中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050416

正三角形的最小拼接

學校名稱：國立新竹女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉筱玟	邱士珊
高二 程奕璇	鐘培碩

關鍵詞：正三角形、鑲嵌、正整數解

得獎感言

首先，感激我們的老師、隊友和家人，在不斷討論和溝通中，陪我們一起走過這段日子，相信這已經在我們人生中留下精彩的一頁。也特別感謝評審給我們的建議和引導，讓我們有機會能夠更深入的學習。

其實當初參加分區科展時，完全沒有想過還有機會繼續參展，以為這次應該就是我們科展旅途的終點了，也對作品和自己沒什麼信心，尤其是在看過別組的作品後，一篇篇有字天書，讓我們深深的體會到「世界之大」，自己是多麼的渺小。除此之外，身旁的人個個專精自己的研究，甚至有人聽了報告就能抓住整篇研究大意。老實說，越到高手雲集的場合，越驚覺自己不足，或許沒有一天能追上別人，不過能看看世界，也挺好的。

在過程中，我們也曾迷失方向，從一開始為了聽評審的建議而報名科展，到中途火力全開的練習，其中不乏跌倒和失敗，也許人在用盡全力的同時，總會認為自己應該得到所期望的結果，不過越這麼想，越充滿失落感。這次科展，最讓我們確信的是：永遠不要成為只想得名的人。只想得名並不會學到任何事。心中只在乎結果，就沒辦法體會其他事物，過程其實就是一種結果，而名次只是名利的結果。但也不能成為沒有企圖心的人，只不過企圖心不能傷害人，甚至該在保有企圖心的同時幫助別人。對我們來說，科展從來不是一個斷定努力與否的標準，而是一個磨練和交流的機會。

這次比賽或許因為已經參展過了，所以相較於之前的茫然，更為游刃有餘。但在比賽前我們還是有些忐忑又有點期待，期待這次評審又會給我們什麼新的難題，果不其然的讓我們和它奮鬥八個小時到半夜兩點。和評審們的交流也打開了我們的新世界，更加了解到數學的奇妙及做科展應有的態度。

回首最初做科展的過程，從零開始、自己研究、觀察，也沒有前人來替我們開路，只能自己摸索。路途中，曾經以為這個題目沒有未來了，想過放棄，卻捨不得這半年的心血，終於在努力中開闢一條道路，得以繼續前行。整段旅程只有一同走過的人才會懂得它的辛勞，它是無數個夜晚、無數的腦細胞以及我們的堅持所堆積出來的。所以不論有沒有得獎，我們都為我們感到驕傲，我們完成了許多人不曾經歷過的旅程。我們相信這次參展並不是一個終點，而是未完待續。在未來研究的路上，這次的經驗也將會是我們成長的養分。


正三角形的最小拼接
作者證
50416

摘要

眾所周知，「如何使用三種不同邊長的正三角形，去拼出邊長最小的正三角形？」這個問題是困難的。本文限縮在分層或拼接的拼法下，探討此問題，並得到了答案。解決過程中牽涉到正整數解的存在性問題——如何找最小的正整數 z，使得方程式 $ax+by=cz$ 有正整數解，其中 a 、 b 、 c 為三種正三角形的邊長。

壹、研究動機

「給邊長分別為7、5、3的三種正三角形，如何使用這三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小？」在高一的數學課堂中，老師提出上述問題作為我們專題研究的參考題材，我們對此問題甚感興趣，除了找出此問題的解外，也嘗試把「7 、5 、3」轉換成「 a 、 b 、 c 」進行研究，並希望能將 a 、 b 、 c 轉換為任意三種正整數邊長的正三角形，且推得此三數所能拼出之最小正三角形的一般化結論。

貳、研究目的

一、使用三種邊長兩兩互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長最小。

二、使用三種邊長互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長最小。

三、使用三種任意正整數邊長的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長最小。

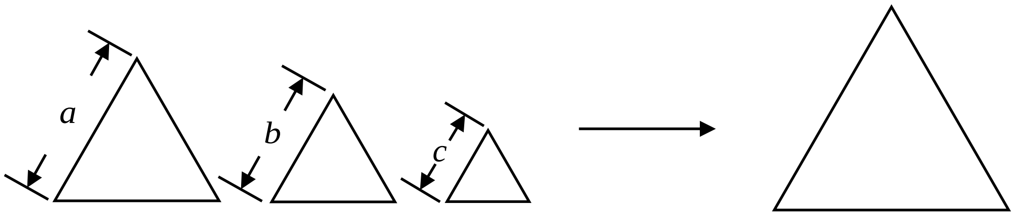
參、研究設備及器材

紙、筆、筆記型電腦、Python 程式、C++程式。

肆、研究過程或方法

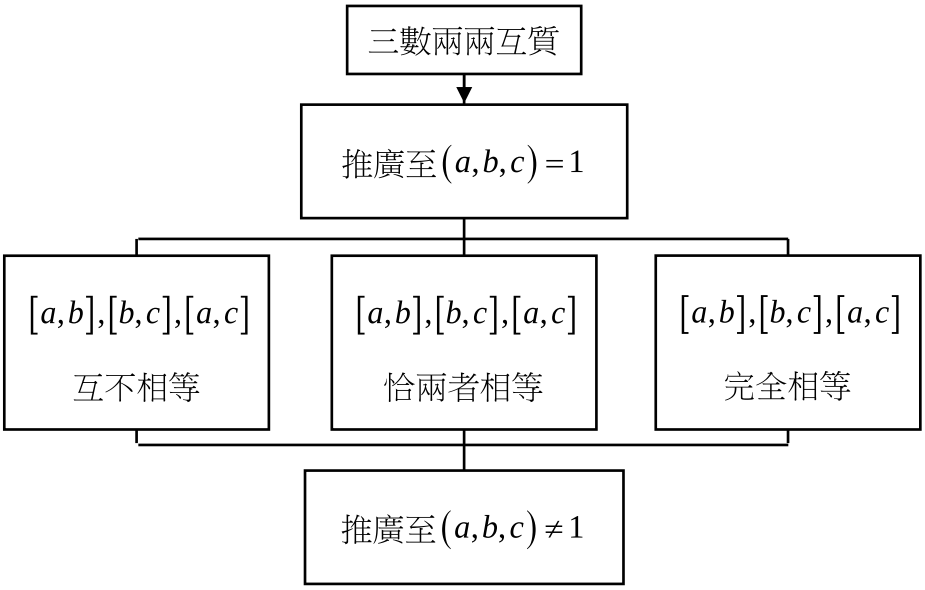
一、題目

給定三種大小不同的正三角形，邊長由大至小分別為正整數 a 、 b 、 c ，使用這三種正三角形拼出另一個正三角形（如下圖（一）)，請問可以拼出的正三角形的最小邊長為何？（規定每種三角形皆需使用。）



圖（一）

二、研究架構

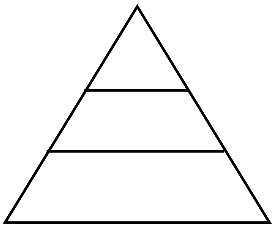


三、名詞定義與先備知識

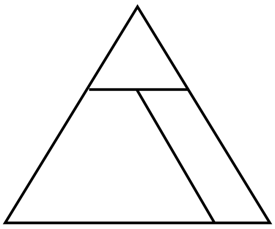
（一）分層：三種正三角形分成三層的排列方式，其中每層只有一種邊長的正三角形，如圖（二）。

（二）基本拼接：三種正三角形分成上下兩層，上層為一個區塊，下層又切割成兩個區塊的排列方式，其中下層的兩個區塊分別為一個梯形和一個平行四邊形，且每個區塊只有一種正三角形，如圖（三）。

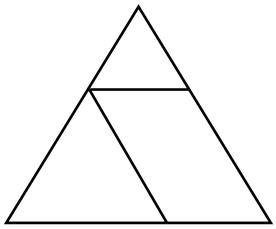
（三）特殊拼接：三種正三角形分成上下兩層，上層為一個區塊，下層又切割成兩個區塊的排列方式，其中下層的兩個區塊分別為一個正三角形和一個平行四邊形，且每個區塊只有一種正三角形，如圖（四）。



圖（二）：分層



圖（三）：基本拼接



圖（四）：特殊拼接

（四）拼接：基本拼接與特殊拼接的總稱。

（五）分割線：將不同邊長的正三角形所組成的區塊分開的線段。

（六）$S(l,m,n)=\left\{z\in\mathbb{N}\,\middle|\,\text{方程式}lx+my=nz\text{有正整數解}\right\},l,m,n\in\mathbb{N}$。

（七）$[a,b]$表示a、b二正整數的最小公倍數；(a,b)表示a、b二正整數的最大公因數；

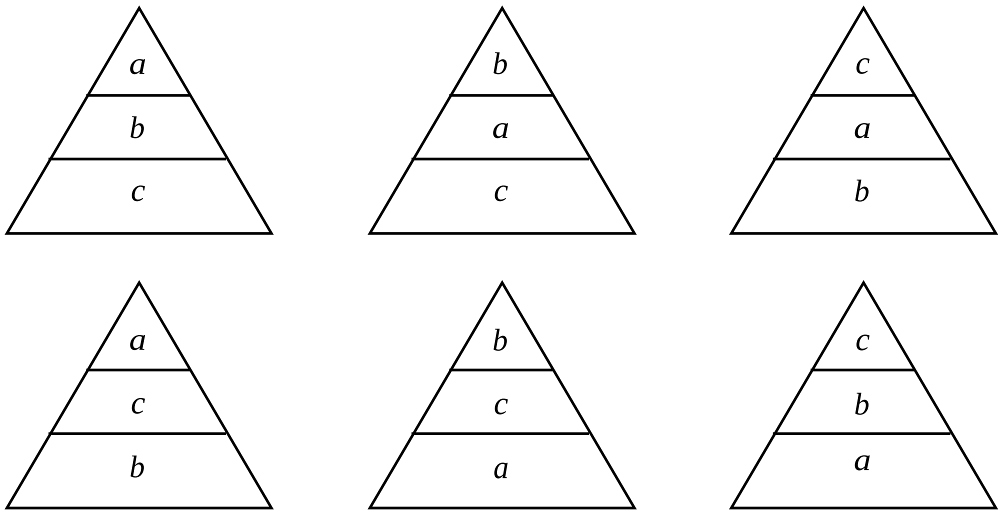
(a,b,c)表示a、b、c三正整數的最大公因數。

（八）$\lceil a\rceil$表示不小於a的最小整數；$\lfloor a\rfloor$表示不大於a的最大整數。

四、研究過程

在 2020 臺灣國際科學展覽會《正三角形的最小拼接》中觀察到：使用兩種正三角形拼出另一正三角形，邊長達到最小時，此時拼法圖形裡只有一條分割線。所以本文從圖形中只有兩條分割線的情況：分層、基本拼接、特殊拼接這三種情形做討論。

其中，分層共有六種拼法，如圖（五）：



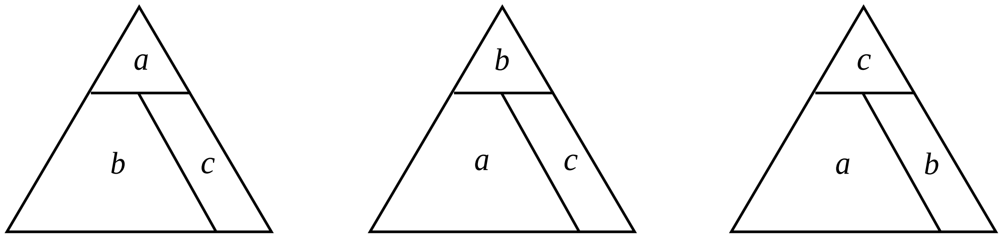
圖（五）：分層

基本拼接共有三種拼法，如圖（六），其最小邊長分別為：

(1) $[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(b,c,a)\right\}$；

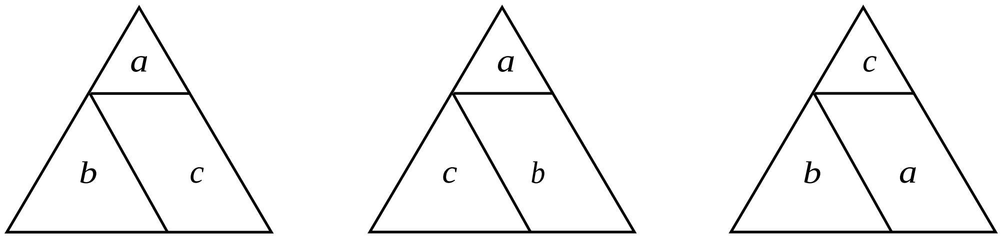
(2) $[a,c]+bz_0$，其中$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(a,c,b)\right\}$；

(3) $[a,b]+cz_0$，其中$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(a,b,c)\right\}$。



圖（六）：基本拼接

特殊拼接共有三種拼法，其最小邊長有$[a,c]+[b,c]$、$[a,b]+[b,c]$、$[a,b]+[a,c]$，如圖（七）：



圖（七）：特殊拼接

（一）a、b、c兩兩互質

定理 1-1：若a、b、c兩兩互質，使用這三種正三角形拼出另一正三角形，利用分層或拼接（含基本拼接與特殊拼接）的拼法，

(1) 若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}>1$，則最小邊長為$bc+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$。

(2) 若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}\le 1$，則最小邊長為$\min\left\{ac+a,bc+az_0\right\}$，其中 $z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$。

【證明】

(1) 分層的六類拼法中，其最小邊長有：$bc\left(\left\lfloor\frac{a}{c}\right\rfloor+1\right)+c$、$ac\left(\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor+1\right)+c$、$ab+b$、$bc\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b$、$ac+a$、$ab+a$，如圖（五）。

明顯地，$ab+a>ab+b>ac+a$。

因為$\left\lfloor\frac{a}{c}\right\rfloor+1>\frac{a}{c}$，所以$bc\left(\left\lfloor\frac{a}{c}\right\rfloor+1\right)+c>ac+a$。同理，$ac\left(\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor+1\right)+c>ac+a$。

因此，六種分層的拼法中，最小邊長為$\min\left\{bc\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b,ac+a\right\}$。

接著，本文將兩邊長相減後得到$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}$，並發現

若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}>1 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{a-b}{bc}>1+\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor \Leftrightarrow ac+a-b>bc+bc\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor$，

可推得$ac+a>bc\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b$；反之，$ac+a<bc\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b$。

故若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}>1$，則分層的最小邊長為$bc\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b$；若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}\le 1$，則分層的最小邊長為$ac+a$。

(2) 在三種基本拼接拼法的最小邊長中，其最小邊長有（如圖（六））：

$bc+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$；$ac+bz_0$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,c,b)\right\}$；

$ab+cz_0$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c\right\}$。

明顯地，

$ac+bz_0>ac+a+c>ac+a$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,c,b)\right\}$。

$ab+cz_0\ge ab+a+b>ac+a$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$。

因此，基本拼接的最小邊長為$bc+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$。

(3) 特殊拼接的三類拼法中，其最小邊長有：：$ac+bc$、$ab+bc$、$ab+ac$，如圖（七）。

明顯地，$ab+ac>ab+bc>ac+bc$，故特殊拼接的最小邊長為$ac+bc$。

綜合三種拼法，最小邊長為$\min\left\{bc\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b,ac+a,bc+az_0,ac+bc\right\}$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$。

(4) 以下將證明：基本拼接的最小邊長$bc+az_0\le$特殊拼接的最小邊長$ac+bc$。

先考慮方程式$bx+cy=az$的正整數解為$\begin{cases}bx+cy=at_1\\az=at_1\end{cases},t_1\in\mathbb{N}$（式一）。

因為$(b,c)=1$，所以存在α、β為正整數且滿足$b\alpha-c\beta=1\Rightarrow\left(b\alpha-c\beta\right)at_1=at_1$，

將此式改寫成$b\left(a\alpha t_1\right)+c\left(-a\beta t_1\right)=a\left(t_1\right)$。

因此，（式一）的正整數解通式為$\begin{cases} x = a\alpha t_1 - ct_2 \\ y = -a\beta t_1 + bt_2 \\ z = t_1 \end{cases}$ $,t_1,t_2 \in \mathbb{N}$，

因為 $x>0$ 且 $y>0$，所以 $t_2 \in \left(\dfrac{a\beta t_1}{b}, \dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$。

當 $t_1 = \left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil$ 時，則區間 $\left(\dfrac{a\beta t_1}{b}, \dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$ 的長度為

$\dfrac{a\alpha t_1}{c} - \dfrac{a\beta t_1}{b} = \dfrac{(b\alpha - c\beta)at_1}{bc} = \dfrac{a}{bc}t_1 > \dfrac{a}{bc} \times \dfrac{bc}{a} = 1$，

即至少存在一個 $t_2 \in \mathbb{N}$，也就是（式一）必有正整數解。可推得 $t_1 = \left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil \in S(b,c,a)$。

因為 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(b,c,a)\}$，所以 $t_1 = \left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil \geq z_0$。

可推得 $\left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil \geq z_0 \Rightarrow c \geq z_0 \Rightarrow ac + bc \geq bc + az_0$。

可知特殊拼接的最小邊長不小於 $bc + az_0$。

(5) 以下將證明：「若 $\dfrac{a}{b} - \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + \dfrac{a-b}{bc} > 1$，則最小邊長為 $\min\left\{bc\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil + b, bc + az_0\right\} = bc + az_0$，

其中 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(b,c,a)\}$。」

（i）若 $a > bc$，則 $\left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil = 1$。即 $z_0 = 1$。

$\left(bc\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil + b\right) - (bc + az_0) > (ac + b) - (bc + a) = (a-b)(c-1) \geq 0$，

可推得 $bc\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil + b > bc + az_0$。

（ii）若 $a < bc$，且 $\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor \geq 2$

$$\dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \geq \dfrac{2bc+b}{a} > \dfrac{bc+a}{a} = \dfrac{bc}{a} + 1 \Rightarrow \left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \geq \left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil \geq z_0$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \geq z_0 \Rightarrow bc\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + b \geq az_0 \Rightarrow bc\left(\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + 1\right) + b \geq bc + az_0$$

可推得 $bc\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil + b \geq bc + az_0$。

（iii）若 $a < bc$ ，且 $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = 1$，即 $a = b + r$ ，其中 $0 < r < b$

$$\frac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} = \frac{bc+b}{a} > \frac{bc+b}{2b} = \frac{c+1}{2}$$

可得到 $\left\lfloor \frac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{c+1}{2}, 若c為奇數 \\ \frac{c}{2} \quad ,若c為偶數 \end{cases}$

（iv）承（iii）的條件，以下過程將證明 $\left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor \in S(b,c,a)$

因為 $\frac{a}{b} - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{a-b}{bc} > 1$ ，

所以 $\frac{r}{b} + \frac{r}{bc} > 1 \Rightarrow rc + r > bc \Rightarrow r > \frac{c}{c+1}b \Rightarrow a = b + r > \frac{2c+1}{c+1}b \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{2c+1}{c+1}$

Case1：當 c 為奇數時，$t_1 = \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor = \frac{c+1}{2}$ ，且 $t_2 \in \left(\frac{a\beta t_1}{b}, \frac{a\alpha t_1}{c} \right)$ ，

則區間 $\left(\frac{a\beta t_1}{b}, \frac{a\alpha t_1}{c} \right)$ 長度為

$$\frac{a\alpha t_1}{c} - \frac{a\beta t_1}{b} = \frac{\left(b\alpha - c\beta\right)at_1}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{t_1}{c} > \frac{2c+1}{c+1} \times \frac{c+1}{2c} > 1，$$

所以必至少存在一個 $t_2 \in \mathbb{N}$，也就是（式一）必有正整數解。

即 $t_1 = \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor \in S(b,c,a)$ 。

Case2：當 c 為偶數時，$t_1 = \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor = \frac{c}{2}$ ，且 $t_2 \in \left(\frac{a\beta t_1}{b}, \frac{a\alpha t_1}{c} \right)$ ，

則區間 $\left(\frac{a\beta t_1}{b}, \frac{a\alpha t_1}{c} \right)$ 長度為

$$\frac{a\alpha t_1}{c} - \frac{a\beta t_1}{b} = \frac{\left(b\alpha - c\beta\right)at_1}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{t_1}{c} > \frac{2c+1}{c+1} \times \frac{1}{2} > \frac{1}{2} ，$$

且 $\frac{a\alpha t_1}{c} = \frac{a\alpha}{2}$ 。因為 $\left(a,c\right) = 1$ ，$b\alpha - c\beta = 1$，所以 a 、 α 皆為奇數。

因此，$\frac{a\alpha}{2} - \left\lfloor \frac{a\alpha}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}$ ，則區間 $\left(\left\lfloor \frac{a\alpha t_1}{c} \right\rfloor, \frac{a\alpha t_1}{c} \right)$ 長度為 $\frac{1}{2}$ ，

即 $\left\lfloor \frac{a\alpha t_1}{c} \right\rfloor \in \left(\frac{a\beta t_1}{b}, \frac{a\alpha t_1}{c} \right)$ ，所以存在 $t_2 = \left\lfloor \frac{a\alpha t_1}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a\alpha}{2} \right\rfloor$ ，

即 $t_1 = \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor \in S\left(b,c,a\right)$ 。

（v）綜合上述，承（iii）和（iv），可得 $\left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \ge \left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor$ 且 $\left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor \in S(b,c,a)$ ，

又因為 $z_0 = \min\left\{ z \middle| z \in S(b,c,a) \right\}$ ，

故 $\left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \ge \left\lfloor \dfrac{c+1}{2} \right\rfloor \ge z_0 \Rightarrow \left\lfloor \dfrac{bc\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b}{a} \right\rfloor \ge z_0 \Rightarrow bc\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + b \ge az_0$ 。

可推得 $bc\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil + b = bc\left(\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + 1 \right) + b \ge bc + az_0$ 。

綜合(1)到(5)的分類討論，證明了定理 1-1。 Q.E.D.

在 $\dfrac{a}{b} - \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + \dfrac{a-b}{bc} \le 1$ 下，最小邊長有二種可能，於是本文再分成 $\dfrac{a}{b} \ge 2$ 與 $\dfrac{a}{b} < 2$ 。並發現：「在 $\dfrac{a}{b} \ge 2$ 的條件下，最小邊長為 $bc + az_0$ 。」證明如下，並結合定理 1-1，寫成定理 1-2。

定理 1-2：在 a 、 b 、 c 兩兩互質的條件下，

(1) 若 $\dfrac{a}{b} - \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + \dfrac{a-b}{bc} > 1$ ，則最小邊長為 $bc + az_0$ ，其中 $z_0 = \min\left\{ z \middle| z \in S(b,c,a) \right\}$ 。

(2) 若 $\dfrac{a}{b} - \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + \dfrac{a-b}{bc} \le 1$ 且 $\dfrac{a}{b} \ge 2$ ，則最小邊長為 $bc + az_0$ ，其中 $z_0 = \min\left\{ z \middle| z \in S(b,c,a) \right\}$ 。

(3) 若 $\dfrac{a}{b} - \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + \dfrac{a-b}{bc} \le 1$ 且 $\dfrac{a}{b} < 2$ ，則最小邊長為 $\min\left\{ ac + a, bc + az_0 \right\}$ ，其中 $z_0 = \min\left\{ z \middle| z \in S(b,c,a) \right\}$ 。

【證明】

(1) 定理 1-2 (1)、(3)的證明部分已在定理 1-1 已證得，只需再證明定理 1-2 (2)。

(2) $\dfrac{a}{b} \ge 2$ 時， $bc + az_0 \le bc + a\left(\left\lceil \dfrac{bc}{a} \right\rceil \right) < bc + a\left(\dfrac{bc}{a} + 1 \right) = 2bc + a \le ac + a$ 。

(3) $\dfrac{a}{b} < 2$ 時，發現在此條件下並沒有一個明確的最小邊長，但本文得出一個檢驗法如下：

考慮 $bx + cy = ak$ ， $k = 1, 2, \ldots\ldots, \left\lfloor 1 + (a-b)\dfrac{c}{a} \right\rfloor$ 等方程式皆無正整數解時，最小邊長必為 $ac + a$ 。（ $\because bc + az_0 \le ac + a \Leftrightarrow az_0 \le (a-b)c + a \Leftrightarrow z_0 \le 1 + (a-b)\dfrac{c}{a}$ ） Q.E.D.

為了方便操作，我們同時利用撰寫 C++程式來方便找出最小邊長（見附錄一），在程式中，只要依序輸入a、b、c，就可以得到該組邊長在定理 1-2 中的分類。

（二）$(a,b,c)=1$

(1) 以$[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$的大小次序分類，以下先分別討論三數兩兩皆不相同的情況。

定理 2-1：若$(a,b,c)=1$且$[b,c]>[a,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\left\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\right\}$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$。

【證明】

(1) 六種分層的拼法中，其最小邊長有$[b,c]+c$、$[b,c]+b$、$[a,c]+c$、

$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a$、$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b$、$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a$。

明顯地，$[b,c]+b>[b,c]+c>[a,c]+c$。

因為$\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1>\frac{[b,c]}{[a,c]}$，所以$[a,c]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a>[b,c]+a>[a,c]+c$。

同理，$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b>[a,c]+c$，且$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a>[a,c]+c$。

因此，六種分層的拼法中，最小邊長為$[a,c]+c$。

(2) 在三種基本拼接拼法的最小邊長中，明顯地，

$[a,c]+bz_0>[a,c]+b>[a,c]+c$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,c,b)\right\}$。

$[b,c]+az_0\geq[b,c]+a>[a,c]+c$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$。

因此，綜合六種分層與三種基本拼接的拼法中，最小邊長為$\min\left\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\right\}$，其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$。

(3) 在三種特殊拼接拼法的最小邊長中，明顯地，

$[a,c]+[b,c]>[a,b]+[b,c]>[a,b]+[a,c]>[a,c]+c$。

綜合(1)、(2)、(3)，可推得利用分層或拼接的拼法，若$[b,c]>[a,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。 Q.E.D.

定理 2-2：若$(a,b,c)=1$且$[a,c]>[b,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\{[b,c]+c,[a,b]+cz_0\}$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。
定理 2-3：若$(a,b,c)=1$且$[a,b]>[b,c]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\{[b,c]+b,[a,c]+bz_0\}$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$。
定理 2-4：若$(a,b,c)=1$且$[b,c]>[a,b]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\{[a,b]+b,[a,c]+bz_0\}$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$。

（定理 2-2、2-3、2-4 證明手法如定理 2-1，限於篇幅，詳細過程請見數學科手稿。）

定理 2-5-1：在$(a,b,c)=1$且$[a,c]>[a,b]>[b,c]$的條件下，利用分層或拼接的拼法，

(1) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$，則最小邊長為

$$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(2) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長為$\min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

【證明】

(1) 六種分層的拼法中，其最小邊長有$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c$、$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b$、

$[a,c]+c$、$[a,c]+a$、$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b$、$[a,b]+a$。

明顯地，$[a,c]+a>[a,c]+c>[a,b]+a$。$z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$

考慮

$$\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\right\}-\left\{[a,b]+a\right\}\geq\left\{[a,c]+b\right\}-\left\{[a,b]+a\right\}=\left\{[a,c]-[a,b]-a\right\}+b>0$$

即$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b>[a,b]+a$。同理$[a,b]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b>[a,b]+a$。

因此，在分層的拼法中，最小邊長為$\min\left\{[a,b]+a,[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\right\}$。

(2) 在三種基本拼接拼法的最小邊長中，明顯地，

$[a,c]+bz_0>[a,c]+a>[a,b]+a$，其中$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(a,c,b)\right\}$，

$[a,b]+cz_0>[a,b]+a$，其中$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(a,b,c)\right\}$。

因此，在三種基本拼接的拼法中，

若想要拼出最小邊長只需考慮邊長為$[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z\,\middle|\,z\in S(b,c,a)\right\}$。

(3) 在三種特殊拼接拼法的最小邊長中，明顯地，

$[a,b]+[a,c]>[a,c]+[b,c]>[a,b]+[b,c]$。

因此在三種特殊拼接的拼法中，若想要拼出最小邊長只需考慮邊長為$[a,b]+[b,c]$。

(4) 考慮方程式$bx+cy=az$的正整數解的問題，為了方便討論，重新改寫a、b、c為

$\begin{cases}a=g_1g_2A\\b=g_1g_3B\\c=g_2g_3C\end{cases}$，其中$\begin{cases}g_1=(a,b)\\g_2=(a,c)\\g_3=(b,c)\end{cases}$，由$(a,b,c)$=1可知：$g_1$、$g_2$、$g_3$兩兩互質，

A、B、C兩兩互質，(A,g_3)=1、(B,g_2)=1、(C,g_1)=1。

改寫方程式如下：$(g_1g_3B)x+(g_2g_3C)y=(g_1g_2A)z\Rightarrow\begin{cases}x=g_2x'\\y=g_1y'\\z=g_3z'\end{cases}$，$x',y',z'\in\mathbb{N}$。

重新改寫成$Bx'+Cy'=Az'$（式二），且A、B、C兩兩互質。

由定理 1-1 中證明的(1)，可以知道（式二） 的正整數解通式為

$$\begin{cases} x' = A\alpha t_1 - Ct_2 \\ y' = -A\beta t_1 + Bt_2 \\ z' = t_1 \end{cases} ,t_1,t_2 \in \mathbb{N}$$，且 $\dfrac{A\beta\, t_1}{B} < t_2 < \dfrac{A\alpha\, t_1}{C}$，其中 α 、 β 為正整數且滿足

$B\alpha - C\beta = 1$，且 $\left\lceil \dfrac{BC}{A} \right\rceil \in S\left(B,C,A\right) \Rightarrow g_3 \left\lceil \dfrac{BC}{A} \right\rceil \in S\left(b,c,a\right)$，即 $g_3 \left\lceil \dfrac{BC}{A} \right\rceil \ge z_0$ 。

另一方面，因為 $\left[a,c\right] > \left[a,b\right] > \left[b,c\right]$，所以 $A > C > B$，

可以推得 $\dfrac{\left[a,b\right]}{a} = \dfrac{g_1 g_2 g_3 AB}{g_1 g_2 A} = g_3 B \ge g_3 \left\lceil \dfrac{BC}{A} \right\rceil \ge z_0$，也就是

$\left[a,b\right] \ge az_0 \Rightarrow \left[b,c\right] + \left[a,b\right] \ge \left[b,c\right] + az_0$，其中 $z_0 = \min\left\{ z \middle| z \in S(b,c,a) \right\}$ 。

(5) 若 $\dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} - \left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + \dfrac{a-c}{\left[b,c\right]} > 1$，

則 $\dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} - \left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + \dfrac{a-c}{\left[b,c\right]} > 1 \Rightarrow \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} + \dfrac{a-c}{\left[b,c\right]} > \left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + 1 \Rightarrow \dfrac{\left[a,b\right] + a - c}{\left[b,c\right]} > \left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + 1$

即 $\left[a,b\right] + a - c > \left[b,c\right]\left(\left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + 1 \right)$，可推得 $\left[a,b\right] + a > \left[b,c\right]\left(\left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + 1 \right) + c$ 。

反之，若 $\dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} - \left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + \dfrac{a-c}{\left[b,c\right]} \le 1$，則 $\left[b,c\right]\left(\left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + 1 \right) + c \ge \left[a,b\right] + a$ 。

綜合(1)、(2)、(3)、(4)、(5)，可證得定理 2-5-1。 Q.E.D.

在 $\left[a,c\right] > \left[a,b\right] > \left[b,c\right]$ 下，分層拼出的最小邊長有二種可能，於是本文將定理 2-5-1 再分成 $\dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} - \left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + \dfrac{a-c}{\left[b,c\right]} > 1$ 與 $\dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} - \left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + \dfrac{a-c}{\left[b,c\right]} \le 1$ 兩種情形。並猜想：「定理 2-5-1 會不會與定理 1-1 有類似的結果？」於是利用 python 撰寫程式碼發現：「滿足定理 2-5-1 (1) 的兩種最小邊長：$\left[b,c\right]\left(\left\lfloor \dfrac{\left[a,b\right]}{\left[b,c\right]} \right\rfloor + 1 \right) + c$ 和 $\left[b,c\right] + az_0$ 皆可能發生。」但從數據中發現：「若 a 、 b 、 c 滿足 $\dfrac{b}{\left(a,b\right) \times \left(b,c\right)}$ 是偶數此條件時，則最小邊長必為 $\left[b,c\right] + az_0$；反之，則兩種最小邊長皆有可能發生。」證明如下，並結合定理 2-5-1，寫成定理 2-5-2。

定理 2-5-2：在 $(a,b,c)=1$ 且 $[a,c]>[a,b]>[b,c]$ 的條件下，利用分層或拼接的拼法，

(1) 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$，且 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為偶數時，則最小邊長為

$[b,c]+az_0$，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

(2) 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$，且 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為奇數時，則最小邊長為

$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

(3) 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長為 $\min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$，

其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

【證明】

(1) 定理 2-5-2 (2)、(3)的證明部分已在定理 2-5-1 已證得，只需再證明定理 2-5-2 (1)。

因為 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為偶數，即表示定理 2-5-1 證明過程(4)的 B 為偶數。

(2) 沿用定理 2-5-1 證明過程(4)中的符號，證明定理 2-5-2 (1)，並分成三種狀況說明。

首先，以「A、B、C」改寫定理 2-5-2 (1)的敘述：

$$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1\Leftrightarrow\frac{A}{C}-\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{g_1A-g_3C}{g_1g_3BC}>1$$，且 B 為偶數。

證明：$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\ge[b,c]+az_0$，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$

$$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\ge[b,c]+az_0\Leftrightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor\right)+c\ge az_0$$

$$\Leftrightarrow g_3\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{g_3C}{g_1A}\ge z_0\Leftrightarrow\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}\ge\frac{z_0}{g_3}$$ 。

Case1：若 $A>BC$，則 $\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil=1$。即 $z_0=g_3$。

$$\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}>\frac{BC}{A}\left(\frac{A}{C}-1\right)+\frac{C}{g_1A}=B-\frac{BC}{A}+\frac{C}{g_1A}>B-1\geq 1$$

也就是$\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}\geq\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c\geq[b,c]+az_0$

Case2：若 $A<BC$ 且$\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor\geq 2$ ，則$\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}>\frac{2BC}{A}>\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil$。

定理 2-5-1 證明過程(4)中可知$\left\lceil\frac{BC}{A}\right\rceil\geq\frac{z_0}{g_3}$ ，

可以推得$\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{C}{g_1A}>\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c>[b,c]+az_0$ 。

Case3：若 $A<BC$ 且$\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor=1$，則 $A=C+r$ ， $0<r<C$ 。

（i）改寫條件：$\frac{A}{C}-\left\lfloor\frac{A}{C}\right\rfloor+\frac{g_1A-g_3C}{g_1g_3BC}>1\Leftrightarrow\frac{r}{C}+\frac{g_1(C+r)-g_3C}{g_1g_3BC}>1$

$$\Leftrightarrow g_1g_3Br+g_1C+g_1r-g_3C>g_1g_3BC\Leftrightarrow(g_1g_3B+g_1)r>(g_1g_3B+g_3-g_1)C$$

$$\Leftrightarrow r>\left(\frac{g_1g_3B+g_3-g_1}{g_1(g_3B+1)}\right)C$$

即$\left(\frac{2g_1g_3B+g_3}{g_1g_3B+g_1}\right)C<A<2C$ ，可推得$\frac{A}{C}>\left(\frac{2g_1g_3B+g_3}{g_1g_3B+g_1}\right)$以及$\frac{1}{A}>\frac{1}{2C}$ 。

（ii）說明： $Bx'+Cy'=A\left\lfloor\frac{g_3B+1}{2g_3}\right\rfloor$有正整數解。

定理 2-5-1 證明過程(4)中， $\frac{A\alpha\ t_1}{C}-\frac{A\beta\ t_1}{B}=\frac{A(B\alpha-C\beta)\ t_1}{BC}=\frac{A\ t_1}{BC}$

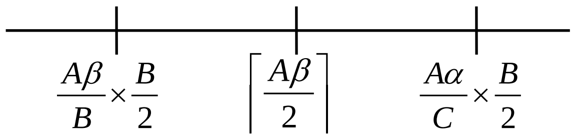
當$t_1=\left\lfloor\frac{g_3B+1}{2g_3}\right\rfloor$，因為 B 為偶數，所以，

$$\frac{A}{BC}\left\lfloor\frac{g_3B+1}{2g_3}\right\rfloor=\frac{A}{BC}\times\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{A}{C}>\frac{1}{2}\left(\frac{2g_1g_3B+g_3}{g_1g_3B+g_1}\right)>\frac{1}{2}\text{ 。}$$

且$\frac{A\beta\ t_1}{B}=\frac{A\beta}{B}\left\lfloor\frac{g_3B+1}{2g_3}\right\rfloor=\frac{A\beta}{B}\times\frac{B}{2}=\frac{A\beta}{2}$ ，

因為$(A,B)=1$、$B\alpha-C\beta=1$，所以 A、β 為奇數，所以$\left\lceil\frac{A\beta}{2}\right\rceil-\frac{A\beta}{2}=\frac{1}{2}$ ，

也就是必存在正整數$t_2=\left\lceil \frac{A\beta}{2} \right\rceil$，如下圖（八）：



圖（八）

證得$Bx'+Cy'=A\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$有正整數解，可以得知：

$$\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor \in S(B,C,A) \Rightarrow \frac{z_0}{g_3} \le \left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$$

（iii）

$$\frac{BC}{A}\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor+\frac{C}{g_1A}=\frac{BC}{A}+\frac{C}{g_1A}=\frac{g_1BC+C}{g_1A}>\frac{g_1BC+C}{2g_1C}=\frac{g_1B+1}{2g_1}>\frac{B}{2}=\left\lfloor \frac{g_3B+1}{2g_3} \right\rfloor$$

再由（ii）$\Rightarrow \frac{BC}{A}\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor+\frac{C}{g_1A}\ge\frac{z_0}{g_3}\Rightarrow [b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor+1\right)+c\ge[b,c]+az_0$

(3) 由 Case1,Case2,Case3 可證得定理 2-5-2 (1) Q.E.D.

定理 2-6-1：在$(a,b,c)=1$且$[a,b]>[a,c]>[b,c]$的條件下，利用分層或拼接的拼法，

(1) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，則最小邊長為

$$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$$，其中$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

(2) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長$\min\{[a,c]+a,[b,c]+az_0\}$，

其中$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

（其證明手法如定理 2-5-1，限於篇幅，詳細過程請見數學科手稿。）

接著，本文猜測在定理 2-6-1 (1)的條件下，會和定理 2-5-2(1)有相似的結果，於是利用 python 撰寫程式碼發現：「若a、b、c滿足$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$是偶數此條件時，則最小邊長必為$[b,c]+az_0$；反之，則兩種最小邊長皆有可能發生。」證明如下，並結合定理 2-6-1，寫成

定理 2-6-2。

定理 2-6-2：在$(a,b,c)=1$且$[a,b]>[a,c]>[b,c]$的條件下，利用分層或拼接的拼法，

(1) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，且$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$為偶數時，則最小邊長為

$[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$。

(2) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，且$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$為奇數時，則最小邊長為

$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$，其中$z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$。

(3) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長$\min\left\{[a,c]+a,[b,c]+az_0\right\}$，

其中$z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$。

【證明】

(1) 定理 2-6-2 (2)、(3)的證明部分已在定理 2-6-1 已證得，只需再證明定理 2-6-2 (1)。

因為$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$為偶數，即表示定理 2-5-1 證明過程(4)的$C$為偶數。

(2) 沿用定理 2-5-1 證明過程(4)中的符號，證明定理 2-6-2 (1)，並分成三種狀況說明。

首先，以「A、B、C」改寫定理 2-6-2 (1)的敘述：

$$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1\Leftrightarrow\frac{A}{B}-\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{g_2A-g_3B}{g_2g_3BC}>1$$，C為偶數

證明：$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\ge[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\left\{z \middle| z\in S(b,c,a)\right\}$

$$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b\ge[b,c]+az_0\Leftrightarrow[b,c]\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+b\ge az_0$$

$$\Leftrightarrow g_3\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{g_3B}{g_2A}\ge z_0\Leftrightarrow\frac{BC}{A}\left\lfloor\frac{A}{B}\right\rfloor+\frac{B}{g_2A}\ge\frac{z_0}{g_3}$$

Case1：若 $A > BC$ ，則$\left\lceil \frac{BC}{A} \right\rceil = 1$。即 $z_0 = g_3$。

$$\frac{BC}{A}\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor + \frac{B}{g_2 A} > \frac{BC}{A}\left(\frac{A}{B} - 1\right) > C - 1 \ge 1 = \frac{z_0}{g_3}$$

$$\Leftrightarrow [b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + b \ge [b,c] + az_0$$

Case2：若 $A < BC$ 且$\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor \ge 2$ ，再由定理 2-5-1 證明過程中(4)中可知$\left\lceil \frac{BC}{A} \right\rceil \ge \frac{z_0}{g_3}$ ，

則$\frac{BC}{A}\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor + \frac{B}{g_2 A} > \frac{2BC}{A} > \left\lceil \frac{BC}{A} \right\rceil \ge \frac{z_0}{g_3} \Leftrightarrow [b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + b \ge [b,c] + az_0$。

Case3：若 $A < BC$ 且$\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor = 1$，則 $A = B + r$ ，其中 $0 < r < B$ 。

（i）改寫條件：$\frac{A}{B} - \left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor + \frac{g_2 A - g_3 B}{g_2 g_3 BC} > 1 \Leftrightarrow \frac{r}{B} + \frac{g_2(B + r) - g_3 B}{g_2 g_3 BC} > 1$

$$\Leftrightarrow g_2 g_3 Cr + g_2 B + g_2 r - g_3 B > g_2 g_3 BC \Leftrightarrow r > \left(\frac{g_2 g_3 C + g_3 - g_2}{g_2 g_3 C + g_2}\right) B$$

即$\left(\frac{2g_2 g_3 C + g_3}{g_2 g_3 C + g_2}\right) B < A < 2B$ ，可推得$\frac{A}{B} > \left(\frac{2g_2 g_3 C + g_3}{g_2 g_3 C + g_2}\right)$以及$\frac{1}{A} > \frac{1}{2B}$ 。

（ii）以下過程將證明$\left\lfloor \frac{g_3 C + 1}{2g_3} \right\rfloor \in S(B, C, A)$。

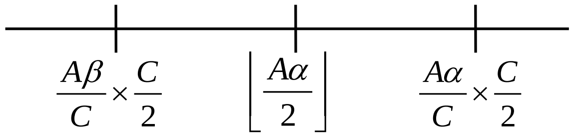
由定理 2-5-1 證明過程中(4)中，$\frac{A\alpha\, t_1}{C} - \frac{A\beta\, t_1}{B} = \frac{A(B\alpha - C\beta)\, t_1}{BC} = \frac{A\, t_1}{BC}$ 。

當 $t_1 = \left\lfloor \frac{g_3 C + 1}{2g_3} \right\rfloor$時，因為 C 為偶數，所以 $t_1 = \left\lfloor \frac{g_3 C + 1}{2g_3} \right\rfloor = \frac{C}{2}$ ，則

$\frac{A}{BC}\left\lfloor \frac{g_3 C + 1}{2g_3} \right\rfloor = \frac{A}{BC} \times \frac{C}{2} > \frac{1}{2}\left(\frac{2g_2 g_3 C + g_3}{g_2 g_3 C + g_2}\right) > \frac{1}{2}$。考慮$\frac{A\alpha\, t_1}{C} = \frac{A\alpha}{2}$ ，

因為$(A, C) = 1$、$B\alpha - C\beta = 1$，所以 A、α 為奇數，因此$\frac{A\alpha}{2} - \left\lfloor \frac{A\alpha}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}$ ，

也就是必存在正整數 $t_2 = \left\lfloor \frac{A\alpha}{2} \right\rfloor$ ，如下圖（九）：



圖（九）

即$\left\lfloor \dfrac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor \in S(B,C,A) \Rightarrow \dfrac{z_0}{g_3} \le \left\lfloor \dfrac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor$。

（iii）$\dfrac{BC}{A}\left\lfloor \dfrac{A}{B} \right\rfloor + \dfrac{B}{g_2A} = \dfrac{g_2BC+B}{g_2A} > \dfrac{g_2BC+B}{2g_2B} = \dfrac{g_2C+1}{2g_2} \ge \left\lfloor \dfrac{g_3C+1}{2g_3} \right\rfloor \ge \dfrac{z_0}{g_3}$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{A}\left\lfloor \dfrac{A}{B} \right\rfloor + \dfrac{B}{g_2A} \ge \dfrac{z_0}{g_3} \Rightarrow [b,c]\left(\left\lfloor \dfrac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + b \ge [b,c] + az_0$。 Q.E.D.

(2) 本文於此部分討論$[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$恰有兩數相同的情況，共有六種情況，但其中若$[a,c] > [a,b] = [b,c]$發生時，$C = A > B$。又因為$(A,C) = 1$，故此條件不可能發生。同理，$[a,b] > [a,c] = [b,c]$與$[b,c] > [a,b] = [a,c]$皆不可能發生。故只需討論三種情況。證明於定理 3-1、定理 3-2、定理 3-3。

定理 3-1：在$(a,b,c) = 1$且$[a,b] = [a,c] > [b,c]$的條件下，利用分層或拼接的拼法，

(1) 若$(b,c) > \dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$，則最小邊長為$[a,b] + a$。

(2) 若$(b,c) < \dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$，則最小邊長為$[b,c] + az_0 = [a,b] + [b,c] = [a,c] + [b,c]$，其中$z_0 = \min\left\{ z \middle| z \in S(b,c,a) \right\}$。

【證明】

(1) 為了方便討論，重新改寫條件如下：$[a,b] = [a,c] > [b,c] \Leftrightarrow A > B = C$，

又因為$(B,C) = 1$，因此，$A > B = C = 1$，則$\begin{cases} a = g_1g_2A \\ b = g_1g_3 \\ c = g_2g_3 \end{cases}$，其中$\begin{cases} g_1 = (a,b) \\ g_2 = (a,c) \\ g_3 = (b,c) \end{cases}$，

由(a,b,c)=1可知：g_1、g_2、g_3兩兩互質，(A,g_3)=1，且$a > b > c \Rightarrow \begin{cases} g_2A > g_3 \\ g_1 > g_2 \end{cases}$。

(2) 在三種特殊拼接拼法的最小邊長中，$[a,b] + [a,c] > [a,b] + [b,c] = [a,c] + [b,c]$，

故特殊拼接的最小邊長為$[a,b] + [b,c] = [a,c] + [b,c] = g_1g_2g_3A + g_1g_2g_3$。

(3) 在三種基本拼接拼法的最小邊長中，其邊長分別為：

（i）$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3BC+g_1g_2Az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2Az_0$，其中

$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$

$bx+cy=az\Leftrightarrow(g_1g_3)x+(g_2g_3)y=(g_1g_2A)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_2x'\\y=g_1y'\\z=g_3z'\end{cases}$，化簡為 $x'+y'=Az'$，

$z'=1$是最小的正整數解，則 $z_0=g_3$。

故其邊長$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

（ii）$[a,c]+bz_0=g_1g_2g_3AC+g_1g_3Bz_0=g_1g_2g_3A+g_1g_3z_0$，其中

$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,c,b)\}$

$ax+cy=bz\Leftrightarrow(g_1g_2A)x+(g_2g_3)y=(g_1g_3)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_3x'\\y=g_1y'\\z=g_2z'\end{cases}$，化簡為 $Ax'+y'=z'$，

$(x',y',z')=(1,1,A+1)$是最小的一組正整數解，則 $z_0=g_2(A+1)>g_2$。

故其邊長$[a,c]+bz_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,c,b)\}$。

（iii）$[a,b]+cz_0=g_1g_2g_3AB+g_2g_3Cz_0=g_1g_2g_3A+g_2g_3z_0$，其中

$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,b,c)\}$

$ax+by=cz\Leftrightarrow(g_1g_2A)x+(g_1g_3)y=(g_2g_3)z\Leftrightarrow\begin{cases}x=g_3x'\\y=g_2y'\\z=g_1z'\end{cases}$，化簡為 $Ax'+y'=z'$，

$(x',y',z')=(1,1,A+1)$是最小的一組正整數解，則 $z_0=g_1(A+1)>g_1$。

其邊長$[a,b]+cz_0>g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中 $z_0=\min\{z\,|\,z\in S(a,b,c)\}$。

故基本拼接的最小邊長為$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2g_3A$，其中

$z_0=\min\{z\,|\,z\in S(b,c,a)\}$。

(4) 在六種分層的最小邊長中，其邊長分別為$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c$、$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b$、

$2[a,c]+c$ 、 $[a,c]+a$ 、 $2[a,b]+b$ 、 $[a,b]+a$ 。

明顯地， $2[a,b]+b>2[a,c]+c>[a,c]+a=[a,b]+a=g_1g_2g_3A+a$ 、

$[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c=g_1g_2g_3(A+1)+c$ 、 $[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b=g_1g_2g_3(A+1)+b$ ，

明顯地， $g_1g_2g_3(A+1)+b>g_1g_2g_3(A+1)+c$ 。

故分層的最小邊長為$\min\{g_1g_2g_3(A+1)+c,g_1g_2g_3A+a\}$ 。

又因為$g_1g_2g_3(A+1)+c>g_1g_2g_3(A+1)$。

即若想要討論拼接與分層的拼法下，拼出最小的正三角形只需要考慮邊長為

$g_1g_2g_3A+g_1g_2g_3$和$g_1g_2g_3A+a$的狀況。

(5) 若$g_3>A$，則$g_1g_2g_3A+g_1g_2g_3>g_1g_2g_3A+g_1g_2A$ ，

即$[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]>[a,b]+a=[a,c]+a$ 。

反之，若$g_3\le A$ ，則$[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]\le[a,b]+a=[a,c]+a$ 。

綜合(1)、(2)、(3)、(4)、(5)，可推得利用分層或拼接的拼法，

在$[a,b]=[a,c]>[b,c]$的條件下，則

(1) 若$(b,c)>\frac{a}{(a,b)(a,c)}$ ，則最小邊長為$[a,b]+a=[a,c]+a$ 。

(2) 若$(b,c)<\frac{a}{(a,b)(a,c)}$ ，則最小邊長為$[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]$ ，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ Q.E.D.

定理 3-2：若$(a,b,c)=1$且$[b,c]=[a,c]>[a,b]$，利用分層或拼接的拼法，則最小邊長為$[a,c]+c$。
定理 3-3：若$(a,b,c)=1$且$[a,b]=[b,c]>[a,c]$，利用分層或拼接的拼法，則最小邊長為$[b,c]+b$。

（定理 3-2、3-3 證明手法如定理 3-1，限於篇幅，詳細過程請見數學科手稿。）

(3) 最後，本文於此部分討論$[a,b]=[b,c]=[a,c]$的情況。證明於定理 4-1。

定理 4-1：若$(a,b,c)=1$且$[a,b]=[b,c]=[a,c]$，利用分層或拼接的拼法，則最小邊長為$2[a,b]$。

【證明】

(1) 重新改寫條件如下：$[a,b]=[b,c]=[a,c] \Leftrightarrow A=B=C$，

因為A、B、C兩兩互質，因此，$A=B=C=1$，則$\begin{cases} a=g_1g_2 \\ b=g_1g_3 \\ c=g_2g_3 \end{cases}$，其中$\begin{cases} g_1=(a,b) \\ g_2=(a,c) \\ g_3=(b,c) \end{cases}$。

(2) 在三種特殊拼接拼法的最小邊長中，$[a,c]+[b,c]=[a,b]+[b,c]=[a,b]+[a,c]$。

故特殊拼接的最小邊長為$[a,b]+[b,c]=2g_1g_2g_3$。

(3) 在三種基本拼接拼法的最小邊長中，其邊長分別為：

(i) $[b,c]+az_0=g_1g_2g_3BC+g_1g_2Az_0=g_1g_2g_3+g_1g_2z_0$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$

又$bx+cy=az \Leftrightarrow (g_1g_3)x+(g_2g_3)y=(g_1g_2)z \Leftrightarrow \begin{cases} x=g_2x' \\ y=g_1y' \\ z=g_3z' \end{cases}$，化簡為$x'+y'=z'$，

$(x',y',z')=(1,1,2)$是最小的一組正整數解，則$z_0=2g_3$。

故其邊長$[b,c]+az_0=g_1g_2g_3+2g_1g_2g_3=3g_1g_2g_3$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$

(ii) 同理，$[a,c]+bz_0=3g_1g_2g_3$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(a,c,b)\}$；$[a,b]+cz_0=3g_1g_2g_3$，

其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(a,b,c)\}$。

故基本拼接的最小邊長為$[a,b]+cz_0=3g_1g_2g_3$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(a,b,c)\}$。

(4) 在六種分層的最小邊長中，其邊長分別為$2[b,c]+c$、$2[b,c]+b$、$2[a,c]+c$、$2[a,c]+a$、$2[a,b]+b$、$2[a,b]+a$。明顯地，最小值為$2[a,b]+c$。

綜合(1)、(2)、(3)、(4)，可推得利用分層或拼接的拼法，若$[a,b]=[b,c]=[a,c]$，則最小邊長為$2[a,b]=2g_1g_2g_3$。 Q.E.D.

（三）a 、 b 、 c 為任意三種不同正整數，且 $a > b > c$

若 $(a,b,c) = k$ ，可先將 a 、 b 、 c 皆除以 k ，即 $\begin{cases} a' = \dfrac{a}{k} \\ b' = \dfrac{b}{k} \\ c' = \dfrac{c}{k} \end{cases}$ ，則 $(a',b',c') = 1$ 。

接著從（二）中，可以求出分別以 a' 、 b' 、 c' 為邊長的三種正三角形所拼成的最小正三角形邊長，再將其邊長乘以 k 倍，即為分別以 a 、 b 、 c 為邊長的三種正三角形所拼成的最小正三角形邊長。

伍、研究結果

（一） 給定三種不同邊長的正三角形，邊長分別為a、b和c，其中$a,b,c\in\mathbb{N}$且$a>b>c$，a、b、c兩兩互質，利用分層或拼接的拼法，使用這三種正三角形拼出另一個大正三角形，則大正三角形的最小邊長為

【定理 1-2】(1) 若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}>1$，則最小邊長為$bc+az_0$，其中 $z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$。

(2) 若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}\le 1$且$\frac{a}{b}\ge 2$，則最小邊長為$bc+az_0$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$。

(3) 若$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}\le 1$且$\frac{a}{b}<2$，則最小邊長為$\min\left\{ac+a,bc+az_0\right\}$，其中

$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(b,c,a)\right\}$。

（二） 給定三種不同邊長的正三角形，邊長分別為a、b和c，其中$a,b,c\in\mathbb{N}$且$a>b>c$，(a,b,c)=1，利用分層或拼接的拼法，使用這三種正三角形拼出另一個大正三角形，則大正三角形的最小邊長於定理 2-1 到定理 2-4、定理 2-5-2、定理 2-6-2、定理 3-1 到定理 3-3、定理 4-1。

【定理 2-1】若$[b,c]>[a,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\left\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\right\}$，

其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$。

【定理 2-2】若$[a,c]>[b,c]>[a,b]$，則最小邊長為$\min\left\{[b,c]+c,[a,b]+cz_0\right\}$，

其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,b,c)\right\}$。

【定理 2-3】若$[a,b]>[b,c]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\left\{[b,c]+b,[a,c]+bz_0\right\}$，

其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,c,b)\right\}$。

【定理 2-4】若$[b,c]>[a,b]>[a,c]$，則最小邊長為$\min\left\{[a,b]+b,[a,c]+bz_0\right\}$，

其中$z_0=\min\left\{z\middle|z\in S(a,c,b)\right\}$。

【定理 2-5-2】在$[a,c]>[a,b]>[b,c]$的條件下，

(1) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$，且$\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$為偶數時，

則最小邊長為$[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(2) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$，且$\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$為奇數時，

則最小邊長為$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(3) 若$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長為$\min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

【定理 2-6-2】在$[a,b]>[a,c]>[b,c]$的條件下，

(1) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，且$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$為偶數時，

則最小邊長為$[b,c]+az_0$，其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(2) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$，且$\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$為奇數時，

則最小邊長為$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b,[b,c]+az_0\right\}$，其中

$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

(3) 若$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}\le 1$，則最小邊長$\min\{[a,c]+a,[b,c]+az_0\}$，

其中$z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$。

【定理 3-1】在$[a,b]=[a,c]>[b,c]$的條件下，

(1) 若$(b,c)>\dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$，則最小邊長為$[a,b]+a$。

(2) 若$(b,c)<\dfrac{a}{(a,b)(a,c)}$，則最小邊長為

$[b,c]+az_0=[a,b]+[b,c]=[a,c]+[b,c]$，其中$z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$。

【定理 3-2】若$[b,c]=[a,c]>[a,b]$，則最小邊長為$[a,c]+c$。

【定理 3-3】若$[a,b]=[b,c]>[a,c]$，則最小邊長為$[b,c]+b$。

【定理 4-1】若$[a,b]=[b,c]=[a,c]$，則最小邊長為$2[a,b]$。

（三） 給定三種不同邊長的正三角形，邊長分別為a、b和c，其中$a,b,c\in\mathbb{N}$且$a>b>c$，使用這三種正三角形拼出另一個大正三角形，則大正三角形的最小邊長為？

其方法如下：

先將三種正三角形縮小為$\dfrac{1}{(a,b,c)}$倍，使其邊長分別為$\dfrac{a}{(a,b,c)},\dfrac{b}{(a,b,c)},\dfrac{c}{(a,b,c)}$。

依上述二、或三、的各種情況求出所能拼成的最小正三角形邊長，再將該正三角形放大，邊長乘以(a,b,c)倍，即為答案。

陸、討論

證明定理 2-5-2 的過程中，發現在(2)-Case1 的過程僅需要條件 $B \geq 2$，即 $B \neq 1$。好奇若 $B=1$ 時，其邊長最小為何？本文深入討論證明為：「若 $B=1$ 時，則拼出另一正三角形，其邊長最小為 $[b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor +1\right)+c$ 。」（證明如下）

由定理 2-5-1 的證明過程(4)中得知 $z_0 \leq g_3\left\lceil \frac{BC}{A} \right\rceil = g_3\left\lceil \frac{C}{A} \right\rceil$，因為 $b>c \Rightarrow g_1 > g_3 C$，即 $g_1 > C$ 。

考慮 $A=Cg+r$ ， $0<r<C$ ， $g,r \in \mathbb{N}$ ， $g_1 > C \Rightarrow r \geq 1 > \frac{C}{g_1}$

$$\Rightarrow \frac{A}{C}-\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor = \frac{r}{C} > \frac{1}{g_1} \Rightarrow g_1 A - g_1 C\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor > C \Rightarrow g_1 A g_2 g_3 - g_1 g_2 g_3 BC\left\lfloor \frac{A}{C} \right\rfloor > g_2 g_3 C$$

改寫成 $az_0 - [b,c]\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor > c \Rightarrow az_0 > [b,c]\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + c$ ，即 $[b,c]+az_0 > [b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor +1\right)+c$

Q.E.D.

且在定理 2-5-2 證明過程中亦不需要 B 為偶數，因此，本研究將其再細分並重新整理如下：

- 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + \frac{a-c}{[b,c]} \leq 1 \rightarrow \min\{[a,b]+a,[b,c]+az_0\}$
- 若 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor + \frac{a-c}{[b,c]} > 1$
  - $\boxed{B=1} \rightarrow [b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor +1\right)+c$
  - $\boxed{B \neq 1}$
    - $\boxed{A>BC} \rightarrow [b,c]+az_0$
    - $\boxed{A<BC}$
      - $\boxed{B\text{ 為偶數}} \rightarrow [b,c]+az_0$
      - $\boxed{B\text{ 為奇數}} \rightarrow \min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor \frac{[a,b]}{[b,c]} \right\rfloor +1\right)+c,[b,c]+az_0\right\}$

以上 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(b,c,a)\}$

證明定理 2-6-2 的過程中也發現其狀況和定理 2-5-2 一樣，

因此，本研究將其再細分並重新整理如下：

若 $\dfrac{[a,c]}{[b,c]} - \left\lfloor \dfrac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + \dfrac{a-b}{[b,c]} \le 1 \ \rightarrow\ \min\{[a,c]+a, [b,c]+az_0\}$

若 $\dfrac{[a,c]}{[b,c]} - \left\lfloor \dfrac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + \dfrac{a-b}{[b,c]} > 1$

- $\boxed{C=1} \ \rightarrow\ \min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor \dfrac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + b, [b,c]+az_0\right\}$
- $\boxed{C \ne 1}$
  - $\boxed{A > BC} \ \rightarrow\ [b,c]+az_0$
  - $\boxed{A < BC}$
    - $\boxed{C\text{ 為偶數}} \ \rightarrow\ [b,c]+az_0$
    - $\boxed{C\text{ 為奇數}} \ \rightarrow\ \min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor \dfrac{[a,c]}{[b,c]} \right\rfloor + 1\right) + b, [b,c]+az_0\right\}$

以上 $z_0 = \min\{z \mid z \in S(b,c,a)\}$

但發現定理 2-6-2 和定理 2-5-2 不同之處在於 $C=1$ 時，並未有固定的最小邊長。

柒、結論

本研究探討問題為:「在分層或拼接的拼法下,如何使用邊長分別為 a、b、c, $a,b,c\in\mathbb{N}$,$a>b>c$ 的三種正三角形拼出另一正三角形,使其邊長達到最小?」本文給了拼法原則為:

Step1:先算任意二數的最小公倍數 $[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$。

Step2:若 $[a,b],[b,c],[a,c]$ 完全相等,則最小邊長必為 $2[a,b]$;

若 $[a,b],[b,c],[a,c]$ 不完全相等,則將 $[a,b],[b,c],[a,c]$ 依大小排序,並接續 Step3。

Step3:先考慮分層的此種拼法為圖(十),

且滿足 $\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數,

$\overline{RS}$ 長為三個最小公倍數之中第二大的數。

Step4:再考慮拼接的此種拼法為圖(十一),

且滿足 $\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數。

Step5:

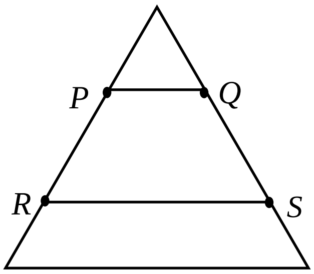
Case1:若圖(十)最下層為邊長 a,則需多考慮分層的拼法為圖(十二),

且滿足 $\overline{RS}$ 長為三個最小公倍數之中第二大的數,

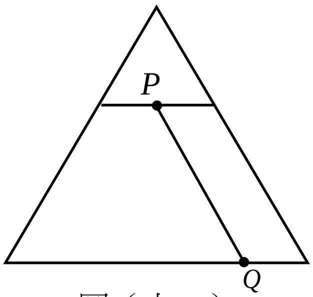
$\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數的 n 倍,其中 $n=\left\lfloor \dfrac{\overline{RS}}{\text{最小的最小公倍數}} \right\rfloor+1$。

且必可從圖(十)、圖(十一)及圖(十二)三種拼法中找到最小。

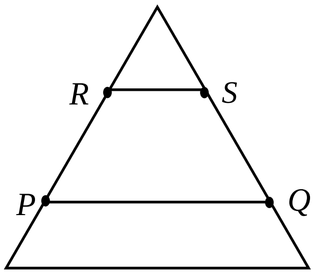
Case2:若圖(十)最下層為邊長 b 或 c,則必可從圖(十)及圖(十一)兩種拼法中找到最小。



圖(十)



圖(十一)



圖(十二)

若要了解每種不同分類下確切的最小邊長,則可參見「伍、研究結果」。

捌、參考資料及其他

一、未來展望

在研究的過程中，我們認為拼成最小邊長的拼法必為「分割線數最少」的拼法，因此將拼法限縮為分層和拼接兩種。我們希望未來能夠證明，若想使用三種不同邊長的正三角形，拼出邊長最小的正三角形，只需考慮分層和拼接兩種方法。

二、參考資料

（一）John Mason, Kaye Stacey, Leone Burton (1998).　數學思考　臺北市：九章出版社　（臺北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學　合譯）。

（二）潘承洞、潘承彪（民 91）　簡明數論　臺北市：九章出版社。

（三）本文作者、黃欣茹（民 108 年 3 月）　‘try angle’組合的奧妙　全國高級中等學校小論文。

（四）本文作者（民 109 年 2 月）　正三角形的最小拼接　2020 國際科學展覽會。

附錄　定理 1-2 C++程式碼

```
#include <algorithm>
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
  int a,b,c;
  cout<<"輸入正整數 a,b,c(ａ＞ｂ＞ｃ)"<<endl;
  cin>>a>>b>>c;
  if (__gcd(a,b)==1&&__gcd(b,c)==1&&__gcd(a,c)==1)
  {
    float A=(float)a; float B=(float)b; float C=(float)c;
    if (A/B-a/b+(A-B)/(B*C)<=1 && a/b<2)
    {
      int k=1;
      while (k<=int(1+(a-b)*(C/A)))
      {
        int xmax=a*k/B;
        for (int x=1;x<=xmax;++x)
        {
          int s=a*k-b*x;
          if(s%c==0)
          {
            int z=k; int layering=a*c+a; int combing=b*c+a*z;
            cout<<"a="<<a<<",b="<<b<<",c="<<c<<",z="<<z<<"\n 分層邊長:"<<layering<<"\n 基本拼接邊長:"<<combing<<"\n 基本拼接小於分層"<<endl;
            return 0;
          }
        }
        ++k;
      }
      cout<<"a="<<a<<",b="<<b<<",c="<<c<<"\n 分層小於基本拼接"<<endl;
    }
    else
      cout<<"a,b,c 不符合檢驗法條件"<<endl;
  }
  else
    cout<<"a,b,c 不是兩兩互質"<<endl;
  return 0;
}
```

【評語】050416

本作品探討任意給定三種不同(整數)邊長之正三角形，如何拼接出最小邊長之正三角形？(每種三角形均須使用)。以往的文獻主要使用兩種三角形，此篇作品對於三種三角形的情況進行相當完整且清楚的探討。本作品必須搭配作者原始投稿到全國高等中學小論文，以及 2020 國際科展作品說明書一起看，才有辦法知道整份作品的完整思路。這個問題的困難點在(i)先找出所有可行的拼接；(ii)找出給定三個整數須滿足的條件，因為滿足的條件不同，最小拼接的方式就不同。實際解題的過程，相當複雜，需要在高斯符號運算中比大小，更需在整係數方程式有解的情形下，找出最小解的公式再來比大小。作者先初分兩兩互質、最大公因數為 1，兩兩最小公倍數相同或相異；最後再推廣到不互質的狀況。最後靠分出十幾類的狀況，完整把整個問題解掉，的確是一個大工程，非常的不容易，需要相當慎密的邏輯，是一篇優秀的作品。

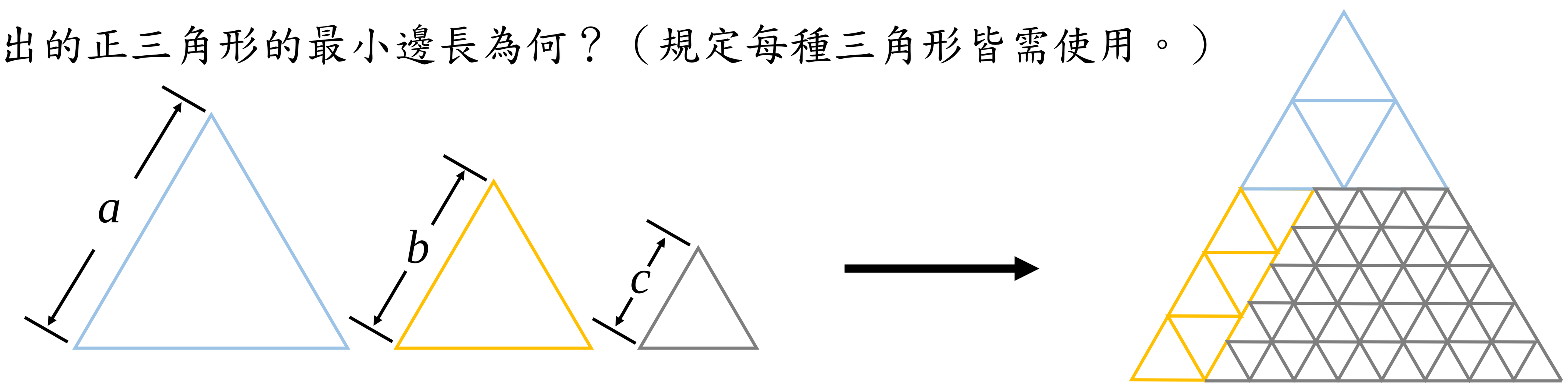
作品海報

摘要

眾所周知，「如何使用三種不同邊長的正三角形，去拼出邊長最小的正三角形？」這個問題是困難的。本文限縮在分層或拼接的拼法下，探討此問題，並得到了答案。解決過程中牽涉到正整數解的存在性問題——如何找最小的正整數 z ，使得方程式 $ax+by=cz$ 有正整數解，其中 a 、 b 、 c 為三種正三角形的邊長。

一、研究動機與題目

給定三種大小不同的正三角形，邊長由大至小分別為正整數 a 、 b 、 c ，使用這三種正三角形拼出另一個正三角形，如圖一，請問可以拼出的正三角形的最小邊長為何？（規定每種三角形皆需使用。）



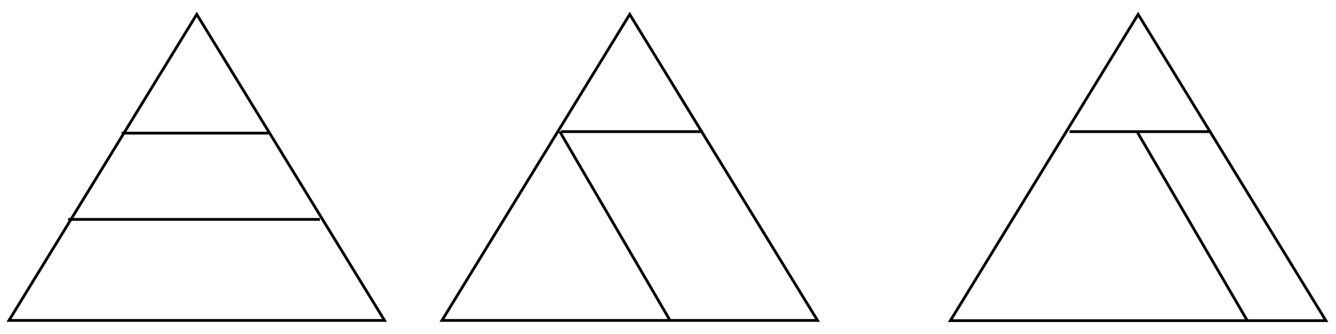
◀圖一：以7、5、3為例

二、研究目的

（一）使用三種邊長兩兩互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。
（二）使用三種邊長互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。
（三）使用三種任意正整數邊長的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

三、名詞定義與先備知識

（一）分層：三種正三角形分成三層的排列方式，其中每層只有一種邊長的正三角形，如圖二。
（二）特殊拼接：三種正三角形分成上下兩層，上層為一個區塊，下層又切割成兩個區塊的排列方式，其中下層的兩個區塊分別為一個平行四邊形和一個正三角形，且每個區塊只有一種正三角形，如圖三。
（三）基本拼接：三種正三角形分成上下兩層，上層為一個區塊，下層又切割成兩個區塊的排列方式，其中下層的兩個區塊分別為一個平行四邊形和一個梯形，且每個區塊只有一種正三角形，如圖四。
（四）分割線：將不同邊長的正三角形所組成的區塊分開的線段。
（五）$\lceil a \rceil$ 表示不小於 a 的最小整數；
$\lfloor a \rfloor$ 表示不大於 a 的最大整數。
（六）$S(l,m,n)=\{z\in\mathbb{N} \mid 方程式 lx+my=nz 有正整數解\}, l,m,n\in\mathbb{N}$。
（七）判別式：$D=\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}$。



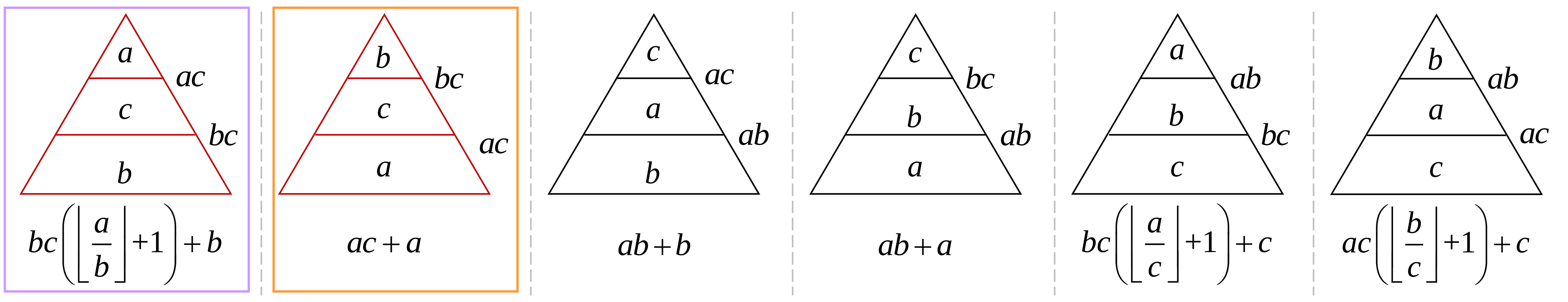
▲圖二：分層 ▲圖三：特殊拼接 ▲圖四：基本拼接

四、研究過程

（一） a、b、c 兩兩互質

分層：若 $\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}>1$，則最小邊長為 $bc\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b$；若 $\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}\le 1$，則最小邊長為 $ac+a$。

六種分層的拼法，如圖五，其最小邊長分別條列如下：

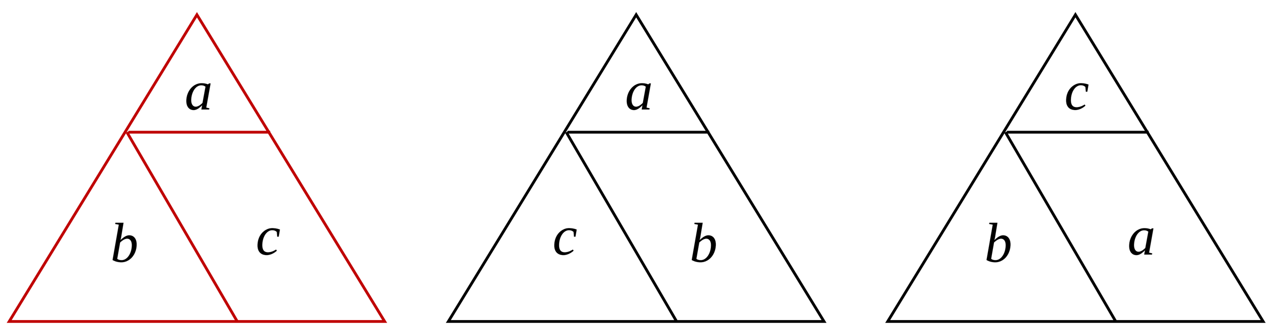


▲圖五

特殊拼接：最小邊長為 $ac+bc$。

六種特殊拼接的拼法，其最小邊長有 $ac+bc$、$ab+bc$、$ab+ac$，如圖六：

【證明】$ac+bc<ab+bc<ab+ac$ **Q.E.D.**



◀圖六

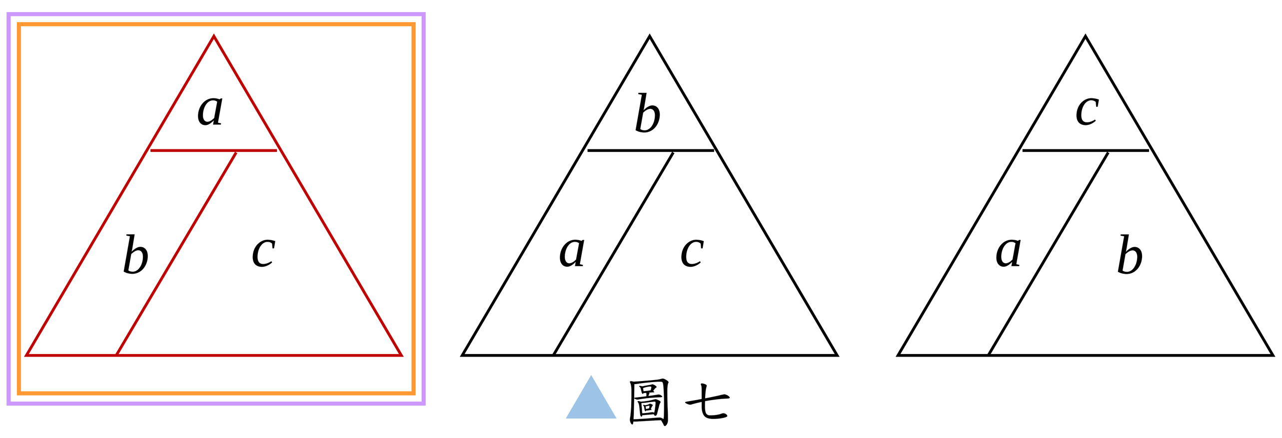
基本拼接：最小邊長為 $bc+az_0$，其中 $z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$。

三種基本拼接的拼法，如圖七其最小邊長分別為：

$bc+az_0$，其中 $z_0=\min\{z \mid z\in S(b,c,a)\}$；

$ac+bz_0$，其中 $z_0=\min\{z \mid z\in S(a,c,b)\}$；

$ab+cz_0$，其中 $z_0=\min\{z \mid z\in S(a,b,c)\}$。



▲圖七

【證明】將基本拼接和分層的 $ac+a$ 比較：

$ac+bz_0\ge ac+a+c>ac+a$；$ab+cz_0\ge ab+a+b>ac+a$。 **Q.E.D.**

定理1-1 (1) 基本拼接的最小邊長 $bc+az_0 \le$ 特殊拼接的最小邊長 $ac+bc$ 。

【證明】

(1)考慮方程式 $bx+cy=az$ 的正整數解 $\begin{cases} bx+cy=at_1 \\ az=at_1 \end{cases}, t_1\in\mathbb{N}$（式一）

因為 $(b,c)=1$，所以存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ 且滿足

$b\alpha-c\beta=1 \Rightarrow (b\alpha-c\beta)at_1=at_1 \Rightarrow b(a\alpha t_1)+c(-a\beta t_1)=at_1$

故（式一）的正整數解通式為 $\begin{cases} x=a\alpha t_1-ct_2 \\ y=-a\beta t_1+bt_2 \\ z=t_1 \end{cases}, t_1,t_2\in\mathbb{N}$ ，

因為 $x,y>0$，所以 $t_2\in\left(\dfrac{a\beta t_1}{b},\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$ 。

當 $t_1=\left\lceil\dfrac{bc}{a}\right\rceil$ 時，則區間 $\left(\dfrac{a\beta t_1}{b},\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$ 的長度為

$\dfrac{a\alpha t_1}{c}-\dfrac{a\beta t_1}{b}=\dfrac{(b\alpha-c\beta)at_1}{bc}=\dfrac{a}{bc}t_1>\dfrac{a}{bc}\times\dfrac{bc}{a}=1$ ，

即至少存在一個 $t_2\in\mathbb{N}$，也就是（式一）必有正整數解。

可推得 $t_1=\left\lceil\dfrac{bc}{a}\right\rceil\in S(b,c,a)$ ，所以 $t_1=\left\lceil\dfrac{bc}{a}\right\rceil\ge z_0$ 。

(2)將基本拼接和特殊拼接比較：

$\left\lceil\dfrac{bc}{a}\right\rceil\ge z_0 \Rightarrow c\ge z_0 \Rightarrow ac+bc\ge bc+az_0$ 。 **Q.E.D.**

定理1-1 (2) 若 $\dfrac{a}{b}-\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{bc}>1$，則基本拼接的最小邊長 $bc+az_0\le$ 分層的最小邊長 $bc\left(\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+1\right)+b$ 。

【證明】

(1)若 $a>bc$，則 $\left\lceil\dfrac{bc}{a}\right\rceil=1$ 。即 $z_0=1$ 。

$\left(bc\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+b\right)-(bc+az_0)>(ac+b)-(bc+a)=(a-b)(c-1)\ge 0$

(2)若 $a<bc$，且 $\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor\ge 2$，則

$bc\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+b\ge 2bc+b>bc+a=a\left(\dfrac{bc}{a}+1\right)>a\left\lceil\dfrac{bc}{a}\right\rceil\ge az_0$

$\Rightarrow bc\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+b>az_0 \Rightarrow bc\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+b>bc+az_0$

(3)若 $a<bc$，且 $\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor=1$，即 $a=b+r$ ，其中 $0<r<b$

$\dfrac{bc\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+b}{a}=\dfrac{bc+b}{a}>\dfrac{bc+b}{2b}=\dfrac{c+1}{2}$ ，可得

$\left\lfloor\dfrac{bc\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+b}{a}\right\rfloor\ge\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor=\begin{cases}\dfrac{c+1}{2}, 若c為奇數 \\ \dfrac{c}{2}\quad, 若c為偶數\end{cases}$ 。

(4)承(3)的條件，以下過程將證明 $\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor\in S(b,c,a)$ 。

因為 $\dfrac{a}{b}-\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{bc}>1$ ，所以 $\dfrac{r}{b}+\dfrac{r}{bc}>1\Rightarrow rc+r>bc$

$\Rightarrow r>\dfrac{c}{c+1}b\Rightarrow a=b+r>\dfrac{2c+1}{c+1}b\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{2c+1}{c+1}$ 。

Case1：當 c 為奇數時，$t_1=\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor=\dfrac{c+1}{2}$ ，

則區間 $\left(\dfrac{a\beta t_1}{b},\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$ 長度為 $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{t_1}{c}>\dfrac{2c+1}{c+1}\times\dfrac{c+1}{2c}>1$ ，

所以必至少存在一個 $t_2\in\mathbb{N}$ ，即 $t_1=\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor\in S(b,c,a)$ 。

Case2：當 c 為偶數時， $t_1=\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor=\dfrac{c}{2}$ ，

則區間 $\left(\dfrac{a\beta t_1}{b},\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$ 長度為 $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{t_1}{c}>\dfrac{2c+1}{c+1}\times\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}$ ，

且 $\dfrac{a\alpha t_1}{c}=\dfrac{a\alpha}{2}$ 。因為 $(a,c)=1$， $b\alpha-c\beta=1$ ，

所以 a 、α 皆為奇數。因此，$\dfrac{a\alpha}{2}-\left\lfloor\dfrac{a\alpha}{2}\right\rfloor=\dfrac{1}{2}$ ，

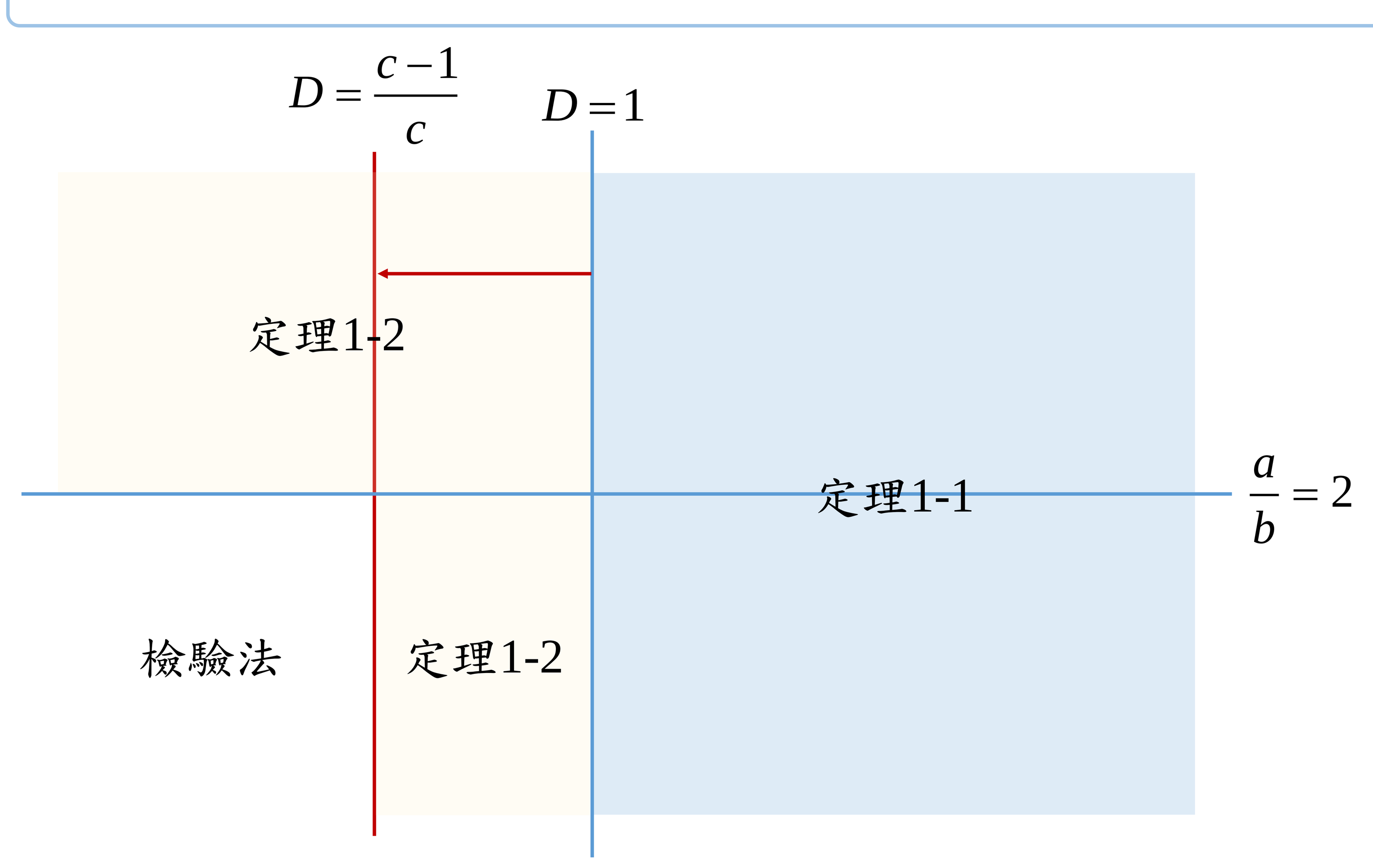
則區間 $\left(\left\lfloor\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right\rfloor,\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$ 長度為 $\dfrac{1}{2}$，即 $\left\lfloor\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right\rfloor\in\left(\dfrac{a\beta t_1}{b},\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right)$

所以存在 $t_2=\left\lfloor\dfrac{a\alpha t_1}{c}\right\rfloor\in\mathbb{N}$ ，即 $t_1=\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor\in S(b,c,a)$ 。

(5)承(3)和(4)，可得 $\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor\in S(b,c,a)$

且 $\left\lfloor\dfrac{bc\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+b}{a}\right\rfloor\ge\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor$，故 $\left\lfloor\dfrac{bc\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+b}{a}\right\rfloor\ge\left\lfloor\dfrac{c+1}{2}\right\rfloor\ge z_0$

$\Rightarrow bc\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+b\ge az_0\Rightarrow bc\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+b\ge bc+az_0$ 。 **Q.E.D.**



▲圖八：塗色部分表示基本拼接$bc+az_0$邊長最小

檢驗法 若 $\dfrac{a}{b}-\left\lfloor\dfrac{a}{b}\right\rfloor+\dfrac{a-b}{bc}<\dfrac{c-1}{c}$ 且 $\dfrac{a}{b}<2$，則考慮 $bx+cy=ak$，

$k=1,2,\ldots\ldots,\left\lfloor 1+(a-b)\dfrac{c}{a}\right\rfloor$ 等方程式皆無正整數解時，

則分層的最小邊長 $ac+a\le$ 基本拼接的最小邊長$bc+az_0$。

【證明】

$\because bc+az_0\le ac+a\Leftrightarrow az_0\le(a-b)c+a\Leftrightarrow z_0\le 1+(a-b)\dfrac{c}{a}$ 。

Q.E.D.

（二） $(a,b,c)=1$ ：以 $[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$ 的大小次序分十類討論。

第一類 若 $[b,c]>[a,c]>[a,b]$，則最小邊長為 $\min\{[a,c]+c,[a,b]+cz_0\}$ ，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$ 。

【證明】

分層：$[a,c]+c$ 、$[b,c]+c$ 、$[a,c]+b$ 、 $[a,c]\left(\left\lfloor\dfrac{[b,c]}{[a,c]}\right\rfloor+1\right)+a$ 、 $[a,b]\left(\left\lfloor\dfrac{[a,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+b$ 、 $[a,b]\left(\left\lfloor\dfrac{[b,c]}{[a,b]}\right\rfloor+1\right)+a$ 。

基本拼接：$[a,b]+cz_0$，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$；$[a,c]+bz_0$，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$；

$[b,c]+az_0$，其中 $z_0=\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$ 。

特殊拼接：$[a,c]+[a,b]$、$[b,c]+[a,b]$、$[b,c]+[a,c]$ 。

依前述方法計算得最小邊長為 $[a,c]+c$ 或 $[a,b]+cz_0$ 。 **Q.E.D.**

五、研究結果

在下表中 $bc+az_0$ 及 $[b,c]+az_0$ 中的 z_0 皆為 $\min\{z|z\in S(b,c,a)\}$；$[a,c]+bz_0$ 中的 z_0 皆為 $\min\{z|z\in S(a,c,b)\}$；$[a,b]+cz_0$ 中的 z_0 皆為 $\min\{z|z\in S(a,b,c)\}$。

（一）a、b、c 兩兩互質：

條件	最小邊長	條件	最小邊長
$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}\geq\frac{c-1}{c}$ 或 $\frac{a}{b}\geq 2$	$bc+az_0$	$\frac{a}{b}-\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\frac{a-b}{bc}<\frac{c-1}{c}$ 且 $\frac{a}{b}<2$	$\min\{ac+a, bc+az_0\}$

（二）$(a,b,c)=1$：

條件	最小邊長	條件	最小邊長
1. $[b,c]>[a,c]>[a,b]$	$\min\{[a,c]+c, [a,b]+cz_0\}$	2. $[a,b]>[b,c]>[a,c]$	$\min\{[b,c]+b, [a,c]+bz_0\}$
3. $[a,c]>[b,c]>[a,b]$	$\min\{[b,c]+c, [a,b]+cz_0\}$	4. $[b,c]>[a,b]>[a,c]$	$\min\{[a,b]+b, [a,c]+bz_0\}$
5-1. $[a,c]>[a,b]>[b,c]$ 且 $\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}\leq 1$	$\min\{[a,b]+a, [b,c]+az_0\}$	6-1. $[a,b]>[a,c]>[b,c]$ 且 $\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}\leq 1$	$\min\{[a,c]+a, [b,c]+az_0\}$
5-2. $[a,c]>[a,b]>[b,c]$、$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$ 且 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為偶數	$[b,c]+az_0$	6-2. $[a,b]>[a,c]>[b,c]$、$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$ 且 $\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$ 為偶數	$[b,c]+az_0$
5-3. $[a,c]>[a,b]>[b,c]$、$\frac{[a,b]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-c}{[b,c]}>1$ 且 $\frac{b}{(a,b)\times(b,c)}$ 為奇數	$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,b]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+c, [b,c]+az_0\right\}$	6-3. $[a,b]>[a,c]>[b,c]$、$\frac{[a,c]}{[b,c]}-\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+\frac{a-b}{[b,c]}>1$ 且 $\frac{c}{(a,c)\times(b,c)}$ 為奇數	$\min\left\{[b,c]\left(\left\lfloor\frac{[a,c]}{[b,c]}\right\rfloor+1\right)+b, [b,c]+az_0\right\}$
7-1. $[a,b]=[a,c]>[b,c]$ 且 $(b,c)>\frac{a}{(a,b)(a,c)}$	$[a,b]+a$	7-2. $[a,b]=[a,c]>[b,c]$ 且 $(b,c)<\frac{a}{(a,b)(a,c)}$	$[b,c]+az_0$
8. $[a,b]=[b,c]>[a,c]$	$[b,c]+b$	9. $[b,c]=[a,c]>[a,b]$	$[a,c]+c$
10. $[a,b]=[b,c]=[a,c]$	$2[a,b]$		

（三）$(a,b,c)=k$，$k\in\mathbb{N}$：將三種正三角形縮小 $\frac{1}{(a,b,c)}$ 倍，依上述各情況求得最小邊長，再乘 (a,b,c) 倍，即為答案。

六、結論

Step1： 先算任意二數的最小公倍數 $[a,b]$、$[b,c]$、$[a,c]$。

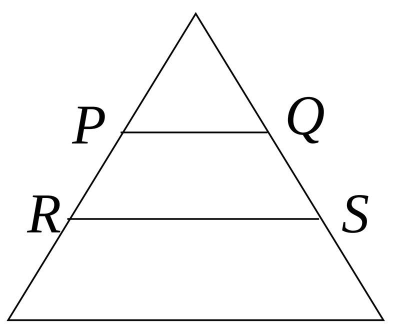
Step2： 若三數全部相等，則最小邊長為 $2[a,b]$；若三數不完全相等，則將三數依大小排序。

Step3： 先考慮分層的此種拼法為圖九，且滿足 $\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數，$\overline{RS}$ 長為三個最小公倍數之中第二大的數。

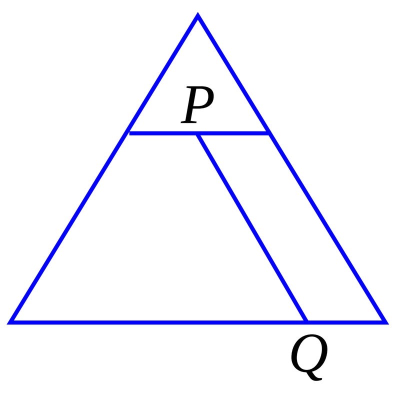
Step4： 再考慮拼接的此種拼法為圖十，且滿足 $\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數。

Step5：Case1： 若圖九最下層為邊長 b 或 c，則必可從圖九及圖十兩種拼法中找到最小。

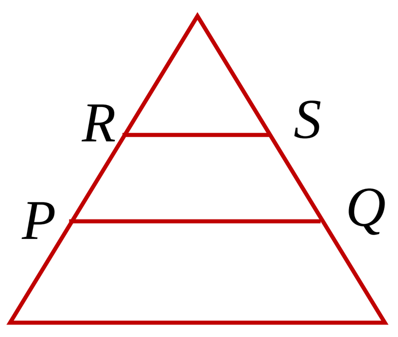
Case2： 若圖九最下層為邊長 a，則需多考慮分層的拼法為圖十一，且滿足 $\overline{RS}$ 長為三個最小公倍數之中第二大的數，$\overline{PQ}$ 長為三個最小公倍數之中最小的數的 n 倍，其中 $n=\left\lfloor\frac{\overline{RS}}{\text{最小的最小公倍數}}\right\rfloor+1$。且必可從圖九、圖十及圖十一，三種拼法中找到最小。



◀圖九



◀圖十



◀圖十一

七、未來展望

我們認為拼成最小邊長的拼法必為「分割線數最少」的拼法，因此將拼法限縮為分層、基本拼接和特殊拼接三種。我們希望未來能夠證明，若想使用三種不同邊長的正三角形拼出邊長最小的正三角形，只需考慮此三種拼法。

八、參考文獻

（一）John Mason, Kaye Stacey, Leone Burton 數學思考 一版 台北市九章出版社 216頁 民87（臺北市立建國高級中學49屆314班全體同學 合譯）

（二）潘承洞、潘承彪 簡明數論 一版 台北市 九章出版社 329頁 民91