二**得出公正三角形種類的個數變化數為遞增，由此可知當內部點個數越多時，其形成公正三角形可能的情況會達到遞增的狀況。

(二)在$G(m,n)$圖內部點形成的圖標號探討

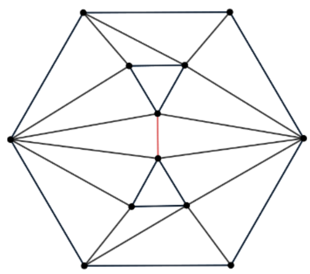
[定理三]$G(m,n)$圖內部多邊形的H_K圖為多邊形$(n \geq k)$，則內部多邊形H_k的頂點及外部多邊形所連接的邊個數為$(k+m)$。

$\underline{proof}$：

由**公式 2** 可知$G(m,n)$圖的內部總邊數$S_e = m+3n-3$，針對H_k圖中，可視為頂點個數為k的多邊形且內部點個數為$(n-k)$，對於H_k圖之總邊數為$2k+3(n-k)-3=3n-k-3$，則可知內部多邊形H_k的頂點及外部多邊形所連接的邊個數為$m+3n-3-(3n-k-3)=m+k$。



(圖 15：無橋狀況時能符合定理六)



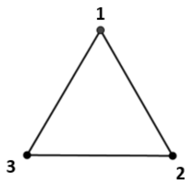
(圖 16：有橋狀況時不能符合定理六)

由**定理四**的概念，我們希望將在完美$G(m,n)$圖的狀況進行討論，期望整理出確切 H_K 圖的相關性質，針對此部分整理出**定理五**。

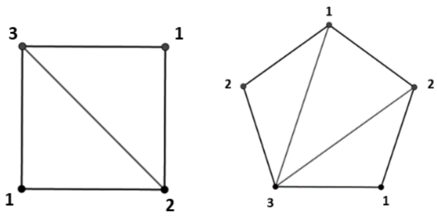
[定理四]當$m \geq 3, max\ F\big(G(m,0)\big) = m-2$。即若為多邊形之狀況，可被表示為完美圖。

proof：

當$m = 3$，可容易得知$max\ F\big(G(m,0)\big) = 1$。

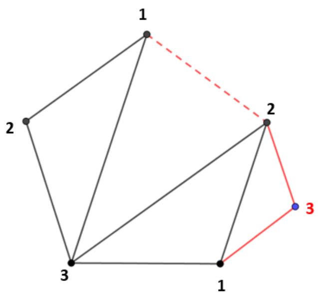


假設$3 \leq m \leq k$原式成立，即$max\ F\big(G(m,0)\big) = m-2$



則可知道當最大公正三角形個數為$\mathrm{m}-2$時，即為完美圖。

因此當$m = k+1$時，無論為幾邊形皆能從$m = k$時找到一邊連接另一點。



此時仍為完美圖。故由數學歸納法可知定理五正確。

六、在三角形下$max\ F\big(G(3,n)\big)$之狀況討論

此部分為針對$Sperner$引理之延伸探討，一開始需針對連接個數進行討論。

[性質 4]若為完美$G(3,n)$圖，且其中的H_k圖若為多邊形，則此多邊形和大三角形各點連接兩次只有三個點，且其中標號分別為 1、2、3。

proof：

探討H_k圖和大三角形三個點的邊的狀況，由以上**性質 2** 可知對於H_k圖和三個點的連接邊

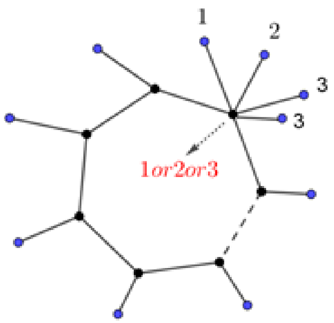
共有$(k+3)$個邊。故由鴿籠原理可知在H_k圖上的一點至少有一點連接大三角形的三個點中其中兩個點。在不失一般性的情況下，可分為：

(1) $(k-1)$個點連接大三角形的三個點中其中一個點、1 個點連接大三角形的四個點。

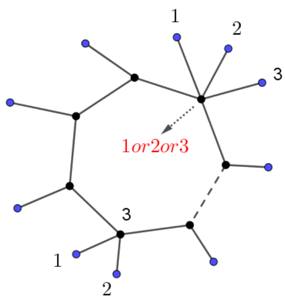
(2) $(k-2)$個點連接大三角形的三個點中其中一個點、1 個點連接大三角形的三個點、1 個點連接大三角形的三個點中其中兩個點。

(3) $(k-3)$個點連接大三角形的三個點中其中一個點、3 個點連接大三角形的三個點中其中兩個點。

由(1)、(2)的情況，可知道當 1 個點連接大三角形的四個點，若假設大三角形的三個點的標號為 1、2、3，則一定會有一個邊為 E(1,1)或 E(2,2)或 E(3,3)，則容易可知(1)、(2)的情況一定不會形成完美$G(3,n)$圖。

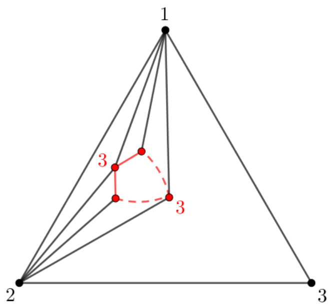


(17：(1)的情況。)

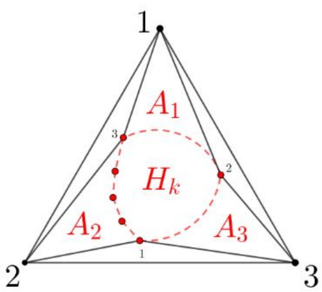


(圖 18：(2)的情況。)

由(3)的情況可知有 3 個點連接大三角形的三個點中其中兩個點，則此 3 個點的標號不會和連接大三角形的三個點中其中兩個點的標號一樣，即若一點和標號 1、2 連接，則此一點必需為標號 3。又在此可知當H_k圖若為多邊形則可容易得知此 3 點的標號必為不同，如下圖所示：



(圖 19：僅兩點和大三角形三點連接兩次。)



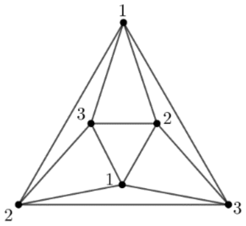
(圖 20：多邊形H_k圖和大三角形連接狀況。)

可得知若連接大三角形中兩個點的點標號若一樣，則只有兩個點滿足要求，因此可得知

3 個點連接大三角形的三個點中其中兩個點的這三個點標號必分別為 1、2、3。則由以上推論可知若為完美$G(3,n)$圖，且其中的H_k圖若為多邊形，此多邊形和大三角形各點連接兩次的三個點的標號分別為 1、2、3。■

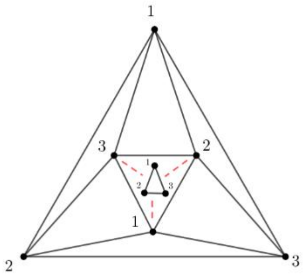
[性質 5]若$n = 3t, t \in N$，則$max\ F\big(G(3,n)\big) = 2n + 1$。

proof：

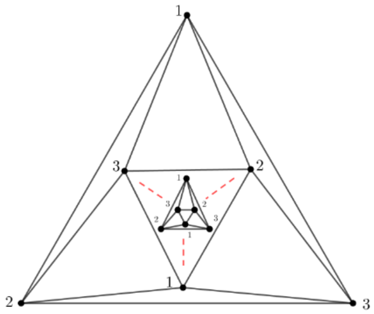
當$t = 1$時，$n = 3$，可有此圖：

。故原式成立！

假設當$t = k(k \in N)$時，$m = 3k$，原式成立！

即：

表有$2n + 1$個公正三角形。

則當$t = k + 1(k \in N)$時，$m = 3k + 3$，可增加一個三角形使得其所有三角形皆為公正三角形。如圖：

，故**性質**成立。■

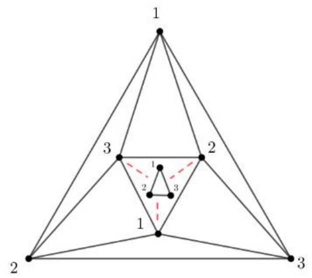
接著我們嘗試由性質 4 架構出以下的歸納結果。

[整理 1]若為完美$G(3,n)$圖且H_k圖為多邊形，則$n = 3t + 2s, t \in N, s \in \{0\} \cup N$，即：

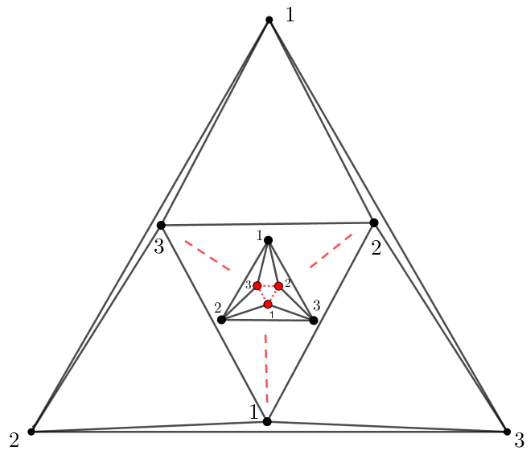
$max\ F(G(3,n)) = 2n + 1, n \in N, n = 3 \vee n \geq 5$。

proof：

由**性質 5** 得知當$n_1 = 3t, t \in N$，則可架構出一個完美$G(3,n_1)$圖。如下圖：



則當要增加 2s 個內部點使得$m = 3t + 2s, t \in N, s \in \{0\} \cup N$且為完美$G(3,n)$圖，則由**性質 3** 可得知若為完美$G(3,n)$圖且$H_k$圖$(m \geq k)$為多邊形，可得知其圖形必定如下：



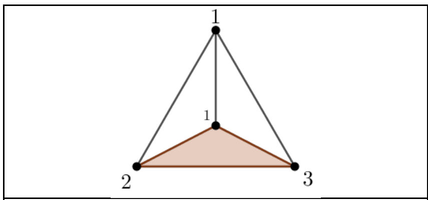
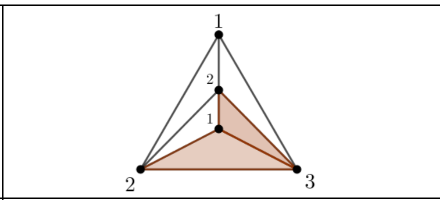
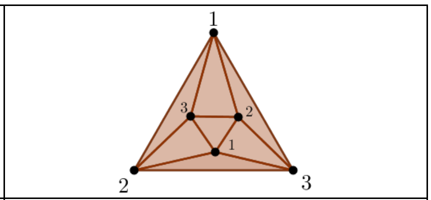
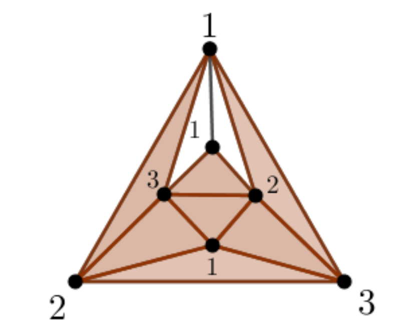
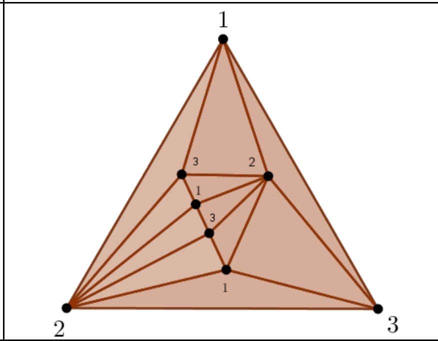
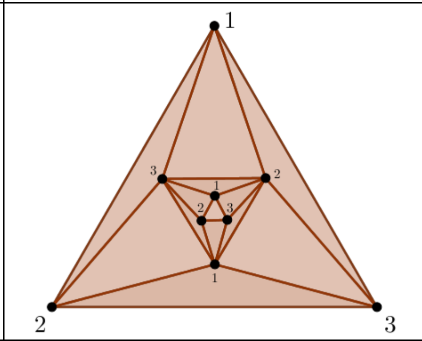
在此可由**公式 2** 得知在最內部的三角形的邊上增加 2s 個內部點仍可使其成為完美圖，故可知$n = 3t + 2s, t \in N, s \in \{0\} \cup N$時可形成完美$G_0^m$圖；又因為 3、2 兩數的最大公因數為 1，因此當$n = 3t + 2s, t \in N, s \in \{0\} \cup N$時，其最小值為 3，而除了 4 外比 3 大的所有整數皆能被 2、3 兩數表示出來，故$max\ F(G(3,n)) = 2n + 1, n \in N, n = 3 \vee n \geq 5$。■

[整理 2] $\max F(G(3,n)) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 3, n = 2 \\ 7, n = 4 \\ 2n+1, n \in N, n = 3 \vee n \geq 5 \end{cases}$。

proof：

由**整理 1** 可知當$n = 3t + 2s, t \in N, s \in \{0\} \cup N$，$max\ F(G(3,n)) = 2n + 1, n \in N, n = 3 \vee n \geq 5$；而當$n = 1$時，顯然$max\ F(G(3,n)) = 1$；當$n = 2$時，顯然$max\ F(G(3,n)) = 3$；當$n = 4$時，顯然$max\ F(G(3,4)) = 7$。■

[部分$max\ F(G(3,n))$圖整理]

		
$max\ F(G(3,1))$圖	$max\ F(G(3,2))$圖	$max\ F(G(3,3))$圖
		
$max\ F(G(3,4))$圖	$max\ F(G(3,5))$圖	$max\ F(G(3,6))$圖

七、在多邊形下探討$max\ F\big(G(m,n)\big)$之狀況討論

[定理五]符合**正m多邊形標號條件**下，當$n \geq 5$，

$\max F(G(m,n)) = m + 2n - 2, n \in N, n \geq 5$，即當$n \geq 5$時，$G(m,n)$可為完美圖。

proof：

由**定理四**可知$max\ F\big(G(m,0)\big) = m - 2$，可知$max\ F\big(G(m,0)\big)$為完美圖，則在$G(m,0)$圖中找出三角化後的一個公正三角形，又由**整理 2** 可得：

$$\max F(G(3,n)) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 3, n = 2 \\ 7, n = 4 \\ 2n+1, n \in N, n = 3 \vee n \geq 5 \end{cases}$$

故當n ≥ 5，$max\ F\big(G(m,n)\big) = \big(max\ F\big(G(m,0)\big) - 1\big) + max\ F\big(G(3,n)\big)$

因此，

$\max F(G(m,n)) = m + 2n - 2, n \in N, n \geq 5$。

伍、 研究結果

一、在正多邊形下的相關定理

[定理一]對於$G(m,n)$圖在符合**正m多邊形標號條件**下，奇多邊形內公正三角形的個數必為奇數個；偶多邊形內公正三角形的個數必為偶數個。

[定理三]$G(m,n)$圖內部多邊形的H_K圖為多邊形$(n \geq k)$，則內部多邊形H_k的頂點及外部多邊形所連接的邊個數為$(k+m)$。

[定理四]當$m \geq 3, max\ F\big(G(m,0)\big) = m-2$。即若為多邊形之狀況，可被表示為完美圖。

二、$max\ F(G(m,n))$之情況整理

[定理五]符合**正m多邊形標號條件**下，當$n \geq 5$，

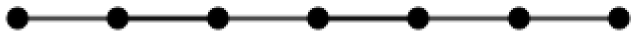
$\max F(G(m,n)) = m+2n-2, n \in N, n \geq 5$，即當$n \geq 5$時，$G(m,n)$可為完美圖。

三、在正三角形下，H_k圖是特殊圖形的完美圖的整理

針對 Sperner 引理內的H_k圖進行分類，主要目的在於希望能藉由這樣的方式簡易的分類哪些情況是否有完美$G(3,n)$圖？也能夠藉此整理出一個判斷的依據。

1. 奇數路徑圖P_{2t+1}

奇數路徑圖P_{2t+1}為總點個數為奇數的簡單圖，以下圖十六為例為P_7圖：



(圖 21：P_7圖)

由下圖 22 可很容易發現各點在進行連線時一定會有點和大三角形的三個點皆連接，故必不會為完美$G(3,n)$圖。

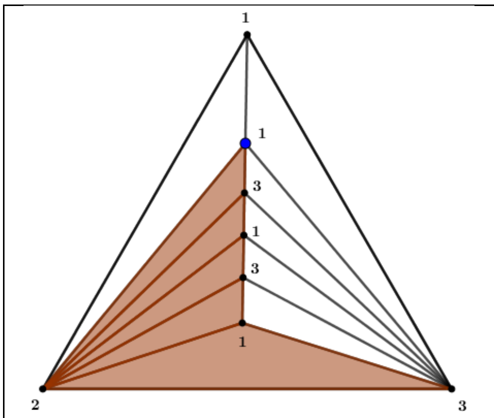


圖 22

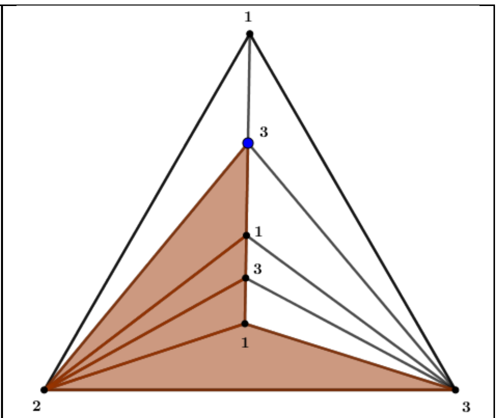


圖 23

2. 偶數路徑圖P_{2t}

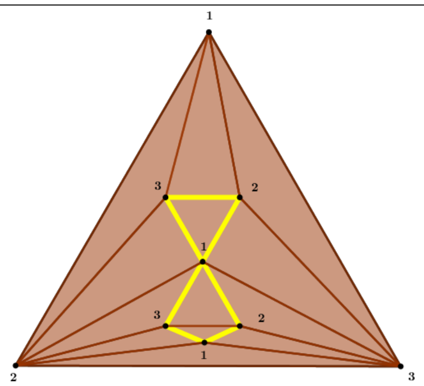
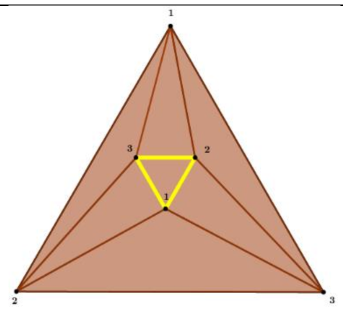
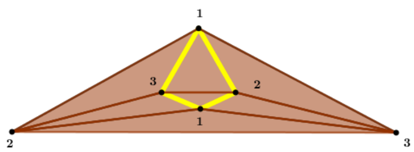
偶數路徑圖P_{2t}為總點個數為奇數的簡單圖，以下圖為例為P_6圖：

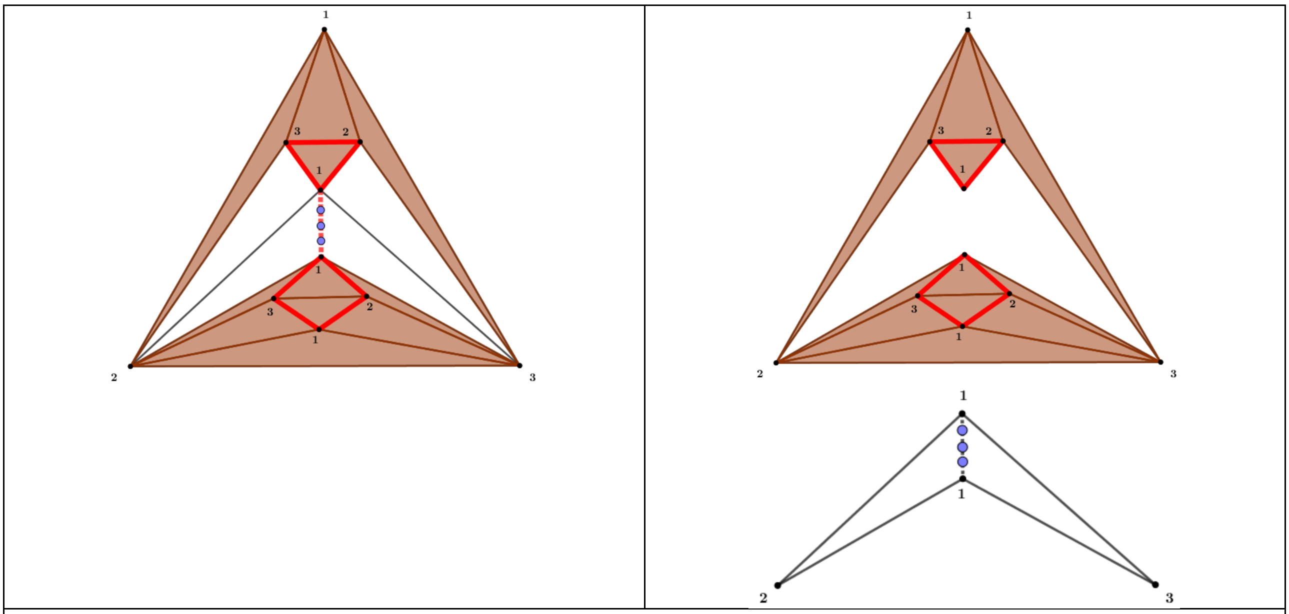
(圖 24：P_6圖)

由上圖十八可很容易發現各點在進行連線時，一定會有點和大三角形的三個點皆連接，故必不會為完美$G(3,n)$圖。

3. 多個多邊形連接(無橋、有橋)

在圖論中，橋代表著當被刪掉後，其中的連通塊數會增加，而本篇研究中為了將H_k圖的情形盡量整理完畢，因此針對各種不同的圖形進行整理。以下是無橋和有橋圖的狀況，且針對這些狀況我們嘗試進行圖的分割，由此可知在無橋的情況下，則能夠符合上述在多邊形的討論，即代表進行分割的過程中，若最後的各個多邊形皆為**點個數不大於 6** 的多邊形，則能夠形成完美$G(3,n)$圖，進而可以得到其中的上界。而在有橋的情況下，我們能夠發現可以將圖分割成多個多邊形和多個路徑圖P_n，在上述的討論中可以知道路徑圖是無法形成完美$G(3,n)$圖，因此合併後的情況應當無法形成完美$G(3,n)$圖。

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">H_k圖內為多邊形且無橋之狀況</td></tr>
</table>



H_k圖內為多邊形且有橋之狀況

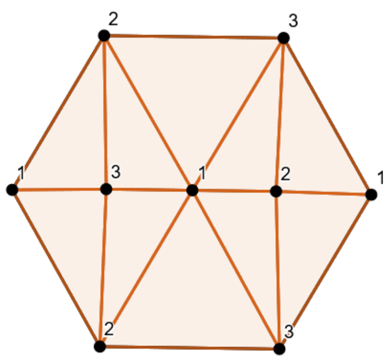
由以上的內容，我們有以下所發現性質的整理：

H_k圖在正三角形下之情況	**是否能形成H_k圖？**	**完美$G(3,n)$圖是否可能發生？**	**是否能和其他圖合併成完美圖？**
多邊形	**是**	**是**	**是**
奇數路徑圖P_{2t+1}	是	否	否
偶數路徑圖P_{2t}	是	否	否
多個多邊形連接(無橋)	是	是(特定情況)	是(特定情況)
多個多邊形連接(有橋)	是	否	否

四、在正m邊形($m \geq 4$)下，H_k圖是特殊圖形的完美圖的整理

1. 奇數路徑圖P_{2t+1}

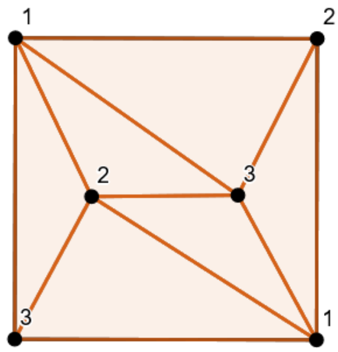
容易得知當為$m = 4,5$時，不會有完美圖的產生，而當$m = 6$時，因為在標號條件下，其標號分別為1,1,2,2,3,3，故可得到下圖的狀況：



故可由**定理四**的概念推廣至$m \geq 6$的多邊形皆有完美圖。

2. 偶數路徑圖P_{2t}

容易得知當為$m=3$時，不會有完美圖的產生，而當$m=4$時，因為在標號條件下，其標號分別為1,1,2,3，故可得到下圖的狀況：



故可由**定理四**的概念推廣至$m\geq 4$的多邊形皆有完美圖。

由以上的內容，我們有以下所發現性質的整理：

$\boldsymbol{H_k}$**圖在正三角形下之情況**	**是否能形成**$\boldsymbol{H_k}$**圖？**	**完美**$\boldsymbol{G(m,n)}$**圖是否可能發生？**
多邊形	**是**	**是**
奇數路徑圖P_{2t+1}	是	是，當$m\geq 6$
偶數路徑圖P_{2t}	是	是，當$m\geq 4$

由此可和$\boldsymbol{G(3,n)}$**圖**進行簡單的比較，藉此可能得知當為m邊形時，可考慮的狀況增加。

五、在正多邊形下，可能公正三角形個數整理

(一) $G(3,n)$圖

[定理六]$n(F(G(3,n))=\begin{cases}4, n=3\\ n, n=1,2,4\\ n+1, n\geq 5\end{cases}$。即：當內部點個數不小於 5 時，所有奇數個可能公正三角形皆能被找出。

<u>*proof*</u>：

由圖形整理可得

圖形情況	形成三角形個數	形成可能公正三角形個數
$G(3,1)$	3	1
$G(3,2)$	5	1、3
$G(3,3)$	7	1、3、5、7
$G(3,4)$	9	1、3、5、7

$G(3,5)$	11	1、3、5、7、9、11
$G(3,6)$	13	1、3、5、7、9、11、13

當$n=5$時，可知$F(G(3,5))=\{1,3,5,7,9,11\}$，$n\big(F(G(3,5))\big)=6$。原式成立。

假設$n=k(k\in N,k\geq 5)$原式成立！即：$n\big(F(G(3,k))\big)=k+1$。由**定理二**可知若內部點較小，則形成可能公正三角形個數的集合必定為可能形成公正三角形個數集合的子集，因此$F\big(F(G(3,k))\big)\subseteq F(F(G(3,k+1)))$；由**定理五**可知內部點每增加一點$maxF(G(3,n))$會增加2，因此$F\big((G(3,k+1))\big)=\{1,3,5,\cdots,2k+1,2k+3\}$，故$n\left(F\big((G(3,k+1))\big)\right)=k+2$。原式成立。

故由數學歸納法可知**定理**正確。■

(二) $G(m,n)$圖

[猜想] 符合**正m多邊形標號條件**下，當$n\geq 5$，$n(F\big(G(m,n)\big)=n+1$；即當內部點個數不小於 5 時，當為奇多邊形，則所有奇數個公正三角形個數皆可被找出、當為偶多邊形，則所有偶數個公正三角形個數皆可被找出。

<u>說明：</u>

以**定理五**、**定理六**的概念可藉由集合合併的概念得知其結果可如數學歸納法進行歸納，然而在內部點較少時無法確定其中的狀況，故希望在未來針對內部點較少的情況進行討論。

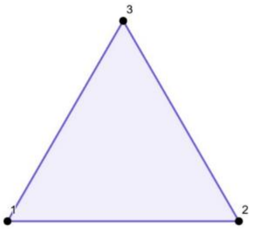
(三) $G(m,n)$圖可能公正三角形個數總表整理

以下針對內部點較少的情況進行討論，並且嘗試將期中的狀況進行整理。

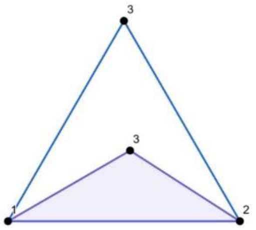
m \ n	0	1	2	3
3	1	1	1、3	1、3、5、7
4	0、2	0、2	0、2、4、6	0、2、4、6、8
5	1、3	1、3、5	1、3、5、7	1、3、5、7、9
6	0、2、4	0、2、4、6	0、2、4、6、8	0、2、4、6、8、10
7	1、3、5	1、3、5、7	1、3、5、7、9	1、3、5、7、9、11
8	0、2、4、6	0、2、4、6、8	0、2、4、6、8、10	0、2、4、6、8、10、12
9	1、3、5、7	1、3、5、7、9	1、3、5、7、9、11	1、3、5、7、9、11、13

(四) $G(3,n)$圖

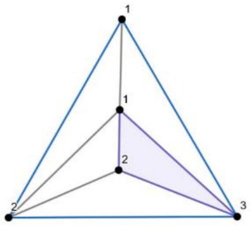
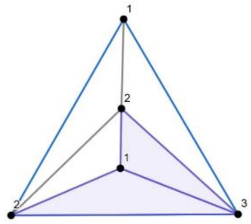
1. $G(3,0)$圖


1 個三角形，1 個公正三角形。

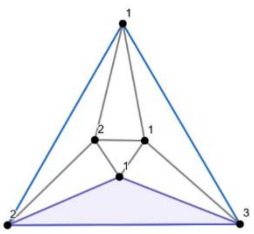
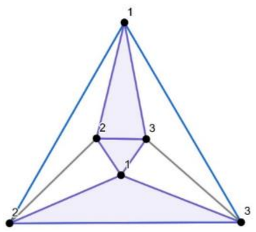
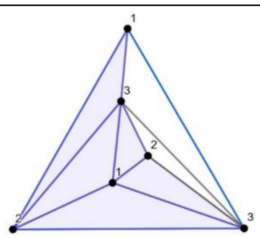
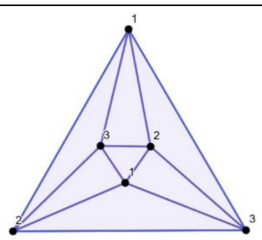
2. $G(3,1)$圖


3 個三角形，1 個公正三角形。

3. $G(3,2)$圖

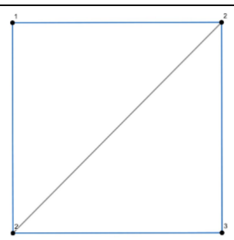
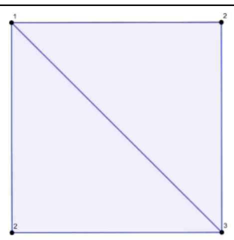
	
5 個三角形，1 個公正三角形。	5 個三角形，3 個公正三角形。

4. $G(3,3)$圖

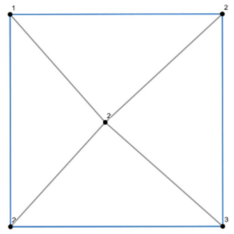
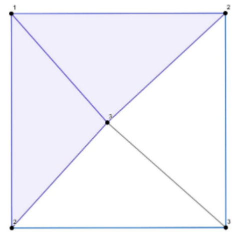
			
7 個三角形，1 個公正三角形。	7 個三角形，3 個公正三角形。	7 個三角形，5 個公正三角形。	7 個三角形，7 個公正三角形。

(五) $G(4,n)$圖

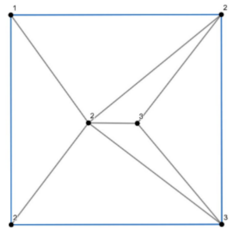
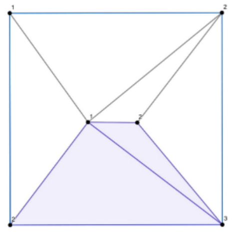
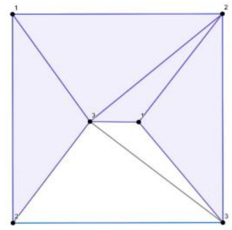
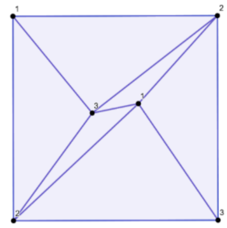
1. $G(4,0)$圖

	
2 個三角形，0 個公正三角形。	2 個三角形，2 個公正三角形。

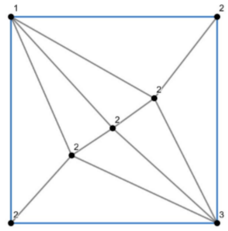
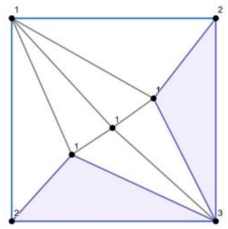
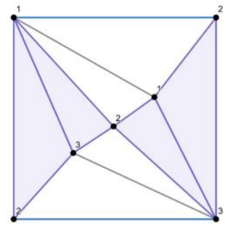
2. $G(4,1)$圖

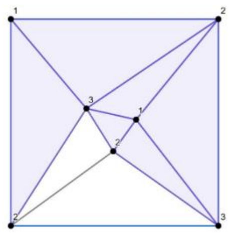
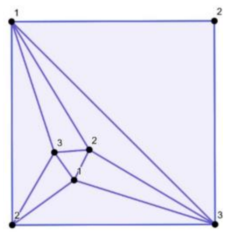
	
4 個三角形，0 個公正三角形。	4 個三角形，2 個公正三角形。

3. $G(4,2)$圖

			
6 個三角形，0 個公正三角形。	6 個三角形，2 個公正三角形。	6 個三角形，4 個公正三角形。	6 個三角形，6 個公正三角形。

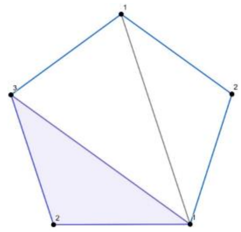
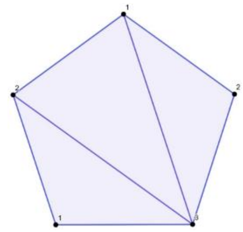
4. $G(4,3)$圖

		
8 個三角形，0 個公正三角形。	8 個三角形，2 個公正三角形。	8 個三角形，4 個公正三角形。

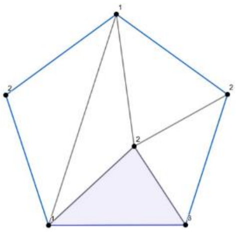
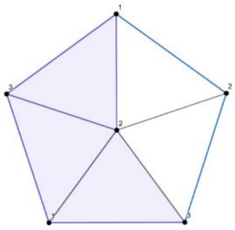
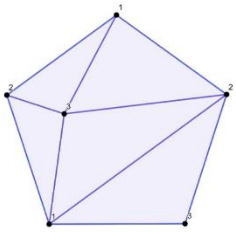
	
8 個三角形，6 個公正三角形。	8 個三角形，8 個公正三角形。

(六)$G(5,n)$圖

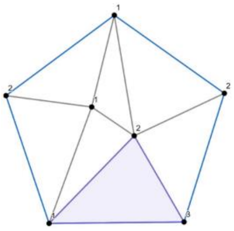
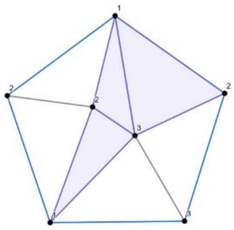
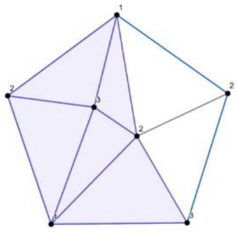
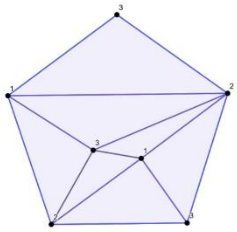
1. $G(5,0)$圖

	
3 個三角形，1 個公正三角形。	3 個三角形，3 個公正三角形。

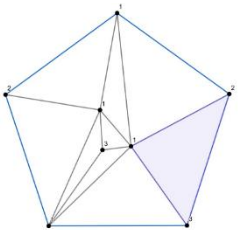
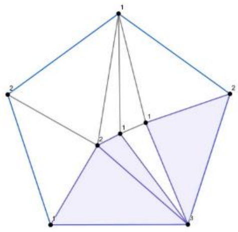
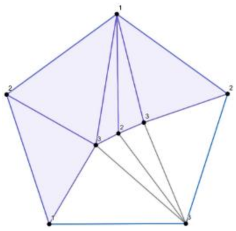
2. $G(5,1)$圖

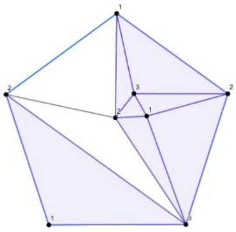
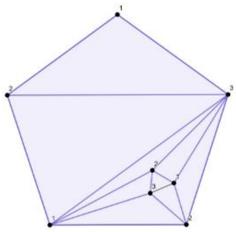
		
5 個三角形，1 個公正三角形。	5 個三角形，3 個公正三角形。	5 個三角形，5 個公正三角形。

3. $G(5,2)$圖

			
7 個三角形，1 個公正三角形。	7 個三角形，3 個公正三角形。	7 個三角形，5 個公正三角形。	7 個三角形，7 個公正三角形。

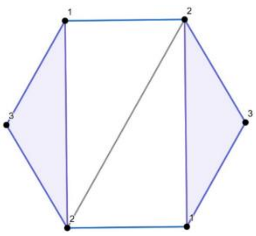
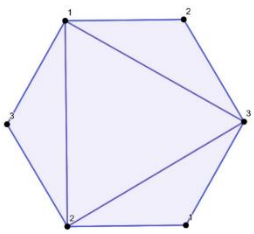
4. $G(5,3)$圖

		
9 個三角形，1 個公正三角形。	9 個三角形，3 個公正三角形。	9 個三角形，5 個公正三角形。

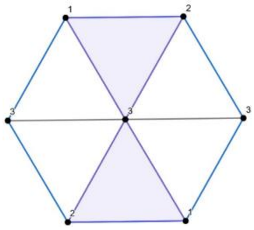
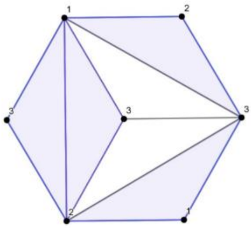
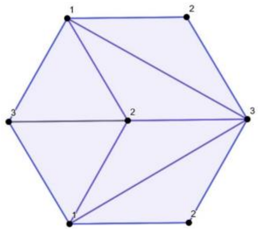
	
9 個三角形，7 個公正三角形。	9 個三角形，9 個公正三角形。

(七)$G(6,n)$圖

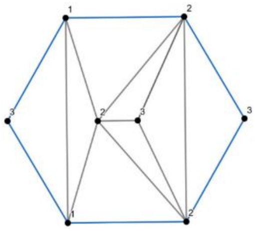
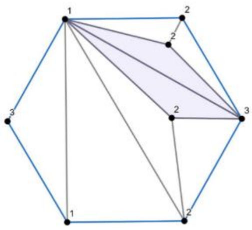
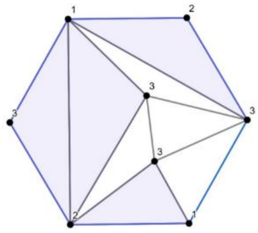
1. $G(6,0)$圖

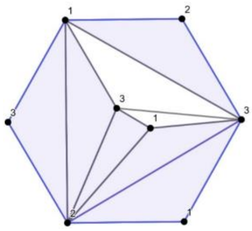
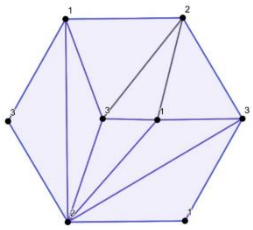
	
4 個三角形，2 個公正三角形。	4 個三角形，4 個公正三角形。

2. $G(6,1)$圖

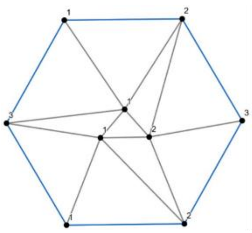
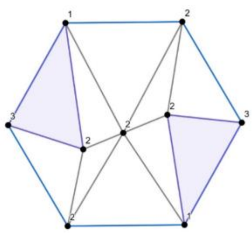
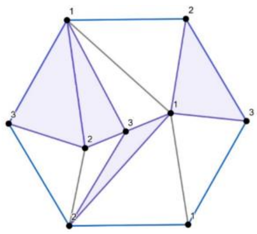
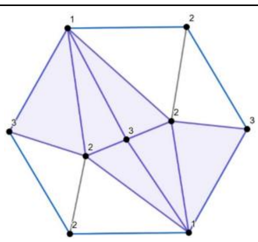
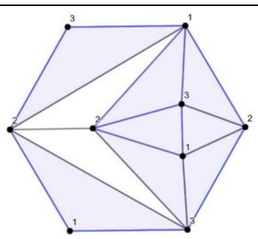
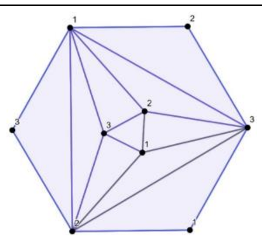
		
6 個三角形，2 個公正三角形。	6 個三角形，4 個公正三角形。	6 個三角形，6 個公正三角形。

3. $G(6,2)$圖

		
8 個三角形，0 個公正三角形。	8 個三角形，2 個公正三角形。	8 個三角形，4 個公正三角形。

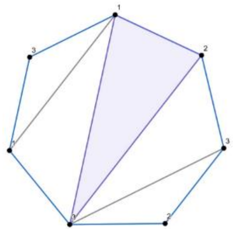
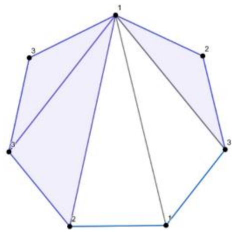
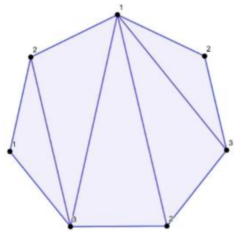
	
8 個三角形，6 個公正三角形。	8 個三角形，8 個公正三角形。

4. $G(6,3)$圖

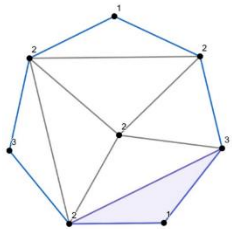
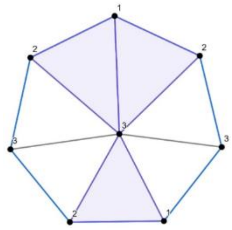
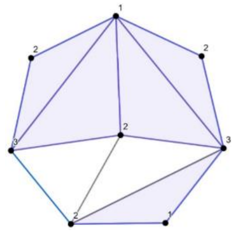
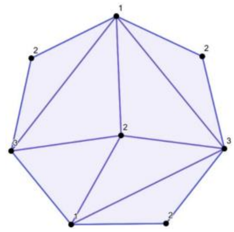
		
10 個三角形，0 個公正三角形。	10 個三角形，2 個公正三角形。	10 個三角形，4 個公正三角形。
		
10 個三角形，6 個公正三角形。	10 個三角形，8 個公正三角形。	10 個三角形，10 個公正三角形。

(八)$G(7,n)$圖

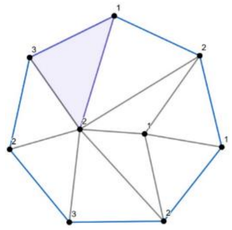
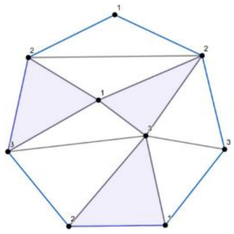
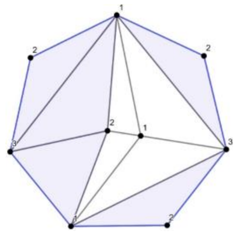
1. $G(7,0)$圖形

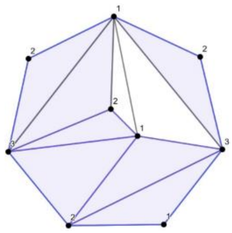
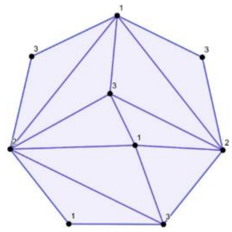
		
5 個三角形，1 個公正三角形。	5 個三角形，3 個公正三角形。	5 個三角形，5 個公正三角形。

2. $G(7,1)$圖形

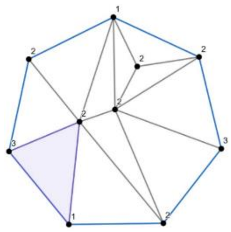
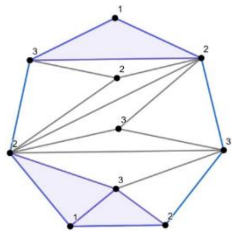
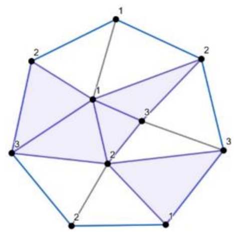
			
7 個三角形，1 個公正三角形。	7 個三角形，3 個公正三角形。	7 個三角形，5 個公正三角形。	7 個三角形，7 個公正三角形。

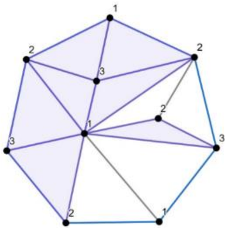
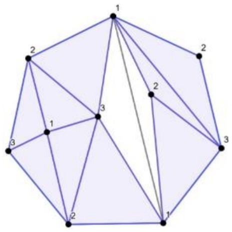
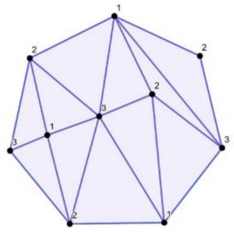
3. $G(7,2)$圖形

		
9 個三角形，1 個公正三角形。	9 個三角形，3 個公正三角形。	9 個三角形，5 個公正三角形。

	
9 個三角形，7 個公正三角形。	9 個三角形，9 個公正三角形。

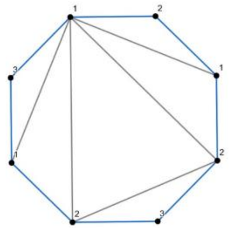
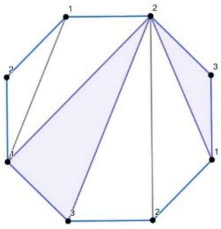
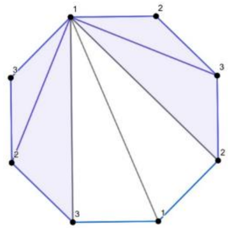
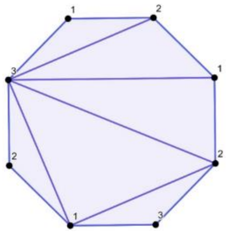
4. $G(7,3)$圖形

		
11 個三角形，1 個公正三角形。	11 個三角形，3 個公正三角形。	11 個三角形，5 個公正三角形。

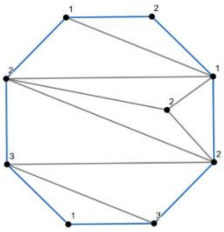
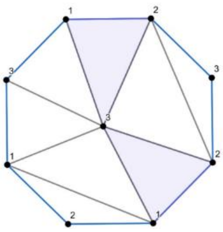
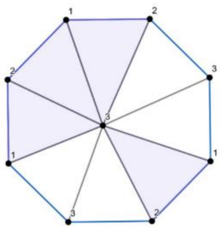
		
11 個三角形，7 個公正三角形。	11 個三角形，9 個公正三角形。	11 個三角形，11 個公正三角形。

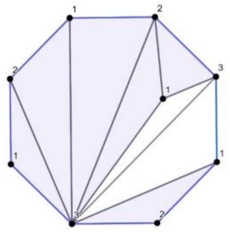
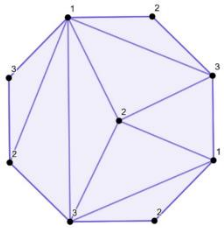
(九)$G(8,n)$圖

1. $G(8,0)$圖形

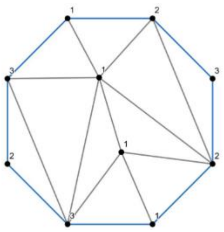
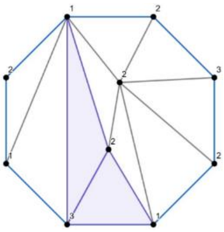
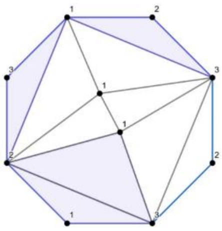
			
6 個三角形，0 個公正三角形。	6 個三角形，2 個公正三角形。	6 個三角形，4 個公正三角形。	6 個三角形，6 個公正三角形。

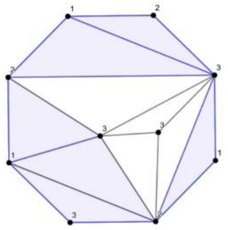
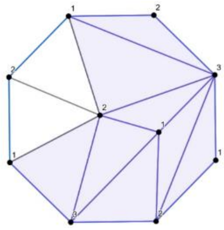
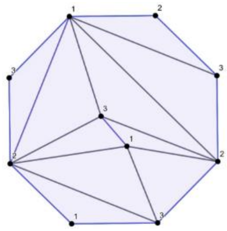
2. $G(8,1)$圖形

		
8 個三角形，0 個公正三角形。	8 個三角形，2 個公正三角形。	8 個三角形，4 個公正三角形。

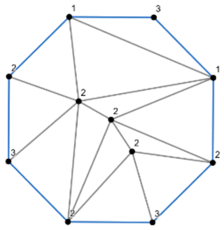
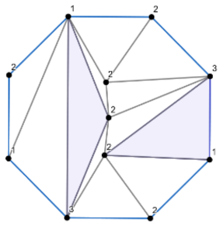
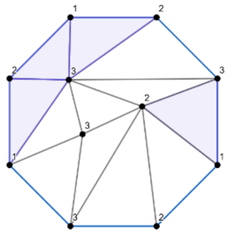
	
8 個三角形，6 個公正三角形。	8 個三角形，8 個公正三角形。

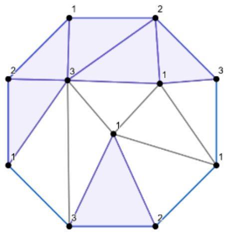
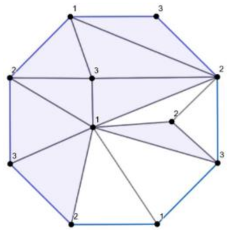
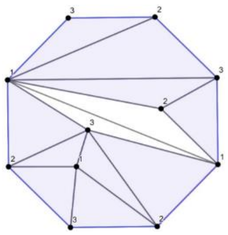
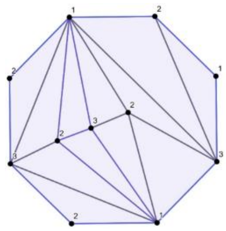
3. $G(8,2)$圖形

		
10 個三角形，0 個公正三角形。	10 個三角形，2 個公正三角形。	10 個三角形，4 個公正三角形。

		
10 個三角形，6 個公正三角形。	10 個三角形，8 個公正三角形。	10 個三角形，10 個公正三角形。

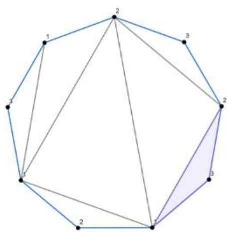
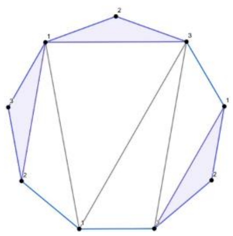
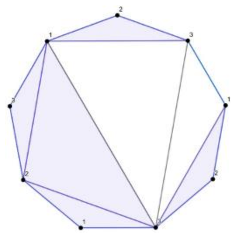
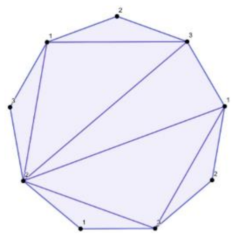
4. $G(8,3)$圖形

		
12 個三角形，0 個公正三角形。	12 個三角形，2 個公正三角形。	12 個三角形，4 個公正三角形。

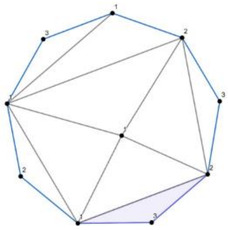
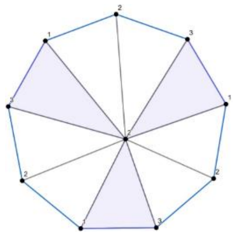
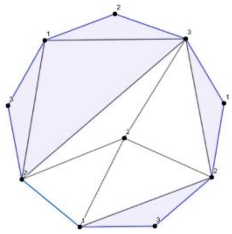
	
12 個三角形，6 個公正三角形。	12 個三角形，8 個公正三角形。
	
12 個三角形，10 個公正三角形。	12 個三角形，12 個公正三角形。

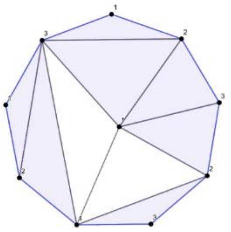
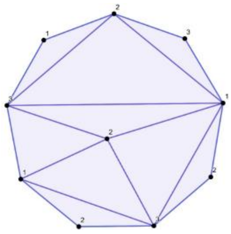
(十)$G(9,n)$圖

1. $G(9,0)$圖形

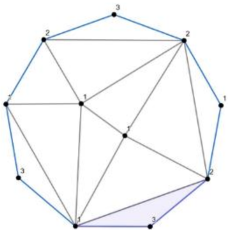
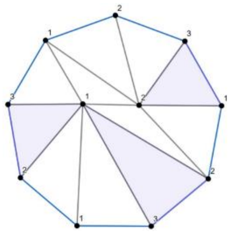
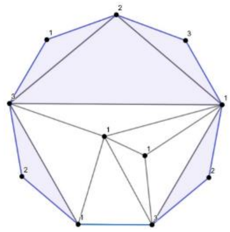
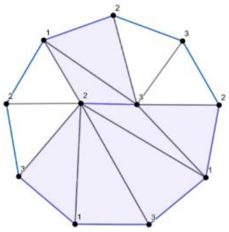
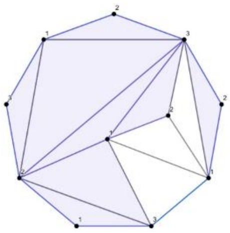
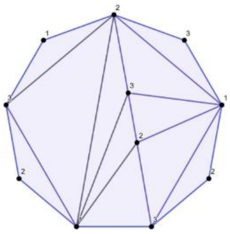
			
7 個三角形，1 個公正三角形。	7 個三角形，3 個公正三角形。	7 個三角形，5 個公正三角形。	7 個三角形，7 個公正三角形。

2. $G(9,1)$圖形

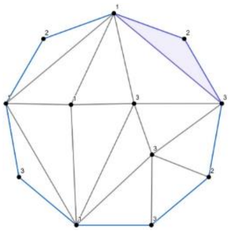
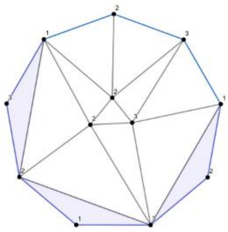
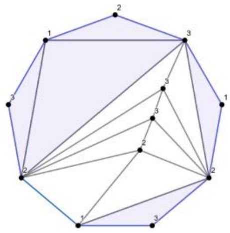
		
9 個三角形，1 個公正三角形。	9 個三角形，3 個公正三角形。	9 個三角形，5 個公正三角形。

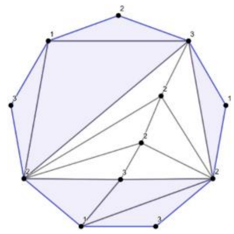
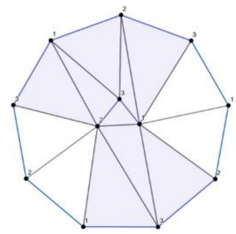
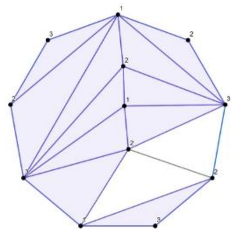
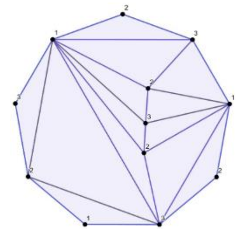
	
9 個三角形，7 個公正三角形。	9 個三角形，9 個公正三角形。

3. $G(9,2)$圖形

		
11 個三角形，1 個公正三角形。	11 個三角形，3 個公正三角形。	11 個三角形，5 個公正三角形。
		
11 個三角形，7 個公正三角形。	11 個三角形，9 個公正三角形。	11 個三角形，11 個公正三角形。

4. $G(9,3)$圖形

		
13 個三角形，1 個公正三角形。	13 個三角形，3 個公正三角形。	13 個三角形，5 個公正三角形。

	
13 個三角形，7 個公正三角形。	13 個三角形，9 個公正三角形。
	
13 個三角形，11 個公正三角形。	13 個三角形，13 個公正三角形。

陸、 討論

本篇研究探討多邊形內公正三角形的情況，一開始從$Sperner$引裡進行思考，並且針對此引理進行性質延伸，原先$Sperner$引理主要探討三角形內的公正三角形狀況，本篇研究將其延伸至任意多邊形。而為了較好進行討論，我們嘗試建立H_k圖，其圖形目前探討至多邊形的狀況。

未來在最大的完美圖希望討論到在H_k圖內多邊形有橋與無橋的狀況，並且更加詳細證明各種情況可能公正三角形個數，最後希望探討出不利用電腦模擬的情況下，探討出可能出現公正三角形的所有情況。

柒、 結論

透過公式我們先探討$sperner$引理的性質，它是在正三角形的情況下討論的結果，那麼我們將其引理延伸至多邊形，在多邊形的情況下，我們成功的討論出，H_k圖在多邊形下的公正三角形個數可能之狀況，接著探討出H_k圖為多邊形的情況下$max\ F\big(G(m,n)\big)$，此部分即為代表著我們得知在正多邊形的情況下其中公正三角形個數之上限，也針對部分特例下進行討論，進而得到猜想，期望未來能夠針對內部點較小的情況下進行整理。

捌、 參考資料及其他

[1]田中靖人。泥縄式不動点定理の解説－競争均衡，ナッシュ均衡の存在証明付き。同志社大学経済学部。2014。

[2]王聖輝、楊璞安、周千貿、許博凱、陳穩緯(民 97)。鬼斧神工－多邊形的分割。中華民國 第 48 屆中小學科學展覽會，未出版，彰化市。

[3]J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, New York: Macmillan,1976.

【評語】050418

此作品討論三角化(以及公正三角化)的問題，透過 sperner 引理，本研究列舉了一些正 m 邊形內部有 n 個點時的 G(m,n)圖，並整理了三角形及公正三角形數量。問題本身是有趣的問題，不過可惜可以完成的部分似乎較為有限。此外文獻蒐集研究的部分若能再加強，例如：潘建強、邵慰慈所發表題目為 Sperner 引理及其應用等相關文章，可能會有助於增進整體研究的成果。

作品海報

摘要

Sperner 引理常用於遊戲必勝法以及一些塗色的相關問題，本篇研究將先針對 *Sperner* 引理的內容進行探討，並且進行相關內容的證明，而後將*Sperner* 引理中的規則進行延伸：原先此引理在三角形內進行討論，本篇研究嘗試將問題假設為在任意正多邊形下其中頂點的標號為1、2、3且相鄰頂點需為不同標號下進行探討，而後在多邊形內部放入點後進行三角化，在三角化的過程中若其中三角形分別為1、2、3，則命名為公正三角形，對此成功探討出在不同正多邊形下公正三角形個數的狀況，並且將三角化後每個三角形皆為公正三角形的狀況定義為完美$G(m,n)$圖，在研究最後針對在三角形下的公正三角形個數進行一些特例整理。

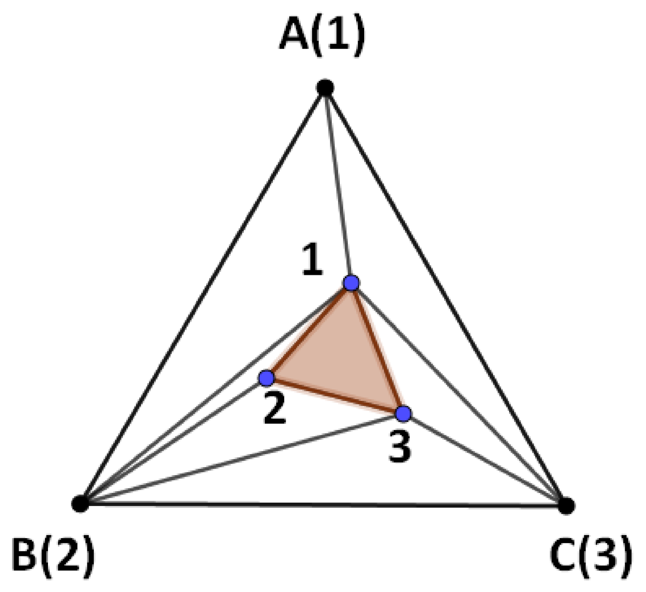
[Sperner引理]給定一個大三角形，其中三個頂點定義為A、B、C，在此三角形內部點出n個點，並且將各點和A、B、C三頂點連接成數個小三角形。將所有頂點(包含A、B、C)以下述的規定標記：

①頂點A、B、C的標號為1、2、3。

②在AB邊上只能用1或2作為標號；在BC邊上只能用2或3作為標號；在CA邊上只能用3或者1作為標號。

③大三角形內部可以隨意以1、2、3作為標號。

滿足以上①②③三點，則至少會存在一個小三角形的標號分別為1、2、3。



研究目的

一、探討 *Sperner* 定理之相關延伸性質。 二、探討正多邊形下，公正三角形個數規則。

三、探討完美$G(m,n)$圖之可能狀況。 四、探討 *Sperner* 定理之完美$G(m,n)$圖的特殊狀況。

名詞定義

一、三角化：將多邊形內部點連接至各頂點，內部連接線段不重疊，內部皆為三角形，稱之為三角化。

二、公正三角形：在三角化且進行標號後的三角形中，三頂點標號皆不同的三角形。

三、$G(m,n)$圖：對於正m邊形內部有n個點，經由三角化後的圖稱為$G(m,n)$圖。

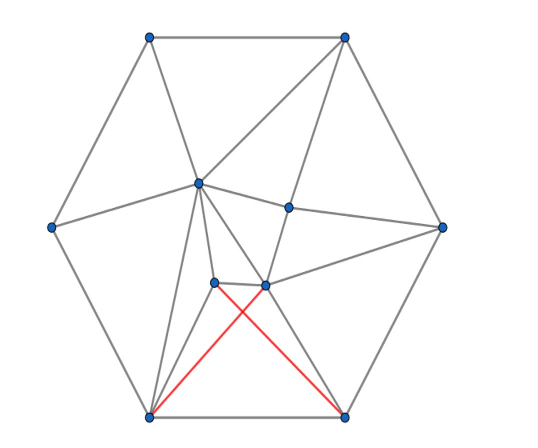
四、$G(m,n)$圖產生個數之定義

(一)**定義1**：$F(G(m,n))$表對於$G(m,n)$圖產生的可能公正三角形個數的集合。

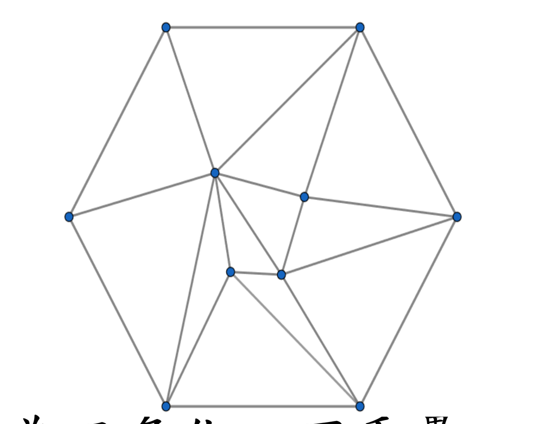
$F(G(m,n))$是一種集合的形式；例： $F(G(3,0)) = \{1\}$。

(二)**定義2**：$\max F(G(m,n))$表對於$G(m,n)$圖產生的最多公正三角形個數。

例：$\max F(G(3,0)) = 1$。



非三角化，因重疊



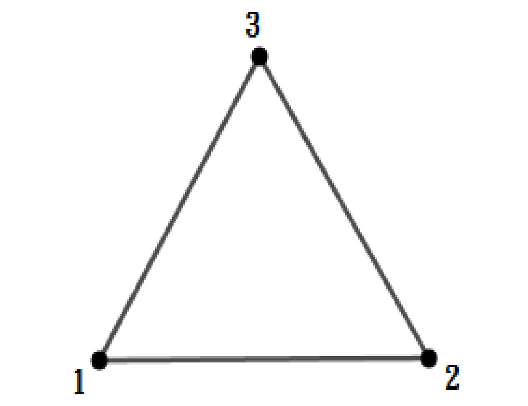
為三角化，不重疊，內部皆為三角形

(三)**定義3**：$E(a,b)$為標號a,b所連線的線段；$n(E(a,b))$表 $G(m,n)$圖中所有$E(a,b)$線段數量。

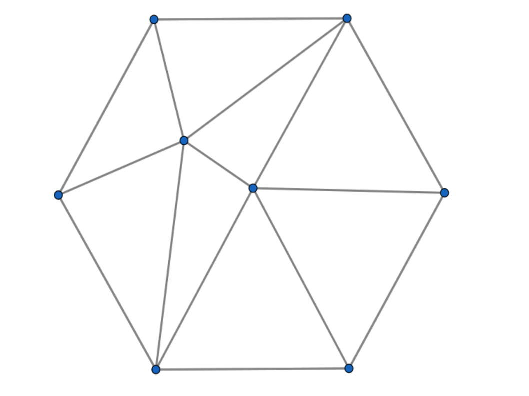
(四)**定義4**：若多邊形內部點和多邊形頂點所連接的點有k個，則將其k個點連成的圖定義為H_K圖。

(四)**定義5**：$n(F(G(m,n)))$表對於$G(m,n)$圖產生的可能公正三角形個數的集合的元素個數。

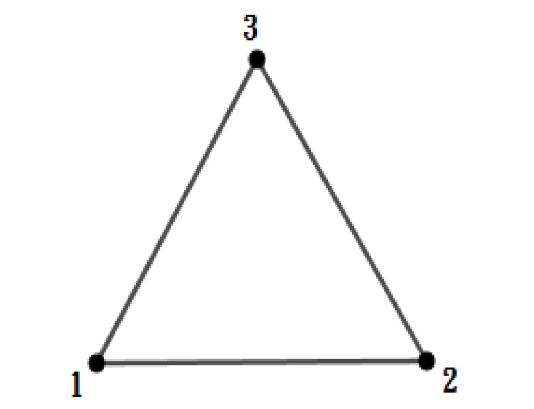
五、完美$G(m,n)$圖：$G(m,n)$圖三角化後所有的三角形皆為公正三角形則稱完美$G(m,n)$圖。



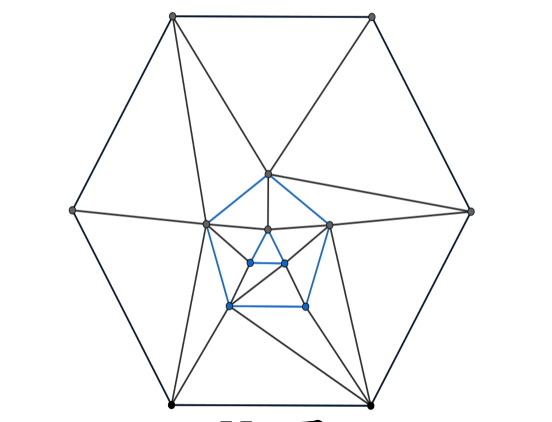
公正三角形



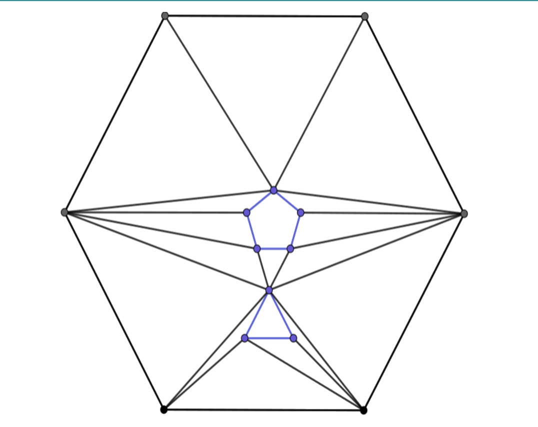
$G(6,2)$圖



$G(3,0)$圖



H_5圖



H_8圖

文獻探討

[尤拉公式]對於任意凸m邊形，必定滿足：$V - E + F = 2$ (V為頂點數；E為邊數；F為面數)。

◎本次專題探討之圖皆為二維空間內的凸m多邊形，因此F為小三角形個數+1。

[公式1]假設一大三角形三頂點內部點有m個點，大三角形上三邊(除三頂點外)有n個點，經由三角化後，三角形個數為$S_\Delta = 1 + 2m + n$，線段個數為$S_e = 3m + 2n + 3$。

[性質1]在一條線段上，若兩端的標號為1、2，且將此線段上點出n個點、分割成$(n+1)$個線段，此n個點的標號皆為1或2，則此$(n+1)$個線段中兩端為1、2標號的個數必為奇數個。

[Sperner引理延伸]在符合*Sperner*引理的規定下，公正三角形的個數必為奇數個。

研究過程及方法

*Sperner*引理證明 → 建立在多邊形下的三角化 → 多邊形下延伸*Sperner*引理 → 探討多邊形下公正三角形個數

→ H_k圖為多邊形探討$\max F(G(m,n))$ → 以$G(3,n)$為例 → 條列$G(m,n)$之可能三角形個數

問題說明

(一)正m多邊形標號條件假設

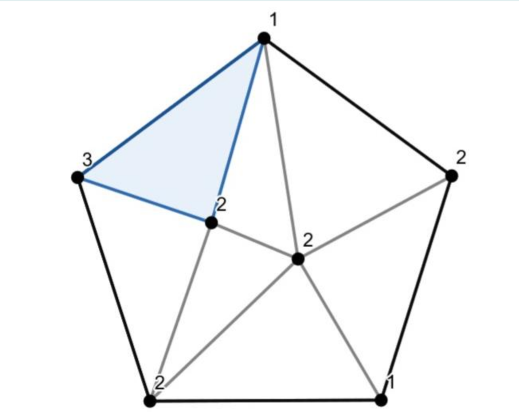
給定一個正m多邊形內部有n個點，其中正m多邊形上的頂點定義為A、B、C……，並且將各點隨機連接成數個小三角形(三角化)。將所有頂點以下述的規定標記：

①頂點 A、B、C ……上的標號為 1、2、3。

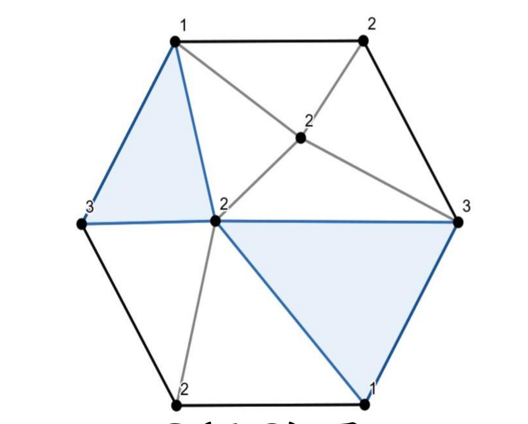
②m個頂點以標號1、2、3標示，且正m多邊形上的相鄰頂點不相同，假設標號1、2、3的個數分別為a、b、c，$a \ge b \ge c$，並符合$|a-b| \le 1$、$|b-c| \le 1$、$|a-c| \le 1$。

③正m多邊形內部n個點可以隨意以 1、2、3 作為標號。

在滿足以上①②③三點，探討公正三角形的存在狀況。



$G(5,2)$圖



$G(6,2)$圖

(二) 正m多邊形標號說明

針對條件②的部分，我們先以正三角、正四邊、正五邊為例：
當為正三角形，可容易得知三個頂點為1、2、3；
當為正四邊形，可知1、2、3三個標號其中一個會多一個，即為1、1、2、3(若為1、2、2、3也會有相同結果)；
當為正五邊形，可知五個頂點為1、1、2、2、3。

[性質2]在多邊形中滿足多邊形的標號條件下，奇多邊形外邊的$E(1,2)$個數必為奇數；偶多邊形外邊的 $E(1,2)$個數必為偶數。

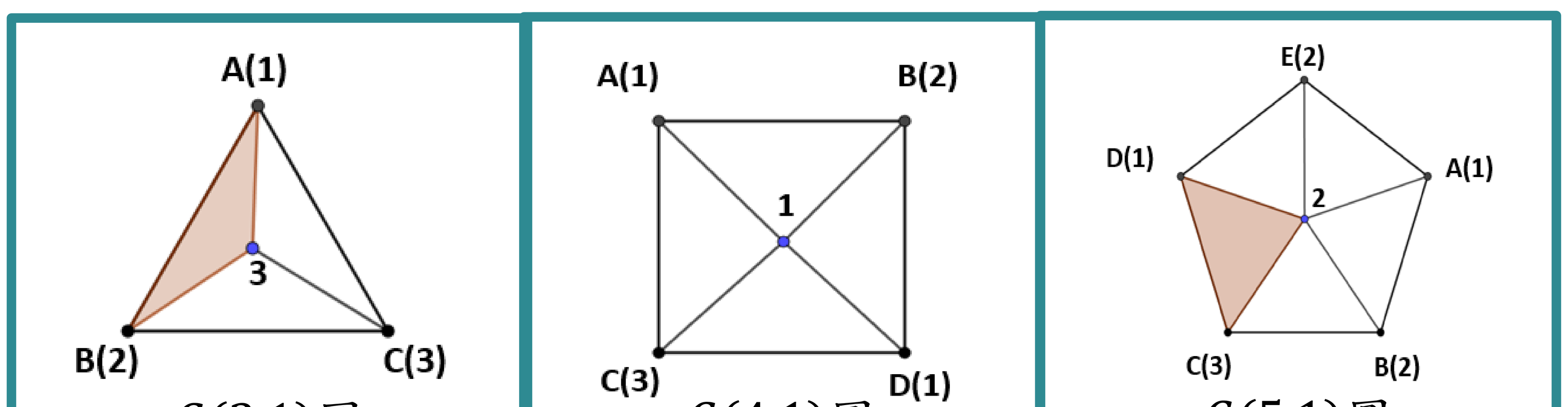
標號下$Sperner$相關延伸性質探討

(一)多邊形內部點分割的三角形個數情形

[公式2]對每一個$G(m,n)$圖，三角形個數$S_{\Delta}=m+2n-2$，線段個數 $S_e=2m+3n-3$。

(二) 在$G(m,n)$圖下公正三角形的奇偶個數討論

[定理一]對於$G(m,n)$圖在符合正m多邊形標號條件下，奇多邊形內公正三角形的個數必為奇數個；偶多邊形內公正三角形的個數必為偶數個。



$G(3,1)$圖 $G(4,1)$圖 $G(5,1)$圖

探討正m多邊形內的相關分割問題

(一)內部點個數不同下，$F(G(m,n_1))$公正三角形個數性質探討

針對上表的相關整理，我們嘗試探討各 $F(G(m,n))$ 圖之狀況，並且發現其集合有相關的性質。

[定理二]若$m_1<m_2$，$m_1,m_2\in$ N，則$F(G(m,n_1))\subseteq F(G(m,n_2))$。
由定理二的整理我們可以知道可形成公正三角形種類的個數一定會隨著內部點個數 n 的增加而遞增，因此能將定理二延伸出另一個性質。

[性質3] $n(F(G(m,n_1)))\le n(F(G(m,n_2)))$。

(二)在$G(m,n)$圖內部點形成的圖標號探討

[定理三] $G(m,n)$圖內部多邊形的H_k圖為多邊形$(n\ge k)$，則內部多邊形H_k的頂點及外部多邊形所連接的邊個數為$(k+m)$。

[定理四]當$m\ge 3, max\ F\big(G(m,0)\big)=m-2$。即若為多邊形之狀況，可被表示為完美圖。

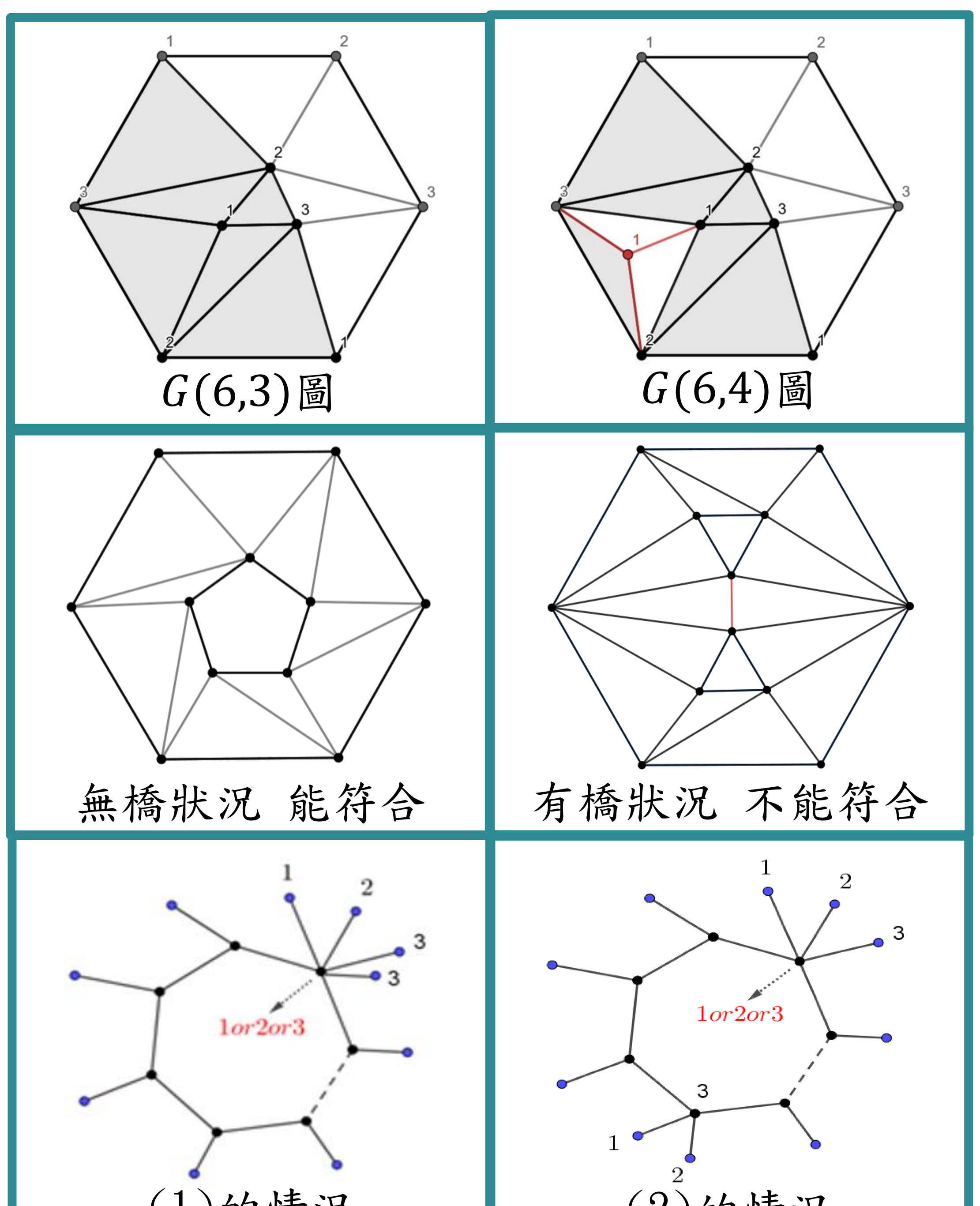
在三角形下$maxF(G(m,n))$之狀況討論

[性質4]若為完美$G(3,n)$圖，且其中的H_k圖若為多邊形，則此多邊形和大三角形各點連接兩次只有三個點，且其中標號分別為1、2、3。

[性質5]若$n=3t, t\in N$，則$max\ F\big(G(3,n)\big)=2n+1$。

[整理1]若為完美$G(3,n)$圖且H_k圖為多邊形，則$n=3t+2s, t\in N, s\in\{0\}\cup N$，即：
$max\ F(G(3,n))=2n+1, n\in N, n=3\vee n\ge 5$。

[整理2]$max\ F\ (G(3,n))=\begin{cases}1, n=1\\3, n=2\\7, n=4\\2n+1, n\in N, n=3\vee n\ge 5\end{cases}$。



$G(6,3)$圖 $G(6,4)$圖

無橋狀況 能符合 有橋狀況 不能符合

(1)的情況 (2)的情況

在多邊形下探討$maxF(G(m,n))$之狀況討論

[定理五]符合**正m多邊形標號條件**下，當$n\ge 5, max\ F\big(G(m,n)\big)=m+2n-2, n\in N, n\ge 5$，即當$n\ge 5$時，$G(m,n)$ 可為完美圖。

研究結果

一、在正多邊形下的相關定理

[定理一]對於$G(m,n)$圖在符合**正m多邊形標號條件**下，奇多邊形內公正三角形的個數必為奇數個；偶多邊形內公正三角形的個數必為偶數個。

[定理三] $G(m,n)$圖內部多邊形的H_k圖為多邊形$(n\ge k)$，則內部多邊形H_k的頂點及外部多邊形所連接的邊個數為$(\mathrm{k}+\mathrm{m})$。

[定理四]當$m\ge 3, max\ F\big(G(m,0)\big)=m-2$。即若為多邊形之狀況，可被表示為完美圖。

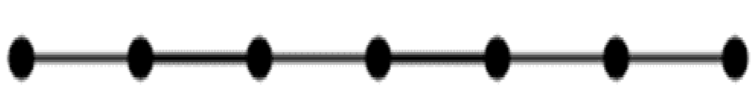
二、$max\ F(G(m,n))$之情況整理

[定理五]符合**正m多邊形標號條件**下，當$n\ge 5, max\ F\big(G(m,n)\big)=m+2n-2, n\in N, n\ge 5$，即當$n\ge 5$時，$G(m,n)$ 可為完美圖。

三、在正三角形下，H_k圖是特殊圖形的完美圖的整理

1. 奇數路徑圖P_{2t+1}

奇數路徑圖P_{2t+1}為總點個數為奇數的簡單圖，以右圖為例為P_7圖：



由下圖可很容易發現各點在進行連線時一定會有點和大三角形的三個點皆連接，故必不會為完美 $G(3,n)$ 圖。

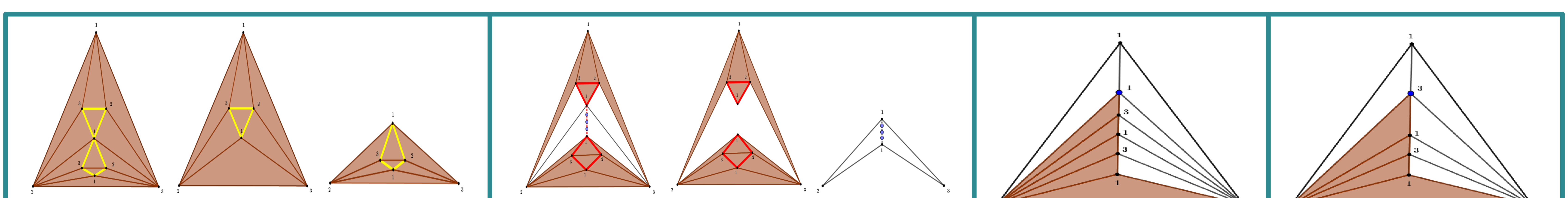
2.偶數路徑圖P_{2t}

偶數路徑圖P_{2t}為總點個數為偶數的簡單圖，以右圖為例為P_6圖：

由上圖可很容易發現各點在進行連線時，一定會有點和大三角形的三個點皆連接，故必不會為完美$G(3,n)$圖。

3.多個多邊形連接(無橋、有橋)

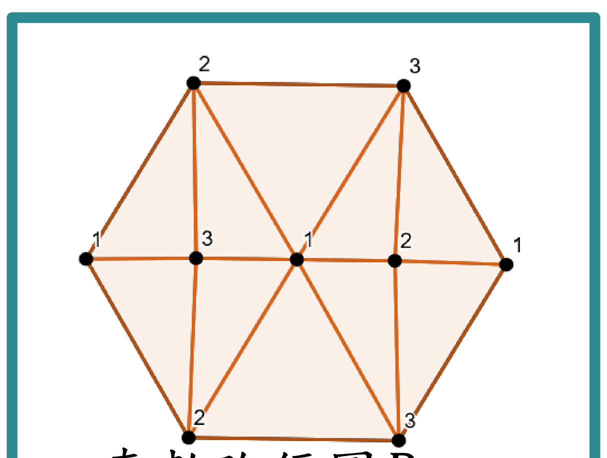
在圖論中，橋代表著當被刪掉後，其中的連通塊數會增加，而本篇研究中為了將H_k圖的情形盡量整理完畢，因此針對各種不同的圖形進行整理。以下是無橋和有橋圖的狀況，且針對這些狀況我們嘗試進行圖的分割，由此可知在無橋的情況下，則能夠符合上述在多邊形的討論，即代表進行分割的過程中，若最後的各個多邊形皆為**點個數不大於6**的多邊形，則能夠形成完美$G(3,n)$圖，進而可以得到其中的上界。而在有橋的情況下，我們能夠發現可以將圖分割成多個多邊形和多個路徑圖P_n，在上述的討論中可以知道路徑圖是無法形成完美$G(3,n)$圖，因此合併後的情況應當無法形成完美$G(3,n)$圖。



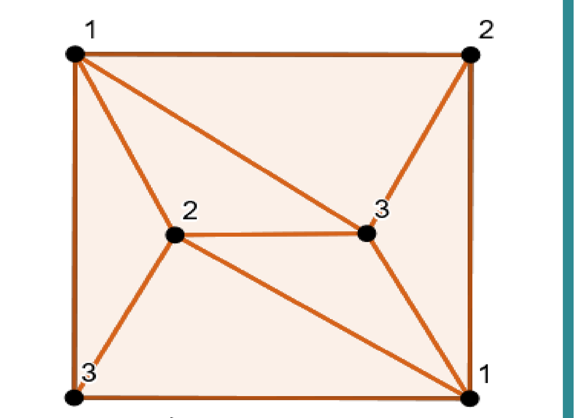
H_k圖內為多邊形且無橋之狀況 H_k圖內為多邊形且有橋之狀況

由以上的內容，我們有以下所發現性質的整理：

H_k圖在正三角形下之情況	是否能形成H_k圖？	完美$G(m,n)$圖是否可能發生？	是否能和其他圖合併成完美圖？
多邊形	是	是	是
奇數路徑圖P_{2t+1}	是	否	否
偶數路徑圖P_{2t}	是	否	否
多個多邊形連接(無橋)	是	是(特定情況)	是(特定情況)
多個多邊形連接(有橋)	是	否	否



奇數路徑圖P_{2t+1}



偶數路徑圖P_{2t}

四、在正m多邊形$(m \geq 4)$下，H_k圖是特殊圖形的完美圖的整理

1. 奇數路徑圖P_{2t+1}

容易得知當為$m = 4,5$時，不會有完美圖的產生，而當$m = 6$時，因為在標號條件下，其標號分別為1,1,2,2,3,3。

2. 偶數路徑圖P_{2t}

容易得知當為$m = 3$時，不會有完美圖的產生，而當$m = 4$時，因為在標號條件下，其標號分別為1,1,2,3。

H_k圖在正三角形下之情況	是否能形成H_k圖？	完美$G(m,n)$圖是否可能發生？
多邊形	是	是
奇數路徑圖P_{2t+1}	是	是，當$m \geq 6$
偶數路徑圖P_{2t}	是	是，當$m \geq 4$

五、在正多邊形下，可能公正三角形個數整理

(一) $G(3,n)$圖

[定理六] $n(F(G(3,n))) = \begin{cases} 4, n = 3 \\ n, n = 1,2,4 \\ n+1, n \geq 5 \end{cases}$。即：當內部點個數不小於5時，所有奇數個可能公正三角形皆能被找出。

(二) $G(m,n)$圖

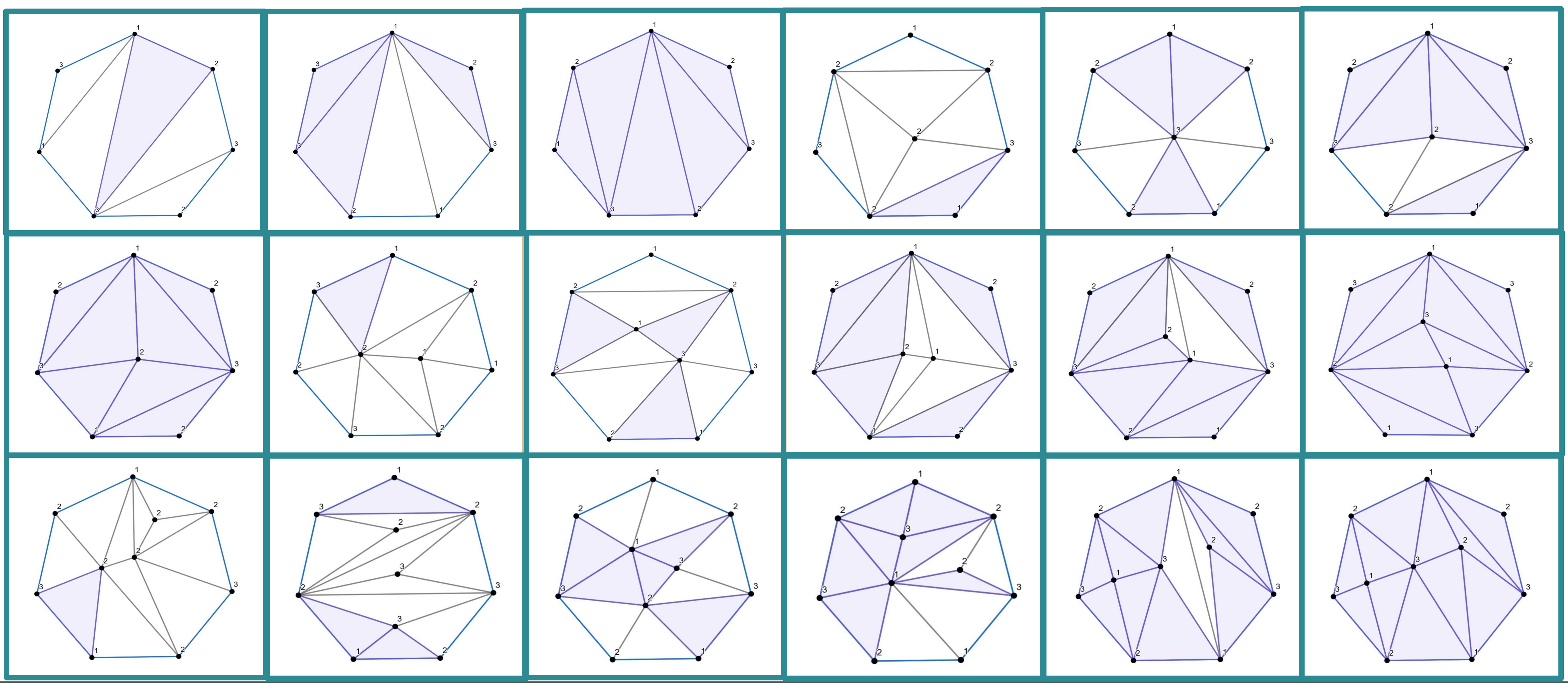
[猜想] 符合正$\boldsymbol{m}$多邊形標號條件下，當$n \geq 5$，$n(F(G(m,n))) = n+1$；即當內部點個數不小於5時，當為奇多邊形，則所有奇數個公正三角形個數皆可被找出、當為偶多邊形，則所有偶數個公正三角形個數皆可被找出。

(三) $G(m,n)$圖可能公正三角形個數總表整理

以下針對內部點較少的情況進行討論，並且嘗試將期中的狀況進行整理。

m \ n	0	1	2	3
3	1	1	1、3	1、3、5、7
4	0、2	0、2	0、2、4、6	0、2、4、6、8
5	1、3	1、3、5	1、3、5、7	1、3、5、7、9
6	0、2、4	0、2、4、6	0、2、4、6、8	0、2、4、6、8、10
7	1、3、5	1、3、5、7	1、3、5、7、9	1、3、5、7、9、11
8	0、2、4、6	0、2、4、6、8	0、2、4、6、8、10	0、2、4、6、8、10、12
9	1、3、5、7	1、3、5、7、9	1、3、5、7、9、11	1、3、5、7、9、11、13

圖形情況	形成三角形個數	形成可能公正三角形個數
$G(3,1)$	3	1
$G(3,2)$	5	1、3
$G(3,3)$	7	1、3、5、7
$G(3,4)$	9	1、3、5、7
$G(3,5)$	11	1、3、5、7、9、11
$G(3,6)$	13	1、3、5、7、9、11、13



討論

本篇研究探討多邊形內公正三角形的情況，一開始從$Sperner$引裡進行思考，並且針對此引理進行性質延伸，原先$Sperner$引理主要探討三角形內的公正三角形狀況，本篇研究將其延伸至任意多邊形。而為了較好進行討論，我們嘗試建立H_k圖，其圖形目前探討至多邊形的狀況。

未來在最大的完美圖希望討論到在H_k圖內多邊形有橋與無橋的狀況，並且更加詳細證明各種情況可能公正三角形個數，最後希望探討出不利用電腦模擬的情況下，探討出可能出現公正三角形的所有情況。

結論

透過公式我們先探討$sperner$引理的性質，它是在正三角形的情況下討論的結果，那麼我們將其引理延伸至多邊形，在多邊形的情況下，我們成功的討論出，H_k圖在多邊形下的公正三角形個數可能之狀況，接著探討出H_k圖為多邊形的情況下$max\ F(G(m,n))$，此部分即為代表著我們得知在正多邊形的情況下其中公正三角形個數之上限，未來我們希望由此進行延伸，探討出H_k圖在不同情況下可能產生的公正三角形個數。

參考文獻

[1]王聖輝、楊璞安、周千貿、許博凱、陳穩緯(民 97)。鬼斧神工－多邊形的分割。中華民國 第 48 屆中小學科學展覽會，未出版，彰化市。

[2]J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, New York: Macmillan,1976.