中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第二名

050417

兩正 n 邊形所圍 2n 邊形交錯邊的 m 次方和

學校名稱：國立鹿港高級中學

作者：	指導老師：
高三 施怡萱	鄭仕豐

關鍵詞：三角函數、正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式、等冪和問題

摘要

本文主要探討兩全等正n邊形之n個邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和關係，參考資料[1]中的原始問題為：『平面上ΔABC與$\Delta A_1B_1C_1$為兩個全等正三角形，且$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$、$U$等六點，又六邊形$PQRSTU$未落在兩正三角形外部時，則$\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$。』我們發現兩組線段的一次方和亦相等，接著推廣到正方形與正五邊形。我們也考慮正n邊形的兩組線段的一次方和與二次方和，並發現如下的規則：『當$0\le m\le n-1$時，兩組線段的m次方和亦相等；而當$m\ge n$時，雖然兩組線段的m次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』

壹、 研究動機

我們在參考資料[1]中發現兩個正三角形部分重疊相交出來的六邊形之交錯邊的二次方和相等的結果，詳見『**引理 1**』，我們實際用 Geogebra 繪圖軟體做了測試，發現結果無誤，於是就想說對於其他的正多邊形是不是也有類似的結果，我們先是用軟體測試，發現在正方形與正五邊形均有類似的結果，最後我們發現『**引理 1**』其實可以推廣到正多邊形，並且我們從正三角形、正方形與正五邊形的證明過程發現如下的規則：『當$0\le m\le n-1$時，兩正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和會相等；而當$m\ge n$時，雖然兩正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』

貳、 研究目的

一、將『**引理 1**』推廣到正n邊形，並探討兩正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的 **m** 次方和是否維持恆等，抑或需滿足特定的條件才會相等。

參、 研究設備及器材

頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體（Microsoft Word, Geogebra5.0）

肆、 研究過程與方法

在參考資料[1]中曾經提到如下『**引理 1**』之結果，詳述如下。

引理 1：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係)

已知平面上ΔABC與$\Delta A_1B_1C_1$為兩個全等的正三角形，且$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$、$U$等六點，且六邊形$PQRSTU$未落在正三角形$ABC$與正三角形$A_1B_1C_1$的外部時，如下圖 L1-1，則

$$\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2。$$

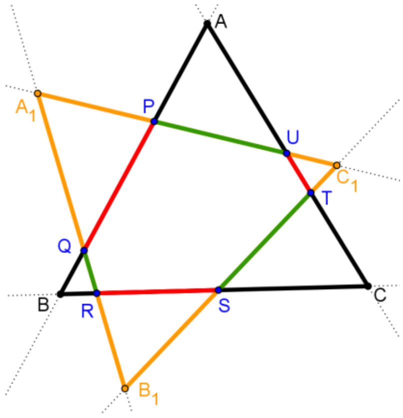


圖 L1-1

證明：參考資料[1]第 156 頁之證明。 $\square$

經使用 Geogebra 軟體測試之後，我們發現『**引理 1**』中，當六邊形 $PQRSTU$ 有部分落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，則其交錯邊之二次方和亦相等，如下之『**引理 2**』。

引理 2：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係)

承『**引理 1**』之前提描述，但是六邊形 $PQRSTU$ 有部分落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，如圖 L2-1 所示，則 $\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$ 。

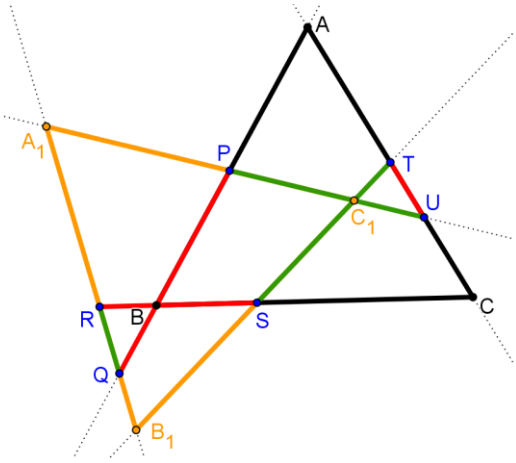


圖 L2-1

證明：

(i) 仿照『**引理一**』之證明步驟(i)與(ii)可得 $\dfrac{S_1+S_2+S_3}{S_1'+S_2'+S_3'}=\dfrac{\overline{UP}^2+\overline{QR}^2+\overline{ST}^2}{\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2}$

(ii) 如圖 L2-1 所示，

$(S_1'+S_2'+S_3')-(S_1+S_2+S_3)$

$=\left[(\Delta A_1PQ\text{面積})+(\Delta B_1RS\text{面積})+(\Delta C_1TU\text{面積})\right]-\left[(\Delta AUP\text{面積})+(\Delta BQR\text{面積})+(\Delta CST\text{面積})\right]$

$=\left[\left((A_1PBR\text{面積})+(\Delta BQR\text{面積})\right)+\left((\Delta B_1RS\text{面積})+(\Delta C_1TU\text{面積})\right)\right]$

$-\left[\left((APC_1T\text{面積})+(\Delta C_1TU\text{面積})\right)+\left((\Delta BQR\text{面積})+(\Delta CST\text{面積})\right)\right]$

$=\left[(\Delta A_1B_1C_1\text{面積})-(PBSC_1\text{面積})\right]-\left[(\Delta ABC\text{面積})-(PBSC_1\text{面積})\right]=0$

推知 $(S_1+S_2+S_3)=(S_1'+S_2'+S_3')$ ，所以 $\dfrac{S_1+S_2+S_3}{S_1'+S_2'+S_3'}=1$ ，故 $\dfrac{\overline{UP}^2+\overline{QR}^2+\overline{ST}^2}{\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2}=1$

，亦即 $\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$

，故得證原命題成立。 $\square$

我們嘗試將『**引理 1**』與『**引理 2**』之結論合併並推廣到正 n 邊形，如下之『**定理 1**』。

定理 1：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 n 邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點，如圖 T1-1 與圖 T1-2，則 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

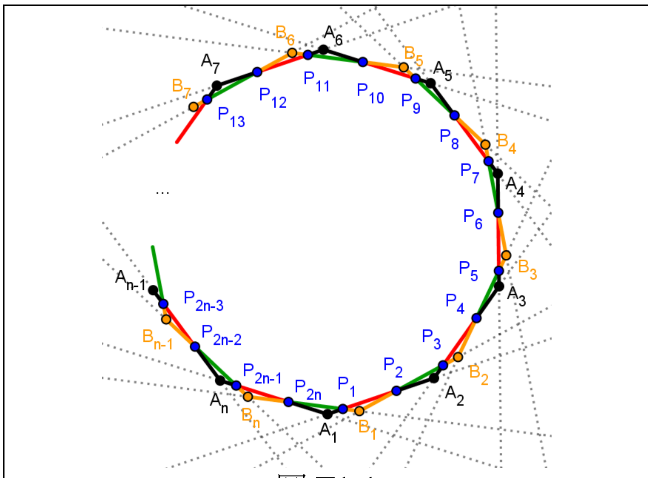


圖 T1-1

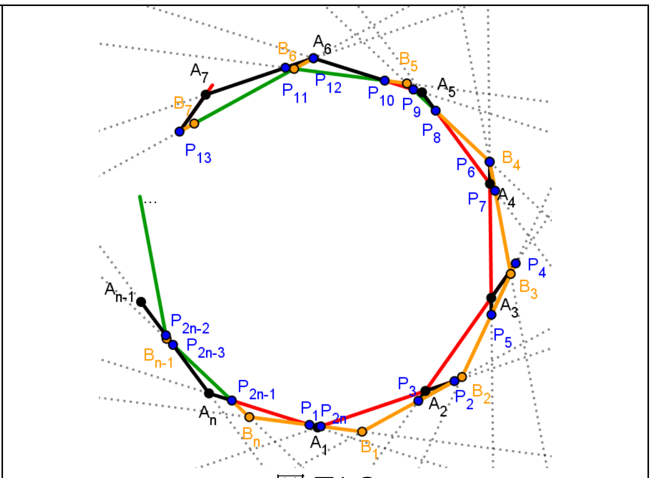


圖 T1-2

證明：

(i) $\because \angle P_{2n}A_1P_1=\angle P_1B_1P_2$ 且 $\angle A_1P_1P_{2n}=\angle B_1P_1P_2$，$\therefore \Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2$ (AA相似)；
同理可得 $\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2$，$\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4$，…，$\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$，$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}\sim\Delta A_1P_1P_{2n}$
，故 $\Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4\sim\cdots\sim\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$。

(ii) 為了方便起見，我們分別以 S_1、S_1'、S_2、S_2'、S_3、S_3'、…、S_n、S_n' 表示 $\Delta A_1P_1P_{2n}$、$\Delta B_1P_1P_2$、$\Delta A_2P_3P_2$、$\Delta B_2P_3P_4$、$\Delta A_3P_5P_4$、$\Delta B_3P_5P_6$、…、$\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}$、$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$ 等 2n 個三角形的面積，則

$$\frac{S_1'}{S_1}=\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}\ ,\ \frac{S_2'}{S_1}=\frac{\overline{P_3P_4}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}\ ,\ \frac{S_3'}{S_1}=\frac{\overline{P_5P_6}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{S_n'}{S_1}=\frac{\overline{P_{2n-1}P_{2n}}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}$$

，n 個等式相加得

$$\frac{S_1'+S_2'+S_3'+\cdots+S_n'}{S_1}=\frac{\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_3P_4}^2+\overline{P_5P_6}^2+\cdots+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k'}{S_1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}\Rightarrow\frac{S_1}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots①\ ;$$

同理可得，

$$\frac{S_2}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_2P_3}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots②\ ;\quad\frac{S_3}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_4P_5}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots③\ ;\quad\cdots\quad\frac{S_n}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots ⓝ\ ;$$

由①+②+③+…+ⓝ得

$$\frac{S_1}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}+\frac{S_2}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}+\frac{S_3}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}+\cdots+\frac{S_n}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}+\frac{\overline{P_2P_3}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}+\frac{\overline{P_4P_5}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}+\cdots+\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}$$

(iii) 又 $\sum_{k=1}^{n}S_k'=(B_1B_2\cdots B_n\text{面積})-(P_1P_2\cdots P_{2n}\text{面積})=(A_1A_2\cdots A_n\text{面積})-(P_1P_2\cdots P_{2n}\text{面積})=\sum_{k=1}^{n}S_k$

推知 $\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=1$，所以 $\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}=1$，亦即 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2$

，故得證原命題成立。 □

經使用 Geogebra 軟體測試之後，我們發現『**引理 1**』中，當六邊形 $PQRSTU$ 未落在兩個正三角形外部時，則其交錯邊之一次方和亦相等，我們亦嘗試了正方形的情形，發現結果亦然，於是我們將之推廣到正 n 邊形，結果詳述如下之『**定理 2**』。

定理 2：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的一次方和關係)

承『**定理 1**』之前提描述，當 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 未落在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在線段 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在線段 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在線段 $\overline{A_3A_4}$ 上、…、P_{2n-1} 與 P_{2n} 均落在線段 $\overline{A_nA_1}$ 上，如圖 T1-1 所示，則 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

證明：

(i) $\because \angle P_{2n}A_1P_1=\angle P_1B_1P_2$ 且 $\angle A_1P_1P_{2n}=\angle B_1P_1P_2$，$\therefore \Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2$ $(AA相似)$；

同理可得 $\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2$，$\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4$，…，$\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$，$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}\sim\Delta A_1P_1P_{2n}$

，故 $\Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4\sim\cdots\sim\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$。

(ii) 為了方便起見，我們分別以 l_1、l_1'、l_2、l_2'、l_3、l_3'、…、l_n、l_n' 表示 $\Delta A_1P_1P_{2n}$、$\Delta B_1P_1P_2$、$\Delta A_2P_3P_2$、$\Delta B_2P_3P_4$、$\Delta A_3P_5P_4$、$\Delta B_3P_5P_6$、…、$\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}$、$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$ 等 2n 個三角形的周長，則

$\frac{l_1'}{l_1}=\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，$\frac{l_2'}{l_1}=\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，$\frac{l_3'}{l_1}=\frac{\overline{P_5P_6}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，…，$\frac{l_n'}{l_1}=\frac{\overline{P_{2n-1}P_{2n}}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，將此 n 個等式相加得

$$\frac{l_1'+l_2'+l_3'+\cdots+l_n'}{l_1}=\frac{\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}}{\overline{P_{2n}P_1}}\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}l_k'}{l_1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overline{P_{2n}P_1}}\Rightarrow\frac{l_1}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots①；$$

同理可得，

$$\frac{l_2}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_2P_3}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots②；\quad\frac{l_3}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_4P_5}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots③；\quad\cdots\quad\frac{l_n}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots ⓝ；$$

由①+②+③+…+ⓝ得

$$\frac{l_1}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}+\frac{l_2}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}+\frac{l_3}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}+\cdots+\frac{l_n}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}+\frac{\overline{P_2P_3}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}+\frac{\overline{P_4P_5}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}+\cdots+\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}l_k}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}$$

(iii) 令 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}=m$，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}=m'$

，且假設 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 之周長分別為 L 與 L'，則

$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n=L+m-m'$，$l_1'+l_2'+l_3'+\cdots+l_n'=L'+m'-m$

$$\Rightarrow\frac{l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n}{l_1'+l_2'+l_3'+\cdots+l_n'}=\frac{L+m-m'}{L'+m'-m}\Rightarrow\frac{m}{m'}=\frac{L+m-m'}{L'+m'-m}\text{ 又}\because L=L'，\frac{m}{m'}=\frac{L+m-m'}{L+m'-m}$$

$mL+mm'-m^2=m'L+mm'-m'^2\Rightarrow mL-m^2-m'L+m'^2=0\Rightarrow L(m-m')-(m^2-m'^2)=0$

$L(m-m')-(m+m')(m-m')=0\Rightarrow(m-m')(L-m-m')=0$

$m=m'$ or $L=m+m'$

(iv) 我們想證明 $L>m+m'$

在 $\Delta A_1P_{2n}P_1$ 中，$\overline{A_1P_{2n}}+\overline{A_1P_1}>\overline{P_{2n}P_1}$；在 $\Delta A_2P_3P_2$ 中，$\overline{A_2P_2}+\overline{A_2P_3}>\overline{P_2P_3}$；

在 $\Delta A_3P_5P_4$ 中，$\overline{A_3P_4}+\overline{A_3P_5}>\overline{P_4P_5}$ ；…在 $\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}$ 中，$\overline{A_nP_{2n-2}}+\overline{A_nP_{2n-1}}>\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}$ ；
將 n 個不等式相加得

$$\overline{A_1P_{2n}}+\overline{A_1P_1}+\overline{A_2P_2}+\overline{A_2P_3}+\overline{A_3P_4}+\overline{A_3P_5}+\cdots+\overline{A_nP_{2n-2}}+\overline{A_nP_{2n-1}}>\overline{P_{2n}P_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots+\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}$$

$$\Rightarrow \overline{A_1P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{A_2P_2}+\overline{A_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{A_3P_4}+\overline{A_3P_5}+\overline{P_5P_6}+\cdots+\overline{A_nP_{2n-2}}+\overline{A_nP_{2n-1}}+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}+\overline{A_1P_{2n}}$$

$$>\overline{P_{2n}P_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots+\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}$$

$$\Rightarrow L>m+m'$$

，故得證原命題成立。 □

引理 3：

設 β 為一任意角，則

(1) $\sin\beta-\sin\left(60^\circ+\beta\right)+\sin\left(120^\circ+\beta\right)=0$

(2) $\cos\beta+\cos\left(120^\circ+\beta\right)+\cos\left(240^\circ+\beta\right)=0$

證明：利用和差化積公式可得證原命題成立。 □

為了將『**定理 1**』中的結果推廣到 m 次方和的情形，我們需要用到『**正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式**』，如下『**引理 4**』所示，詳見參考資料[2]。

引理 4：(正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式)

設 m 為非負整數，則 $\sin^m\theta=\dfrac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_j^m\cos\left[\left(2j-m\right)\theta+90^\circ\times m\right]$ 。

證明：詳見參考資料[2]。

承『**引理 1**』之前提描述，接下來我們想考慮 $\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ 與 $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ 是否會相等，其中 $m\geq 3$ 且 m 是正整數，詳述如下之『**定理 3**』。

定理 3：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ 分別相交於 P、Q、R、S、T、U 等六點，且六邊形 $PQRSTU$ 未落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，又若 $m\geq 3$ 且 m 是正整數，則如下圖 T3-1，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 $\Delta A_1B_1C_1$ 乃由正 ΔABC 平移向量 $\left(a,b\right)$ (a 與 b 為實數)再繞著重心 G 點逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ ，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ 。

(2) 當 $m\geq 3$ 時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』。

(3) 當 $m=3$ 、 $m=4$ 與 $m=5$ 時，則

僅當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』。

(4) 當 $m\geq 6$ 時，則

當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq120^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$與$\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$仍會相等』。

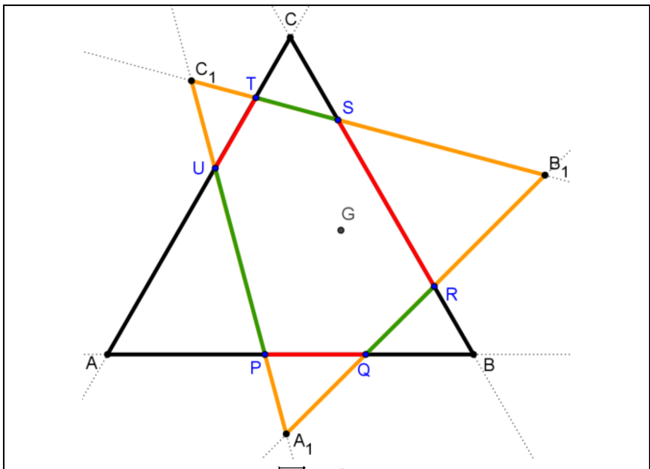


圖 T3-1

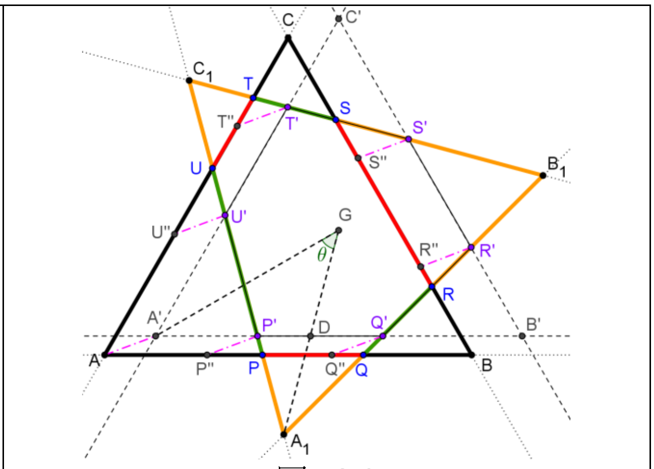


圖 T3-2

證明：設正$\Delta A_1B_1C_1$之重心為G，則

(i) 在不失一般性下，我們可以假設正$\Delta A_1B_1C_1$乃由正ΔABC平移向量(a,b) (a與b為實數)再繞著G點逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，於此我們僅考慮$a$與$b$均為正數之情形，如上圖 T3-2 所示。我們假設正ΔABC平移向量(a,b)後可得正$\Delta A'B'C'$，所以由前述可知G點同為正$\Delta A'B'C'$之重心。為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\frac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$。

(ii) ①為了方便起見，我們假設$\overleftrightarrow{A'B'}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{A'B'}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{C'A'}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{C'A'}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P'$、$Q'$、$R'$、$S'$、$T'$、$U'$等六點，如上圖 T3-2 所示；
②再假設$P''=P'-(a,b)$、$Q''=Q'-(a,b)$、$R''=R'-(a,b)$、$S''=S'-(a,b)$、$T''=T'-(a,b)$、$U''=U'-(a,b)$，如上圖 T3-2 所示。

(iii) 已知正$\Delta A'B'C'$與正$\Delta A_1B_1C_1$之重心同為G點，則我們想先證明$\angle A'GA_1=\angle PQA_1$，詳述如下：設$\overline{A'B'}$與$\overline{GA_1}$相交於$D$點，且令$\angle A'GA_1=\theta$，則

①$\because G$為正$\Delta A'B'C'$之重心，$\therefore\angle GA'D=30^\circ$；又$\because G$為正$\Delta A_1B_1C_1$之重心，$\therefore\angle DA_1Q'=30^\circ$；故$\angle GA'D=\angle DA_1Q'$。

②在$\Delta GA'D$與$\Delta Q'A_1D$中，$\because\angle GA'D=\angle DA_1Q'$且$\angle GDA'=\angle Q'DA_1$，$\therefore\angle A_1Q'D=\angle A'GD=\theta$。

③$\because\overline{AB}//\overline{A'B'}$，$\therefore\angle PQA_1=\angle A_1Q'D$；故可推知$\angle PQA_1=\angle A'GD=\theta$，亦即$\angle A'GA_1=\angle PQA_1$。
(同理可得$\angle RSB_1=\angle R'S'B_1=\angle TUC_1=\angle T'U'C_1=\theta$)

(iv) 承步驟(ii)所述，我們將證明六邊形$P'Q'R'S'T'U'$的六邊長均相等，亦即$\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$，詳述如下：

①連接$\overline{GP'}$，則因為正$\Delta A'B'C'$與正$\Delta A_1B_1C_1$之重心同為G點且該兩正三角形全等，所以$\overline{GA'}=\overline{GA_1}$，進而推知$\angle GA'A_1=\angle GA_1A'$；

②因為正$\Delta A'B'C'$與正$\Delta A_1B_1C_1$之重心同為G點，所以$\angle GA'P'=30^\circ=\angle GA_1P'$；

③上述由①與②得知$\angle GA'A_1-\angle GA'P'=\angle GA_1A'-\angle GA_1P'$，故推知$\angle P'A'A_1=\angle P'A_1A'$，

因此 $\overline{P'A'}=\overline{P'A_1}$；

④考慮 $\Delta A'P'U'$ 與 $\Delta A_1P'Q'$，$\because \angle A'P'U'=\angle A_1P'Q'$，$\overline{P'A'}=\overline{P'A_1}$，且 $\angle P'A'U'=60^\circ=\angle P'A_1Q'$，

$\therefore \Delta A'P'U'\cong\Delta A_1P'Q'$ (ASA 全等性質)，故 $\overline{U'P'}=\overline{P'Q'}$；

⑤同理可得 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}$、$\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}$、$\overline{R'S'}=\overline{S'T'}$、$\overline{S'T'}=\overline{T'U'}$ 與 $\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$，因此得證 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$。

(v) 接下來我們將找出六邊形 $PQRSTU$ 的六邊長 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{ST}$、$\overline{TU}$、$\overline{UP}$ 分別與六邊形 $P'Q'R'S'T'U'$ 的六邊長 $\overline{P'Q'}$、$\overline{Q'R'}$、$\overline{R'S'}$、$\overline{S'T'}$、$\overline{T'U'}$、$\overline{U'P'}$ 的關係，詳述如下。經過一些努力之後，我們發現 $\Delta PP'P''$、$\Delta QQ'Q''$、$\Delta RR'R''$、$\Delta SS'S''$、$\Delta TT'T''$ 與 $\Delta UU'U''$ 等六個三角形之內角均可用步驟(i)中提及的角度 θ 與角度 α 表示之，且由步驟(i)中提及的向量 (a,b)，我們可推知 $\overline{P'P''}=\overline{Q'Q''}=\overline{R'R''}=\overline{S'S''}=\overline{T'T''}=\overline{U'U''}=\sqrt{a^2+b^2}$，詳見下述之圖 T3-3、圖 T3-4、圖 T3-5、圖 T3-6、圖 T3-7 與圖 T3-8。

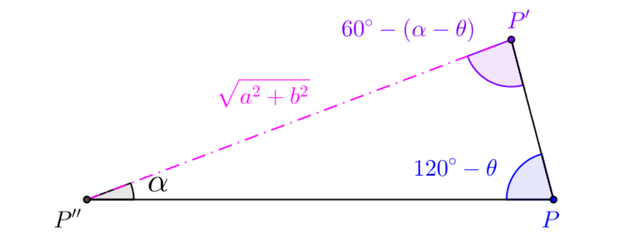


圖 T3-3

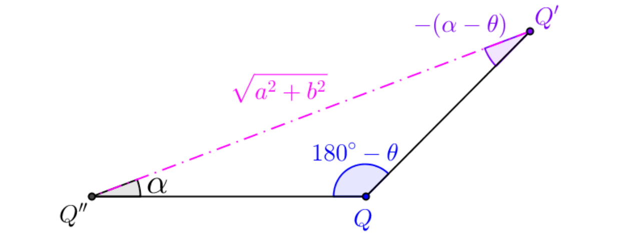


圖 T3-4

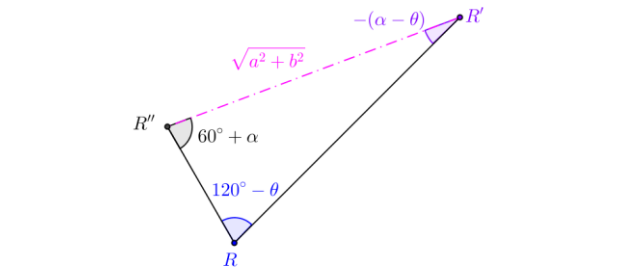


圖 T3-5

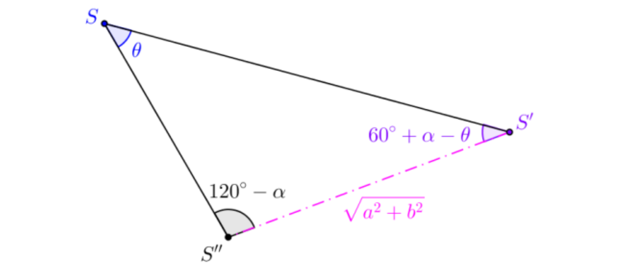


圖 T3-6

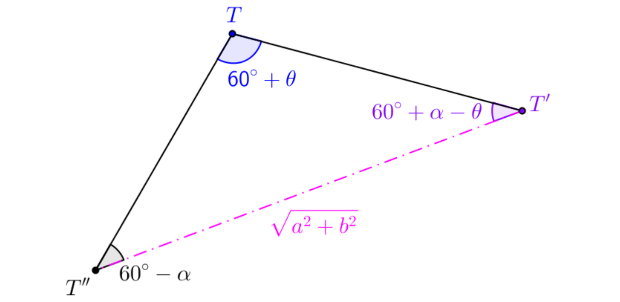


圖 T3-7

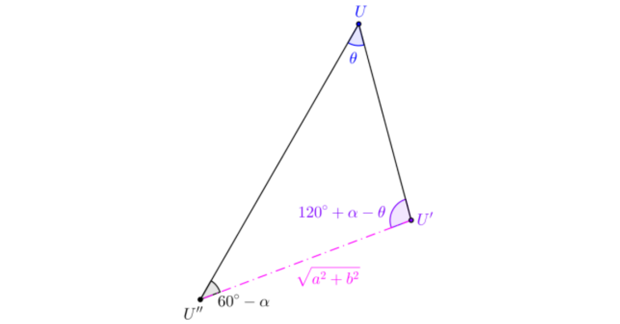


圖 T3-8

(1) 先考慮 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{P'Q'}$ 之關係：

①如上圖 T3-3 所示，在 $\Delta PP'P''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{PP''}}{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\overline{P'P''}}{\sin(120^\circ-\theta)}\Rightarrow\frac{\overline{PP''}}{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(120^\circ-\theta)}\Rightarrow\overline{PP''}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

②如上圖 T3-4 所示，在 $\Delta QQ'Q''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{QQ''}}{\sin\left[-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\overline{Q'Q''}}{\sin(180^\circ-\theta)}\Rightarrow\frac{\overline{QQ''}}{\sin\left[-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(180^\circ-\theta)}\Rightarrow\overline{QQ''}=\frac{-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$$

③由上圖 T3-2，我們可得

$$\overline{PQ}=\overline{P''Q''}-\overline{PP''}+\overline{QQ''}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]\times\sin\theta+\sin(\alpha-\theta)\times\sin\left(120^\circ-\theta\right)\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ-\alpha+2\theta\right)-\cos\left(60^\circ-\alpha\right)\right]\\-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-2\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ-\alpha+2\theta\right)-\cos\left(60^\circ-\alpha\right)\right]\\-\frac{1}{2}\left[-\cos\left(60^\circ-\alpha+2\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ-\alpha\right)+\cos\left(120^\circ-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\left[2\cos\left(90^\circ-\alpha\right)\times\cos30^\circ\right]\right\}$$ (利用和差化積公式)

$$=\overline{P'Q'}-\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]\times\sin\alpha$$

為了方便起見，我們令 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$，則 $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}-u\times\sin\alpha$ 。

(2) 次考慮 $\overline{QR}$ 與 $\overline{Q'R'}$ 之關係：

①如上圖 T3-4 所示，在 $\Delta QQ'Q''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{QQ'}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{Q'Q''}}{\sin\left(180^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\frac{\overline{QQ'}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(180^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\overline{QQ'}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin\left(180^\circ-\theta\right)}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin\theta}$$

②如上圖 T2-5 所示，在 $\Delta RR'R''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{RR'}}{\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}=\frac{\overline{R'R''}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\frac{\overline{RR'}}{\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\overline{RR'}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}$$

③由上圖 T3-2，我們可得

$$\overline{QR}=\overline{Q'R'}+\overline{QQ'}-\overline{RR'}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin\theta}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\sin\alpha\times\sin\left(120^\circ-\theta\right)-\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\times\sin\theta\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha-\theta\right)\right]\\+\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ+\alpha+\theta\right)-\cos\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha-\theta\right)\right]\\+\frac{1}{2}\left[-\cos\left(120^\circ-\alpha-\theta\right)-\cos\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)+\cos\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{-\frac{1}{2}\left[2\cos\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\times\cos 30^\circ\right]\right\}$$ (利用和差化積公式)

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{-\frac{1}{2}\left[2\left(-\sin\left(\alpha-\theta\right)\right)\times\cos 30^\circ\right]\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]\times\sin\left(\alpha-\theta\right)$$

$=\overline{Q'R'}+u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)$，其中 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$ 。

(3) 仿照上述步驟(1)與步驟(2)可得：

$\overline{RS}=\overline{R'S'}+u\times\sin\left(60^\circ+\alpha\right)$ 、 $\overline{ST}=\overline{S'T'}-u\times\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)$

$\overline{TU}=\overline{T'U'}-u\times\sin\left(120^\circ+\alpha\right)$ 、 $\overline{UP}=\overline{U'P'}+u\times\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$

(vi) 令 $L_{3,m,1}=\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ 且 $L_{3,m,2}=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ (符號說明：$L_{3,m,1}$ 足標的第一個數字 3 表示正三角形的『三』，$L_{3,m,1}$ 的足標的第二個數字 m 表示 m 次方和的『 m 』， $L_{3,m,1}$ 足標的第三個數字 1 表示六邊形 $PQRSTU$ 的六邊的第一組邊(即 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{RS}$ 與 $\overline{TU}$)的『一』；類似地， $L_{3,m,2}$ 足標的前兩個數字同 $L_{3,m,1}$ 的足標的前兩個數字的代表意義， $L_{3,m,2}$ 的足標的第三個數字 2 表示六邊形 $PQRSTU$ 的六邊的第二組邊(即 $\overline{QR}$ 、 $\overline{ST}$ 與 $\overline{UP}$)的『二』)，則

承步驟(iv)所述，因為 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$ ，為了方便起見，所以我們再令 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}=r$ ，因此可得

$L_{3,m,1}$

$=\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$

$=\left(r-u\times\sin\alpha\right)^m+\left[r+u\times\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\right]^m+\left[r-u\times\sin\left(120^\circ+\alpha\right)\right]^m$

$=\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\alpha+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q\left(60^\circ+\alpha\right)+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\left(120^\circ+\alpha\right)$

且

$L_{3,m,2}$

$=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$

$$=\left[r+u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)\right]^{m}+\left[r-u\times\sin\left(60^{\circ}+\alpha-\theta\right)\right]^{m}+\left[r+u\times\sin\left(120^{\circ}+\alpha-\theta\right)\right]^{m}$$

$$=\sum_{q=0}^{m}C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\sin^{q}\left(\alpha-\theta\right)+\sum_{q=0}^{m}C_{q}^{m}r^{m-q}(-1)^{q}u^{q}\sin^{q}\left(60^{\circ}+\alpha-\theta\right)+\sum_{q=0}^{m}C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\sin^{q}\left(120^{\circ}+\alpha-\theta\right)\text{；}$$

所以

$$L_{3,m,1}-L_{3,m,2}$$

$$=\sum_{q=0}^{m}\begin{Bmatrix}C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\times\left[(-1)^{q}\sin^{q}\alpha+\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha)+(-1)^{q}\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha)\right]\\-C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\times\left[\sin^{q}(\alpha-\theta)+(-1)^{q}\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha-\theta)+\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha-\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_{q=0}^{m}\begin{Bmatrix}C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\times\left[(-1)^{q}\sin^{q}\alpha+\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha)+(-1)^{q}\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha)\right]\\+C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\times\left[-\sin^{q}(\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha-\theta)-\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha-\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_{q=1}^{m}\left\{C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\times\begin{bmatrix}(-1)^{q}\sin^{q}\alpha+\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha)+(-1)^{q}\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha)\\-\sin^{q}(\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha-\theta)-\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha-\theta)\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\sum_{q=1}^{m}(-1)^{q}C_{q}^{m}r^{m-q}u^{q}\times C_{q}$$

且對於每一個 $q\in\{1,2,3,\cdots,m\}$，我們均定義

$$C_{q}=\begin{bmatrix}\sin^{q}\alpha+(-1)^{q}\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha)+\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha)\\+(-1)^{q+1}\sin^{q}(\alpha-\theta)-\sin^{q}(60^{\circ}+\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^{q}(120^{\circ}+\alpha-\theta)\end{bmatrix}$$

(vii) 我們將證明 $C_1=C_2=C_4=0$，但是『C_3、C_5、$\cdots$、C_m **不保證恆等於 0**』，詳述如下：

①首先我們證明 $C_1=0$ 如下：(部份兩兩分組後，再利用和差化積公式)

$$C_{1}=\sin\alpha-\sin\left(60^{\circ}+\alpha\right)+\sin\left(120^{\circ}+\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(60^{\circ}+\alpha-\theta\right)+\sin\left(120^{\circ}+\alpha-\theta\right)$$

$$=\sin\alpha+2\cos\left(90^{\circ}+\alpha\right)\sin30^{\circ}+\sin\left(\alpha-\theta\right)+2\cos\left(90^{\circ}+\alpha-\theta\right)\sin30^{\circ}$$

$$=\sin\alpha+\cos\left(90^{\circ}+\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\theta\right)+\cos\left(90^{\circ}+\alpha-\theta\right)$$

$$=\sin\alpha-\sin\alpha+\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(\alpha-\theta\right)=0\text{；}$$

②我們證明 $C_2=0$ 如下：

(先利用餘弦函數的二倍角公式，再部份兩兩分組，然後利用和差化積公式)

(註：餘弦函數的二倍角公式 $\cos2\beta=1-2\sin^{2}\beta\Rightarrow\sin^{2}\beta=\dfrac{1-\cos2\beta}{2}$)

$$C_{2}=\sin^{2}\alpha+\sin^{2}\left(60^{\circ}+\alpha\right)+\sin^{2}\left(120^{\circ}+\alpha\right)-\sin^{2}\left(\alpha-\theta\right)-\sin^{2}\left(60^{\circ}+\alpha-\theta\right)-\sin^{2}\left(120^{\circ}+\alpha-\theta\right)$$

$$=\left[\frac{1-\cos2\alpha}{2}\right]+\left[\frac{1-\cos\left(120^{\circ}+2\alpha\right)}{2}\right]+\left[\frac{1-\cos\left(240^{\circ}+2\alpha\right)}{2}\right]$$

$$-\left[\frac{1-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)}{2}\right]-\left[\frac{1-\cos\left(120^{\circ}+2\alpha-2\theta\right)}{2}\right]-\left[\frac{1-\cos\left(240^{\circ}+2\alpha-2\theta\right)}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}\cos2\alpha+\cos\left(120^{\circ}+2\alpha\right)+\cos\left(240^{\circ}+2\alpha\right)\\-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)-\cos\left(120^{\circ}+2\alpha-2\theta\right)-\cos\left(240^{\circ}+2\alpha-2\theta\right)\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left[\cos2\alpha+2\cos\left(180^{\circ}+2\alpha\right)\cos60^{\circ}-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)-2\cos\left(180^{\circ}+2\alpha-2\theta\right)\cos60^{\circ}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left[\cos 2\alpha+\cos\left(180^{\circ}+2\alpha\right)-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)-\cos\left(180^{\circ}+2\alpha-2\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left[\cos 2\alpha-\cos 2\alpha-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)+\cos\left(2\alpha-2\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times 0=0$$

③我們將證明『C_3**不保證恆等於 0**』如下：

(先利用正弦函數的三倍角公式；再部份兩兩分組，然後利用和差化積公式)

(註：正弦函數的三倍角公式 $\sin 3\beta=-4\sin^3\beta+3\sin\beta\Rightarrow\sin^3\beta=\frac{3\sin\beta-\sin 3\beta}{4}$)

$$C_3=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}-\frac{3\sin\left(60^{\circ}+\alpha\right)-\sin\left(180^{\circ}+3\alpha\right)}{4}+\frac{3\sin\left(120^{\circ}+\alpha\right)-\sin\left(360^{\circ}+3\alpha\right)}{4}$$

$$+\frac{3\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(3\alpha-3\theta\right)}{4}-\frac{3\sin\left(60^{\circ}+\alpha-\theta\right)-\sin\left(180^{\circ}+3\alpha-3\theta\right)}{4}+\frac{3\sin\left(120^{\circ}+\alpha-\theta\right)-\sin\left(360^{\circ}+3\alpha-3\theta\right)}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\times\left[\sin\alpha-\sin\left(60^{\circ}+\alpha\right)+\sin\left(120^{\circ}+\alpha\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin 3\alpha-\sin\left(180^{\circ}+3\alpha\right)+\sin\left(360^{\circ}+3\alpha\right)\right]$$

$$+\frac{3}{4}\times\left[\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(60^{\circ}+\alpha-\theta\right)+\sin\left(120^{\circ}+\alpha-\theta\right)\right]$$

$$-\frac{1}{4}\times\left[\sin\left(3\alpha-3\theta\right)-\sin\left(180^{\circ}+3\alpha-3\theta\right)+\sin\left(360^{\circ}+3\alpha-3\theta\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times\left[\sin\alpha+2\cos\left(90^{\circ}+\alpha\right)\sin 30^{\circ}\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin 3\alpha+2\cos\left(270^{\circ}+3\alpha\right)\sin 90^{\circ}\right]$$

$$+\frac{3}{4}\times\left[\sin\left(\alpha-\theta\right)+2\cos\left(90^{\circ}+\alpha-\theta\right)\sin 30^{\circ}\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin\left(3\alpha-3\theta\right)+2\cos\left(270^{\circ}+3\alpha-3\theta\right)\sin 90^{\circ}\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times\left[\sin\alpha+\cos\left(90^{\circ}+\alpha\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin 3\alpha+2\cos\left(270^{\circ}+3\alpha\right)\right]$$

$$+\frac{3}{4}\times\left[\sin\left(\alpha-\theta\right)+\cos\left(90^{\circ}+\alpha-\theta\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin\left(3\alpha-3\theta\right)+2\cos\left(270^{\circ}+3\alpha-3\theta\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times\left[\sin\alpha-\sin\alpha\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin 3\alpha+2\sin 3\alpha\right]+\frac{3}{4}\times\left[\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(\alpha-\theta\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin\left(3\alpha-3\theta\right)+2\sin\left(3\alpha-3\theta\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times 0-\frac{1}{4}\times\left(3\sin 3\alpha\right)+\frac{3}{4}\times 0-\frac{1}{4}\times\left(3\sin\left(3\alpha-3\theta\right)\right)$$

$$=-\frac{3}{4}\times\left[\sin 3\alpha+\sin\left(3\alpha-3\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{3}{4}\times\left[2\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$=-\frac{3}{2}\times\left[\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

④我們將證明 $C_4=0$ 如下：

(過程中我們主要利用餘弦函數的二倍角公式)

$$C_4=\sin^4\alpha+\sin^4(60^{\circ}+\alpha)+\sin^4(120^{\circ}+\alpha)-\sin^4(\alpha-\theta)-\sin^4(60^{\circ}+\alpha-\theta)-\sin^4(120^{\circ}+\alpha-\theta)$$

$$=\left(\sin^2\alpha\right)^2+\left[\sin^2(60^{\circ}+\alpha)\right]^2+\left[\sin^2(120^{\circ}+\alpha)\right]^2-\left[\sin^2(\alpha-\theta)\right]^2-\left[\sin^2(60^{\circ}+\alpha-\theta)\right]^2-\left[\sin^2(120^{\circ}+\alpha-\theta)\right]^2$$

$$=\left[\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right]^2+\left[\frac{1-\cos(120^\circ+2\alpha)}{2}\right]^2+\left[\frac{1-\cos(240^\circ+2\alpha)}{2}\right]^2$$

$$-\left[\frac{1-\cos(2\alpha-2\theta)}{2}\right]^2-\left[\frac{1-\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)}{2}\right]^2-\left[\frac{1-\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)}{2}\right]^2$$

$$=\left[\frac{1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{4}\right]+\left[\frac{1-2\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos^2(120^\circ+2\alpha)}{4}\right]+\left[\frac{1-2\cos(240^\circ+2\alpha)+\cos^2(240^\circ+2\alpha)}{4}\right]$$

$$-\left[\frac{1-2\cos(2\alpha-2\theta)+\cos^2(2\alpha-2\theta)}{4}\right]-\left[\frac{1-2\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos^2(120^\circ+2\alpha-2\theta)}{4}\right]$$

$$-\left[\frac{1-2\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos^2(240^\circ+2\alpha-2\theta)}{4}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos 2\alpha+\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos(240^\circ+2\alpha)\right]\\-\left[\cos(2\alpha-2\theta)+\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos^2 2\alpha+\cos^2(120^\circ+2\alpha)+\cos^2(240^\circ+2\alpha)\right]\\-\left[\cos^2(2\alpha-2\theta)+\cos^2(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos^2(240^\circ+2\alpha-2\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

再由『**引理 3**』得知，

$\cos 2\alpha+\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos(240^\circ+2\alpha)=0$ 且

$\cos(2\alpha-2\theta)+\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)=0$ ，

所以

$$C_4=-\frac{1}{2}\times\{0-0\}$$

$$+\frac{1}{4}\times\begin{Bmatrix}\left[\frac{1+\cos 4\alpha}{2}+\frac{1+\cos(240^\circ+4\alpha)}{2}+\frac{1+\cos(480^\circ+4\alpha)}{2}\right]\\-\left[\frac{1+\cos(4\alpha-4\theta)}{2}+\frac{1+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)}{2}+\frac{1+\cos(480^\circ+4\alpha-4\theta)}{2}\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos 4\alpha+\cos(240^\circ+4\alpha)+\cos(480^\circ+4\alpha)\right]\\-\left[\cos(4\alpha-4\theta)+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)+\cos(480^\circ+4\alpha-4\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos 4\alpha+\cos(120^\circ+4\alpha)+\cos(240^\circ+4\alpha)\right]\\-\left[\cos(4\alpha-4\theta)+\cos(120^\circ+4\alpha-4\theta)+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

再由『**引理 3**』得知，

$\cos 4\alpha+\cos(120^\circ+4\alpha)+\cos(240^\circ+4\alpha)=0$ 且

$\cos(4\alpha-4\theta)+\cos(120^\circ+4\alpha-4\theta)+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)=0$ ，

所以

$$C_4=\frac{1}{8}\times\{0-0\}=0$$

⑤我們將證明『 C_5 **不保證恆等於** 0』如下：

(過程中我們主要利用『**引理 4**』之正弦函數的五次方轉換成餘弦函數和公式)

由『**引理 4**』可得

$\sin^5\beta$

$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_j^5 \cos\left((2j-5)\beta+90^\circ\times 5\right)$$
$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_j^5 \cos\left[(2j-5)\beta+90^\circ\right]$$
$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_j^5 \left\{-\sin\left[(2j-5)\beta\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^{j+1} C_j^5 \left\{\sin\left[(2j-5)\beta\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2^5}\left[-C_0^5\sin(-5\beta)+C_1^5\sin(-3\beta)-C_2^5\sin(-\beta)+C_3^5\sin\beta-C_4^5\sin 3\beta+C_5^5\sin 5\beta\right]$$
$$=\frac{1}{16}\left[10\sin\beta-5\sin 3\beta+\sin 5\beta\right]$$

因此

$$\begin{aligned}
C_5 &= \sin^5\alpha-\sin^5(60^\circ+\alpha)+\sin^5(120^\circ+\alpha)+\sin^5(\alpha-\theta)-\sin^5(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin^5(120^\circ+\alpha-\theta)\\
&=\left[\frac{10\sin\alpha-5\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{16}\right]-\left[\frac{10\sin(60^\circ+\alpha)-5\sin(180^\circ+3\alpha)+\sin(300^\circ+5\alpha)}{16}\right]\\
&\quad+\left[\frac{10\sin(120^\circ+\alpha)-5\sin(360^\circ+3\alpha)+\sin(600^\circ+5\alpha)}{16}\right]+\left[\frac{10\sin(\alpha-\theta)-5\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(5\alpha-5\theta)}{16}\right]\\
&\quad-\left[\frac{10\sin(60^\circ+\alpha-\theta)-5\sin(180^\circ+3\alpha-3\theta)+\sin(300^\circ+5\alpha-5\theta)}{16}\right]\\
&\quad+\left[\frac{10\sin(120^\circ+\alpha-\theta)-5\sin(360^\circ+3\alpha-3\theta)+\sin(600^\circ+5\alpha-5\theta)}{16}\right]\\
&=\frac{10}{16}\times\left[\sin\alpha-\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(120^\circ+\alpha)+\sin(\alpha-\theta)-\sin(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin(120^\circ+\alpha-\theta)\right]\\
&\quad-\frac{5}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 3\alpha-\sin(180^\circ+3\alpha)+\sin(360^\circ+3\alpha)\\+\sin(3\alpha-3\theta)-\sin(180^\circ+3\alpha-3\theta)+\sin(360^\circ+3\alpha-3\theta)\end{array}\right]\\
&\quad+\frac{1}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 5\alpha-\sin(300^\circ+5\alpha)+\sin(600^\circ+5\alpha)\\+\sin(5\alpha-5\theta)-\sin(300^\circ+5\alpha-5\theta)+\sin(600^\circ+5\alpha-5\theta)\end{array}\right]
\end{aligned}$$

再由『**引理 3**』得知，

$\sin\alpha-\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(120^\circ+\alpha)=0$ 且 $\sin(\alpha-\theta)-\sin(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin(120^\circ+\alpha-\theta)=0$ ，

所以

$$\begin{aligned}
C_5 &= \frac{10}{16}\times[0+0]-\frac{5}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 3\alpha+\sin 3\alpha+\sin 3\alpha\\+\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(3\alpha-3\theta)\end{array}\right]\\
&\quad+\frac{1}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 5\alpha-\sin(-60^\circ+5\alpha)+\sin(-120^\circ+5\alpha)\\+\sin(5\alpha-5\theta)-\sin(-60^\circ+5\alpha-5\theta)+\sin(-120^\circ+5\alpha-5\theta)\end{array}\right]\\
&=\frac{10}{16}\times[0+0]-\frac{5}{16}\times\left[3\sin 3\alpha+3\sin(3\alpha-3\theta)\right]\\
&\quad+\frac{1}{16}\times\left\{\begin{array}{l}-\left[\sin(-5\alpha)-\sin(60^\circ-5\alpha)+\sin(120^\circ-5\alpha)\right]\\-\left[\sin(-5\alpha+5\theta)-\sin(60^\circ-5\alpha+5\theta)+\sin(120^\circ-5\alpha+5\theta)\right]\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

再由『**引理 3**』得知，

$\sin(-5\alpha)-\sin(60^\circ-5\alpha)+\sin(120^\circ-5\alpha)=0$ 且

$\sin(-5\alpha+5\theta)-\sin(60^\circ-5\alpha+5\theta)+\sin(120^\circ-5\alpha+5\theta)=0$，

所以

$$
\begin{aligned}
C_5&=-\frac{5}{16}\times\left[3\sin 3\alpha+3\sin(3\alpha-3\theta)\right]+\frac{1}{16}\times\left\{-[0]-[0]\right\}\\
&=-\frac{15}{16}\times\left[\sin 3\alpha+\sin(3\alpha-3\theta)\right]\\
&=-\frac{15}{16}\times\left[2\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]\\
&=-\frac{15}{8}\times\left[\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]
\end{aligned}
$$

(viii)接下來，我們化簡將 C_q (其中 $6\le q\le m$)，過程中我們主要利用『**引理 4**』之正弦函數的 q 次方轉換成餘弦函數和公式，我依 q 之值分成四類情形討論如下

(1). 當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數，則

由『**引理 4**』可得

$$
\begin{aligned}
&\sin^q\beta=\sin^{4t+1}\beta\\
&=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^j C_j^{4t+1}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta+90^\circ\times(4t+1)\right]\\
&=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^j C_j^{4t+1}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta+90^\circ\right]\\
&=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^j C_j^{4t+1}\left[-\sin\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]\\
&=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1} C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&C_q=C_{4t+1}\\
&=\left[\begin{array}{l}\sin^{4t+1}\alpha+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha\right)\\ +(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}\left(\alpha-\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\end{array}\right]\\
&=\left[\sin^{4t+1}\alpha-\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha\right)+\sin^{4t+1}\left(\alpha-\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\\
&=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]\\
&\quad-\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha\right)\right]\\
&\quad+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha\right)\right]\\
&\quad+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]\\
&\quad-\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha\right)\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha\right)\right]\right\}\\+\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]+2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha\right)\right]\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}\\+\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]+2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]\right\}\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\times\left\{\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha\right)\right]+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\times\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{array}\right\}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0,\text{且}j\text{是偶數}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\times\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{array}\right\}\right\}\\ \displaystyle+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0,\text{且}j\text{是奇數}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\times\left\{-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0,\text{且}j\text{是偶數}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}\right\}\\ \displaystyle+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0,\text{且}j\text{是奇數}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}\right\}\end{array}\right\}$$

考慮一般情形之 t 值，則 $q=4t+1$ 且推知 $0\le j\le 4t+1$，此時可得 C_q 之值如下：

(1-1). 我們發現如下(甲)、(乙)、(丙)與(丁)等四個結果：

(甲). 當 j 是偶數且 $j-\frac{(4t+1)-3}{2}=3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}=\frac{3}{2}\ ;$$

(乙). 當 j 是偶數且 $j-\frac{(4t+1)-3}{2}\ne 3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}=0\ ;$$

(丙). 當 j 是奇數且 $j-\frac{(4t+1)-3}{2}=3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=\frac{3}{2}$$；

(丁). 當 j 是奇數且 $j-\frac{(4t+1)-3}{2}\neq 3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=0$$；

我們將分別證明上述(甲)與(乙)等四個結果如下：

(甲).

(甲-1). $\because\ j-\frac{(4t+1)-3}{2}=3v$, $\therefore\ j=(2t-1)+3v$；

又因為 j 是偶數且 $(2t-1)$ 是奇數，所以 v 是奇數。

(甲-2). $\because 0\le j\le 4t+1$, $\therefore 0\le (2t-1)+3v\le 4t+1$，

$$\Rightarrow -2t+1\le 3v\le 2t+2 \ \Rightarrow \frac{-2t+1}{3}\le v\le \frac{2t+2}{3}$$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{-2t+1}{3}\right\rceil \le v\le \left\lfloor \frac{2t+2}{3}\right\rfloor \quad \cdots\cdots\cdots①$$

，其中 $\lfloor x\rfloor$ 是地板函數(高斯函數)，亦即 $\lfloor x\rfloor$ 表示小於或等於 x 的最大整數；$\lceil x\rceil$ 是天花板函數，亦即 $\lceil x\rceil$ 表示大於或等於 x 的最小整數，詳見參考資料[4]。

又 $\because q=4t+1$, $\therefore\ t=\frac{q-1}{4}$，代入上述之①式得

$$\left\lceil \frac{-2\left(\frac{q-1}{4}\right)+1}{3}\right\rceil \le v\le \left\lfloor \frac{2\left(\frac{q-1}{4}\right)+2}{3}\right\rfloor \Rightarrow \left\lceil \frac{-q+3}{6}\right\rceil \le v\le \left\lfloor \frac{q+3}{6}\right\rfloor$$。

(註：若 $q=5$，則 $\left\lceil \frac{-5+3}{6}\right\rceil \le v\le \left\lfloor \frac{5+3}{6}\right\rfloor \Rightarrow 0\le v\le 1\Rightarrow v=0$ 或 1，

又因為 v 是奇數，所以 $v=1$。)

(甲-3). 此時，$2j-(4t+1)=2\left[(2t-1)+3v\right]-(4t+1)=6v-3$。

(註：若 $q=5$，則 $v=1\Rightarrow\left(2j-(4t+1)\right)=(6v-3)=3$。)

(甲-4). 由上述步驟(甲-1)與(甲-3)之結果得知

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(6v-3\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}+\sin\left(180^{\circ}\times v-90^{\circ}\right)\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\sin 90^{\circ}\right\}=\left\{\frac{1}{2}+1\right\}=\frac{3}{2}$$

，故得證命題(甲)成立。

(乙). 仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(丙). 仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(丁). 仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(1-2). 利用上述命題(甲)、(乙)、(丙)與(丁)等四個結果，我們可以將 C_q 的值化簡如下：

$$C_q = C_{4t+1}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2^{4t+1}} \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ ,\text{且}j\text{是偶數}}}^{4t+1} (-1)^{j+1} C_j^{4t+1} \left\{ \begin{array}{l} 4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \times \cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\ \times \left\{\dfrac{1}{2} + \sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\} \end{array} \right\} \\ + \dfrac{1}{2^{4t+1}} \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ ,\text{且}j\text{是奇數}}}^{4t+1} (-1)^{j+1} C_j^{4t+1} \left\{ \begin{array}{l} 4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \times \cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\ \times \left\{\dfrac{1}{2} - \sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2^q} \displaystyle\sum_{\substack{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil \\ ,\text{且}v\text{是奇數}}}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-1}{2}} C^q_{\frac{q+6v-3}{2}} \left\{ 4\sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \times \cos\left[(6v-3)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \times \left\{\dfrac{3}{2}\right\} \right\} \\ + \dfrac{1}{2^q} \displaystyle\sum_{\substack{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil \\ ,\text{且}v\text{是偶數}}}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-1}{2}} C^q_{\frac{q+6v-3}{2}} \left\{ 4\sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \times \cos\left[(6v-3)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \times \left\{\dfrac{3}{2}\right\} \right\} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{3}{2^{q-1}} \sum_{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-1}{2}} C^q_{\frac{q+6v-3}{2}} \left\{ \sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] \times \cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\}$$

(2).當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q = C_{4t+2} = -\frac{3}{2^{q-1}} \sum_{v=\left\lceil\frac{-q+6}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+6}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-4}{2}} C^q_{\frac{q+6v-6}{2}} \left\{ \sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] \times \sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\}$$

(3).當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q = C_{4t+3} = \frac{3}{2^{q-1}} \sum_{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-3}{2}} C^q_{\frac{q+6v-3}{2}} \left\{ \sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] \times \cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\}$$

(4).當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q = C_{4t} = -\frac{3}{2^{q-1}} \sum_{v=\left\lceil\frac{-q+6}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+6}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-6}{2}} C^q_{\frac{q+6v-6}{2}} \left\{ \sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] \times \sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\}$$

故『$L_{3,m,1}-L_{3,m,2}$ **不保證恆等於 0**』，也就是說『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』。

(ix) 承上述步驟(viii)所述，雖然『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』，其中 $m\geq 3$ 且 m 是正整數，但我們想進一步的了解要滿足什麼條件，才可以確定『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』，詳述如下：

$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$

$\Rightarrow L_{3,m,1}-L_{3,m,2}=0$

$\Rightarrow \sum_{q=1}^{m}(-1)^q C_q^m r^{m-q}u^q \times C_q=0$

，其中 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$ ，$r=\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$ ，且 C_q 如上述步驟(vi)中之定義，C_q 之值依 q 之值分別為 $q=4t+1$ 、 $q=4t+2$ 、 $q=4t+3$ 、 $q=4t$ 分成四大類，其中 t 是非負整數，如上頁所示：

我們發現如下兩個結果：

(1) 當『 $b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』時， $C_q=0$ 。

理由如下：

$$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)\Rightarrow \frac{b}{a}=\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)\Rightarrow \tan\alpha=\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2$ ，其中 t_2 是整數 ，

推知

(1-1). $$\sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-3)\left(\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$
$$=\sin\left[(6v-3)\left(60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)\right]=\sin\left[(2v-1)(t_1+3t_2)\times 180^\circ\right]=0$$

(1-2). $$\sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-6)\left(\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$
$$=\sin\left[(6v-6)\left(60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)\right]=\sin\left[(2v-2)(t_1+3t_2)\times 180^\circ\right]=0$$

故得證當『 $b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』時，$C_q=0$ 。

(2) 當『 θ=60°』時， $C_q=0$ 。

理由如下：

(2-1). $$\cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\cos\left[(6v-3)\left(\frac{60^\circ}{2}\right)\right]=\cos\left[(2v-1)\times 90^\circ\right]=0$$

(2-2). $$\sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-6)\left(\frac{60^\circ}{2}\right)\right]=\sin\left[(v-1)\times 180^\circ\right]=0$$

故得證當『 θ=60°』時， $C_q=0$ 。

(3) 綜合上述(1)與(2)得知，

當『 $b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』或『 θ=60°』時，

『 $\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』，故得證原命題成立。 □

接下來，我們開始去思考兩正方形所圍八邊形之交錯邊的三次方和是否會相等，經過努力發現答案是肯定的，詳述如下之『**定理 4**』。

定理 4：(兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的三次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為兩個全等的正方形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8 等八點，當八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 未落在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在線段 $\overline{A_1A_2}$ 上、 P_3 與 P_4 均落在線段 $\overline{A_2A_3}$ 上、 P_5 與 P_6 均落在線段 $\overline{A_3A_4}$ 上、 P_7 與 P_8 均落在線段 $\overline{A_4A_1}$ 上，如下圖 T4-0-1 與圖 T4-0-2，則

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3=\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$ 。

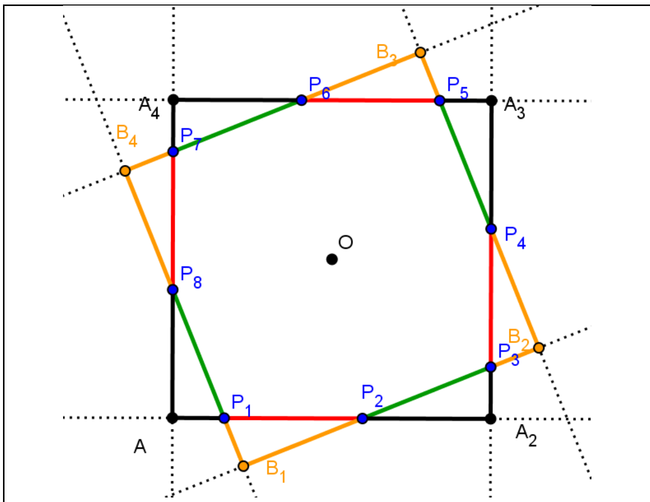


圖 T4-0-1

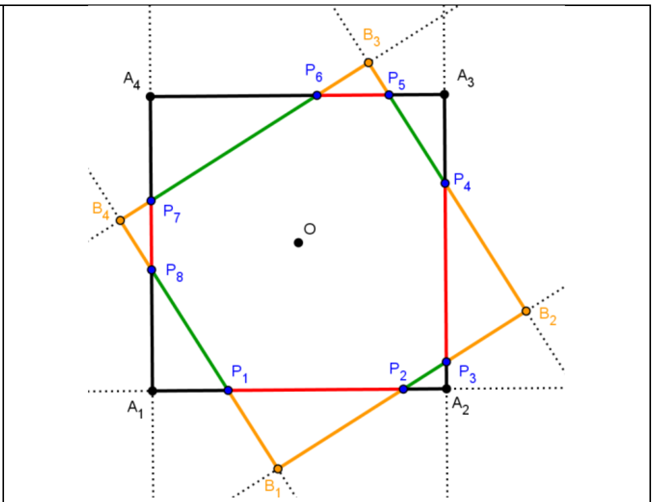


圖 T4-0-2

證明：

(i) 依題意可知，$A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 兩個正方形之圖形的相對關係大致上可分成如下兩大類：

(1) 第一類情形：

正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度 θ 而得，如下圖 T4-1 所示。

(2) 第二類情形：

正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量(a,b)(a,b 為任意實數)再繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度 θ 而得，如下圖 T4-2 所示。(正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量(a,b)可得正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ ，其中 a,b 為任意實數使得八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 未落在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 的外部)

註明：正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 與正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 之各邊相交情形如下：

$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_4B_1}$、$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$、$\overline{A_4'A_1'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$ 、 $\overline{A_4'A_1'}$ 與 $\overline{B_4B_1}$ 分別相交於 P_1' 、 P_2' 、…、 P_8' 等八點，如下圖 T4-2 所示。

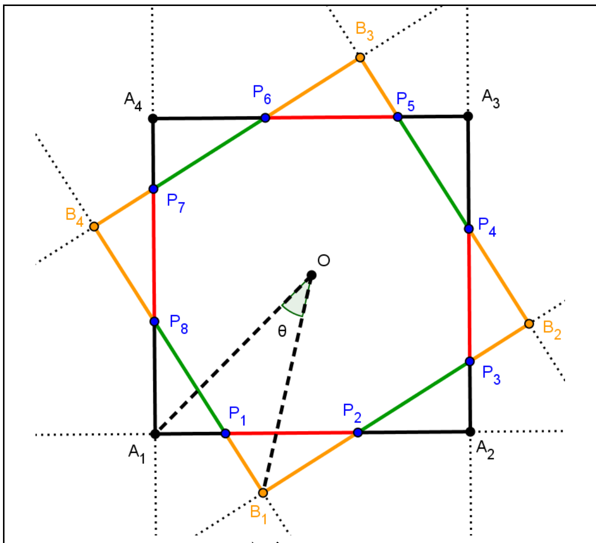


圖 T4-1

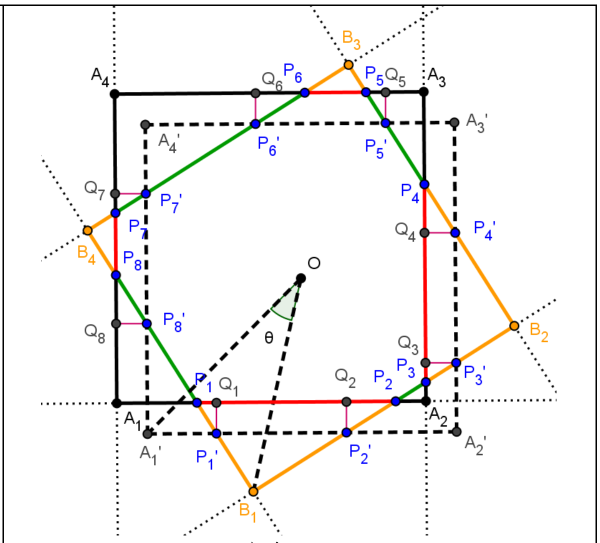


圖 T4-2

(ii) 我們依序證明第(1)類與第(2)類情形如下：

(1) 第(1)類情形：

如圖 T4-1 所示，

$\because \angle P_8A_1P_1 = 90^\circ = \angle P_2B_1P_1$， $\angle P_8P_1A_1 = \angle P_2P_1B_1$，

又 $\overline{A_1O} = \overline{B_1O} \Rightarrow \angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 + 45^\circ = \angle P_1B_1A_1 + 45^\circ \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 = \angle P_1B_1A_1 \Rightarrow \overline{A_1P_1} = \overline{B_1P_1}$，

$\therefore \Delta A_1P_1P_8 \cong \Delta B_1P_1P_2$ (ASA 全等) $\Rightarrow \overline{P_8P_1} = \overline{P_1P_2}$，

同理可得 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$， $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$， $\overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6}$， $\overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7}$， $\overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8}$， $\overline{P_7P_8} = \overline{P_8P_1}$

，故 $\overline{P_8P_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8}$

$\therefore \overline{P_8P_1}^3 = \overline{P_1P_2}^3 = \overline{P_2P_3}^3 = \overline{P_3P_4}^3 = \overline{P_4P_5}^3 = \overline{P_5P_6}^3 = \overline{P_6P_7}^3 = \overline{P_7P_8}^3$

$\overline{P_1P_2}^3 + \overline{P_3P_4}^3 + \overline{P_5P_6}^3 + \overline{P_7P_8}^3 = \overline{P_8P_1}^3 + \overline{P_2P_3}^3 + \overline{P_4P_5}^3 + \overline{P_6P_7}^3$

，故得證原命題成立。

(2) 第(2)類情形：

(2-1) 如圖 T4-2 所示，

我們先證明 $\angle A_1'OB_1 = \angle B_1P_2P_1$，詳述如下：

設 $\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{OB_1}$ 相交於 C_1 點，且令 $\angle A_1'OB_1 = \theta$，則

①$\because O$ 為正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 之中心點，$\therefore \angle OA_1'C_1 = 45^\circ$；又$\because O$ 為正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 之中心點，$\therefore \angle C_1B_1P_2' = 45^\circ$；故 $\angle OA_1'C_1 = \angle C_1B_1P_2'$。

②在 $\Delta OA_1'C_1$ 與 $\Delta P_2'B_1C_1$ 中， $\angle OA_1'C_1 = \angle C_1B_1P_2'$ 且 $\angle OC_1A_1' = \angle P_2'C_1B_1$，

$\therefore \angle B_1P_2'C_1 = \angle A_1'OC_1 = \theta$。

③$\because \overline{A_1A_2} // \overline{A_1'A_2'}$， $\therefore \angle B_1P_2'C_1 = \angle B_1P_2P_1$；故可推知 $\angle B_1P_2P_1 = \angle A_1'OC_1 = \theta$，亦即 $\angle B_1P_2P_1 = \angle A_1'OB_1$。

(2-2) $\because \Delta A_1P_1P_8 \sim \Delta B_1P_1P_2 \sim \Delta A_2P_3P_2 \sim \Delta B_2P_3P_4 \sim \Delta A_3P_5P_4 \sim \Delta B_3P_5P_6 \sim \Delta A_4P_7P_6 \sim \Delta B_4P_7P_8$

$\therefore \angle B_1P_2P_1 = \angle A_2P_2P_3 = \angle B_2P_4P_3 = \angle A_3P_4P_5 = \angle B_3P_6P_5 = \angle A_4P_6P_7 = \angle B_4P_8P_7 = \angle A_1P_8P_1 = \theta$

(2-3) $\because$ 正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 與正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 相交之情形符合第(1)類情形，

$\therefore \overline{P_1'P_2'}^3 + \overline{P_3'P_4'}^3 + \overline{P_5'P_6'}^3 + \overline{P_7'P_8'}^3 = \overline{P_8'P_1'}^3 + \overline{P_2'P_3'}^3 + \overline{P_4'P_5'}^3 + \overline{P_6'P_7'}^3$

(2-4) 如圖 T4-2 所示，設 P_1' 與 P_2' 在 $\overline{A_1A_2}$ 上之投影點分別為 Q_1 與 Q_2，P_3' 與 P_4' 在 $\overline{A_2A_3}$ 上之投影點分別為 Q_3 與 Q_4，P_5' 與 P_6' 在 $\overline{A_3A_4}$ 上之投影點分別為 Q_5 與 Q_6，P_7' 與 P_8' 在 $\overline{A_4A_1}$ 上之投影點分別為 Q_7 與 Q_8，則

① $\overline{P_1P_2}=\overline{P_1'P_2'}+\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}=\overline{P_1'P_2'}+\dfrac{b}{\tan\theta}+b\times\tan\theta=\overline{P_1'P_2'}+b\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+\tan\theta\right)=\overline{P_1'P_2'}+\dfrac{2b}{\sin 2\theta}$

② $\overline{P_2P_3}=\overline{P_2'P_3'}-\overline{P_2P_2'}-\overline{P_3P_3'}=\overline{P_2'P_3'}-\dfrac{b}{\sin\theta}-\dfrac{a}{\cos\theta}$

③ $\overline{P_3P_4}=\overline{P_3'P_4'}+\overline{P_3Q_3}+\overline{P_4Q_4}=\overline{P_3'P_4'}+a\times\tan\theta+\dfrac{a}{\tan\theta}=\overline{P_3'P_4'}+a\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)=\overline{P_3'P_4'}+\dfrac{2a}{\sin 2\theta}$

④ $\overline{P_4P_5}=\overline{P_4'P_5'}-\overline{P_4P_4'}+\overline{P_5P_5'}=\overline{P_4'P_5'}-\dfrac{a}{\sin\theta}+\dfrac{b}{\cos\theta}$

⑤ $\overline{P_5P_6}=\overline{P_5'P_6'}-\overline{P_5Q_5}-\overline{P_6Q_6}=\overline{P_5'P_6'}-b\times\tan\theta-\dfrac{b}{\tan\theta}=\overline{P_5'P_6'}-b\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)=\overline{P_5'P_6'}-\dfrac{2b}{\sin 2\theta}$

⑥ $\overline{P_6P_7}=\overline{P_6'P_7'}+\overline{P_6P_6'}+\overline{P_7P_7'}=\overline{P_6'P_7'}+\dfrac{b}{\sin\theta}+\dfrac{a}{\cos\theta}$

⑦ $\overline{P_7P_8}=\overline{P_7'P_8'}-\overline{P_7Q_7}-\overline{P_8Q_8}=\overline{P_7'P_8'}-a\times\tan\theta-\dfrac{a}{\tan\theta}=\overline{P_7'P_8'}-a\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)=\overline{P_7'P_8'}-\dfrac{2a}{\sin 2\theta}$

⑧ $\overline{P_8P_1}=\overline{P_8'P_1'}+\overline{P_8P_8'}-\overline{P_1P_1'}=\overline{P_8'P_1'}+\dfrac{a}{\sin\theta}-\dfrac{b}{\cos\theta}$

(2-5) 因為 $\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\overline{P_4'P_5'}=\overline{P_5'P_6'}=\overline{P_6'P_7'}=\overline{P_7'P_8'}=\overline{P_8'P_1'}$，為了方便起見，所以我們再令 $\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\cdots=\overline{P_8'P_1'}=r$，因此可得

$$\begin{aligned}
&\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3\\
&=\left(r+\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+\left(r+\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3+\left(r-\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+\left(r-\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3\\
&=r^3+3r^2\times\frac{2b}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^2+\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+r^3+3r^2\times\frac{2a}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^2+\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3\\
&\quad+r^3-3r^2\times\frac{2b}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^2-\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+r^3-3r^2\times\frac{2a}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^2-\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3\\
&=3r^3+3\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^2\times(r+r)+3\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^2\times(r+r)\\
&=3r^3+6r\times\frac{4a^2+4b^2}{(\sin 2\theta)^2}=3r^3+24r\times\frac{a^2+b^2}{(\sin 2\theta)^2}
\end{aligned}$$

(2-6) $\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$

$$\begin{aligned}
&=\left(r+\frac{a}{\sin\theta}-\frac{b}{\cos\theta}\right)^3+\left(r-\frac{b}{\sin\theta}-\frac{a}{\cos\theta}\right)^3+\left(r-\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\right)^3+\left(r+\frac{b}{\sin\theta}+\frac{a}{\cos\theta}\right)^3\\
&=r^3+\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^3-\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+3r^2\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)\\
&\quad+3r^2\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)-3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)-6r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$+r^3-\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^3-\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2-3r^2\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)$$

$$-3r^2\times\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)-3\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2-3\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)+6r\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)$$

$$+r^3+\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^3-\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+3r^2\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)$$

$$-3r^2\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)+3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2-3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)-6r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)$$

$$+r^3+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^3+\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+3r^2\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)$$

$$+3r^2\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)+3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)+6r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)$$

$$=3r^3+3r\times\left(\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2\right)$$

$$=3r^3+3r\times\left(\frac{a^2+b^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}\times 2\right)=3r^3+6r\times\left(\frac{4\times\left(a^2+b^2\right)}{(\sin 2\theta)^2}\right)=3r^3+24r\times\frac{a^2+b^2}{(\sin 2\theta)^2}$$

(2-7) 由上述步驟(2-5)與(2-6)得知

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3=\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$

，故得證原命題成立。 □

接下來我們想考慮$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$與$\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$是否會相等，其中$m\geq 4$且$m$是正整數，詳述如下之『**定理 5**』。

定理 5：(兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

承『**定理 4**』之前提描述，又若$m\geq 4$且m是正整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正方形$B_1B_2B_3B_4$乃由正方形$A_1A_2A_3A_4$平移向量(a,b)（a與b為實數)再繞著中心點O逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當$m\geq 4$時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$**與**$\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$**不再維持恆等**』。

(3) 當$m=4$與$m=5$時，則

僅當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq 90^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 270^\circ$』時，

『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$**與**$\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$**仍會相等**』。

(4) 當$m\geq 6$時，則

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq 90^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 270^\circ$』時，

『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$**與**$\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$**仍會相等**』。

證明：仿照定理 3 之證明方式可證明原命題成立。 □

在『**定理 4**』中，我們考慮了兩全等正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的三次方和會相等，於此我們將『**定理 5**』的結果推廣到兩個全等正五邊形的情形，發現也有類似的結果，詳述如下『**定理 6**』。

定理 6：(兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的三次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為兩個全等的正五邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_5B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$與$\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$與$\overleftrightarrow{B_5B_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、P_9、P_{10} 等十點，當十邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}$ 未落在正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在 $\overline{A_3A_4}$ 上、P_7 與 P_8 均落在 $\overline{A_4A_5}$ 上、P_9 與 P_{10} 均落在 $\overline{A_5A_1}$ 上，如下圖 T6-0-1 與 T6-0-2，則

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3=\overline{P_{10}P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3$ 。

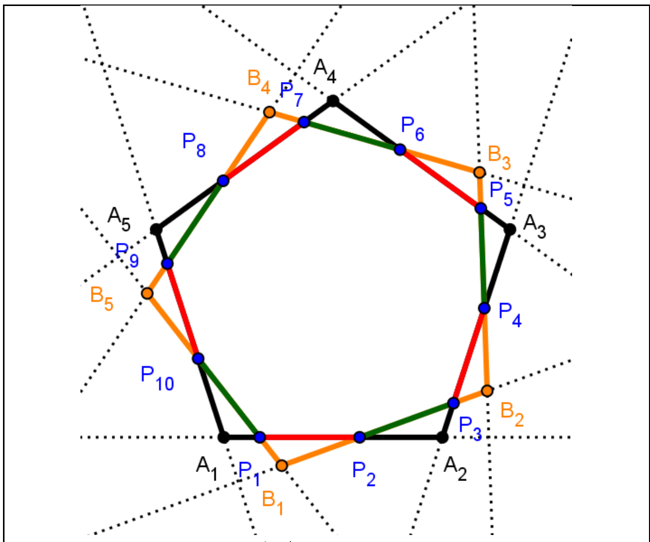


圖 T6-0-1

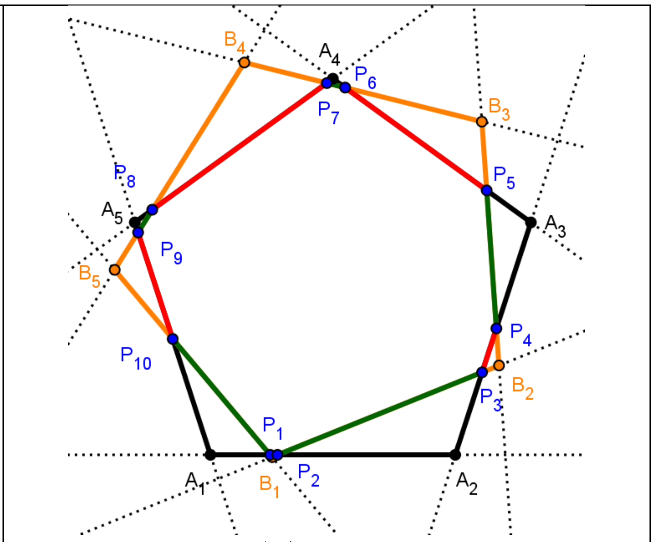


圖 T6-0-2

證明：

(i) 依題意可知，$A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 兩個正五邊形之圖形的相對關係大致上可分成如下兩大類：

(1) 第一類情形：

正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度θ而得，如下圖 T6-1 所示。

(2) 第二類情形：

正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量(a,b)(a,b 為任意實數)再繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度θ而得，如下圖 T6-2 所示。(正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量(a,b)(a,b 為任意實數)後可得正五邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$)

註明：正五邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ 與正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 之各邊相交情形如下：

$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_5B_1}$、$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$、$\overline{A_4'A_5'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$、$\overline{A_4'A_5'}$ 與 $\overline{B_4B_5}$、$\overline{A_5'A_1'}$ 與 $\overline{B_4B_5}$、$\overline{A_5'A_1'}$ 與 $\overline{B_5B_1}$ 分別相交於 P_1'、P_2'、…、P_{10}' 等十點，如下圖 T6-2 所示。

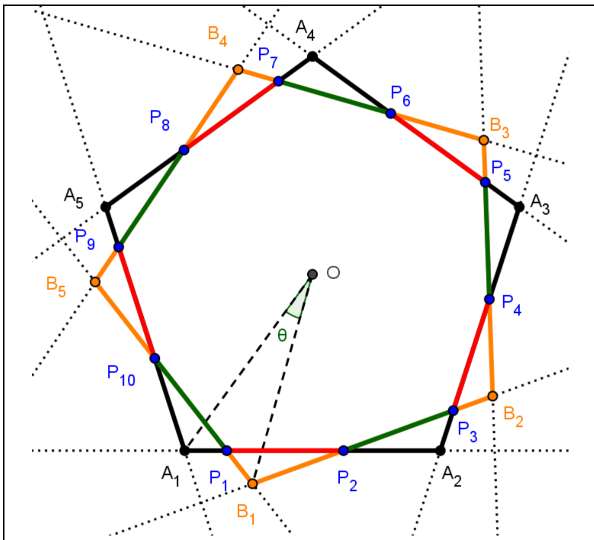


圖 T6-1

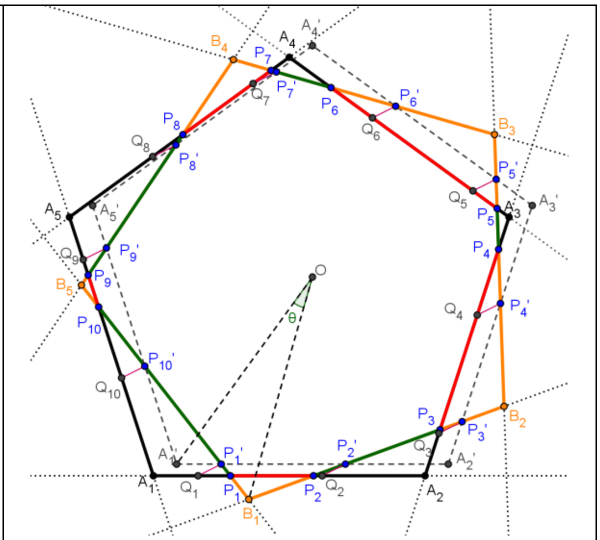


圖 T6-2

(ii) 我們依序證明第(1)類與第(2)類情形如下：

(1) 第(1)類情形，如圖 T6-1 所示，

$\because \angle P_{10}A_1P_1 = 108^\circ = \angle P_2B_1P_1$ ， $\angle P_{10}P_1A_1 = \angle P_2P_1B_1$ ，

又 $\overline{A_1O} = \overline{B_1O} \Rightarrow \angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 + 54^\circ = \angle P_1B_1A_1 + 54^\circ \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 = \angle P_1B_1A_1 \Rightarrow \overline{A_1P_1} = \overline{B_1P_1}$ ，

$\therefore \Delta A_1P_1P_{10} \cong \Delta B_1P_1P_2$ (ASA 全等) $\Rightarrow \overline{P_{10}P_1} = \overline{P_1P_2}$ ，

同理可得 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$ ， $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$ ， $\overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6}$ ， $\overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7}$ ， $\overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8}$ ， $\overline{P_7P_8} = \overline{P_8P_9}$

$\overline{P_8P_9} = \overline{P_9P_{10}}$ ， $\overline{P_9P_{10}} = \overline{P_{10}P_1}$

，故 $\overline{P_{10}P_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8} = \overline{P_8P_9} = \overline{P_9P_{10}}$

$\therefore \overline{P_{10}P_1}^3 = \overline{P_1P_2}^3 = \overline{P_2P_3}^3 = \overline{P_3P_4}^3 = \overline{P_4P_5}^3 = \overline{P_5P_6}^3 = \overline{P_6P_7}^3 = \overline{P_7P_8}^3 = \overline{P_8P_9}^3 = \overline{P_9P_{10}}^3$

$\overline{P_1P_2}^3 + \overline{P_3P_4}^3 + \overline{P_5P_6}^3 + \overline{P_7P_8}^3 + \overline{P_9P_{10}}^3 = \overline{P_{10}P_1}^3 + \overline{P_2P_3}^3 + \overline{P_4P_5}^3 + \overline{P_6P_7}^3 + \overline{P_8P_9}^3$

，故得證原命題成立。

(2) 第(2)類情形，如圖 T6-2，

設 P_{2i-1}' 與 P_{2i}' 平移向量(-a,-b)單位在 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 上之點分別為 Q_{2i-1} 與 Q_{2i}，其中 $1 \le i \le 5$ (於此，視 $A_6 = A_1$)。則我們將圖 T6-2 中與 $\overline{P_iP_i'}$ 、 $\overline{P_iQ_i}$ 與 $\overline{P_iQ_i}$ 有關的十個小三角形放大如下：

(2-1)

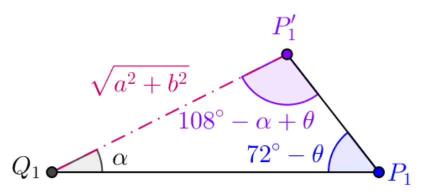


圖 T6-2-1

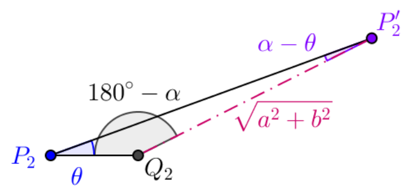


圖 T6-2-2

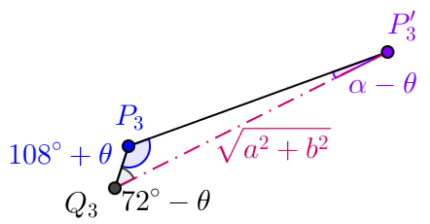


圖 T6-2-3

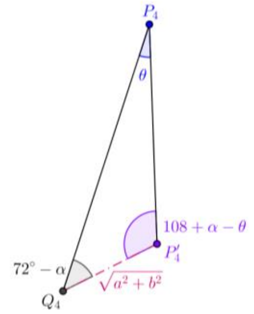


圖 T6-2-4

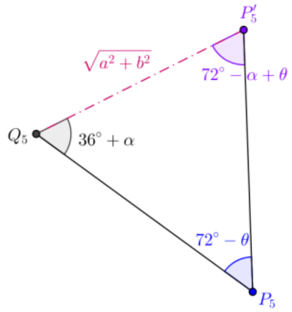


圖 T6-2-5

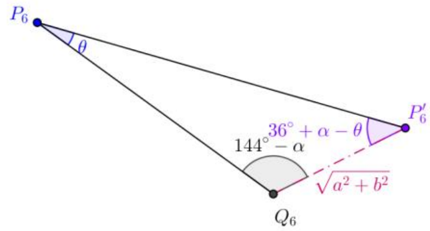


圖 T6-2-6

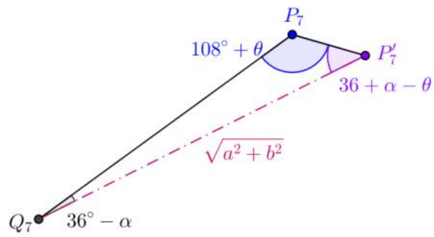


圖 T6-2-7

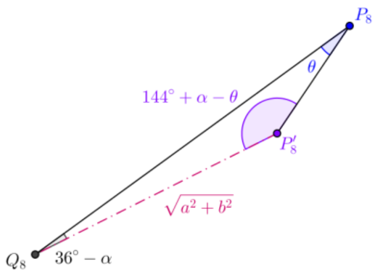


圖 T6-2-8

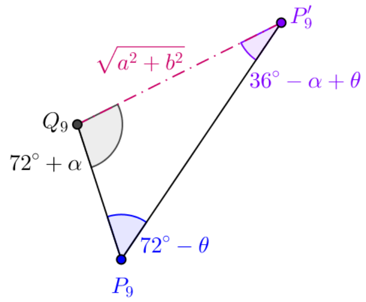


圖 T6-2-9

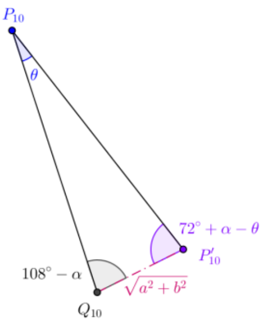


圖 T6-2-10

針對第(2)類情形，我們僅考慮$a>0$且$b>0$之情形，其餘情形證明方法類似，且為了方便起見，我們令$\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$，亦即$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$。

則(同『**定理 3**』之證明步驟(v)可得)

$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1'P_2'}-u\times\sin\alpha$、$\overline{P_2P_3}=\overline{P_2'P_3'}+u\times\sin(\alpha-\theta)$、$\overline{P_3P_4}=\overline{P_3'P_4'}+u\times\cos(18^\circ+\alpha)$、

$\overline{P_4P_5}=\overline{P_4'P_5'}-u\times\cos(18^\circ+\alpha-\theta)$、$\overline{P_5P_6}=\overline{P_5'P_6'}+u\times\sin(36^\circ+\alpha)$、

$\overline{P_6P_7}=\overline{P_6'P_7'}-u\times\sin(36^\circ+\alpha-\theta)$、$\overline{P_7P_8}=\overline{P_7'P_8'}-u\times\sin(36^\circ-\alpha)$、

$\overline{P_8P_9}=\overline{P_8'P_9'}+u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)$、$\overline{P_9P_{10}}=\overline{P_9'P_{10}'}-u\times\cos\left(18^\circ-\alpha\right)$、

$\overline{P_{10}P_1}=\overline{P_{10}'P_1'}+u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)$，其中$u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\times\cos18^\circ}{\sin\left(72^\circ-\theta\right)\sin\theta}$。

(2-2)令$L_{5,3,1}=\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3$且$L_{5,3,2}=\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3+\overline{P_{10}P_1}^3$，

則因為$\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\cdots=\overline{P_{10}'P_1'}$，為了方便起見，所以我們再令

$\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\cdots=\overline{P_{10}'P_1'}=r$，因此可得

$$
\begin{aligned}
L_{5,3,1}&=\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3\\
&=\left(r-u\times\sin\alpha\right)^3+\left[r+u\times\cos\left(18^\circ+\alpha\right)\right]^3+\left[r+u\times\sin\left(36^\circ+\alpha\right)\right]^3\\
&\quad+\left[r-u\times\sin\left(36^\circ-\alpha\right)\right]^3+\left[r-u\times\cos\left(18^\circ-\alpha\right)\right]^3\\
&=\left[r^3-3\times r^2\times u\times\sin\alpha+3\times r\times\left(u\sin\alpha\right)^2-\left(u\sin\alpha\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\cos\left(18^\circ+\alpha\right)+3\times r\times\left(u\times\cos\left(18^\circ+\alpha\right)\right)^2+\left(u\times\cos\left(18^\circ+\alpha\right)\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\sin\left(36^\circ+\alpha\right)+3\times r\times\left(u\times\sin\left(36^\circ+\alpha\right)\right)^2+\left(u\times\sin\left(36^\circ+\alpha\right)\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\sin\left(36^\circ-\alpha\right)+3\times r\times\left(u\times\sin\left(36^\circ-\alpha\right)\right)^2-\left(u\times\sin\left(36^\circ-\alpha\right)\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\cos\left(18^\circ-\alpha\right)+3\times r\times\left(u\times\cos\left(18^\circ-\alpha\right)\right)^2-\left(u\times\cos\left(18^\circ-\alpha\right)\right)^3\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{5,3,2}&=\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3+\overline{P_{10}P_1}^3\\
&=\left[r+u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)\right]^3+\left[r-u\times\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)\right]^3+\left[r-u\times\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)\right]^3\\
&\quad+\left[r+u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)\right]^3+\left[r+u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right]^3\\
&=\left[r^3+3\times r^2\times u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)\right)^2+\left(u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^2-\left(u\times\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^2-\left(u\times\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^2+\left(u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^2+\left(u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^3\right]
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&L_{5,3,1}-L_{5,3,2}\\
&=-3r^2u\Big[\left(\sin\alpha-\cos\left(18^\circ+\alpha\right)-\sin\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos\left(18^\circ-\alpha\right)\right)\\
&\quad-\left(-\sin\left(\alpha-\theta\right)+\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)-\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)\Big]\\
&\quad+3ru^2\Big[\left(\sin^2\alpha+\cos^2\left(18^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos^2\left(18^\circ-\alpha\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$-\left(\sin^2(\alpha-\theta)+\cos^2(18^\circ+\alpha-\theta)+\sin^2(36^\circ+\alpha-\theta)+\sin^2(36^\circ-\alpha+\theta)+\cos^2(18^\circ-\alpha+\theta)\right)\Big]$$

$$-u^3\Big[\left(\sin^3\alpha-\cos^3(18^\circ+\alpha)-\sin^3(36^\circ+\alpha)+\sin^3(36^\circ-\alpha)+\cos^3(18^\circ-\alpha)\right)$$

$$-\left(-\sin^3(\alpha-\theta)+\cos^3(18^\circ+\alpha-\theta)+\sin^3(36^\circ+\alpha-\theta)-\sin^3(36^\circ-\alpha+\theta)-\cos^3(18^\circ-\alpha+\theta)\right)\Big]$$

(2-3)同『**定理 3**』之證明步驟(vi)可得

$$①\ C_1=\begin{bmatrix}\sin\alpha-\cos(18^\circ+\alpha)-\sin(36^\circ+\alpha)+\sin(36^\circ-\alpha)+\cos(18^\circ-\alpha)+\sin(\alpha-\theta)\\ -\cos(18^\circ+\alpha-\theta)-\sin(36^\circ+\alpha-\theta)+\sin(36^\circ-\alpha+\theta)+\cos(18^\circ-\alpha+\theta)\end{bmatrix}=0$$

$$②\ C_2=\begin{bmatrix}\sin^2\alpha+\cos^2(18^\circ+\alpha)+\sin^2(36^\circ+\alpha)+\sin^2(36^\circ-\alpha)+\cos^2(18^\circ-\alpha)-\sin^2(\alpha-\theta)\\ -\cos^2(18^\circ+\alpha-\theta)-\sin^2(36^\circ+\alpha-\theta)-\sin^2(36^\circ-\alpha+\theta)-\cos^2(18^\circ-\alpha+\theta)\end{bmatrix}=0$$

$$③\ C_3=\begin{bmatrix}\sin^3\alpha-\cos^3(18^\circ+\alpha)-\sin^3(36^\circ+\alpha)+\sin^3(36^\circ-\alpha)+\cos^3(18^\circ-\alpha)+\sin^3(\alpha-\theta)\\ -\cos^3(18^\circ+\alpha-\theta)-\sin^3(36^\circ+\alpha-\theta)+\sin^3(36^\circ-\alpha+\theta)+\cos^3(18^\circ-\alpha+\theta)\end{bmatrix}=0$$

④由上述之①、②與③推知

$$L_{5,3,1}-L_{5,3,2}=-3r^2u\times0+3ru^2\times0-u^3\times0=0$$

，故得證原命題成立。 □

定理 7：(兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的四次方和關係)

承『**定理 6**』之前提描述，則

$\overline{P_1P_2}^4+\overline{P_3P_4}^4+\overline{P_5P_6}^4+\overline{P_7P_8}^4+\overline{P_9P_{10}}^4=\overline{P_{10}P_1}^4+\overline{P_2P_3}^4+\overline{P_4P_5}^4+\overline{P_6P_7}^4+\overline{P_8P_9}^4$ 。

證明：仿照**定理 6** 之證明方式可證明原命題成立。 □

接下來想考慮$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$與$\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$是否會相等，其中$m\geq5$且$m$是正整數，詳述如下之『**定理 8**』。

定理 8： (兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的 **m** 次方和關係)

承『**定理 6**』之前提描述，又若$m\geq5$且m是正整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正五邊形$B_1B_2B_3B_4B_5$乃由正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$平移向量(a,b) (a與b為實數)再繞著中心點O逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當$m\geq5$時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$**與**$\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$**不再維持恆等』**。

(3) 當$m=5$時，則**僅**當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq72^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq252^\circ$』或『$\theta$=36°』或『$\theta$=108°』

時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$**與**$\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$**仍會相等』**。

(4) 當$m\geq6$時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq72^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq252^\circ$』 或『$\theta$=36°』或『$\theta$=108°』

時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$**與**$\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$**仍會相等』**。

證明：仿照定理 3 之證明方式可證明原命題成立。 □

從兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和與一次方和關係(**定理 1 與定理 2**)、兩全等正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 3**)、兩全等正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 4 與定理 5**)與兩全等正五邊形之邊所在直線所圍十邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 6、定理 7 與定理 8**)的論證過程中，我們發現一些規律，並且找到了『**引理 1**』的一般化推論，如下『**定理 9**』所示：

定理 9：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 $n\left(n\ge 3\right)$ 邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點，當 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 未落在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在 $\overline{A_2A_3}$ 上、…、P_{2n-3} 與 P_{2n-2} 均落在 $\overline{A_{n-1}A_n}$ 上、P_{2n-1} 與 P_{2n} 均落在 $\overline{A_nA_1}$ 上；又若 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 乃由正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平移向量 $\left(a,b\right)$ (a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le n-1$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

(3) 當 $m\ge n$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ **與** $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ **不再維持恆等**。

(4) 當 $m\ge n$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$, 其中$t_1$是整數 或 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}\times t_2$, 其中$t_2$是整數

且$\theta\ne\dfrac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$, 其中$t_3$是整數，$\theta\ne 180^\circ\times t_4$, 其中$t_4$是整數』

時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ **與** $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ **仍會相等**。

證明：仿照定理 3 之證明方式可證明原命題成立。 □

伍、 研究成果

1. **(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係**，詳見文稿中『**引理** 2』之結論)

承『**引理 1**』之前提描述，但是六邊形 $PQRSTU$ 有部分落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，如圖 L2-1 所示，則 $\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$。

2. **(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和關係**，詳見文稿中『**定理** 1』之結論)

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 n 邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點，如圖 T1-1 與圖 T1-2，則 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{2}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{2}$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

3. **(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的一次方和關係**，詳見文稿中『**定理 2**』之結論)

承『**定理 1**』之前提描述，當 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 未落在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在線段 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在線段 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在線段 $\overline{A_3A_4}$ 上、…、P_{2n-1} 與 P_{2n} 均落在線段 $\overline{A_nA_1}$ 上，如圖 T1-1 所示，則 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

4. (兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的 m 次方和關係，詳見文稿中『**定理 3**』之結論)

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ 分別相交於 P、Q、R、S、T、U 等六點，且六邊形 $PQRSTU$ 未落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，又若 $m\geq 3$ 且 m 是正整數，如下圖 T3-1，則

(1) 事實上，在不失一般性下，我們可以假設正 $\Delta A_1B_1C_1$ 乃由正 ΔABC 平移向量 (a,b) (a 與 b 為實數)再繞著 G 點逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $m\geq 3$ 時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』。

(3) 當 $m=3$、$m=4$ 與 $m=5$ 時，則

僅當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』或『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』。

(4) 當 $m\geq 6$ 時，則

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』。

5. (兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的三次方和關係，詳見文稿中『**定理 4**』之結論)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為兩個全等的正方形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8 等八點，當八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 未落在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在線段 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在線段 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在線段 $\overline{A_3A_4}$ 上、P_7 與 P_8 均落在線段 $\overline{A_4A_1}$ 上，如下圖 T4-0-1 與圖 T4-0-2，則 $\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3=\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$。

6. (兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的 m 次方和關係，詳見文稿中第 23 頁『**定理 5**』之結論)

7. (兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的三次方和關係，詳見文稿中『**定理 6**』之結論)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為兩個全等的正五邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_5B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_5B_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、P_9、P_{10} 等十點，當十邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}$ 未落在正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在 $\overline{A_3A_4}$ 上、P_7 與 P_8 均落在 $\overline{A_4A_5}$ 上、P_9 與 P_{10} 均落在 $\overline{A_5A_1}$ 上，如下圖 T6-0-1 與 T6-0-2，則

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3=\overline{P_{10}P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3$。

8. (兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的四次方和關係，詳見文稿中『**定理 7**』之結論)

承『**定理 6**』之前提描述，則 $\overline{P_1P_2}^4+\overline{P_3P_4}^4+\overline{P_5P_6}^4+\overline{P_7P_8}^4+\overline{P_9P_{10}}^4=\overline{P_{10}P_1}^4+\overline{P_2P_3}^4+\overline{P_4P_5}^4+\overline{P_6P_7}^4+\overline{P_8P_9}^4$。

9. (兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的 **m** 次方和關係，詳見文稿中第 28 頁『**定理 8**』之結論)

10. (兩全等正 **n** 邊形所圍 **2n** 邊形之交錯邊的 **m** 次方和關係，詳見文稿中第 29 頁『**定理 9**』之結論)

陸、 討論與應用

本文成功地將『**引理** 1』推廣到一次方和，再將『**引理** 1』中的正三角形換成正方形與正五邊形，都發現會有類似的結果。此外，我們也考慮正 n 邊形的兩組線段的一次方和與二次方和的情形，並且從正三角形、正方形與正五邊形的證明過程發現如下的規則：『當 $0\le m\le n-1$ 時，兩正 n 邊形之邊所在直線所圍 $2n$ 邊形之交錯邊的 m 次方和會相等；而當 $m\ge n$ 時，雖然兩正 n 邊形之邊所在直線所圍 $2n$ 邊形之交錯邊的 m 次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』

在應用上，我們發現我們的結果似乎與數論上的『等冪和問題』(Prouhet– Tarry–Escott problem)有一些相關性，詳見參考資料[6]，『等冪和問題』描述如下：

給定一個正整數 k，找兩組不全然相等的整數，每一組整數各有 n 個，使得兩組整數的一次方和相等、二次方和相等、三次方和相等、…、k 次方和相等。

該問題在 1850 年代先是由 Eugène Prouhet 投入研究，後來在 1910 年代則有 Gaston Tarry 和 Escott 投入該問題之研究，目前該問題還未找到一般化的通解，截至目前為止已找到解的最大 n 值為 12 與最大 k 值為 11，且兩組整數分別為

$A=\{\pm22,\pm61,\pm86,\pm127,\pm140,\pm151\}$ 與 $B=\{\pm35,\pm47,\pm94,\pm121,\pm146,\pm148\}$。

而我們這篇文章的結果似乎是實數版本的『等冪和問題』，我們在想如果可以適當地調整我們的正 n 邊形之邊長、旋轉的角度 θ 與平移的向量 (a,b)，或許有機會使得兩個正 n 邊形之邊所在直線所圍 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 之各邊均恰為整數，如此一來便能成功地解決這懸宕一百多年的數學難題—『等冪和問題』，只是可不可以達成，還需要再試試看才知道，希望我們真得可以在不久的將來找到一條通往解答的秘徑。

柒、 結論與展望

本文中所討論的兩個正 n 邊形均為『**全等**』之情形，展望未來，我們希望考慮兩個『**相似**』正 n 邊形之邊所在直線所圍 $2n$ 邊形之交錯邊的 m 次方和是否依舊會保持相等，或者存在某一特定關係；更甚者，我們將考慮兩任意多邊形是否也存在類似的結果，企盼不久的未來，我們可以有美麗的新發現。

捌、 參考資料

[1]. 初中數學競賽教程，第 156 頁，嚴鎮軍主編，余紅兵、劉亞強編著，九章出版社，2011 年 1 月。

[2]. 正餘弦函數的 n 次方公式與 n 倍角公式，https://baike.baidu.com/item/倍角公式。

[3]. 正弦函數與餘弦函數的 n 倍角公式(pdf 檔中的第 15 頁)，http://www.math.ntu.edu.tw/~hchu/Calculus/Calculus%5B104%5D-01.pdf。

[4]. 地板函數(高斯函數)與天花板函數的定義(pdf 檔中的第 8 頁)，http://www.math.ntu.edu.tw/~hchu/Calculus/Calculus%5B104%5D-01.pdf。

[5]. 組合數計算公式，https://zh.wikipedia.org/zh-tw/組合。

[6]. 等冪和問題，https://zh.wikipedia.org/zh-tw/等冪和問題。

【評語】050417

本作品探討兩個正 n 邊形，各邊一對對相交，所形成的正 2n 邊形，交錯邊的次方總和會有恆等關係。由於原題是二次方和，作者先回頭檢視並證明一次方和也有同樣關係，再發現三角形的 m 次方和、四邊形的 m 次方和，都有恆等關係，最後成功的證明兩正 n 邊形所圍 2n 邊形交錯的 m 次和相等(m 小於 n)。其中充分必要條件的獲得是因為討論時對所有狀況完整分類而得。

這份作品主軸清晰明確，邏輯清晰，一步一步按部就班討論，內容完整而且也有完整證明，而且重要關鍵均仔細以不同顏色凸顯，整體而言是相當優秀的作品。

作品海報

摘要

本文主要探討兩個全等的正n邊形之n個邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和關係，在參考資料[1]中的原始問題如下之『**引理1**』所述。我們好奇地嘗試且發現兩組線段的一次方和亦相等，所以我們就接著嘗試推廣到正方形與正五邊形，發現均有類似的結果，並發現如下的規則：『當$0 \le m \le n-1$時，兩組線段的m次方和亦相等；而當$m \ge n$時，雖然兩組線段的m次方和**不再維持恆等**，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』

壹、 研究動機

我們在參考資料[1]中發現兩個正三角形部分重疊相交出來的六邊形之交錯邊的二次方和相等的結果，詳見『**引理1**』，我們實際用 Geogebra 繪圖軟體做了測試，發現結果無誤，並發現在正方形與正五邊形均有類似的結果，最後我們發現『**引理1**』其實可以推廣到正多邊形。

貳、 研究目的

將『**引理1**』推廣到正n邊形，並探討兩正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和是否維持恆等，抑或需滿足特定的條件才會相等。

參、 研究設備及器材

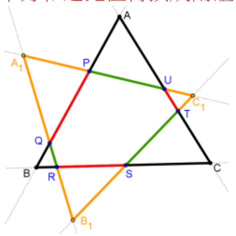
頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體（**Microsoft Word, Geogebra5.0**）

肆、 研究過程與方法暨研究成果

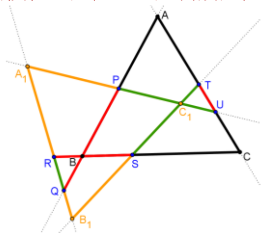
引理1：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係)

已知平面上ΔABC與$\Delta A_1B_1C_1$為兩個全等的正三角形，且$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$、$U$等六點，且六邊形$PQRSTU$未落在正三角形$ABC$與正三角形$A_1B_1C_1$的外部時，如下圖L1-1，則$\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$。

證明：先利用兩相似三角形的面積比等於其對應邊長的平方比，再將兩組線段的平方和之比值轉換成兩組三角形的面積和之比值，並證明該比值為1。



圖L1-1



圖L2-1

引理2：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係)

承『**引理1**』之前提描述，但是六邊形$PQRSTU$有部分落在正三角形ABC與正三角形$A_1B_1C_1$的外部時，如上圖L2-1所示，則

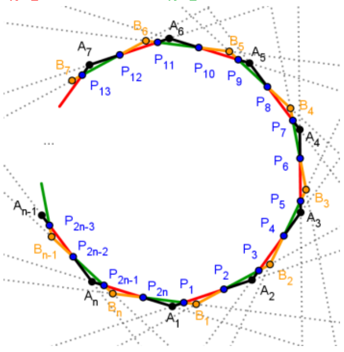
$$\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2 \text{。}$$

證明：先利用兩相似三角形的面積比等於其對應邊長的平方比，再將兩組線段的平方和之比值轉換成兩組三角形的面積和之比值，並利用『兩組三角形面積和相減為零』證明該比值為1。

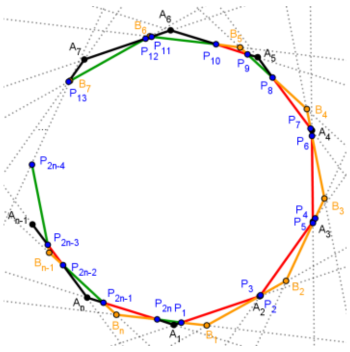
定理1：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和關係)

已知平面上$A_1A_2\cdots A_n$與$B_1B_2\cdots B_n$為兩個全等的正n邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$分別相交於$P_1$、$P_2$、…、$P_{2n-1}$、$P_{2n}$等$2n$個點，如圖T1-1與圖T1-2所示，則

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2 \quad (\text{於此，視 } P_{2n+1}=P_1)\text{。}$$



圖T1-1



圖T1-2

證明：同『引理1』之證法，只是將『引理1』之結果推廣到正 n 邊形。

定理2：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的一次方和關係)

承『**定理1**』之前提描述，當$2n$邊形$P_1P_2\cdots P_{2n}$未落在正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$與$B_1B_2\cdots B_n$的外部時，亦即P_1與P_2均落在線段$\overline{A_1A_2}$上、P_3與P_4均落在線段$\overline{A_2A_3}$上、…、P_{2n-1}與P_{2n}均落在線段$\overline{A_nA_1}$上，如圖T1-1所示，則$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}$(於此，視$P_{2n+1}=P_1$)。

證明：先利用兩相似三角形的周長比等於其對應邊的邊長比，再將兩組線段和之比值轉換成兩組三角形的周長和之比值，並證明該比值為1。

引理3：設β為一任意角，則

(1) $\sin\beta-\sin(60^\circ+\beta)+\sin(120^\circ+\beta)=0$

(2) $\cos\beta+\cos(120^\circ+\beta)+\cos(240^\circ+\beta)=0$

引理4：(正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式)

設m為非負整數，則

$$\sin^m\theta=\frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^jC_j^m\cos\left[(2j-m)\theta+90^\circ\times m\right]\text{。}$$

定理3：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

承『**引理1**』之前提描述，又若$m\ge 3$且m是正整數，如下圖T3-1，則

(1)在不失一般性下，我們可以假設正$\Delta A_1B_1C_1$乃由正ΔABC平移向量(a,b)（a與b為實數)再繞重心G點逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\frac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$。

(2)當$m\ge 3$時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$與$\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$**不再維持恆等**』。

(3)當$m=3$、$m=4$與$m=5$時，則**僅**當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\ne 120^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 300^\circ$』或『$\theta$=60°』時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$與$\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$**仍會相等**』。

(4)當$m\ge 6$時，則當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\ne 120^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 300^\circ$』或『$\theta$=60°』時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$與$\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$**仍會相等**』。

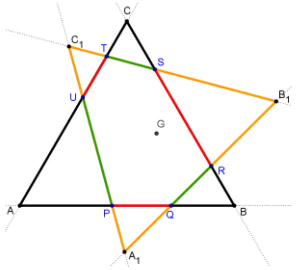
證明：證明過程主要有如下幾個步驟：

Step1：先利用正弦定理將六邊形 $PQRSTU$ 之六邊長分別化簡成與六邊形 $P'Q'R'S'T'U'$ 之邊長、(a,b)、α 及 θ 有關的表示式。

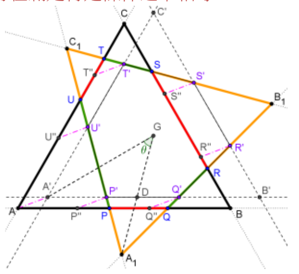
Step2：利用『引理3』與『引理4』化簡兩組線段的 m 次方和。

Step3：利用正餘弦函數之『和差化積公式』化簡兩組線段 m 次方和中之 c_q 項。

Step4：將兩組線段 m 次方和中之 c_q 項，依 q 之值分成 $q=4t+1$、$q=4t+2$、$q=4t+3$、$q=4t$ 等四大類討論，分別化簡成與 q、組合數、α、θ、正餘弦函數有關之級數和表示式，並從此表示式找出何時 c_q 為零，據此推證得知兩組線段的 m 次方和何時維持恆等，而在不維持恆等時，仍可在滿足特定條件之下相等。



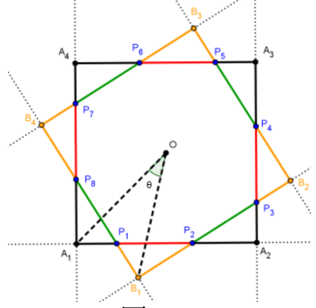
圖T3-1



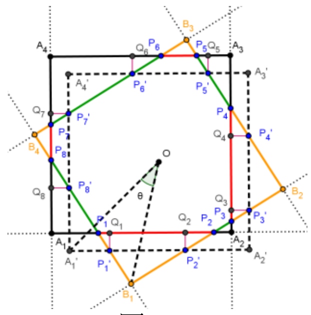
圖T3-2

定理4：(兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的三次方和會相等)

如圖T4-1，$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3=\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$



圖T4-1



圖T4-2

定理5：(兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

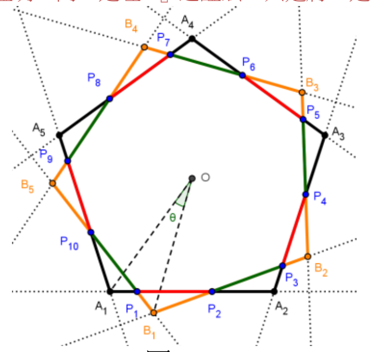
證明：同『定理3』之證法，只是將『定理3』之結果推廣到正方形。

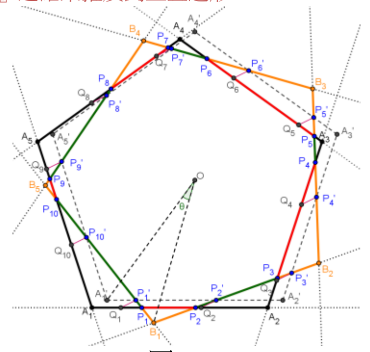
定理6、7：(兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的三、四次方和會相等)

如下圖T6-1，則(於**定理6、7、8**中，視$A_6=A_1$，$P_{11}=P_1$)

(1) $\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{3}=\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{3}$；(2) $\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{4}=\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{4}$。

證明：同『定理 4』之證法，只是將『定理 4』之結果推廣到正五邊形。


圖T6-1


圖T6-2

定理 8： (兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

承『**定理 6**』之前提描述，又若 $m\ge 5$ 且 m 是正整數，則

(1)在不失一般性下，我們可以假設正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量 (a,b)（a 與 b 為實數)再繞著中心 O 點逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$。

(2)當 $m\ge 5$ 時，『$\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ 與 $\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ 不再維持恆等』。

(3)當 $m=5$ 時，則僅當

『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\ne 72^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 252^\circ$ 或 $\theta=36^\circ$，$\theta=108^\circ$』

時，『$\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ 與 $\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ 仍會相等』。

(4)當 $m\ge 6$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\ne 72^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 252^\circ$ 或 $\theta=36^\circ$，$\theta=108^\circ$』

時，『$\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ 與 $\sum_{k=1}^{5}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ 仍會相等』。

證明：同『定理 3』之證法，只是將『定理 3』之結果推廣到正五邊形。

定理 9： (兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 $n\left(n\ge 3\right)$ 邊形，且 $\overline{A_nA_1}$ 與 $\overline{B_nB_1}$、$\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、⋯、$\overline{A_nA_1}$ 與 $\overline{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、⋯、P_{2n} 等 $2n$ 個點，當 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 未落在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在 $\overline{A_2A_3}$ 上、⋯、P_{2n-1} 與 P_{2n} 均落在 $\overline{A_nA_1}$ 上；又若 m 是非負整數，則

(1)在不失一般性下，我們可以假設正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 乃由正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平移向量 (a,b)（a 與 b 為實數)再繞著中心 O 點逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$。

(2)當 $0\le m\le n-1$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$（於此，視 $P_{2n+1}=P_1$）。

(3)當 $m\ge n$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ 與 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ 不再維持恆等。

(4)當 $m\ge n$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數 或 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}\times t_2$，其中 t_2 是整數

且 $\theta\ne\dfrac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$，其中 t_3 是整數，$\theta\ne 180^\circ\times t_4$，其中 t_4 是整數』

時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ 與 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ 仍會相等。

證明：(i)仿照『**定理 3**』證明步驟(v)的方法所發現的規律，我們有如下的 $2n$ 個等式：

$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1'P_2'}-u\times\sin\alpha$、	$\overline{P_2P_3}=\overline{P_2'P_3'}+u\times\sin(\alpha-\theta)$、
$\overline{P_3P_4}=\overline{P_3'P_4'}+u\times\sin(\frac{360^\circ}{n}-\alpha)$、	$\overline{P_4P_5}=\overline{P_4'P_5'}-u\times\sin(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta)$
$\overline{P_5P_6}=\overline{P_5'P_6'}+u\times\sin(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha)$、	$\overline{P_6P_7}=\overline{P_6'P_7'}-u\times\sin(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta)$、
$\overline{P_7P_8}=\overline{P_7'P_8'}+u\times\sin(\frac{360^\circ\times 3}{n}-\alpha)$、	$\overline{P_8P_9}=\overline{P_8'P_9'}-u\times\sin(\frac{360^\circ\times 3}{n}-\alpha+\theta)$、
⋯、	⋯、
$\overline{P_{2n-1}P_{2n}}=\overline{P_{2n-1}'P_{2n}'}+u\times\sin(\frac{360^\circ\times(n\text{-}1)}{n}-\alpha)$	$\overline{P_{2n}P_1}=\overline{P_{2n}'P_1'}-u\times\sin(\frac{360^\circ\times(n\text{-}1)}{n}-\alpha+\theta)$

，其中正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平移向量 (a,b)（a 與 b 為實數)後可得正 n 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$，且正 n 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 之各邊相交情形如下：$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_nB_1}$、$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、⋯、$\overline{A_n'A_1'}$ 與 $\overline{B_{n-1}B_n}$、$\overline{A_n'A_1'}$ 與 $\overline{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1'、P_2'、P_3'、P_4'、⋯、P_{2n-1}'、P_{2n}' 等 $2n$ 個點；且

$$u=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}-90^\circ)}{\sin(180^\circ-\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}-\theta)\sin\theta}$$ 。

(ii) $L_{n,m,1}=\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\cdots+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}^m=\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\alpha$

$+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q(\frac{360^\circ}{n}-\alpha)+\cdots+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q(\frac{360^\circ\times(n\text{-}1)}{n}-\alpha)$

且 $L_{n,m,2}=\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\cdots+\overline{P_{2n}P_1}^m=\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q(\alpha-\theta)$

$+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta)+\cdots+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q(\frac{360^\circ\times(n\text{-}1)}{n}-\alpha+\theta)$

所以 $L_{n,m,1}-L_{n,m,2}=\sum_{q=1}^{m}(-1)^q C_q^m r^{m-q}u^q\times C_q$，其中 $\forall q\in\{1,2,\cdots,m\}$，

$$C_q=\begin{bmatrix}\sin^q\alpha+(-1)^q\sin^q(\frac{360^\circ}{n}-\alpha)+(-1)^q\sin^q(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha)+\cdots+(-1)^q\sin^q(\frac{360^\circ\times(n\text{-}1)}{n}-\alpha)+\\(-1)^{q+1}\sin^q(\alpha-\theta)-\sin^q(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta)-\sin^q(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta)-\cdots-\sin^q(\frac{360^\circ\times(n\text{-}1)}{n}-\alpha+\theta)\end{bmatrix}$$

(iii)我們依 n 是奇數或偶數分成兩類情形，討論如下：

(1)當 n 為奇數，即 $n=2k+1$，其中 k 為正整數時，我們再依 q 之值分成 $q=4t+1$、$q=4t+2$、$q=4t+3$、$q=4t$ 等四大類討論如下：

(1-1)當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則利用『**引理 4**』化簡

得 $\sin^q\beta=\sin^{4t+1}\beta=\dfrac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]$

因此 $C_q=C_{4t+1}$

$$=\begin{bmatrix}\sin^{4t+1}\alpha+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}(\frac{360^\circ}{2k+1}-\alpha)+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}(\frac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha)+\cdots\\+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}(\frac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha)+(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}(\alpha-\theta)-\sin^{4t+1}(\frac{360^\circ}{2k+1}-\alpha+\theta)\\-\sin^{4t+1}(\frac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha+\theta)-\cdots-\sin^{4t+1}(\frac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha+\theta)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{matrix}4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\\times\left\{\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]\right\}\end{matrix}\right\}$$

考慮一般情形之 t 值，則 $q=4t+1$ 且推知 $0\le j\le 4t+1$，此時推導 C_q 之值如下：

(1-1-1)我們發現了如下(甲)與(乙)兩類結果：

(甲)當 $j-\dfrac{(4t+1)-(2k+1)}{2}=(2k+1)v$ 時，其中 $v\in\mathbb{Z}$，則

(甲-1) $j-(2t-k)=(2k+1)v\Rightarrow j=(2t-k)+(2k+1)v$

$=2\times(\frac{q-1}{4})-k+(2k+1)v=\dfrac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}$

(甲-2) $0\le j\le 4t+1\Rightarrow 0\le(2t-k)+(2k+1)v\le 4t+1$

$\Rightarrow\dfrac{-2t+k}{2k+1}\le v\le\dfrac{2t+k+1}{2k+1}\Rightarrow\dfrac{-2\times(\frac{q-1}{4})+k}{2k+1}\le v\le\dfrac{2\times(\frac{q-1}{4})+k+1}{2k+1}$

$\Rightarrow\left\lceil\dfrac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\le v\le\left\lfloor\dfrac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor$

(甲-3)此時，$2j-(4t+1)=2\left[(2t-k)+(2k+1)v\right]-(4t+1)$

$=\left[4t-2k+2(2k+1)v\right]-(4t+1)=(2k+1)(2v-1)$。

(甲-4)由上述步驟(甲-3)之結果得知

$\dfrac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\dfrac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2k+1)(2v-1)\left(\dfrac{180^\circ\times(2k-2i+1)}{2k+1}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2v-1)(2k-2i+1)\times 180^\circ\right]=\dfrac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos 180^\circ=\dfrac{2k+1}{2}$

(乙)當 $j-\dfrac{(4t+1)-(2k+1)}{2}\ne(2k+1)v$ 時，其中 $v\in\mathbb{Z}$，則

$j-\dfrac{(4t+1)-(2k+1)}{2}=(2k+1)v+f$，其中 $f\in\{1,2,\cdots,2k\}$。

(乙-1) $j-(2t-k)=(2k+1)v+f\Rightarrow j=(2t-k)+(2k+1)v+f$

$=2\times(\frac{q-1}{4})-k+(2k+1)v+f=\dfrac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2f}{2}$

(乙-2) $0\le j\le 4t+1\Rightarrow\left\lceil\dfrac{-q+(2k+1)-2f}{2(2k+1)}\right\rceil\le v\le\left\lfloor\dfrac{q+(2k+1)-2f}{2(2k+1)}\right\rfloor$

(乙-3)此時，$2j-(4t+1)=(2k+1)(2v-1)+2f$

(乙-4)由上述步驟(乙-3)之結果得知

$$\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^{\circ}\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left((2k+1)(2v-1)+2f\right)\left(\frac{180^{\circ}\times(2k-2i+1)}{2k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2v-1)(2k-2i+1)\times180^{\circ}+\frac{2f\times(2k-2i+1)\times180^{\circ}}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\frac{2f\times\left((2k+1)-2i\right)\times180^{\circ}}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[2f\times180^{\circ}-\frac{4fi\times180^{\circ}}{2k+1}\right]=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\frac{fi\times720^{\circ}}{2k+1}\right]$$

令 $p=\sum_{i=1}^{k}\cos\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\Rightarrow p\times\left(2\sin\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\right)$

$$=\sum_{i=1}^{k}2\cos\left(\frac{fi\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\sin\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left[\sin\left(\frac{(i+1)\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{(i-1)\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]$$

$$=0-\sin\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)+\sin\left(\frac{k\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)+\sin\left(\frac{(k+1)\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)+2\sin(f\times360^{\circ})\cos\left(\frac{f\times360^{\circ}}{2k+1}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)+0\Rightarrow p=-\frac{1}{2}$$，故 $\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\frac{fi\times720^{\circ}}{2k+1}\right]=0$

(1-1-2)利用上述命題(甲)與(乙)等兩個結果，我們可以將 C_q 的值化簡如下：

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

(1-1-3)當 $1\le q\le n-1=2k$ 時，

$$\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\ge\left\lceil\frac{-2k+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil=\left\lceil\frac{1}{2(2k+1)}\right\rceil=1$$

$$\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{2k+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k+1}{4k+2}\right\rfloor=0$$

$$\Rightarrow C_q=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=1}^{0}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}=0$$

(1-1-4)當 $q\ge n=2k+1$ 時，

$$\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\le\left\lceil\frac{-(2k+1)+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil=\left\lceil\frac{0}{2(2k+1)}\right\rceil=0$$

$$\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor\ge\left\lfloor\frac{(2k+1)+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k+2}{4k+2}\right\rfloor=1$$

$$\Rightarrow C_q=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{2k+1}{2^{q-1}}\left\{\begin{array}{l}(-1)^{\frac{q-(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q-(2k+1)}{2}}\left\{\sin\left[\left(-(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(-(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\\ +(-1)^{\frac{q+(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+(2k+1)}{2}}\sin\left[(2k+1)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[(2k+1)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]+\cdots\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow C_q$不保證恆等於零 。

同理可得

(1-2)當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數或 0，

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

(1-2-1)當 $1\le q\le n-1=2k$ 時， $C_q=0$ 。

(1-2-2)當 $q\ge n=2k+1$ 時， C_q不保證恆等於零 。

(1-3)當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

(1-3-1)當 $1\le q\le n-1=2k$ 時， $C_q=0$ 。

(1-3-2)當 $q\ge n=2k+1$ 時， C_q不保證恆等於零 。

(1-4)當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

(1-4-1)當 $1\le q\le n-1=2k$ 時， $C_q=0$ 。

(1-4-2)當 $q\ge n=2k+1$ 時， C_q不保證恆等於零 。

(2) 當 n 為偶數，即 $n=2k$ ，其中 $k\in\mathbb{N}$ 時，同理可得

(2-1)當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則 $C_q=0$ 。

(2-2)當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{k}{2^{q-2}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+4kv-2k+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(4kv-2k\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(4kv-2k\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

(2-2-1)當 $1\le q\le n-1=2k-1$ 時，則 $C_q=0$ 。

(2-2-2)當 $q\ge n=2k$ 時， C_q不保證恆等於零 。

(2-3)當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則 $C_q=0$ 。

(2-4)當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{k}{2^{q-2}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+4kv-2k}{2}}C^{q}_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(4kv-2k\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(4kv-2k\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

(2-4-1)當 $1\le q\le n-1=2k-1$ 時，則 $C_q=0$ 。

(2-4-2) 當 $q\ge n=2k$ 時， C_q不保證恆等於零 。

(iv)由定理 9(4)之前提描述得知

$$b=a\tan\left(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{180^{\circ}}{n}\times t_1\right)\Rightarrow\frac{b}{a}=\tan\left(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{180^{\circ}}{n}\times t_1\right)$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\tan\left(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{180^{\circ}}{n}\times t_1\right)$$

$\Rightarrow\alpha=\frac{\theta}{2}+\frac{180^{\circ}}{n}\times t_1+180^{\circ}\times t_2$ ，其中 t_2 是整數，

推知 $\sin\left[\left(2nv-n\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$$=\sin\left[\left(2nv-n\right)\left(\left(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{180^{\circ}}{n}\times t_1+180^{\circ}\times t_2\right)-\tfrac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\sin\left[\left(2v-1\right)\left(t_1+nt_2\right)\times180^{\circ}\right]=0$$

同理可得 $\sin\left[\left(2nv-2n\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]=0$

，故得證原命題成立。

伍、 討論、應用、結論與展望

本文成功地將『**引理 1**』推廣到正 n 邊形的 m 次方和的情形，並得證:『當 $0\le m\le n-1$ 時，兩正 n 邊形之邊所在直線所圍 $2n$ 邊形之交錯邊的 m 次方和會相等；而當 $m\ge n$ 時，雖然兩正 n 邊形之邊所在直線所圍 $2n$ 邊形之交錯邊的 m 次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』

我們在想如果可以適當地調整我們的正 n 邊形之邊長、旋轉的角度 θ 與平移的向量 (a,b) ，或許有機會使得兩個正 n 邊形之邊所在直線所圍 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 之各邊長均恰為整數，如此便能解決懸宕一百多年的數學難題—『等冪和問題』。未來，我們希望可以將『**引理 1**』推廣到兩『相似』正 n 邊形的 m 次方和的情形。

陸、 參考資料

[1]. 初中數學競賽教程，第 156 頁，嚴鎮軍主編，余紅兵、劉亞強編著，九章出版社，2011 年 1 月。

[2]. 正餘弦函數的 n 次方公式與 n 倍角公式，https://baike.baidu.com/item/倍角公式。

[3]. 正弦函數與餘弦函數的 n 倍角公式(pdf 檔中的第 15 頁)，http://www.math.ntu.edu.tw/~hchu/Calculus/Calculus%5B104%5D-01.pdf。

[4]. 地板函數與天花板函數的定義(pdf 檔中的第 8 頁)，http://www.math.ntu.edu.tw/~hchu/Calculus/Calculus%5B104%5D-01.pdf。

[5]. 組合數計算公式，https://zh.wikipedia.org/zh-tw/組合。

[6]. 等冪和問題，https://zh.wikipedia.org/zh-tw/等冪和問題。