中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050414

超不單純的群體旋轉

學校名稱：新北市立林口高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃子恩	潘尚怡 胡裕仁

關鍵詞：群體、旋轉、頂點圖

摘要

本研究利用頂點圖探討三維空間中的正多面體及四維空間中的正多胞體圖形有幾種，並推廣至 n 維空間。四維空間中的正多胞體是用三維正多面體的圖形所堆疊出來，因此我們透過三維空間中的正多面體頂點圖探討四維空間中的正多胞體有幾種，進而推廣至 n 維空間。本研究透過遞迴式及數學歸納法探討 n 維空間中正多胞體（單純形、超方形、正軸形）之點、線、面的一般化結果。本研究利用代數及幾何的方式探討二維平面及三維立體圖形的對稱旋轉方式，再利用頂點圖去探討四維空間中正多胞體的對稱旋轉方式有幾種，並推廣至 n 維使其一般化。

壹、 研究動機

我們知道二維平面圖形，如正三角形、正方形等等，即正 n 邊形有無限多個。三維立體圖形中等邊長的僅有五種，分別是正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體，四維空間中的等邊圖形是否更少，抑或是無限多種呢[5]？因此本研究想探究四維空間中的等邊圖形個數是否唯一，原因何在？n 維度空間是否也存在等邊圖形？其個數是否唯一？另外，我們也想探究四維度空間甚至 n 維空間中的正多胞體對稱旋轉方式是否具有規律性？

貳、 研究目地及研究問題

1.1 本研究利用頂點圖探討三維正多面體至 n 維空間正多胞體的圖形有幾種？

2.1 本研究利用遞迴式及數學歸納法探討 n 維空間中正多胞體的點、線、面一般化結果。

3.1 本研究利用代數及幾何的方式探討二維空間中正 n 邊形及三維空間中正多面體的對稱旋轉方式。

3.2 本研究利用頂點圖探討四維空間中的正多胞體之對稱旋轉方式。

3.3 承 3.2 本研究利用頂點圖探討 n 維空間中正多胞體的對稱旋轉方式。

參、 研究設備及器材

紙、筆、大腦、電腦、動態幾何軟體 Geogebra

肆、　研究過程或方法及進行步驟

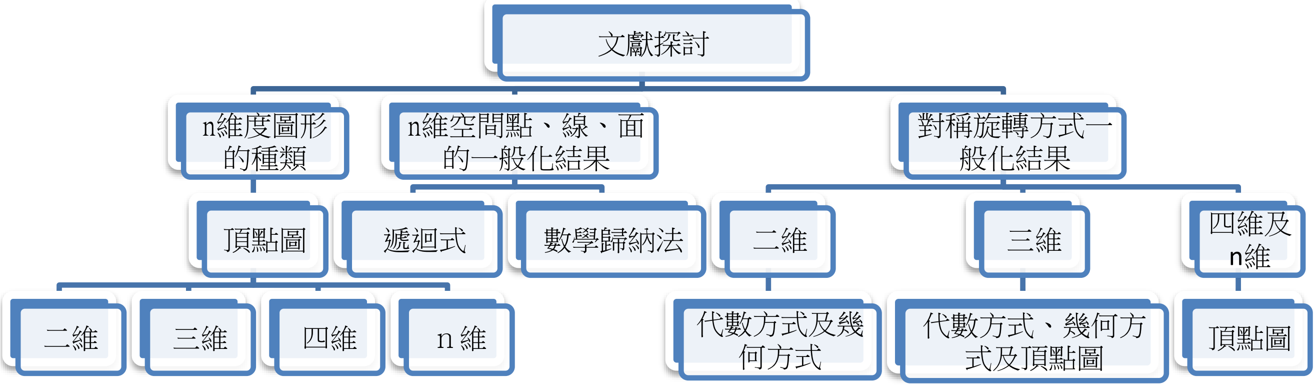


圖 1：研究流程圖

一、以下探討一維至 n 維空間中等邊圖形有幾種：

表 1：各維度等邊圖形個數

維度	1 維	2 維	3 維	4 維	5 維以上
等邊圖形(種)	1	∞	5	6	3

(一) 一維圖形：一個點。

(二) 二維圖形：正 n 邊形，故有無限多種。

(三) 三維圖形：

分別有正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體，如圖 3。

本研究引用文獻[5]施萊夫利符號：$\{p,q\}$ 為一三維圖形，p 為圖形的面，q 為頂點圖。

舉例：$\{4,3\}$ 為一正六面體，正六面體的面為正方形，正六面體的頂點圖為三角形。

舉例：$\{4,4\}$ 為正方形當面，頂點圖為正方形，在三維空間裡無圖形，

故沒有在本研究的討論之中。

以下證明三維空間中的等邊圖形僅有五種。

已知 p 為圖形的面，q 為頂點圖，求證：$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ $\forall\ p、q\geq 3\ \&\ p、q\in\mathbb{N}$。

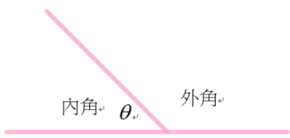


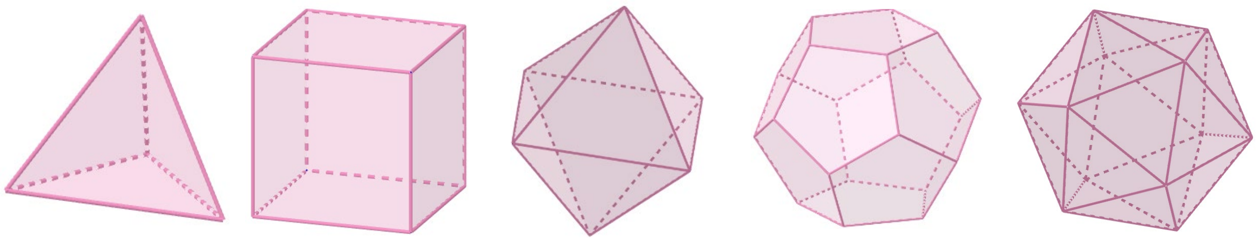
圖 2：兩條線形成的角其內角＋外角＝等於 π

∵ 兩條線形成的角其內角＋外角＝等於 π，外角：$\frac{2\pi}{p}$，內角：$\pi-\frac{2\pi}{p}=\pi(1-\frac{2}{p})$

$\pi(1-\frac{2}{p})q<2\pi \Rightarrow 1-\frac{2}{p}<\frac{2}{q} \Rightarrow \frac{2}{q}+\frac{2}{p}>1 \Rightarrow \frac{1}{q}+\frac{1}{p}>\frac{1}{2}$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}>\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p+q}{pq}>\frac{1}{2}$，

$\frac{2(p+q)}{pq}>1$，$\frac{2(p+q)-pq}{pq}>0$，$2(p+q)-pq>0$ ，$pq-2p-2q<0$，$(p-2)(q-2)<4$

$\therefore \{p,q\}=\{3,3\}$，$\{3,4\}$，$\{3,5\}$，$\{4,3\}$，$\{5,3\}$。



正四面體 $\{3,3\}$　正六面體 $\{4,3\}$　正八面體 $\{3,4\}$　正十二面體 $\{5,3\}$　正二十面體 $\{3,5\}$

圖 3：三維空間正多面體

(四) 四維圖形：分別有正五胞體、正八胞體、正十六胞體、正二十四胞體、正一百二十胞體、正六百胞體。

施萊夫利符號：$\{p,q,r\}$ 為一四維圖形，p 為圖形的面，

q 為 p 的頂點圖，r 為 $\{p,q\}$ 的頂點圖

舉例：$\{3,3,3\}$ 為一正五胞體，正五胞體的面為正三角形，

正五胞體的頂點圖為正四面體，如圖 3。

舉例：$\{4,3,3\}$ 為一正八胞體，正八胞體的面為正方形，

正八胞體的頂點圖為正四面體，如圖 4。

四維圖形為三維圖形堆疊出來，以下為三維空間所堆疊出來的圖形，

施萊夫利符號表示：

表 2：四維圖形用三維圖形推疊之圖形

<table>
<tr><td>$\{3,3,3\}$ 正五胞體</td><td>$\{3,3,4\}$ 正十六胞體</td><td>$\{3,3,5\}$ 正六百胞體</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{3,4,3\}$ 正二十四胞體</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{3,5,3\}$</td></tr>
<tr><td>$\{4,3,3\}$ 正八胞體</td><td>$\{4,3,4\}$</td><td>$\{4,3,5\}$</td></tr>
<tr><td>$\{5,3,3\}$ 正一百二十胞體</td><td>$\{5,3,4\}$</td><td>$\{5,3,5\}$</td></tr>
</table>

綠色字體為四維空間中的圖形，非正多胞體，紅色字體為無法在四維空間呈現的圖形。

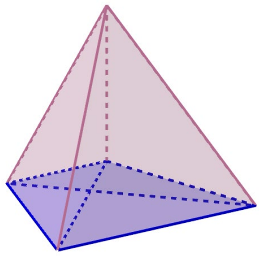


圖 4：正五胞體$\{3,3,3\}$，
深藍色部分為頂點圖。

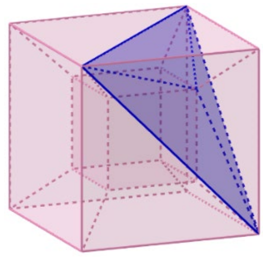


圖 5：正八胞體$\{4,3,3\}$，
深藍色部分為頂點圖。

(五) 五維圖形：分別有單純形、超方形、正軸形。

五維圖形為四維圖形堆疊出來，以下為四維空間所堆疊出來的圖形，

施萊夫利符號表示：

表 3：五維圖形用四維圖形推疊之圖形

<table>
<tr><td>$\{3,3,3,3\}$單純形</td><td>$\{3,3,3,4\}$超方形</td><td>$\{3,3,3,5\}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{3,3,4,3\}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{3,4,3,3\}$</td></tr>
<tr><td>$\{4,3,3,3\}$正軸形</td><td>$\{4,3,3,4\}$</td><td>$\{4,3,3,5\}$</td></tr>
<tr><td>$\{5,3,3,3\}$</td><td>$\{5,3,3,4\}$</td><td>$\{5,3,3,5\}$</td></tr>
</table>

綠色字體為五維空間中的圖形，非正多胞體，紅色字體為無法在五維空間呈現的圖形。

(六) n維空間：正多胞體分別有單純形、超方形、正軸形。

故由上述分析可知n維空間只有單純形、超方形、正軸形，

以下為n維空間中的施萊夫利符號表示：

表 4：n維空間中圖形之施萊夫利符號

單純形	超方形	正軸形
$\{3,3,\cdots,3,3\}=\{3^{n-1}\}$	$\{4,3,\cdots,3,3\}=\{4,3^{n-2}\}$	$\{3,3,\cdots,3,4\}=\{3^{n-2},4\}$

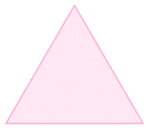
二、以下討論n維空間中單純形、超方形、正軸形之點、線、面的一般化結果。

由以上可知n維空間中的正多胞體為三種，分別是單純形、超方形、正軸形。

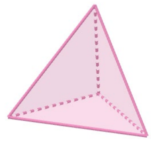
(一) 單純形：$S_n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} t_i=1，\forall i\in\mathbb{N}，t_i\geq 0\}$。

以下是一維至八維單純形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論引理 1，2，3：

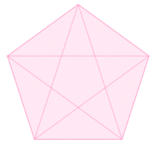
(a)一維單純形
(一條線)



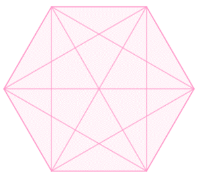
(b)二維單純形
(一正三角形)



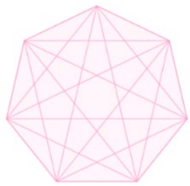
(c)三維單純形
(一正四面體)



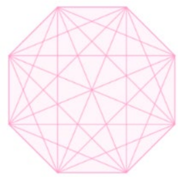
(d)四維單純形
(一正五胞體)



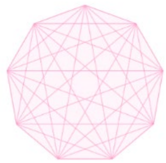
(e)五維單純形



(f)六維單純形



(g)七維單純形



(h)八維單純形

圖 6：一維至八維單純形

表 5：單純形點、線、面一般化結果

點	線	面
$n+1$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

引理 1. n 維單純形的點 $a_n=n+1$

(1). 遞迴式：

$$\times)\qquad a_3=4,\ a_4=\frac{5\times a_3}{4},\ a_5=\frac{6\times a_4}{5},\ \cdots,\ a_n=\frac{(n+1)\times a_{n-1}}{n}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n=\frac{4\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times\prod_{k=5}^{n+1}k}{4\times5\times\cdots\times n}$$

$$\therefore a_n=n+1$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知 $\begin{cases}a_3=4\\ a_n=\dfrac{(n+1)\times a_{n-1}}{n}\end{cases}$，$n\geq3$ 求證 $a_n=n+1$

證明：1：$n=3$，$a_3=3+1=4$ 成立。

2：設 $n=k$，原式成立，也就是說 $a_k=k+1$

當 $n=k+1$，$a_{k+1}=\dfrac{(k+2)\times a_k}{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{k+1}=n+1$

由數學歸納法得知，原式成立。

引理 2. $\boldsymbol{n}$ 維單純形的線 $\boldsymbol{a_n} = \dfrac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)}{2}$

(1). 遞迴式：

$$\times)\qquad a_3 = 6 \text{，} a_4 = \frac{5\times a_3}{3} \text{，} a_5 = \frac{6\times a_4}{4} \text{，}\cdots\text{，} a_n = \frac{(n+1)\times a_{n-1}}{n-1}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n = \frac{6\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times\prod_{\mathrm{k}=5}^{n+1} k}{3\times 4\times\cdots\times(n-1)}$$

$$\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知 $\begin{cases} a_3 = 6 \\ a_n = \dfrac{(n+1)\times a_{n-1}}{n-1} \end{cases}$，$n \ge 3$，求證：$a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 。

證明：1：$n = 3$，$a_3 = \dfrac{3\times 4}{2} = 6$ 成立。

2：設 $n = k$，原式成立，也就是說 $a_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

當 $n = k+1$，$a_{k+1} = \dfrac{(k+2)\times a_k}{(k+1)-1} = \dfrac{(k+2)\times\dfrac{k(k+1)}{2}}{k} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

由數學歸納法得知，原式成立。

引理 3. $\boldsymbol{n}$ 維單純形的面 $\boldsymbol{a_n} = \dfrac{(\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)}{6}$

(1). 遞迴式：

$$\times)\qquad a_3 = 4 \text{，} a_4 = \frac{5\times a_3}{2} \text{，} a_5 = \frac{6\times a_4}{3} \text{，}\cdots\text{，} a_n = \frac{(n+1)\times \mathrm{a}_{n-1}}{n-2}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n = \frac{4\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times\prod_{\mathrm{k}=5}^{n} k}{2\times 3\times\cdots\times(n-2)}$$

$$\therefore a_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知$\begin{cases} a_3 = 4 \\ a_n = \dfrac{(n+1)\times a_{n-1}}{n-2} \end{cases}$，$n \geq 3$，求證：$a_n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$ 。

證明：1：$n=3$，$a_3 = \dfrac{2\times 3\times 4}{6} = 4$成立。

2：設$n=k$，原式成立，也就是說$a_k = \dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$

當$n=k+1$，$a_{k+1} = \dfrac{(k+2)\times a_k}{(k+1)-2} = \dfrac{(k+2)\times \dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}}{k-1} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$

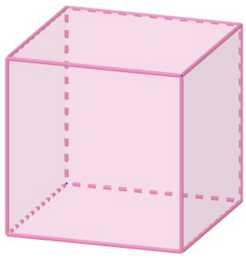
由數學歸納法得知，原式成立。

(二) 超方形：$H_n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,\|\, |t_i| = 1，\forall i \in \mathbb{N}，i \geq 0\}$ 。

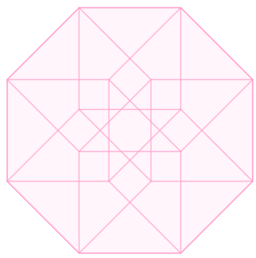
以下是一維至八維超方形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論引理 4，5，6：

(a)一維超方形
(一條線)

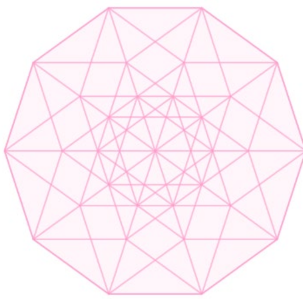
(b)二維超方形
(一正方形)



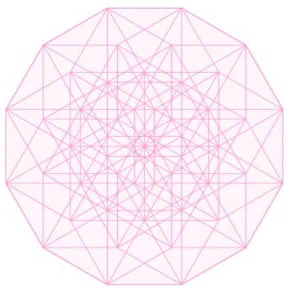
(c)三維超方形
(一正六面體)



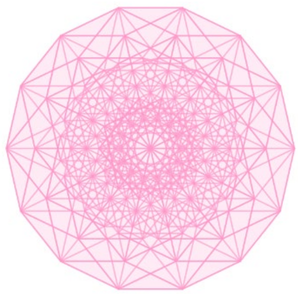
(d)四維超方形
(一正八胞體)



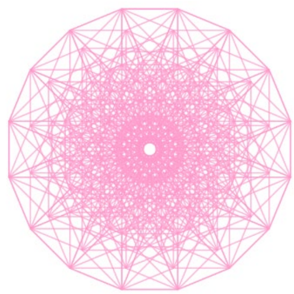
(e)五維超方形



(f)六維超方形



(g)七維超方形



(h)八維超方形

圖 7：一維至八維超方形

表 6：超方形點、線、面一般化結果

點	線	面
2^n	$2^{n-1}\times n$	$2^{n-3}\times n\times(n-1)$

引理 4. **n 維超方形的點 $a_n = 2^n$**

(1). 遞迴式：

$$\times) \qquad a_3 = 8，a_4 = \frac{8 \times a_3}{4}，a_5 = \frac{10 \times a_4}{5}，\cdots，a_n = \frac{2n \times a_{n-1}}{n} = 2a_{n-1}$$

$$a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_n = 8 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_{n-1} \times 2^{n-3}$$

$$\therefore a_n = 2^3 \times 2^{n-3} = 2^n$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知 $\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}$，$n \geq 3$，求證：$a_n = 2^n$ 。

證明：1：$n = 3$，$a_3 = 2^3 = 8$ 成立。

2：設 $n = k$，原式成立，也就是說 $a_k = 2^k$

當 $n = k+1$，$a_{k+1} = 2a_k = 2^k \times 2 = 2^{k+1}$

由數學歸納法得知，原式成立。

引理 5. n 維超方形的線 $a_n = 2^{n-1} \times n$

(1). 遞迴式：

$$\times) \qquad a_3 = 12，a_4 = \frac{8 \times a_3}{3}，a_5 = \frac{10 \times a_4}{4}，\cdots，a_n = \frac{2n \times a_{n-1}}{n-1} = 2a_{n-1}$$

$$a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_n = \frac{12 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_{n-1} \times 2^{n-3} \times \prod_{k=4}^{n} k}{3 \times 4 \times \cdots \times (n-1)}$$

$$\therefore a_n = 4 \times 2^{n-3} \times n = 2^{n-1} \times n$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知$\begin{cases} a_3 = 12 \\ a_n = \dfrac{2n \times a_{n-1}}{n-1} \end{cases}$，$n \ge 3$，求證：$a_n = 2^{n-1} \times n$ 。

證明：1：$n = 3$，$a_3 = 2^3 \times 3 = 12$成立。

2：設$n = k$，原式成立，也就是說$a_k = 2^{k-1} \times k$

當$n = k+1$，$a_{k+1} = \dfrac{2(k+1) \times a_k}{(k+1)-1} = \dfrac{2(k+1) \times 2^{k-1} \times k}{k} = 2^k (k+1)$

由數學歸納法得知，原式成立。

引理 6. $\boldsymbol{n}$**維超方形的面**$\boldsymbol{a_n} = 2^{n-3} \times \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}-1)$

(1). 遞迴式：

$$\times) \qquad a_3 = 6 \text{，} a_4 = \frac{8 \times a_3}{2} \text{，} a_5 = \frac{10 \times a_4}{3} \text{，} \cdots \text{，} a_n = \frac{2n \times a_{n-1}}{n-2}$$

$$a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_n = \frac{6 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_{n-1} \times 2^{n-3} \times \prod_{k=4}^{n} k}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-2)}$$

$$\therefore a_n = 2^{n-3} \times n \times (n-1)$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知$\begin{cases} a_3 = 6 \\ a_n = \dfrac{2n \times a_{n-1}}{n-2} \end{cases}$，$n \ge 3$，求證：$a_n = 2^{n-3} \times n \times (n-1)$ 。

證明：1：$n = 3$，$a_3 = 2^{3-3} \times 3 \times (3-1) = 6$成立。

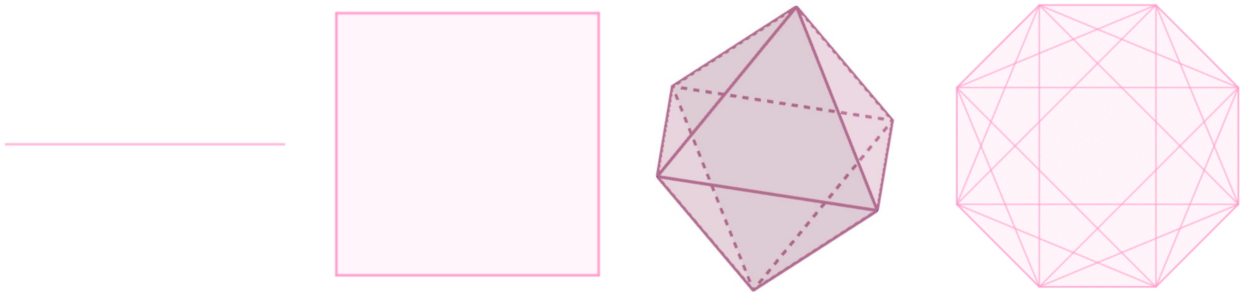
2：設$n = k$，原式成立，也就是說$a_k = 2^{k-3} \times k \times (k-1)$

當$n = k+1$，$a_{k+1} = \dfrac{2(k+1) \times a_k}{(k+1)-2} = \dfrac{2(k+1) \times 2^{k-3} \times k \times (k-1)}{k-1} = 2^{k-2} \times k \times (k+1)$

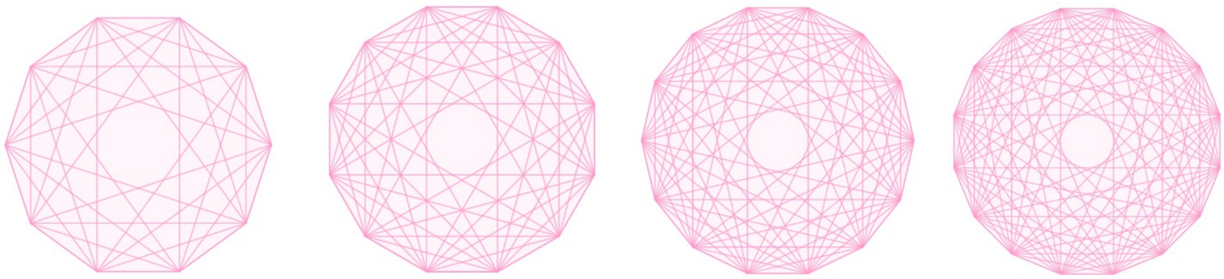
由數學歸納法得知，原式成立。

(三) 正軸形：$p_n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |t_i| \le 1 \text{，} \forall i \in \mathbb{N}\}$ 。

以下是一維至八維正軸形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論引理 7，8，9：



(a)一維正軸形 (一條線)　(b)二維正軸形 (一正方形)　(c)三維正軸形 (一正八面體)　(d)四維正軸形 (一正八胞體)



(e)五維正軸形　(f)六維正軸形　(g)七維正軸形　(h)八維正軸形

圖 8：一維至八維正軸形

表 7：正軸形點、線、面一般化結果

點	線	面
$2n$	$2n(n+1)$	$2^3 \times \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

利用降一維度的單純形去做，紅色標示-1 表示降一維度。

引理 7. n 維正軸形的點 $a_n = 2n$

$$a_3 = 6 \text{，} a_4 = \frac{16\times(3+1)}{2^3} \text{，} a_5 = \frac{32\times(4+1)}{2^4} \text{，} a_n = \frac{2^n\times(n+1-1)}{2^{n-1}} = 2n$$

(綠色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

引理 8. n 維正軸形的線 $a_n = 2n(n+1)$

$$a_3 = 12 \text{，} a_4 = \frac{16\times 6}{4} \text{，} a_5 = \frac{32\times 10}{8} \text{，} a_n = \frac{2^n\times\frac{(n-1)(n+1-1)}{2}}{2^{n-2}} = 2n(n+1)$$

(綠色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

引理 9. $\boldsymbol{n}$ 維正軸形的面 $\boldsymbol{a_n} = 2^3 \times \dfrac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)}}{6}$

$$a_3 = 8\text{，}a_4 = \frac{16\times 4}{2}\text{，}a_5 = \frac{32\times 10}{4}\text{，}a_n = \frac{2^n \times \dfrac{(n+1-1)(n-1)(n-1-1)}{6}}{2^{n-3}} = 2^3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(綠色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

三、名詞解釋：

群：群是由一種集合以及一個二元運算所組成的，並且符合「群公理」。

群公理包含封閉性、結合律、單位元素以及反元素的代數結構。

體：體是一種可進行加、減、乘和除運算的代數結構。

體的概念是數體以及四則運算的推廣。

以下證明旋轉為一群[4]：

令正 n 邊形產生第一個相似的小正 n 邊形旋轉的角度為 θ，則 $\theta = \dfrac{180^0}{n}$ 。

$$A = \begin{pmatrix}
 & id & r_1 & r_2 & r_3 & & r_{2n-3} & r_{2n-2} & r_{2n-1} \\
id & id & r_1 & r_2 & r_3 & & r_{2n-3} & r_{2n-2} & r_{2n-1} \\
r_1 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \cdots & r_{2n-2} & r_{2n-1} & id \\
r_2 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & & r_{2n-1} & id & r_1 \\
r_3 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & & id & r_1 & r_2 \\
 & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\
r_{2n-3} & r_{2n-3} & r_{2n-2} & r_{2n-1} & id & & r_{2n-6} & r_{2n-5} & r_{2n-4} \\
r_{2n-1} & r_{2n-2} & r_{2n-1} & id & r_1 & \cdots & r_{2n-5} & r_{2n-4} & r_{2n-3} \\
r_{2n-1} & r_{2n-1} & id & r_1 & r_2 & & r_{2n-4} & r_{2n-3} & r_{2n-2}
\end{pmatrix}$$

定義 id 為不旋轉或旋轉至第一個頂點，r_1 為旋轉 θ，

r_2 為旋轉 2θ ，⋯， r_{n-1} 為旋轉 $(2n-1)\theta$ 。

封閉性：

由上表可知：$\begin{cases} r_s \cdot r_k = r_{s+k}, \ if\ \ s+k \le 2n \\ r_s \cdot r_k = r_{s+k-2n}, \ if\ \ s+k \ge 2n \end{cases}$ 又 r_{s+k} 、 $r_{s+k-2n} \in A$ ，得證。

結合律：

(一) $r_s\cdot(r_k\cdot r_t)=r_s\cdot(r_{k+t})=r_{s+k+t}$，先旋轉 $(k+t)\theta$，再旋轉 $s\theta$，共旋轉 $(k+t+s)\theta$。

(二) $(r_s\cdot r_k)\cdot r_t=(r_{s+k})\cdot r_t=r_{s+k+t}$，先旋轉 $(k+t)\theta$，再旋轉 $t\theta$，共旋轉 $(s+k+t)\theta$，得證。

單位元素：$id\cdot r_s=r_s$；$r_s\cdot id=r_s$，得證。

反元素：$r_s\cdot r_k=r_k\cdot r_s=id$，$if\ s+k=2n$，得證。

二維空間中，本研究定義正 n 邊形順時針標上數字為 $1,2,\cdots,n$

依照二面體群的方式，可知對稱旋轉共 n 種[1]。

本研究由上述滿足一群體的條件，

封閉性、結合律、單位元素、反元素等要件定義運算法則如下：

令 $\sigma=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\end{pmatrix}=(acb)$，從 a 轉到 c，c 轉到 b。

以下代數及幾何的方式討論三角形、正方形並推導至 n 邊形。

代數方式[3]：

一、 正三角形，對稱旋轉方式，如圖 9。

$D_3=\{\varepsilon,(123),(132)\}$，且 $|D_3|=3$。

令 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(123)$ $\sigma^2=(123)(123)=(132)$，$\sigma^3=(123)(132)=\varepsilon$，$D_4=\{\varepsilon,\sigma,\sigma^2\}$。

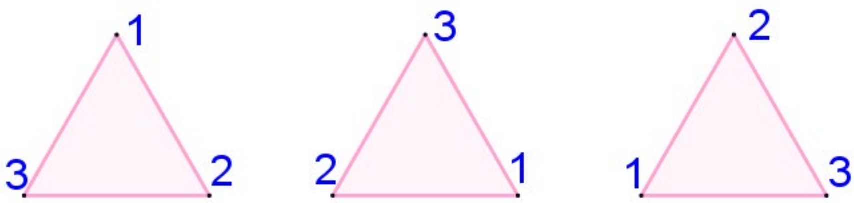


圖 9：三角形的代數對稱旋轉方式

二、 正方形，對稱旋轉方式，如圖 10。

$D_4=\{\varepsilon,(1234),(1324),(1423),(12)(43),(14)(23),(13),(24)\}$，且 $|D_4|=4$。

令 $\sigma=(1234)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$，

$\sigma^2=(1234)(1234)=(13)(24)$，$\sigma^3=\sigma^2\times\sigma=(13)(24)(1234)=(1432)$。
$\sigma^4=\sigma^3\times\sigma=(13)(24)(13)(24)=\varepsilon$，$D_4=\{\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$。

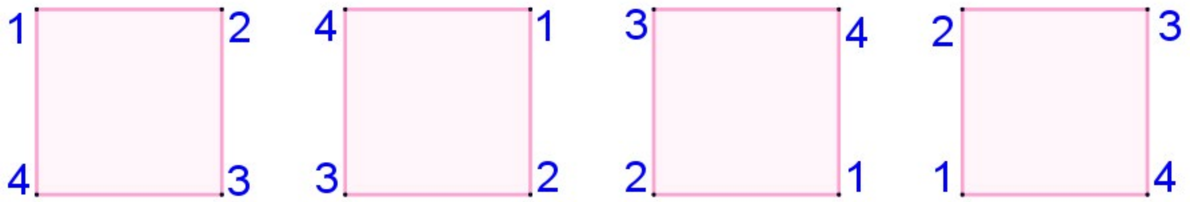


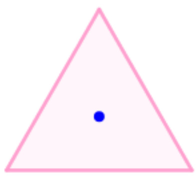
圖 10：正方形的代數對稱旋轉方式

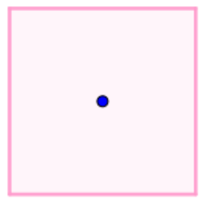
幾何方式：

一、 正三角形：

面中心做軸旋轉，如圖 11。旋轉三次回原來圖形。 $R_1=(3-1)+1=3$ 種。

由上述方式可知正三角形旋轉方式共 $R_1=(3-1)+1=3$ 種。


面中心旋轉
圖 11：三角形的幾何對稱旋轉方式


面中心旋轉
圖 12：正方形的幾何對稱旋轉方式

二、 正方形：

面中心做軸旋轉，如圖 12。旋轉四次回原來圖形。 $R_1=(4-1)+1=4$ 種。

由上述方式可知正方形旋轉方式共 $R_1=(4-1)+1=4$ 種。

本研究以下列四種方式來分析三維空間圖形對稱旋轉模式：

(一) 點到底面圖形

(二) 點到點

(三) 線到線

(四) 面中心到面中心

依循上述定義，求三維正多面體的對稱旋轉方式有幾種。

正多面體整理如表 8：

表 8：正多面體點、線、面

	正四面體	正立方體	正八面體	正十二面體	正二十面體
組成	四個正三角形	六個正方形	八個正三角形	十二個正五邊形	二十個正三角形
點	4	8	6	20	12
線	6	12	12	30	30
面	4	6	8	12	20

代數方式：

一、 正四面體：

(一) 固定 1，正三角形 234 旋轉，如圖 13。

$\sigma=(234)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$，$\sigma^2=(234)(234)=(243)$，$\sigma^3=(243)(234)=\varepsilon$。

正四面體有 4 個點，每個頂點轉三次轉回原本圖形，旋轉方式 $R_1=4\times(3-1)+1=9$ 種。

(二) 固定線段 13、線段 24，如圖 13。

$\tau=(13)(24)$，$\tau^2=(13)(24)(13)(24)=\varepsilon$。

正四面體有 6 條線，每兩條線為一個單位，每兩次轉到原本圖形，旋轉方式

$R_2=\dfrac{6}{2}\times(2-1)+1=4$ 種。

對稱旋轉方式共有 $R_1+R_2=(9-1)+(4-1)+1=12$ 種。

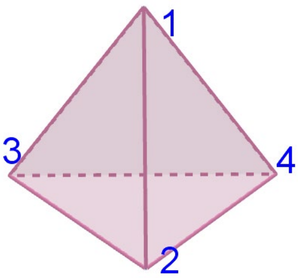


圖 13：正四面體

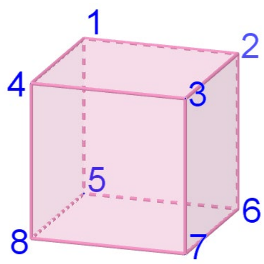


圖 14：正六面體

二、 正六面體：

(一) 固定點 1、點 7，正三角形 245、368 旋轉，如圖 14。

$\sigma=(245)(368)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&6&5&2&8&7&3\end{pmatrix}$，

$\sigma^2=(245)(368)(245)(368)=(254)(386)$，$\sigma^3=(245)(368)(254)(386)=\varepsilon$，

正六面體有8個點，每兩個點為一個單位，

每個頂點轉三次轉回原本圖形，旋轉方式$R_1=\frac{8}{2}\times(3-1)+1=9$種。

(二) 固定線段12、線段78，如圖 14。

$\tau=(12)(78)$，$\tau^2=(12)(78)(12)(78)=\varepsilon$，

正六面體有12條線，每兩條線為一個單位，

每兩次轉到原本圖形，旋轉方式$R_2=\frac{12}{2}\times(2-1)+1=7$種。

(三) 固定1234面中心、5678面中心，如圖 14。

$\delta=(1234)(5678)$，$\delta^2=(1234)(5678)(1234)(5678)=(1342)(5786)$，

$\delta^3=(1342)(5786)(1234)(5678)=(1432)(5876)$，$\delta^4=(1432)(5876)(1234)(5678)=\varepsilon$

正六面體有6個面，每兩個面為一個單位，每四次轉到原本圖形，旋轉方式

$R_3=\frac{6}{2}\times(4-1)+1=10$種。

對稱旋轉方式共有$R_1+R_2+R_3=(9-1)+(7-1)+(10-1)+1=24$種。

三、 正八面體：

(一) 固定點1、點6，正方形2345，如圖 15。

$\sigma=(2345)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&4&5&2&6\end{pmatrix}$，$\sigma^2=(2345)(2345)=(24)(35)$，

$\sigma^3=(24)(35)(2345)=(5432)$，$\sigma^4=(5432)(2345)=\varepsilon$

每個頂點轉四次轉回原本圖形，旋轉方式$R_1=\frac{6}{2}\times(4-1)+1=10$種。

(二) 固定線段12、線段46，如圖 15。

$\tau=(12)(46)(35)$，$\tau^2=(12)(46)(35)(12)(46)(35)=\varepsilon$

正六面體有12條線，每兩條線為一個單位，每兩次轉到原本圖形，旋轉方式

$R_2=\dfrac{12}{2}\times(2-1)+1=7$ 種。

(三) 固定125面中心、346面中心，如圖 15。

$\delta=(125)(364)$，$\delta^2=(125)(364)(125)(364)=(152)(463)$，$\delta^3=(152)(463)(125)(364)=\varepsilon$

正八面體有8個面，每兩個面為一個單位，每三次轉到原本圖形，旋轉方式

$R_3=\dfrac{8}{2}\times(3-1)+1=9$ 種。

對稱旋轉方式共有 $R_1+R_2+R_3=(10-1)+(7-1)+(9-1)+1=24$ 種。

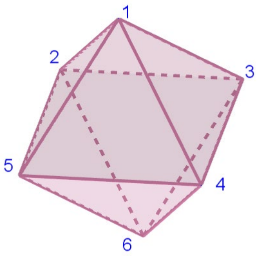


圖 15：正八面體

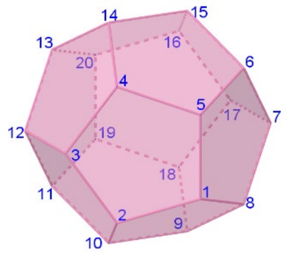


圖 16：正十二面體

四、 正十二面體：

(一) 固定點1、點20，三角形258，如圖 16。

$\sigma=(285)(396)(4107)(121815)(111714)(191613)=$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20\\1&8&9&10&2&3&4&5&6&7&17&18&19&11&12&13&14&15&16&20\end{pmatrix}$$

$\sigma^2=(285)(396)(4107)(121815)(111714)(191613)(285)(396)(4107)(121815)(111714)(191613)=$

$(528)(639)(7410)(151218)(141117)(131916)$ ，

$\sigma^3=(528)(639)(7410)(151218)(141117)(131916)$

$(285)(396)(4107)(121815)(111714)(191613)=\varepsilon$

每個頂點轉三次轉回原本圖形，旋轉方式 $R_1=\dfrac{20}{2}\times(3-1)+1=21$ 種。

(二) 固定線段12、線段1620，如圖 16。

$\tau=(12)(83)(510)(49)(712)(611)(1418)(1713)(1519)(1620)$ ，

$\tau^2=(12)(83)(510)(49)(712)(611)(1418)(1713)(1519)(1620)$

$(12)(83)(510)(49)(712)(611)(1418)(1713)(1519)(1620)=\varepsilon$

正十二面體有30條線，每兩條線為一個單位，

每兩次轉到原本圖形，旋轉方式$R_2=\dfrac{30}{2}\times(2-1)+1=16$種。

(三) 固定12345面中心、1617181920面中心，如圖 16。

$\delta=(12345)(1617181920)(68101214)(79111315)$，

$\delta^2=(12345)(1617181920)(68101214)(79111315)(12345)(1617181920)(68101214)(79111315)=$

$(13524)(1618201719)(61014812)(71115913)$，

$\delta^3=(13524)(1618201719)(61014812)(71115913)(12345)(1617181920)(68101214)(79111315)=$

$(14253)(1619172018)(61281410)(71391511)$，

$\delta^4=(14253)(1619172018)(61281410)(71391511)(12345)(1617181920)(68101214)(79111315)=$

$(15432)(1620191817)(61412108)(71513119)$，

$\delta^5=(15432)(1620191817)(61412108)(71513119)(12345)(1617181920)(68101214)(79111315)=\varepsilon$

正十二面體有個12面，每兩個面為一個單位，

每五次轉到原本圖形，旋轉方式$R_3=\dfrac{12}{2}\times(5-1)+1=25$種。

對稱旋轉方式共有$R_1+R_2+R_3=(21-1)+(16-1)+(25-1)+1=60$種。

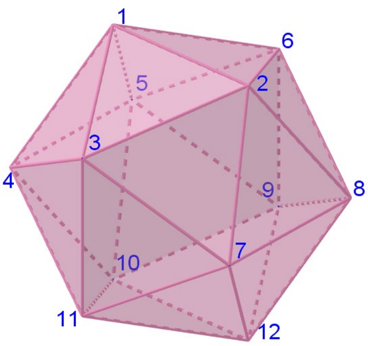


圖 17：正二十面體

五、　正二十面體：

(一) 固定點1、點12，正五邊形23456，如圖 17。

$\sigma=(23456)(7891011)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&3&4&5&6&2&8&9&10&11&7&12\end{pmatrix}$，

$\sigma^2=(23456)(7891011)(23456)(7891011)=(24635)(7911810)$，

$\sigma^3=(24635)(7911810)(23456)(7891011)=(25364)(7108119)$，

$\sigma^4=(25364)(7108119)(23456)(7891011)=(26543)(7111098)$，

$\sigma^5=(26543)(7111098)(23456)(7891011)=\varepsilon$ 。

每個頂點轉五次轉回原本圖形，旋轉方式 $R_1=\frac{12}{2}\times(5-1)+1=25$ 種。

(二) 固定線段 12 、線段 1012 ，如圖 17。

$\tau=(12)(36)(47)(58)(911)(1012)$，

$\tau^2=(12)(36)(47)(58)(911)(1012)(12)(36)(47)(58)(911)(1012)=\varepsilon$

正二十面體有 30 條線，每兩條線為一個單位，

每兩次轉到原本圖形，旋轉方式 $R_2=\frac{30}{2}\times(2-1)+1=16$ 種。

(三) 固定 134 面中心、 71112 面中心，如圖 17。

$\delta=(134)(71211)(295)(8106)$，

$\delta^2=(134)(71211)(295)(8106)(134)(71211)(295)(8106)=(143)(71112)(259)(8610)$，

$\delta^3=(143)(71112)(259)(8610)(134)(71211)(295)(8106)=\varepsilon$

正二十面體有 20 個面，每兩個面為一個單位，

每三次轉到原本圖形，旋轉方式 $R_3=\frac{20}{2}\times(3-1)+1=21$ 種。

對稱旋轉方式共有 $R_1+R_2+R_3=(25-1)+(16-1)+(21-1)+1=60$ 種。

幾何方式：

一、 正四面體：

(一) 點到對面中心所連成的軸，如圖 18 (a)。

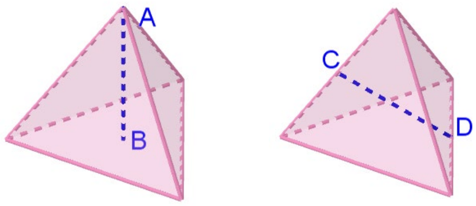
由 A 點到 B 面做旋轉， B 面為一個三角形。

正四面體有 4 個點，旋轉方式 $R_1 = 4\times(3-1)+1 = 9$ 種。

(二) 線到線所連成的軸，由線段 C 轉到線段 D 做旋轉，如圖 18 (b)。

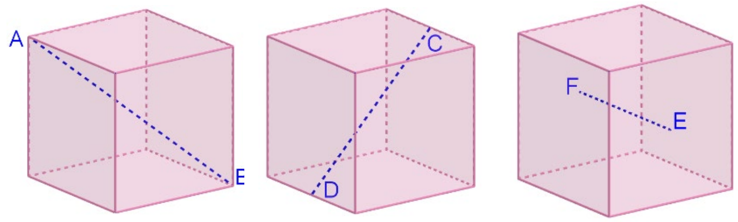
正四面體有 6 條線，旋轉方式 $R_2 = 3\times(2-1)+1 = 4$ 種。

對稱旋轉方式共有 $R_1 + R_2 = (9-1)+(4-1)+1 = 12$ 種。



(a) 點到對面中心 (A 到 B)　(b) 線到線 (C 到 D)

圖 18：正四面體



(a) 點到點 (A 到 B)　(b) 線到線 (C 到 D)　(c) 面到面 (E 到 F)

圖 19：正六面體

二、 正六面體，對稱旋轉方式。

(一) 點到點所連成的軸，如圖 19(a)。

連接 A、B 點，正六面體有 8 個頂點，旋轉方式 $R_1 = 4\times(3-1)+1 = 9$ 種。

(二) 線到線所連成的軸，如圖 19(b)。

連接 C、D 線段，正六面體有 12 條稜，旋轉方式 $R_2 = 6\times(2-1)+1 = 7$ 種。

(三) 面中心到對面中心所連成的軸，如圖 19(c)。

連接 E、F 面，正六面體有 6 個面，旋轉方式 $R_3 = 3\times(4-1)+1 = 10$ 種。

對稱旋轉方式共有 $R_1 + R_2 + R_3 = (9-1)+(7-1)+(10-1)+1 = 24$ 種。

三、 正八面體，對稱旋轉方式。

(一) 點到對頂點(與前一點不同面)所連成的軸，如圖 20(a)。

連接 A、B 點，正八面體有 6 個點，旋轉方式 $R_1 = 3\times(4-1)+1 = 10$ 種。

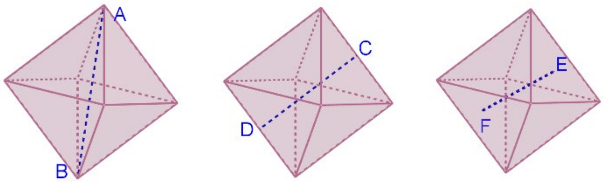
(二) 稜中點到對稜中點所連成的軸，如圖 20(b)。

連接 C、D 線段，正八面體有 12 條稜，旋轉方式 $R_2 = 6\times(2-1)+1 = 7$ 種。

(三) 面中心到對面中心所連成的軸，如圖 20(c)。

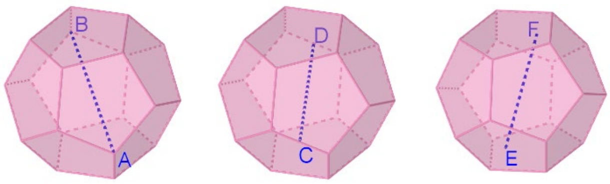
連接 E、F 面，正八面體有 8 個面，旋轉方式 $R_3 = 4\times(3-1)+1 = 9$ 種。

由上述三種方式可知正四面體旋轉方式共 $R_1+R_2+R_3=(10-1)+(7-1)+(9-1)+1=24$ 種。



(a)點到點 (A 到 B)　(b)線到線 (C 到 D)　(c)面到面 (E 到 F)

圖 20：正八面體



(a)點到點 (A 到 B)　(b)線到線 (C 到 D)　(c)面到面 (E 到 F)

圖 21：正十二面體

四、 正十二面體，對稱旋轉方式。

(一) 點到對頂點(與前一點不同面)所連成的軸，如圖 21(a)。

連接 A、B 點，正十二面體有 20 個點，旋轉方式 $R_1 = 10\times(3-1)+1 = 21$ 種。

(二) 稜中點到對稜中點所連成的軸，如圖 21(b)。

連接 C、D 線段，正十二面體有 30 條稜，旋轉方式 $R_2 = 15\times(2-1)+1 = 16$ 種。

(三) 面中心到對面中心所連成的軸，如圖 21(c)。

連接 E、F 面，正十二面體有 12 個面，旋轉方式 $R_3 = 6\times(5-1)+1 = 25$ 種。

由上述三種方式可知正十二面體旋轉方式共 $R_1+R_2+R_3=(21-1)+(16-1)+(25-1)+1=60$ 種。

五、 正二十面體，對稱旋轉方式。

(一) 點到對頂點(與前一點不同面)所連成的軸，如圖 22(a)。

連接 A、B 點，正二十面體有 12 個點，旋轉方式 $R_1 = 6\times(5-1)+1 = 25$ 種。

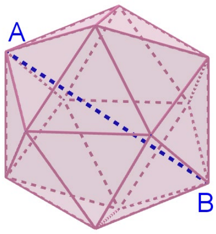
(二) 稜中點到對稜中點所連成的軸，如圖 22(b)。

連接 C、D 線段，正二十面體有 30 條稜，旋轉方式 $R_2 = 15\times(2-1)+1 = 16$ 種。

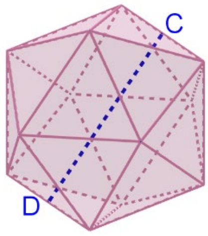
(三) 面中心到對面中心所連成的軸，如圖 22(c)。

連接E、F面，正二十面體有20個面，旋轉方式$R_3=10\times(3-1)+1=21$種。

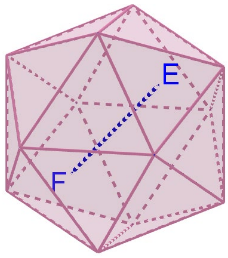
由上述三種方式可知正二十面體旋轉方式共$R_1+R_2+R_3=(21-1)+(16-1)+(25-1)+1=60$種。



(a)點到點(A 到 B)



(b)線到線(C 到 D)



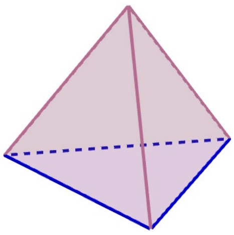
(c)面到面(E 到 F)

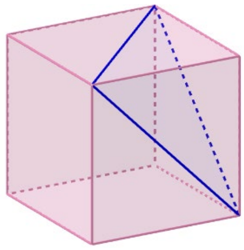
圖 22：正二十面體

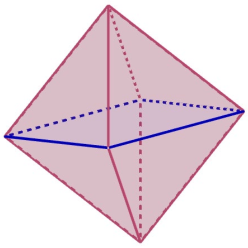
討論：

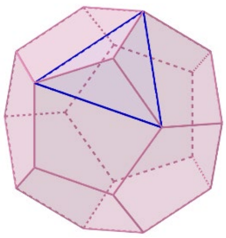
(1) 對稱旋轉方式整理如表：

頂點圖（頂點圖是由一個頂點連接出去的線所圍成的圖形為該圖形的頂點圖）


(a)正四面體$4\times3=12$


(b)正六面體$8\times3=24$


(c)正八面體$6\times4=24$


(d)正十二面體$20\times3=60$

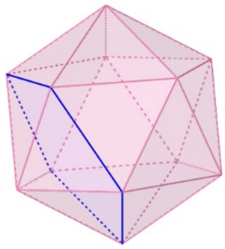
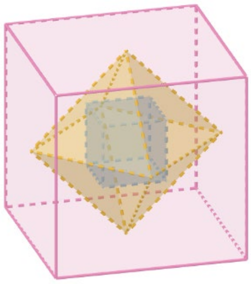

(e)正二十面體$12\times5=60$

圖 23：正多面體之頂點圖圖形及對稱旋轉方式

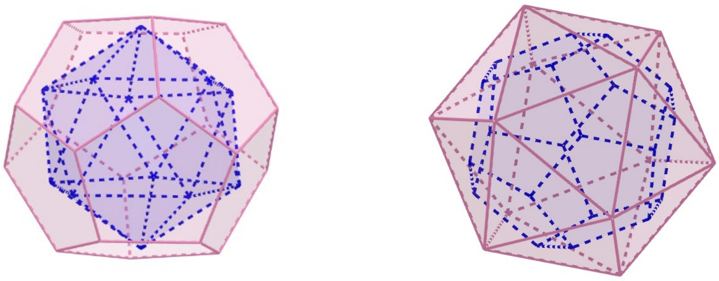
對稱旋轉方式可透過頂點×頂點圖去計算。

(2)若我們將正八面體的各面中心連接起來會形成一個正六面體，將正六面體的各面中心連接起來會形成一個正八面體；將正二十面體的各面中心連接起來會形成一個正十二面體，將正

十二面體的各面中心連接起來會形成一個正二十面體。我們也發現超方形以及正軸形的對稱旋轉方式相等。此兩種圖形互為對偶多面體。如圖 24。



正六面體與正八面體
互為對偶多面體



正十二面體與正二十面體互為對偶多面體

圖 24：對偶多面體

四維正多胞體整理如表 9：

表 9：正多胞體點、線、面

	正五胞體	正八胞體	正十六胞體	正二十四胞體	正一百二十胞體	正六百胞體
組成	五個 正四面體	八個 正立方體	十六個 正八面體	二十四個 正八面體	一百二十個 正十二面體	六百個 正四面體
點	5	16	8	24	600	120
線	10	32	24	96	1200	720
面	10	24	32	96	720	1200

一、 正五胞體：正五胞體的頂點圖為正四面體，如圖 25(a)，

正四面體的旋轉方式為12種，其對稱旋轉方式為$5\times12=60$種。

二、 正八胞體：正八胞體的頂點圖為正四面體，如圖 25(a)，

正四面體的旋轉方式為12種，其對稱旋轉方式為$16\times12=192$種。

三、 正十六胞體：正十六胞體的頂點圖為正六面體，如圖 25(a)，

正六面體的旋轉方式為 24 種，其對稱旋轉方式為$8\times24=192$種。

四、 正二十四胞體：正二十四胞體的頂點圖為正六面體，如圖 25(b)，

正六面體的旋轉方式為 24 種，其對稱旋轉方式$24\times24=576$種。

五、 正一百二十胞體：正一百二十胞體的頂點圖為正四面體，如圖 25(c)，

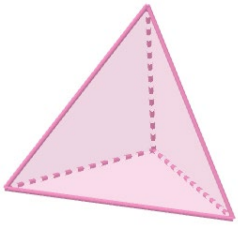
正四面體的旋轉方式為12種，其對稱旋轉方式$600\times12=7200$種。

六、 正六百胞體：正六百胞體的頂點圖為正二十面體，如圖 25(c)，

正二十面體的旋轉方式為 60 種，其對稱旋轉方式 $120\times 60=7200$ 種。

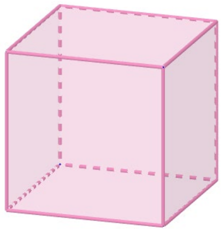
表 10：四維空間對稱旋轉方式

圖形	對稱旋轉方式
正五胞體	60
正八胞體	192
正十六胞體	192
正二十四胞體	576
正一百二十胞體	7200
正六百胞體	7200



正五胞體、正八胞體、正十六胞體、
正一百二十胞體、正六百胞體

(a)正四面體



正二十四胞體

(b)正六面體

圖 25：四維正多胞體之頂點圖圖形

定理 1. n 維空間中正多胞體－單純形的對稱旋轉方式 $=\dfrac{(n+1)!}{2}$

$$\times)\qquad a_1=1\text{，}a_2=3\times a_1\text{，}a_3=4\times a_2\text{，}\cdots\text{，}a_n=(n+1)\times a_{n-1}$$

$$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n=1\times 3\times 5\times\cdots\times(n+1)\times a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{(n+1)!}{2}$$

已知 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=(n+1)\times a_{n-1} \end{cases}$，$n\geq 1$，求證：$a_n=\dfrac{(n+1)!}{2}$ 。

證明：1： $n=1$ ， $a_1=\dfrac{2!}{2}=1$ 成立。

2 ：設 $n=k$ ，原式成立，也就是說 $a_k=\dfrac{(k+1)!}{2}$

當 $n=k+1$ ， $a_{k+1}=(k+1+1)\times a_k=(k+2)\times\dfrac{(k+1)!}{2}=\dfrac{(k+1+1)!}{2}$

由數學歸納法得知，原式成立。

定理 2. $\boldsymbol{n}$ 維空間中正多胞體－超方形的對稱旋轉方式 $2^{n-1}\times \boldsymbol{n}!$

$$b_1 = 1\text{，}b_2 = 4\times 1 = 4\times a_1 = 2^2\times\frac{(1+1)!}{2} = 2^1\times 2! = b_1\times 4\text{，}$$

$$b_3 = 8\times 3 = 8\times a_2 = 2^3\times\frac{(2+1)!}{2} = 2^2\times 3! = b_2\times 6\text{，}$$

$$\times)\qquad b_4 = 16\times 12 = 16\times a_3 = 2^4\times\frac{(3+1)!}{2} = 2^3\times 4! = b_3\times 8\text{，}\cdots\text{，}b_n = 2n\times b_{n-1}$$

$$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_n = 1\times 4\times 6\times\cdots\times 2n\times b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{n-1}$$

$$\therefore b_n = 2^{n-1}\times n!$$

已知 $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = 2n\times b_{n-1} \end{cases}$，$n\ge 1$，求證：$b_n = 2^{n-1}\times n!$ 。

證明：1：$n=1$，$b_1 = 2^{1-1}\times 1! = 1$ 成立。

2：設 $n=k$，原式成立，也就是說 $b_k = 2^{k-1}\times k!$

當 $n=k+1$，$b_{k+1} = 2(k+1)\times b_k = 2(k+1)\times 2^{k-1}\times k! = 2^{k+1-1}\times(k+1)!$

由數學歸納法得知，原式成立。

定理 3. $\boldsymbol{n}$ 維空間中正多胞體－正軸形的對稱旋轉方式 $2^{n-1}\times \boldsymbol{n}!$

$$\times)\qquad c_1 = 1\text{，}c_2 = 4 = 4\times c_1\text{，}c_3 = 6\times 4 = 6\times c_2\text{，}c_4 = 8\times 6\times 4 = 8\times c_3\text{，}\cdots\text{，}c_n = 2n\times c_{n-1}$$

$$c_1\times c_2\times c_3\times\cdots\times c_n = 1\times 4\times 6\times\cdots\times 2n\times c_1\times c_2\times c_3\times\cdots\times c_{n-1}$$

$$\therefore c_n = 2^{n-1}\times n!$$

已知 $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = 2n\times c_{n-1} \end{cases}$，$n\ge 1$，求證：$c_n = 2^{n-1}\times n!$ 。

證明：1：$n=1$，$c_1 = 2^{1-1}\times 1! = 1$ 成立。

2：設 $n=k$，原式成立，也就是說 $c_k = 2^{k-1}\times k!$

當 $n=k+1$，$c_{k+1} = 2(k+1)\times c_k = 2(k+1)\times 2^{k-1}\times k! = 2^{k+1-1}\times(k+1)!$

由數學歸納法得知，原式成立。

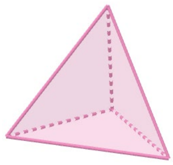
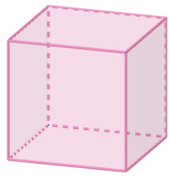
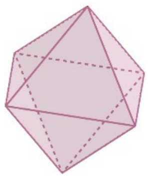
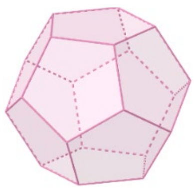
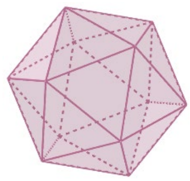
伍、 研究結果

一、本研究藉由施萊夫利符號[5]探討一維空間至 n 維空間中的圖形個數，完成研究目的 1.1。

表 11：各維度等邊圖形公式

維度	1維	2 維	3 維	4 維	5 維以上
等邊圖形(種)	1	∞	5	6	3

表 12：三、四及 n 維正多胞體施萊夫利符號

名稱	正四面體	正六面體
圖形		
施萊夫利符號	$\{3,3\}$	$\{4,3\}$
正八面體	正十二面體	正二十面體
		
$\{3,4\}$	$\{5,3\}$	$\{3,5\}$
正五胞體	正八胞體	正十六胞體
$\{3,3,3\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,3,4\}$
正二十四胞體	正一百二十胞體	正六百胞體
$\{3,4,3\}$	$\{5,3,3\}$	$\{4,3,4\}$
單純形	超方形	正軸形
$\{3,3,\ldots,3,3\}=\{3^{n-1}\}$	$\{4,3,\ldots,3,3\}=\{4,3^{n-2}\}$	$\{3,3,\ldots,3,4\}=\{3^{n-2},4\}$

二、本研究透過遞迴式以及數學歸納法探討 n 維空間中單純形、超方形、正軸形點線面的一般化結果，完成研究目的 2.1。

表 13：單純形、超方形、正軸形點線面的一般化結果

	單純形	超方形	正軸形
點	$n+1$	2^n	$2n$
線	$\frac{n(n+1)}{2}$	$2^{n-1}\times n$	$2n(n+1)$
面	$\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$	$2^{n-3}\times n\times(n-1)$	$2^3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

三、本研究透過代數及幾何的方式探討二維及三維空間中的等邊圖形對稱旋轉方式，並透過頂點圖探討四維空間中的證多胞體對稱旋轉方式，完成目的 3.1、3.2。

表 14：二維、三維、四維的對稱旋轉方式

二維(正 n 邊形)	正四面體	正立方體
n	12	24
正八面體	正十二面體	正二十面體
24	60	60
正五胞體	正八胞體	正十六胞體
60	192	192
正二十四胞體	正一百二十胞體	正六百胞體
576	7200	7200

四、本研究透過頂點圖探討 n 維空間中的正多胞體的對稱旋轉方式，完成目的 3.3。：

表 15：n 維空間中的正多胞體的對稱旋轉方式

圖形	單純形	超方形	正軸形
對稱旋轉方式	$\frac{(n+1)!}{2}$	$2^{n-1}\times n!$	

陸、 結論與未來展望

一、本研究透過頂點圖探討三維至 n 維空間中的正多面(胞)體圖形個數。

二、本研究透過遞迴式及數學歸納法探討

單純形、超方形、正軸形點、線、面的一般化結果。

三、本研究利用代數及幾何的方式探討二維正多邊形、三維正多面體的

對稱旋轉方式，並透過頂點圖探討四維正多胞體的對稱旋轉方式。

四、本研究利用頂點圖探討 n 維空間中正多胞體的對稱旋轉方式。

五、本研究未來將利用鏡射的方式探討三維空間中的正多胞體並推廣至 n 維。

以下為本研究討論三維空間中正多面體之鏡射：

(一) 正四面體，如圖 26：每一條線向對面中點連接，故正四面體有 6 種。

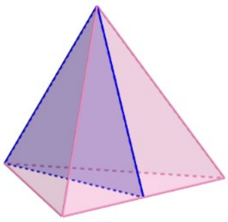


圖 26：
每一條線向對面中點連接

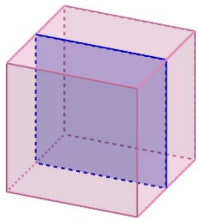


圖 27(a)：
連接四條線的中心點

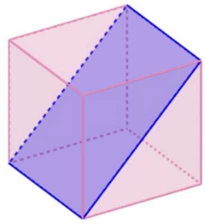


圖 27(b)：
連接兩條線

(二) 正六面體，如圖 27：

(a)第一種，每次連接四條線的中心點，正六面體有12條線，故有3種。

(b)第二種，每次連接兩條線，正六面體有12條線，故有6種。

(三) 正八面體，如圖 27：

(a)第一種，每次連接四個點，正八面體有六個點，故有3種。

(b)第二種，每次連接兩個點，正八面體有六個點，故有6種。

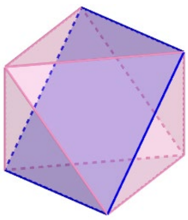


圖 27(a)：連接四個點

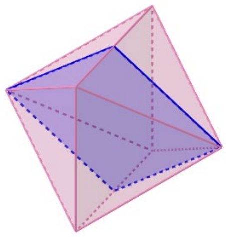


圖 27(b)：連接兩個點

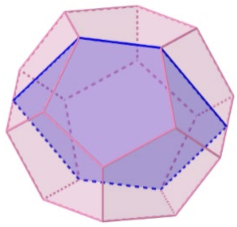


圖 28：連接四個點

(四) 正十二面體，如圖 28：

每次連接四個點，正十二面體有二十個點，可從三種角度鏡射，故有15種。

(五) 正二十面體，如圖 29：

每次連接四個點，正二十面體有十二個點，可從五種角度鏡射，故有15種。

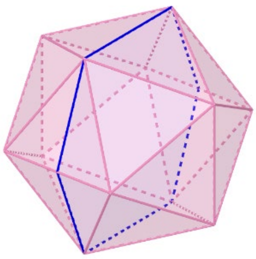


圖 29 連接四個點

柒、 參考資料 (文獻) 及其他

[1] 二面體群(dihedral group)，Weisstein, Eric W. "Dihedral Group".，

參考網站 http://demonstrations.wolfram.com/ DihedralGroupNOfOrder2n/。

[2] OPEN GL 原理，參考網站：http://www.twinklingstar.cn/2015/1532/introduce-to-opengl/。

[3] Eie & Chang (2010). A Course on Abstract Algebra。

[4] Lectures on Algebraic Groups Alexander Kleshchev,

[5] Regular Polytopes by H. S. M.Coxeter

[6] http://home.lu.lv/~sd20008/papers/essays/Regular%20Polytopes%20%5bpresentation%5d.pdf

【評語】050414

本作品主要探討任意 n 維度的正多胞體點、線、面個數以及對稱旋轉群。作者主要是使用一本經典幾何書籍 Regular Polytopes (by Coxeter) 所提供的符號和概念作為工具。

本作品大部分的研究結果與工具皆為文獻上已知，建議作者可以在進行研究時多方閱讀文獻，並且於說明書及口頭報告中，將已知結果的文獻出處標示清楚。

作品海報

壹、研究動機

我們知道二維平面圖形，如正三角形、正方形等等，即正n邊形有無限多個。三維立體圖形中等邊長的僅有五種，四維空間中的等邊圖形是否更少，抑或是無限多種。因此本研究想探究四維空間中的等邊圖形個數是否唯一。n維度空間是否也存在等邊圖形。另外，我們也想探究四維度空間甚至n維度空間中的正多胞體對稱旋轉方式是否具有規律性。

貳、研究目的

一、利用頂點圖探討三維正多面體至n維空間正多胞體的圖形有幾種。

二、利用遞迴式及數學歸納法探討n維空間中正多胞體的點、線、面一般化結果。

三、利用代數及幾何的方式探討二維空間中正n邊形及三維空間中正多面體的對稱旋轉方式。

四、利用頂點圖探討四維空間至n維空間中的正多胞體之對稱旋轉方式。

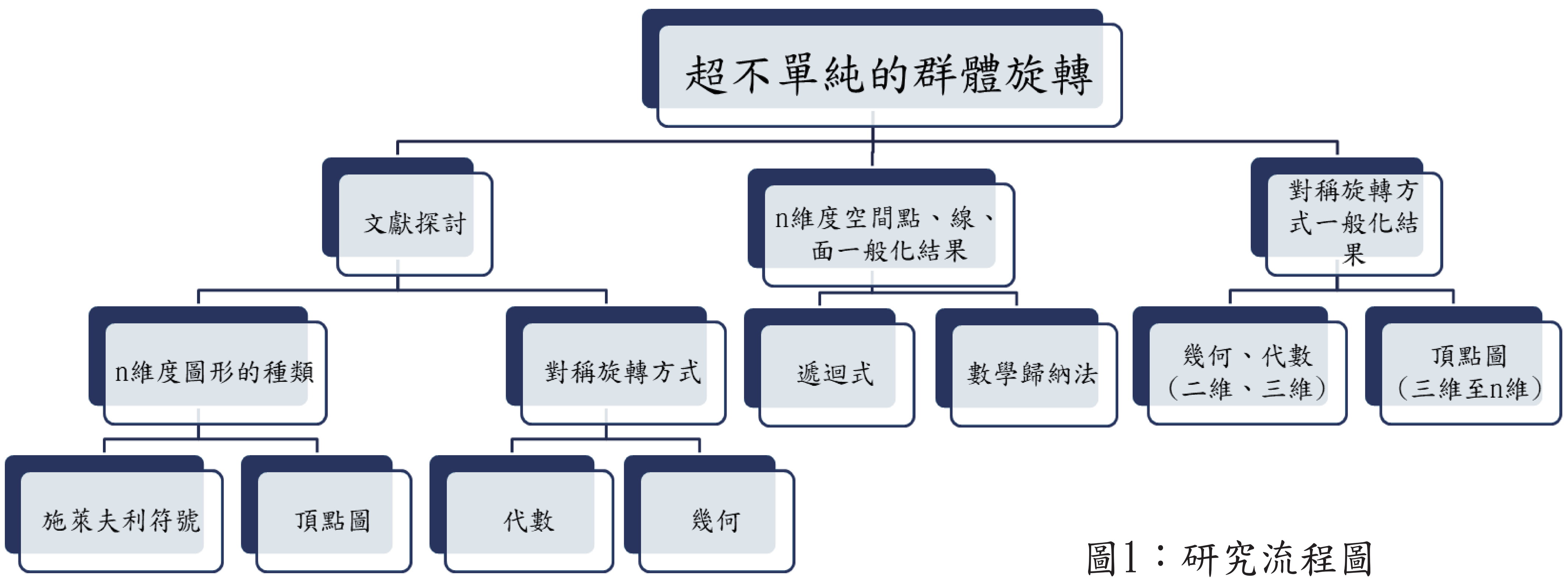


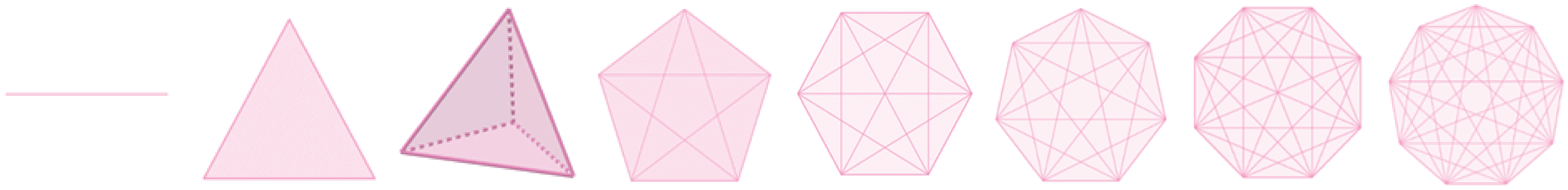
圖1：研究流程圖

參、研究過程

一、本研究從頂點圖及施萊夫利符號可知n維空間中的正多胞體為三種，分別是單純形、超方形、正軸形。以下討論單純形、超方形、正軸形的一般化結果。

(一)單純形：$S_n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} t_i=1，\forall i\in\mathbb{N}，t_i\ge 0\}$

圖2為一維至八維單純形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論單純形的點為 $n+1$ 個。

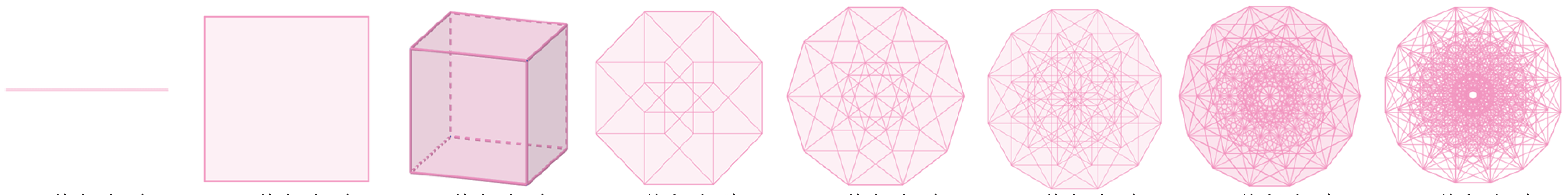


一維單純形　二維單純形　三維單純形　四維單純形　五維單純形　六維單純形　七維單純形　八維單純形

圖2：一維至八維單純形

(二)超方形：$H_n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n} \mid |t_i|=1，\forall i\in\mathbb{N}，t_i\ge 0\}$

圖3為一維至八維超方形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論超方形的點為 2^n 個。

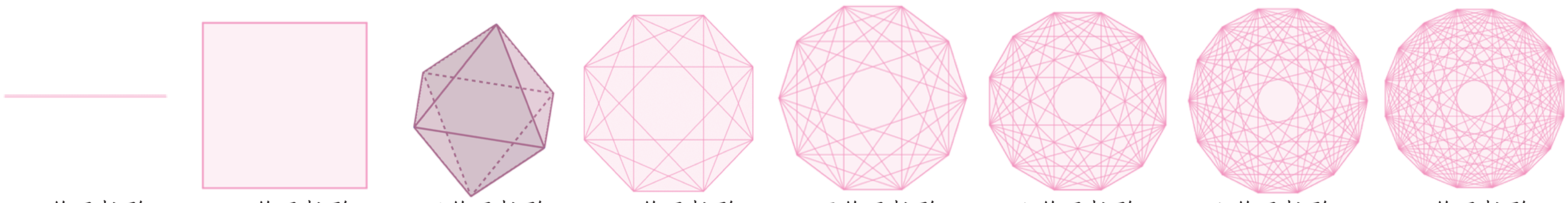


一維超方形　二維超方形　三維超方形　四維超方形　五維超方形　六維超方形　七維超方形　八維超方形

圖3：一維至八維超方形

(三)正軸形：$p_n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n} \mid \sum_{i=1}^{n} |t_i|\le 1，\forall i\in\mathbb{N}，t_i\ge 0\}$

圖4為一維至八維正軸形的例子，其四維至八維為正交投影圖，並可推論正軸形的點為 $2n$ 個。



一維正軸形　二維正軸形　三維正軸形　四維正軸形　五維正軸形　六維正軸形　七維正軸形　八維正軸形

圖4：一維至八維正軸形

二、以下為利用代數、幾何、頂點圖方式探討三維空間正四面體對稱旋轉方式：

表1：三維空間中正四面體代數方式及圖例

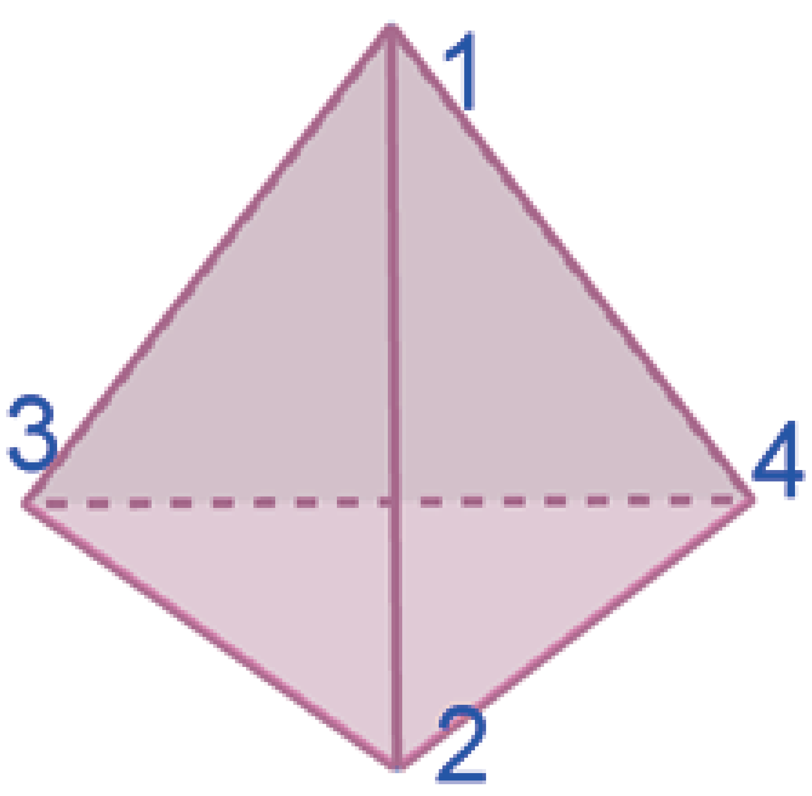
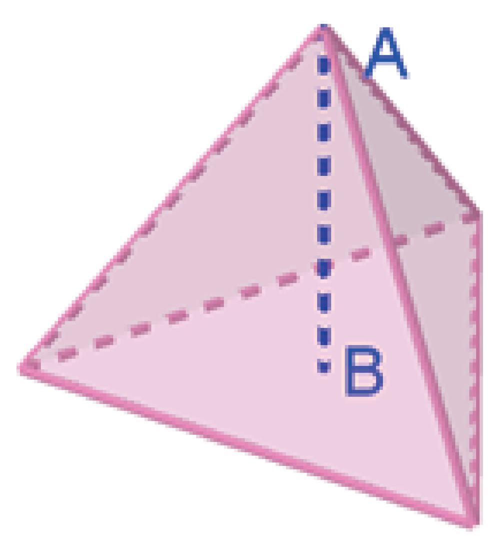
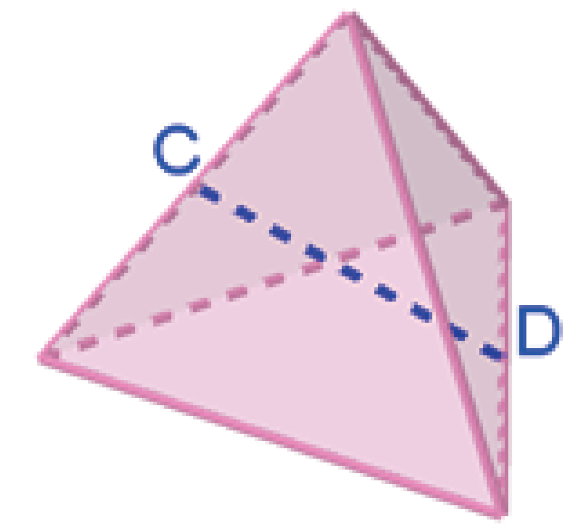
(一)　固定1，正三角形234旋轉，如右圖。 $\sigma=(234)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$，$\sigma^2=(234)(234)=(243)$，$\sigma^3=(243)(234)=\varepsilon$。 正四面體有4個點，每個頂點轉三次轉回原本圖形，旋轉方式 $R_1=4\times(3-1)+1=9$ 種。 (二)　固定線段13、線段24，如右圖。 $\tau=(13)(24)$，$\tau^2=(13)(24)(13)(24)=\varepsilon$。 正四面體有6條線，每兩條線為一個單位，每兩次轉到原本圖形，旋轉方式 $R_2=\frac{6}{2}\times(2-1)+1=4$ 種。 對稱旋轉方式共有 $R_1+R_2=(9-1)+(4-1)+1=12$ 種。	

表2：三維空間中正四面體幾何、頂點圖方式及圖例

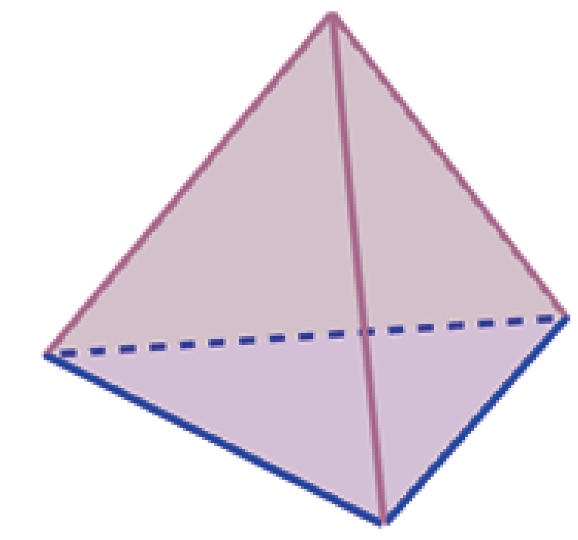
幾何	頂點圖
(一)點到對面中心所連成的軸，如下圖(a)。 由 A 點到 B 面做旋轉，B 面為一個三角形。 正四面體有 4 個點，旋轉方式 $R_1=4\times(3-1)+1=9$ 種。 (二)線到線所連成的軸，由線段C轉到線段D做旋轉，如下圖(b)。	頂點圖是由一個頂點連接出去的線所圍成的圖形為該圖形的頂點圖，故正四面體的頂點圖為正三角形，每一次固定一個頂點可以旋轉三次，正四面體有四個點，因此正四面體對稱旋轉方式為 $4\times3=12$ 種。
正四面體有 6 條線，旋轉方式 $R_2=3\times(2-1)+1=4$ 種。對稱旋轉方式共有 $R_1+R_2=(9-1)+(4-1)+1=12$ 種。	



(a)點到底面圖形



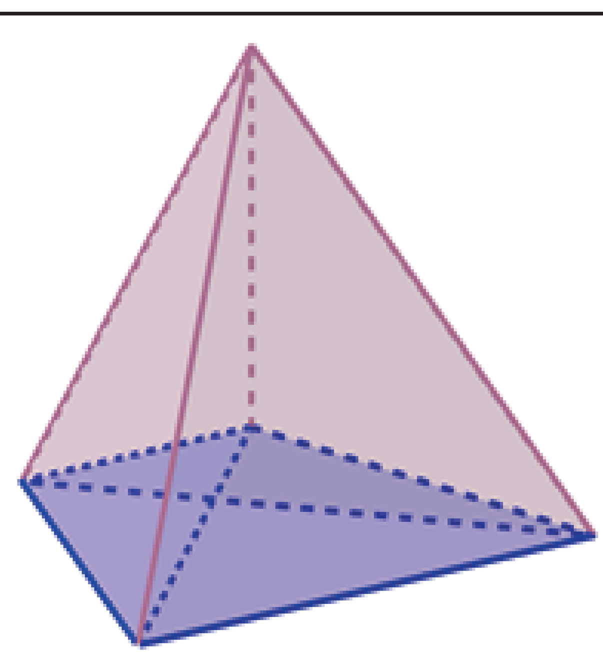
(b)線中心到線中心

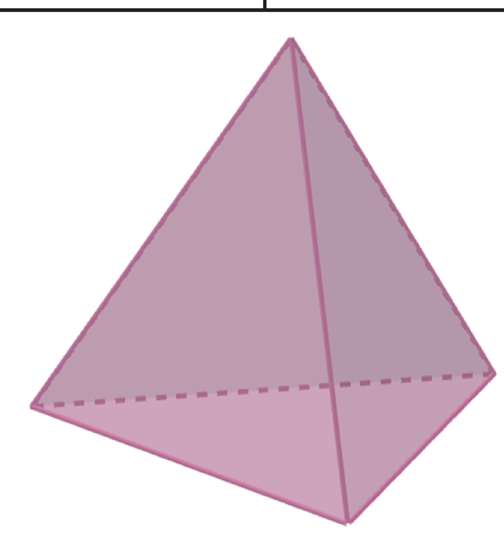

頂點圖方式

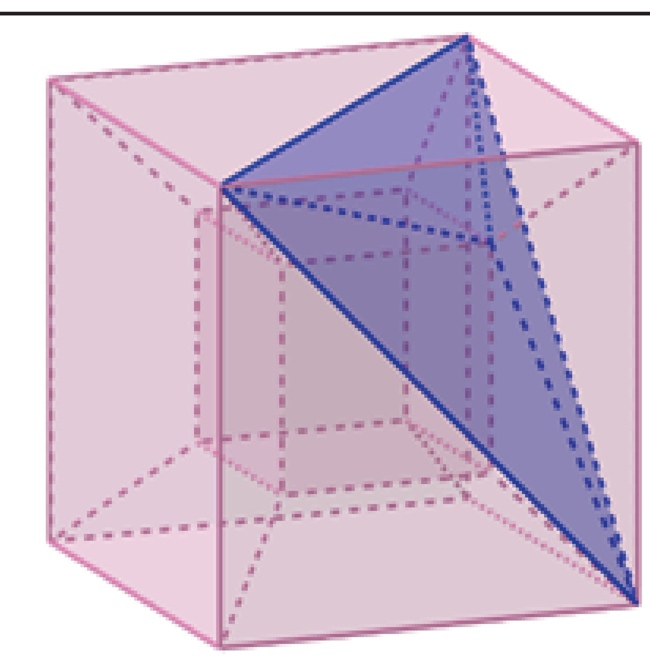
三、以下為利用頂點圖的方式探討四維空間及n維空間中單純形對稱旋轉方式：

表3：四維空間中正多胞體頂點圖方式

正五胞體：對稱旋轉方式為 $5\times12=60$ 種，如下圖。	正八胞體：對稱旋轉方式為 $16\times12=192$ 種，如下圖。




正五胞體及正八胞體
的頂點圖皆為正四面體。



肆、研究結果

一、本研究藉由施萊夫利符號探討一維空間至n維空間中的圖形個數(表4、5)，完成研究目的一。
二、本研究透過遞迴式以及數學歸納法探討n維空間中單純形、超方形、正軸形點、線、面的一般化結果(圖5、表6)，完成研究目的二。

表 4：各維度等邊圖形個數

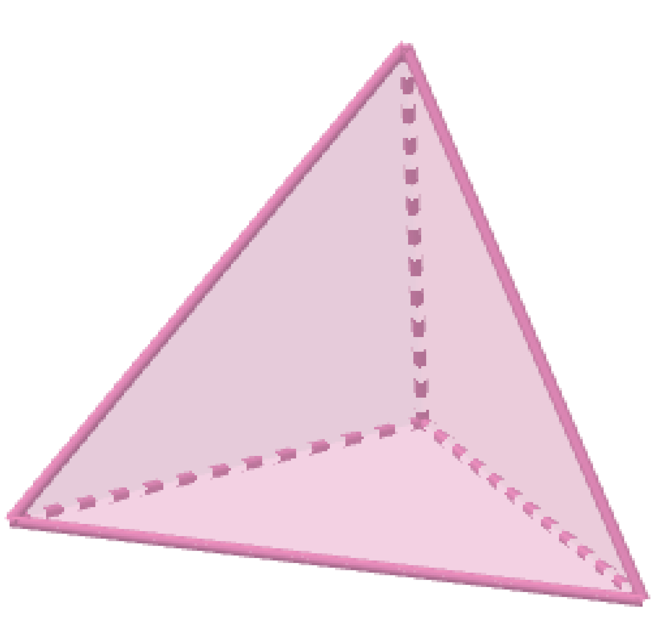
維度	1 維	2 維	3 維	4 維	5 維以上
等邊圖形(種)	1	∞	5	6	3

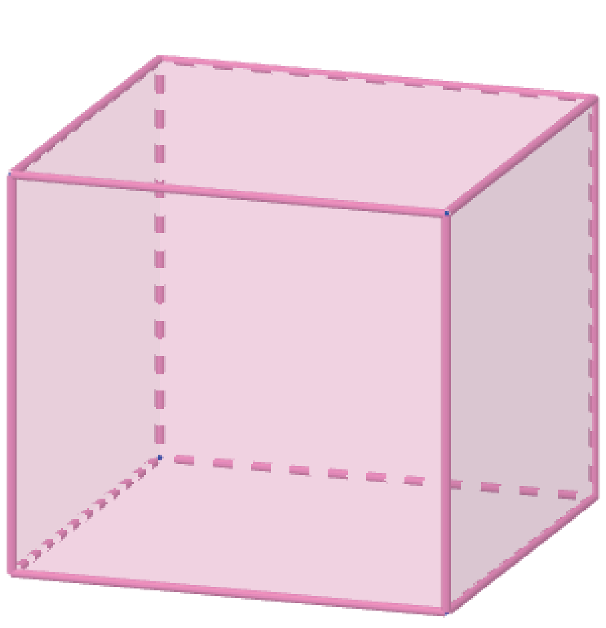
表 6：單純形、超方形、正軸形點、線、面的一般化結果

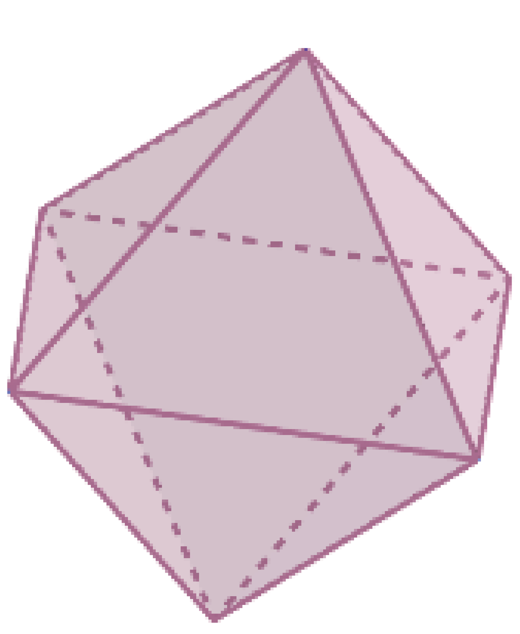
	單純形	超方形	正軸形
點	$n+1$	2^n	$2n$
線	$\frac{n(n+1)}{2}$	$2^{n-1}\times n$	$2n(n+1)$
面	$\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$	$2^{n-3}\times n\times(n-1)$	$2^3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

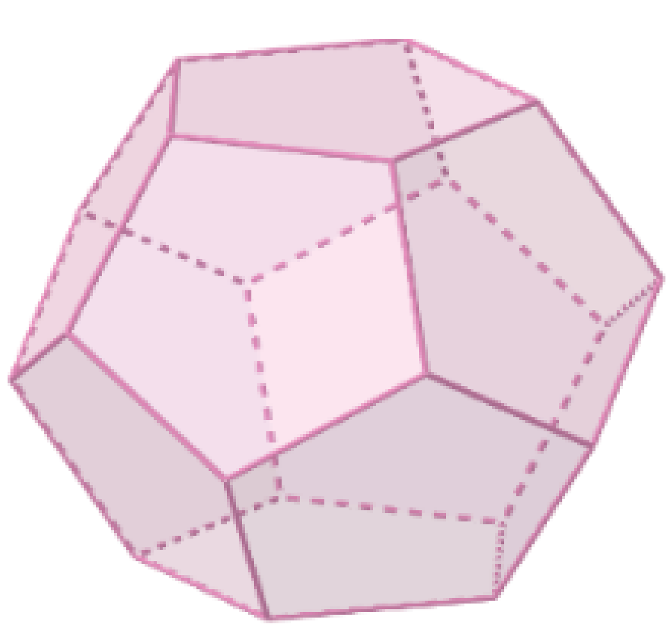
表 5：三維、四維及 n 維空間中正多胞體施萊夫利符號

名稱	正四面體	正六面體
施萊夫利符號	$\{3,3\}$	$\{4,3\}$
正八面體	正十二面體	正二十面體
$\{3,4\}$	$\{5,3\}$	$\{3,5\}$
正五胞體	正八胞體	正十六胞體
$\{3,3,3\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,3,4\}$
正二十四胞體	正一百二十胞體	正六百胞體
$\{3,4,3\}$	$\{5,3,3\}$	$\{4,3,4\}$
單純形	超方形	正軸形
$\{3_2,3_3,\cdots,3_{n-1},3_n\}=\{3_{n-1}\}$	$\{4,3_3,\cdots,3_{n-1},3_n\}=\{4,3_{n-2}\}$	$\{3_2,3_3,\cdots,3_{n-1},4\}=\{3_{n-2},4\}$


正四面體


正六面體


正八面體


正十二面體

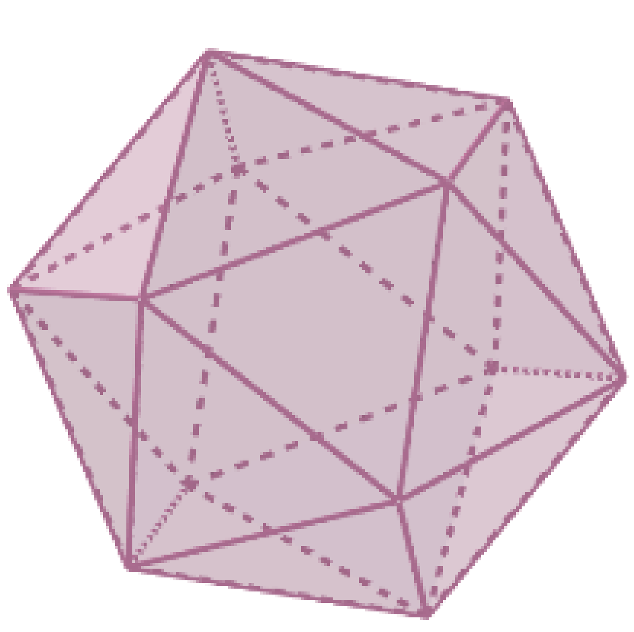
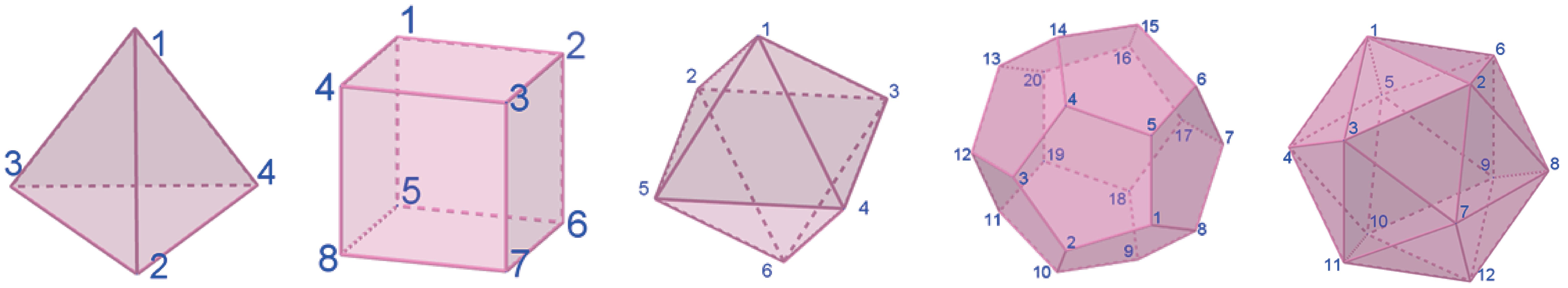

正二十面體

圖5：三維空間中的正多面體

三、本研究透過代數及幾何的方式探討二維的對稱旋轉方式(表7)，三維空間則是利用代數(圖6)、幾何(圖7)、頂點圖(圖8)的方式探討對稱旋轉方式(表7)，四維空間至n維空間是利用頂點圖探討對稱轉方式(表7)，完成目的三、四。

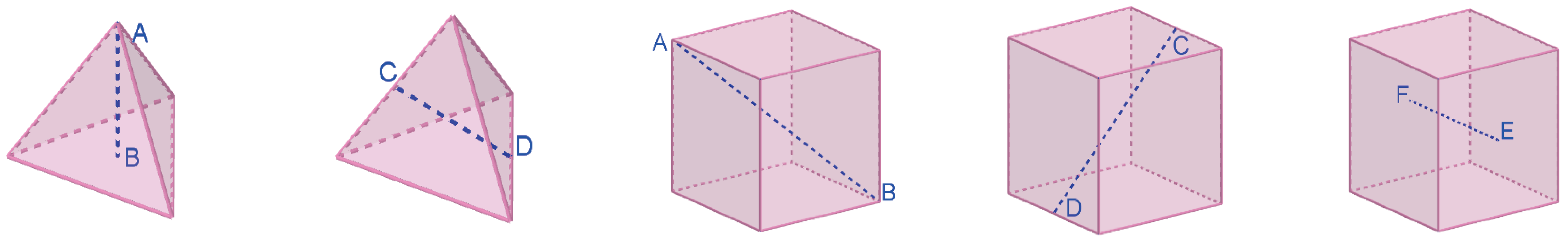
表7：二維正多邊形、三維正多面體、四維及n維空間中正多胞體的對稱旋轉方式

圖形	二維(正 n 邊形)	正四面體	正立方體	正八面體	正十二面體	正二十面體	正五胞體
對稱旋轉方式(種)	n	12	24	24	60	60	60
正八胞體	正十六胞體	正二十四胞體	正一百二十胞體	正六百胞體	單純形	超方形	正軸形
192	192	576	7200	7200	$\frac{(n+1)!}{2}$	$2^{n-1}\times n!$	

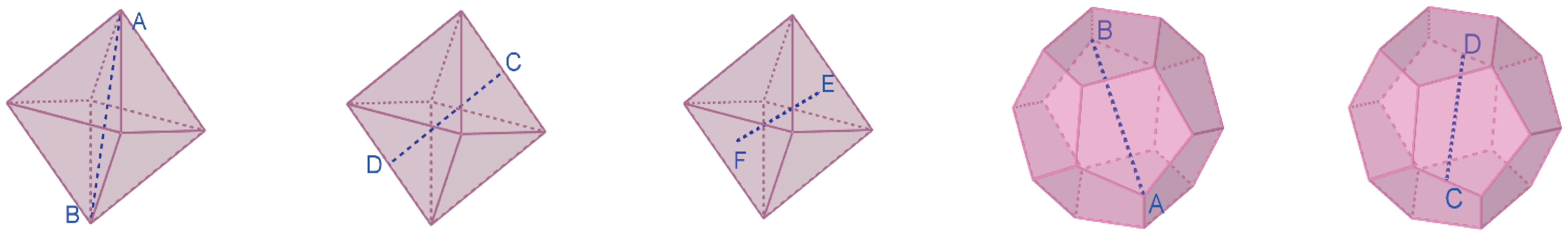


正四面體　正六面體　正八面體　正十二面體　正二十面體

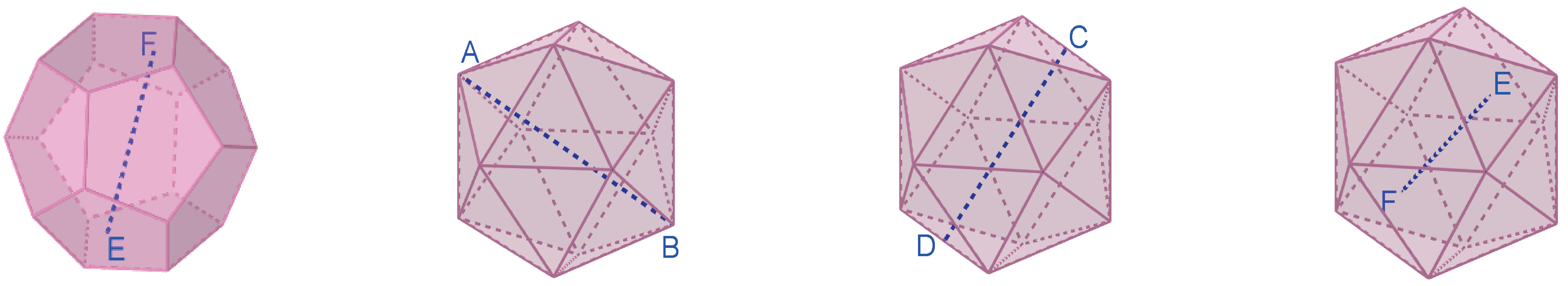
圖6：三維空間中代數方式



(a-1)點到對面中心(A到B)　(a-2)線到線(C到D)　(b-1)點到點(A到B)　(b-2)線到線(C到D)　(b-3)面到面(E到F)

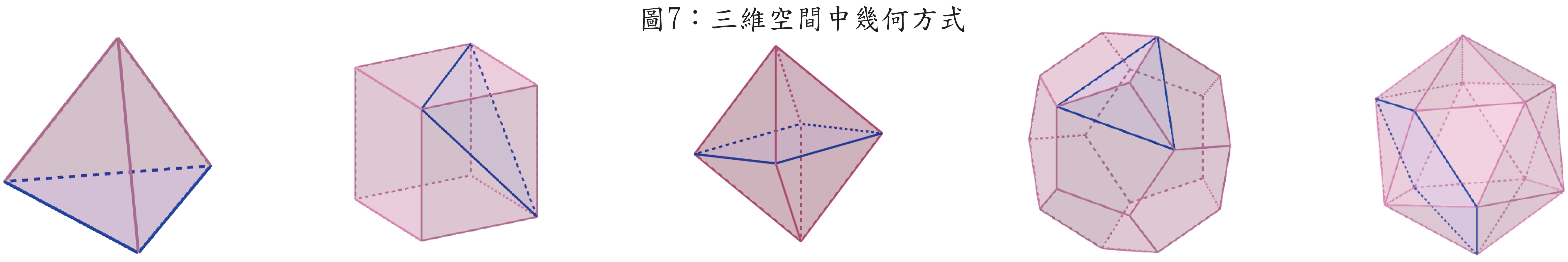


(c-1)點到點(A到B)　(c-2)線到線(C到D)　(c-3)面到面(E到F)　(d-1)點到點(A到B)　(d-2)線到線(C到D)



(d-3)面到面(E到F)　(e-1)點到點(A到B)　(e-2)線到線(C到D)　(e-3)面到面(E到F)

圖7：三維空間中幾何方式



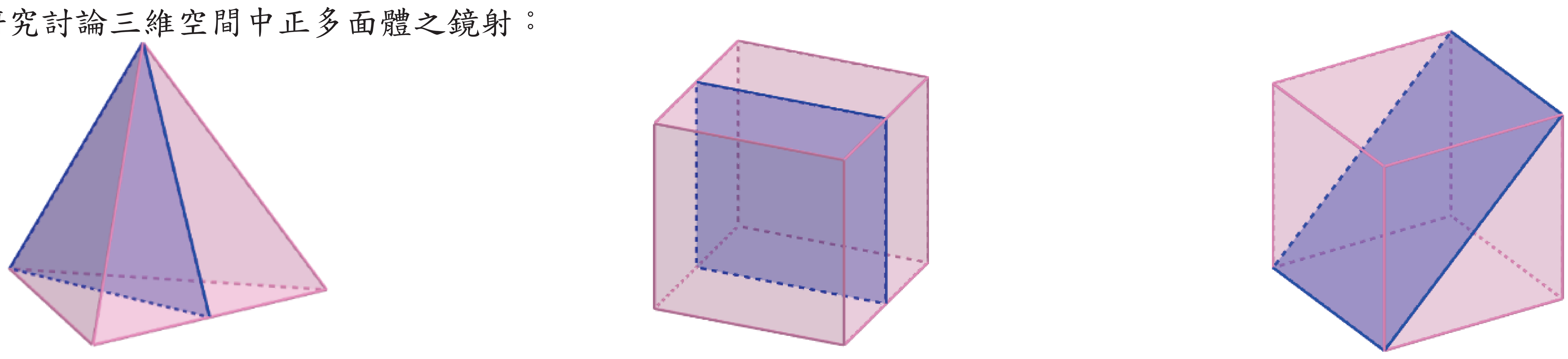
(a)正四面體4×3＝12　(b)正六面體8×3＝24　(c)正八面體6×4＝24　(d)正十二面體20×3＝60　(e)正二十面體12×5＝60

圖8：三維空間中頂點圖方式

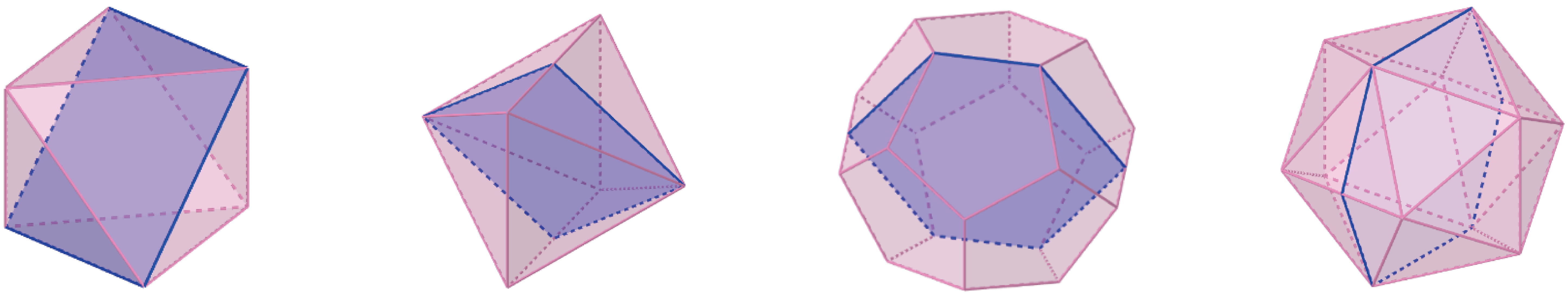
伍、結論與未來展望

一、 透過頂點圖及施萊夫利符號探討三維至n維空間中的正多面(胞)體圖形個數。
二、 透過遞迴式及數學歸納法探討單純形、超方形、正軸形點、線、面的一般化結果。
三、 利用代數及幾何的方式探討二維正多邊形、三維正多面體的對稱旋轉方式，並透過頂點圖探討四維正多胞體的對稱旋轉方式。
四、 利用頂點圖探討n維空間中正多胞體的對稱旋轉方式。
五、 未來將利用鏡射的方式探討三維空間中的正多胞體並推廣至n維。

以下為本研究討論三維空間中正多面體之鏡射：



(a)　正四面體：每一條線向對面中點連接　(b-1)正六面體：連接四條線的中心點　(b-2)正六面體：連接兩條線



(c-1)正八面體：連接四個點　(c-2)正八面體：連接兩個點　(d)正十二面體：連接四個點　(e)正二十面體：連接四個點

圖9：利用鏡射的方式探討三維空間的等邊圖形

表8：利用鏡射的方式探討三維空間的等邊圖形個數

圖形	正四面體	正立方體	正八面體	正十二面體	正二十面體
鏡射方式(個)	6	3+6=9		15	

陸、參考資料（文獻）及其他

[1] Laura Mancinska(2008). Regular Polytopes. retrieved from：http://home.lu.lv/~sd20008/papers/essays/Regular%20Polytopes%20%5bpresentation%5d.pdf.
[2] Eie, Minking and Chang. Shou-Te(2010). A Course on Abstract Algebra. World Scientific Publishing Compan.
[3] H. S. M. Coxeter(1973). Regular Polytopes. New York: Dover publication.
[4] 康明昌(2000)。近世代數。台灣台北市：聯經出版公司。