中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050412

正 N 邊形等距異色之頂點最少塗色數探討

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 洪才家 高二 周秉宏 高二 蔡典佑	彭威銘

關鍵詞：環[n , m1 , m2 , … , mk]、

f(n , m1 , m2 , … , mk)、節

摘要

本科展作品在研究正 N 邊形的頂點塗色，定義相鄰兩頂點的距離為 1，先設定距離 m，規定若兩頂點相距 m 則塗不同色，求塗完 N 個頂點的最少色數。當只設定 1 個 m 時，我們研究出最少色數只有 2 與 3 兩種，並清楚區分出對應條件。而設定兩個 m 時，我們研究出最少色數有 2 , 3 , 4 , 5 等四種，同樣清楚區分出對應條件。最後推廣到設定 k 個 m 時，我們證出最少色數的絕對下界為 2，絕對上界為 2k+1。並以 N、m 的奇偶性細分各情況來做出更精密的上界估計。

壹、 研究動機

當初和同學準備能力競賽時，看到以下題目。將正 17 邊形的頂點塗色且滿足：對任意兩頂點 P、Q，若由 P 沿此 17 邊形走較短路徑到 Q 恰通過 3 , 5 , 9 個點(包含 P、Q)，則 P、Q 不同色。試問最少要幾色? 我們決定探討在不同邊數下，須塗異色之兩頂點事先設定的間隔點數改變或增加事先設定的間隔點數時，要塗完所有頂點之最少色數。

貳、 研究目的

一、正 n 邊形頂點塗色，只設定一數 m，兩頂點間若隔著(m－1)個頂點則塗不同色，求最少塗色數。

二、正 n 邊形頂點塗色，設定兩數 m_1 與 m_2，兩頂點間若隔著(m_1－1)或(m_2－1)個頂點則塗不同色，求最少塗色數。

三、正 n 邊形頂點塗色，設定 k 個數 m_1、m_2、…、m_k，兩頂點間若隔著(m_1－1)、(m_2－1)、… 或(m_k－1)個頂點則塗不同色，求最少塗色數的上界與下界，並細部區分各情況上界。

參、 研究設備及器材

電腦、geogebra、紙筆。

肆、 研究過程及方法

一、名詞解釋與定義

(一)n 環：n 個點等分一圓周，依序編號 0 , 1 , 2 , … , n−1，以 V_0 , V_1 ,V_2 , … , V_{n-1} 表之。

當 j 不是 0～n−1 時，只要符合 j≡i (mod n) , V_j 亦代表 V_i。之後再將每個點塗上一種顏色，稱為 **n 環**或簡稱**環**。文中 n 環通常表環上 n 個點的顏色排列，但若表示點的排列會於環後加上數列符號註記，如 n 環$<\mathrm{V_i}>_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-1}}$或

n 環$<\mathrm{V_i}>_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}$等。

(二)環上兩點距離：規定環上相鄰兩點距離是 1，所以 V_a 到 V_b 的距離依不同轉向會有兩個值，分別是$|a-b|$與$\mathrm{n}-|a-b|$對模 n 取同餘後範圍在 0～n−1。

(三)環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]：自動設定 1≤m_i< n (i= 1 , 2 , … , k)且 n 環中任兩點相距 m_i 就不同色。由定義知將表示法中 k 個 m_i 任意調動位置意思不變。

(四)函數 f(n , m_1 , m_2 , … , m_k)定義：環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]的最少塗色數。

(五)色值：用數字 1 , 2 , 3 , … 表示不同顏色。

(六)C(V_i)：點 V_i 的色值。

(七) m 節：連續 m 個點的色值排列，稱為 **m 節**或簡稱**節**。

(八)節 M_1≠節 M_2：兩個長度相同的節 M_1、M_2，同序位的色值皆異時，以 M_1≠M_2 表示。

(九)色值循環時的表示：當色值連續重複出現時，以上橫線表示循環單位 ，右下標示循環次數。例：$\overline{12}_3$=121212，$\overline{14}_3 1\overline{53}_2$=14141415353。

(十)色值對模 c 平移 a：將一個節中每序位的色值同時加上 a 後，再對模 c 取同餘，使之落在範圍 1～c。例：節 S 色值原為 1243，對模 4 平移 2 就得色值 3421。以下簡單表成 S + 2 (mod4) = 3421。

二、兩個簡易引理

引理 1：正整數集 T = {1 , 2 , … , k}。令 m_i' = n−m_i，i 為 T 中任取的一個或數個元素；

再令 m_i' = m_i，i 為 T 中剩下沒被取到的元素。

則環[n , m_1' , m_2', … , m_k']同義於環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]，

且 f(n , m_1' , m_2', … , m_k') = f(n , m_1 , m_2 , … , m_k)

證明 1：

由一、(二)環上兩點距離的規定可知環[n , m_1' , m_2', … , m_k']同義於環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]。兩者當然有相同的最小塗色數。

以下環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]中的 m_i，除特別突顯結論或證明過程中的需要外，皆視為 $m_i \leq n/2$。

引理 2：若 gcd(n , m_1 , m_2 , … , m_k) = d > 1，

則 f(n , m_1 , m_2 , … , m_k) = f(n/d , m_1/d , m_2/d , … , m_k/d)

證明 2：

將 n 環中每點的點號對模 d 的餘數分類，得 d 類。相距 m_i (i=1,2, … ,k)的兩點必在同一類，即相異兩類的塗色互不影響。因此只要確定其中一類的最少塗色方式，其他類再複製上去即可。又原先在 n 環中相距 m_i 者分類後在 n/d 環中會變成相距 m_i/d，所以環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]的最少塗色數與環[n/d , m_1/d , m_2/d , … , m_k/d]相同。

例如將環[21 , 6 , 9]$< V_i >_{i=0}^{20}$分成環 A<V_0 , V_3 , V_6 , V_9 , V_{12}, V_{15} , V_{18} >、環 B<V_1, V_4 , V_7 , V_{10} , V_{13} , V_{16} , V_{19} >、環 C<V_2, V_5 , V_8 , V_{11} V_{14} , V_{17} , V_{20} >三類，只要確定環 A 的最少塗色方法，另兩個再複製就好，而此時環 A 同義於環[21/3 , 6/3 , 9/3]。所以對環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]的討論皆可只討論 gcd(n , m_1 , m_2 , … , m_k)=1 就好。

三、gcd(n,m)=1，求$f(n,m)$

因只用一色明顯不可能，所以最少需兩色。n 環$< V_i >_{i=0}^{n-1}$中我們打算先將 V_0 塗上第 1 色，前進 m 到 V_m 塗上第 2 色，再前進 m 到 V_{2m} 再塗上第 1 色，⋯，依序交錯用此兩色去塗，若能完成則最少塗色數為 2；否則最少塗色數為 3 以上。

引理 3：若 gcd$(n,m) = 1$且 n 環$< V_i >_{i=0}^{n-1}$中由 V_0 開始，每次前進 m，則會把每個點都先走過一次後再回到 V_0。即環$[n,m]$會同義於環$[n,1]$。

證明 3：

(1)因 gcd$(n,m) = 1$，所以{m , 2m , 3m , ⋯ , nm}是模 n 的完全剩餘系

(2)$nm \equiv 0(mod\ n)$。

定理一：gcd(n,m)=1

1.若 n 偶數，則$f(n,m)=2$

2.若 n 奇數，則$f(n,m)=3$

證明一：

由引理 3 知$f(n,m)=f(n,1)$

1.若 n 偶數，可用 2 色構造環$[n,1]$：$\overline{12}_{n/2}$

2.若 n 奇數

(1) 2 色無法構造環$[n,1]$：

若用 2 色構造，環中 2 色必交錯，但 n 為奇數不可能達成

(2)可用 3 色構造環$[n,1]$：$\overline{12}_{(n-1)/2}3$

四、gcd$(n,m_1,m_2)=1$ ，求$f(n,m_1,m_2)$

分成 m_1、m_2 至少有一與 n 互質和皆不與 n 互質兩種情況討論。

(一)m_1、m_2 至少有一與 n 互質

不失一般性設 gcd$(n,m_1)=1$，由引理 3 思維，環[n,m_1]會同義於另一個新環$[n,1]$，那原來固定前進 m_2，在新環中是否會繼續維持固定的前進數? 若會，又是多少呢?

引理 4.1：若 gcd$(n,m_1)=1$，則存在正整數 m (1≤m<n)滿足$m_2 \equiv mm_1(mod\ n)$，使環$[n,m_1,m_2]$同義於環$[n,1,m]$。

證明 4.1：

因 gcd$(n,m_1)=1$

由引理 3 知，n 環$<\mathrm{V_i}>_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-1}}$中從 V_0 開始，將每前進 m_1 的點依序排列，會得到一個新環$[n,1]$。

且可得{0}∪{$1m_1$, $2m_1$, ⋯ , (n-1)m_1}是模 n 的完全剩餘系。

故存在正整數 m (1≤m<n)使$m_2 \equiv mm_1(mod\ n)$

且對於 i=2 , 3 ,⋯ , n，皆滿足$im_2 \equiv (im)m_1(mod\ n)$

即原來環$[n, m_1, m_2]$會同義於環$[n, 1, m]$。

引理 4.2：若$mm' \equiv \pm 1(mod\ n)$，則$f(n, 1, m)$=$f(n, 1, m')$

證明 4.2：

1. $mm' \equiv 1(mod\ n)$時

 得 $\gcd(n, m) = 1$。

 由引理 4.1 知環$[n, m, 1]$同義於環$[n, 1, m']$，所以$f(n, 1, m)$=$f(n, 1, m')$。

2. $mm' \equiv -1(mod\ n)$時

 可知$m(n - m') \equiv 1(mod\ n)$。

 由 1.已證的結論知$f(n, 1, m)$=$f(n, 1, n - m')$，

 又由引理 1 知$f(n, 1, n - m')$= $f(n, 1, m')$。

回到我們主題的研究，步驟是循序把 n、m 能處理的情況逐一拿掉，直到所有情況皆拿掉就完成了。接下來先談幾個容易的：

定理二：n 偶數且 m 奇數⇔ $f(n, 1, m) = 2$

證明二：

1.⇒

 可用 2 色構造 n 環：$\overline{12}_{n/2}$

2.⇐

 由$f(n, 1, m) \geq f(n , 1)$且$f(n, 1, m) \geq f(n , m)$，得 $f(n , 1)= f(n , m)=2$

 因 $f(n , 1)=2$，所以由定理一得 n 為偶數且 n 環色值為 1、2 交錯。

 又因 $f(n , m)=2$，所以 m 必為奇數。

定理三：若 n、m 不滿足定理二的條件

 且 n 是 3 的倍數，m 不是 3 的倍數，

 則$f(n, 1, m) = 3$

證明三：

1.由定理二知此時$f(n,1,m) \geq 3$

2.可用 3 色構造 n 環：$\overline{123}_{n/3}$ (任意兩個同色點距離必是 3 的倍數)

定理四：若 n、m 不滿足定理二、定理三的條件

1. m=2 , n−2

(1) n=5 時，$f(5,1,2) = f(5,1,3) = 5$

(2) n≠5 時，$f(n,1,2) = f(n,1,n-2) = 4$

2. $\mathrm{m} = (\mathrm{n} \pm 1)/2$

n 為奇數且 n≠5 時，$f\left(n,1,\frac{n-1}{2}\right) = f\left(n,1,\frac{n+1}{2}\right) = 4$

證明四：

1.(1)$n = 5$時

因 5 環$< \mathrm{V_i} >_{\mathrm{i=1}}^{5}$上每點皆和其餘四點異色，所以$f(5,1,2) = 5$

(2)n≠5 時

①3 色無法構造 n 環：

設用 3 色構造 n 環$< \mathrm{V_i} >_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}$，因相距 1 與 2 的兩點不同色，所以須滿足任何連續三點皆異色，色值必為 123123…

不失一般性設 n 環 = 123123…

但當

- $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$時，$C(V_1)= C(V_n)=1$，造成相距 1 的兩點同色
- $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$時，$C(V_1)= C(V_{n-1})=1$，造成相距 2 的兩點同色

皆不合

②可用 4 色構造 n 環：

- $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$時，$\overline{123}_{(n-1)/3}4$
- $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$時，$\overline{123}_{(n-8)/3}\overline{1234}_2$

2.因$(\frac{n-1}{2})\cdot 2 \equiv -1(\mathrm{mod\ n})$

所以由引理 4.2 可得$f\left(n,1,\frac{n-1}{2}\right)$=$f(n,1,2)$

再由 1.(2)已證出的結論得$f\left(n,1,\frac{n-1}{2}\right)$=4

繼續主題的研究，經不斷嘗試我們體會到底下構造方式：將 n 環$\langle V_i \rangle_{i=1}^{n}$從 V_1 開始每連續 m 個當成一節，最後一節可以不是 m 個。當 m 為奇數時，第奇數節色值先構造成 121212…1，第偶數節色值先構造成 212121…2，再針對前進 m 會對到同色的點與環尾、頭相接兩點 V_n、V_1 產生同色時，將有問題的點逐一調成 3。而當 m 為偶數時，第奇數節色值先構造成 121212…12，第偶數節色值先構造成 31212…123。例如：(陰影部分為前進 m 會對到同色，紅色數字表最後再將色值調成 3)

1.環[25,1,7]：

環初始色值　　　　1212121 2121212 1212121 2121

前進 7 色值　1212121 2121212 1212121 2121121 2121

(初始色值頭 7 個)

2.環[29,1,8]：

環初始色值　　　　12121212 31212123 12121212 31212

前進 8 色值　12121212 31212123 12121212 31212121 21212

(初始色值頭 8 個)

3.環[35,1,8]：

環初始色值　　　　12121212 31212123 12121212 31212123 121←與第一點同色

前進 8 色值　12121212 31212123 12121212 31212123 12112121 212　須調成 3

(初始色值頭 8 個)

不過若 n 相對於 m 來說太小，則調成 3 的點會有因相距 m 而導致構造失敗。

以下先以 m 除 n，設商 q_1，餘數 r_1，即$n=\mathrm{m}\times q_1+r_1$。分$q_1 \geq 3$ 與$q_1=2$ 討論：

1.$q_1 \geq 3$ 時

定理五之一：若 n、m 不滿足定理二~四的條件

$(\text{奇數}n)=m\times q_1+r_1\ (q_1 \geq 3)$

且排除 (m 偶數且 q_1 偶數且 r_1=1) 的情況

則$f(n,1,m)=3$

證明五之一：

1.由定理二知此時$f(n,1,m) \geq 3$

2.可用 3 色構造 n 環：

先構造幾個 m 節的 M_i 與 r_1 節的 R，再接成 n 環。

(1)m 奇數且 q_1 奇數

$M_1 = \overline{32}_{(m-1)/2}3$, $M_2 = \overline{21}_{(m-1)/2}2$, $M_3 = \overline{12}_{(m-1)/2}1$ ，

$M_4 = \overline{12}_{r_1/2}\overline{13}_{(m-r_1-1)/2}1$, $R = \overline{31}_{r_1/2}$

n 環$= \mathrm{M}_1\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}_{(q_1-3)/2}\mathrm{M}_2\mathrm{M}_4\mathrm{R}$

例：環[49,1,9] =

323232323 212121212 121212121 212121212 121213131 3131

(2)m 奇數且 q_1 偶數

$M_1 = \overline{32}_{(m-1)/2}3$, $M_2 = \overline{21}_{(m-1)/2}2$, $M_3 = \overline{12}_{(m-1)/2}1$ ，

$M_4 = \overline{21}_{(r_1-1)/2}2\overline{13}_{(m-r_1)/2}$, $R = \overline{13}_{(r_1-1)/2}1$

n 環$= \mathrm{M}_1\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}_{(q_1-2)/2}\mathrm{M}_4\mathrm{R}$

例：環[41,1,9] = 323232323 212121212 121212121 212121313 13131

(3)m 偶數且 q_1 奇數

$M_1 = \overline{12}_{(m-r_1+1)/2}\overline{32}_{(r_1-1)/2}$, $M_2 = 3\overline{12}_{(m-2)/2}3$, $M_3 = \overline{12}_{m/2}$ ，

$R = \overline{31}_{(r_1-1)/2}3$

n 環$= \mathrm{M}_1\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}_{(q_1-1)/2}\mathrm{R}$

例：環[45,1,8] = 12123232 31212123 12121212 31212123 12121212 31313

(4)m 偶數且 q_1 偶數且 $r_1>1$

$M_1 = \overline{13}_{(m-r_1-1)/2}\overline{12}_{(r_1+1)/2}$, $M_2 = 3\overline{12}_{(m-2)/2}3$, $M_3 = \overline{12}_{m/2}$ ，

$M_4 = 31\overline{21}_{(r_1-3)/2}\overline{23}_{(m-r_1+1)/2}$, $R = \overline{12}_{(r_1-1)/2}3$

n 環$= \mathrm{M}_1\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}_{(q_1-2)/2}\mathrm{M}_4\mathrm{R}$

例：環[37,1,8] = 13121212 31212123 12121212 31212323 12123

接著當 n、m 皆為偶數時，我們進一步發現三個好用的 m 節：$1\overline{23}_{(m-2)/2}1$、

$2\overline{31}_{(m-2)/2}2$、$3\overline{12}_{(m-2)/2}3$互相連接時，無論如何都可以符合相距 m 的兩點會異色，所以將之拿來當構造 n 環的基本節。同時剛好也解決上面留下的 n 奇數且 m 偶數且 q_1 偶數且 $r_1=1$ 狀況。

定理五之二：若 n、m 不滿足定理二~四的條件

(1) (偶數n) $= m \times q_1 + r_1$ (q_1 ≥3)，則$f(n,1,m)$ =3

(2) (奇數n) $= m \times q_1 + r_1$ (q_1 ≥3)，m 偶數且 q_1 偶數且 $r_1=1$，

則$f(n,1,m)$ =3

證明五之二：

1.由定理二知此時$f(n,1,m) \geq 3$

2.可用 3 色構造 n 環：先構造幾個 m 節的 M_i 與 r_1 節的 R，再接成 n 環

(1) n 為偶數時，因 n、m 不滿足定理二的條件，所以 m 必偶數

①q_1 奇數且 $r_1 \neq 0$

$M_1 = 1\overline{23}_{(m-2)/2}1$, $M_2 = 2\overline{31}_{(m-2)/2}2$, $M_3 = 3\overline{12}_{(m-2)/2}3$

R $= 2\overline{31}_{(r_1-2)/2}3$

n 環= $\mathrm{M_1}\overline{\mathrm{M_2M_3}}_{(q_1-1)/2}\mathrm{R}$

例：環[46,1,8] =

12323231 23131312 31212123 23131312 31212123 231313

②q_1 奇數且 $r_1=0$

$M_1 = 1\overline{23}_{(m-2)/2}1$, $M_2 = 2\overline{31}_{(m-2)/2}2$, $M_3 = 3\overline{12}_{(m-2)/2}3$

n 環= $\mathrm{M_1}\overline{\mathrm{M_2M_3}}_{(q_1-1)/2}$

例：環[40,1,8] = 12323231 23131312 31212123 23131312 31212123

③q_1 偶數且 $r_1 \neq 0$

$M_1 = 1\overline{23}_{(m-2)/2}1$, $M_2 = 3\overline{12}_{(m-2)/2}3$, R $= 2\overline{31}_{(r_1-2)/2}3$

n 環= $\overline{\mathrm{M_1M_2}}_{q_1/2}\mathrm{R}$

例：環[38,1,8] = 12323231 31212123 12323231 31212123 231313

④q_1 偶數且 r_1=0

$M_1 = 1\overline{23}_{(m-2)/2}1$, $M_2 = 2\overline{31}_{(m-2)/2}2$

n 環= $\overline{\mathrm{M_1 M_2}}_{q_1/2}$

例：環[48,1,8] =

12323231 23131312 12323231 23131312 12323231 23131312

(2) n 奇數且 m 偶數且 q_1 偶數且 r_1=1 時

$M_1 = 1\overline{23}_{(m-2)/2}1$, $M_2 = 2\overline{31}_{(m-2)/2}2$, $M_3 = 3\overline{12}_{(m-2)/2}3$, $\mathrm{R} = 3$

n 環= $\mathrm{M_1}\overline{\mathrm{M_2 M_3}}_{(q_1-2)/2}\mathrm{M_1 R}$

例：環[33,1,8] = 12323231 23131312 31212123 12323231 3

將定理五之一與之二合併成定理五。

定理五：若 n、m 不滿足定理二~四的條件 且 $n = m \times q_1 + r_1$ (q_1 ≥3)

則$f(n,1,m)$ =3

2.$q_1 = 2$時

(1) r_1= 0

定理六之一：若 n、m 不滿足定理二~四的條件 且 $n = 2m + r_1$ $(r_1 = 0)$

則$f(n,1,m)$ =3

證明六之一：

因 n、m 不滿足定理二的條件，所以只須考慮 m 為偶數即可。

①由定理二知此時$f(n,1,m)$ ≥3

②可用 3 色構造 n 環：

先構造兩個 m 節：$M_1 = \overline{12}_{m/2}$, $M_2 = 3\overline{12}_{(m-2)/2}3$

n 環= $\mathrm{M_1 M_2}$

例：環[16,1,8] = 12121212 31212123

(2) r_1= 1 為定理四結論 2.討論過的情況。

(3) r_1> 1

我們經不斷嘗試終於成功找到兩種有幫助的構造方法，將之搭配為用就可

解決。繼續以 r_1 去除 m，得商 q_2，餘數 r_2，即

$$n = 2m + r_1 \quad (r_1 > 1) \qquad m = r_1 \times q_2 + r_2$$

將 n 環依序拆成兩個 m 節 M_1、M_2 與一個 r_1 節 R，再將 $M_i(i=1,2)$依序拆成 q_2 個 r_1 節與 1 個 r_2 節。我們視 M_i 為環$[r_1, 1]$重複循環 q_2 次後再前進 r_2 個，所以 M_i 拆成的 q_2 個 r_1 節皆設為 R_{i1}，最後的 r_2 節設為 R_{i2}，且 R_{i2} = (R_{i1} 的前 r_2 個)。

$$\overbrace{R_{11}\ R_{11}\ \cdots\cdots\ R_{11}}^{M_1\ (q_2\text{個})}\ R_{12}\ \overbrace{R_{21}\ R_{21}\ \cdots\cdots\ R_{21}}^{M_2\ (q_2\text{個})}\ R_{22}\ \overset{R}{R}$$

環初始色值 R_{11} R_{11} ……… R_{11} R_{12} R_{21} R_{21} ……… R_{21} R_{22} R

前進 m 色值 R_{11} R_{11} … R_{11} R_{12} R_{21} R_{21} ……… R_{21} R_{22} R R_{11} R_{11} ……… R_{11} R_{12}

若要符合環[n,1,m]結構，則須滿足以下兩條件：

①前進 m 不能對到同色：$R_{21} \neq R_{11}$, R≠(R_{11} 從第 r_2+1 個開始循環一次) , R≠R_{21}

②節與節相接處兩點異色：R_{12} 尾與 R_{21} 頭，R_{22} 尾與 R 頭，R 尾與 R_{11} 頭

我們透過巧妙選取符合某條件的環$[r_1, 1]$用來構造 R_{11}，再利用色值平移得 R_{21}，R 視情況設定為 R_{11} 或 R_{11} 的色值平移。寫出以下兩構造引理 5.1 與 5.3。

引理 5.1：若 n、m 不滿足定理二~四的條件，r_2>2，

且 可找到兩同色點相距$r_2 - 1$ 的不大於 3 色構造環$[r_1, 1, r_2]$，

則$f(n, 1, m)$ =3

證明 5.1：

1.由定理二知此時$f(n, 1, m) \geq 3$

2.可用 3 色構造 n 環：

將不大於 3 色構造的環$[r_1, 1, r_2]$直接取出排成 R_{11}，同時調整兩同色點對應的色值於第 1 位與第r_2位。

不失一般性令 R_{11} 頭、尾的色值分別為 1 , 2，即 R_{11}=1…2，則 R_{12}=1…1。

令 R_{21}=R_{11}+1(mod 3)且 R=R_{11}

經檢驗知 $R_{21} \neq R_{11}$, R≠(R_{11} 從第 r_2+1 個開始循環一次) , R≠R_{21}

且 R_{12} 尾與 R_{21} 頭異色，R_{22} 尾與 R 頭異色，R 尾與 R_{11} 頭異色

所以成功構造出環$[n, 1, m]$

易看出引理 5.1 中的條件去掉兩同色點相距r_2-1與改成只要能找到不大於 3 色構造的環$[r_1,1]$即可處理 r_2=1 的情況，寫成底下引理 5.2。

引理 5.2：若 n、m 不滿足定理二~四的條件，r_2=1

則$f(n,1,m)$ =3

證明 5.2：

1.由定理二知此時$f(n,1,m)\geq 3$

2.可用 3 色構造 n 環：

由定理一知必有不大於 3 色構造的環[r_1 , 1]，

直接取出色值排成 R_{11}，並用與引理 5.1 相同的方法構造出 n 環

引理 5.3：若 n、m 不滿足定理二~四的條件，r_2>1

且可找到兩同色點相距r_2的不大於 3 色構造環$[r_1,1]$，使

第 i 點色值對應到第 i + r_2 點色值符合 x→ x 或 x-1

則$f(n,1,m)$ =3

證明 5.3：

1.由定理二知此時$f(n,1,m)\geq 3$

2.可用 3 色構造 n 環：

將不大於 3 色構造的環$[r_1,1]$直接取出排成 R_{11}，使第 i 點色值對應到第 i + r_2 點色值符合 x→x 或 x-1，同時將兩同色點的色值置於第r_2位與第r_1位。

不失一般性令 R_{11} 頭、尾的色值分別為 1 , 2，即 R_{11}=1…2，則 R_{12}=1…2。

令 R_{21}=R_{11}+2(mod 3)且 R=R_{11}+1(mod 3)，成功構造出環$[n,1,m]$。

易看出引理 5.3 中的條件去掉找到兩同色點相距r_2與改成只要能找到不大於 3 色構造的環$[r_1,1]$即可處理 r_2=0 的情況，寫成底下引理 5.4。

引理 5.4：若 n、m 不滿足定理二~四的條件，r_2= 0

則$f(n,1,m)$ =3

證明 5.4：

1.由定理二知此時$f(n,1,m) \geq 3$

2.可用 3 色構造 n 環：

由定理一知必有不大於 3 色構造的環[r_1 , 1]，

直接取出色值排成 R_{11}，並用與引理 5.3 相同的方法構造出 n 環。

再回到我們的研究主題：

定理六之二：若 n、m 不滿足定理二~四的條件

且 $n = 2m + r_1$ ($r_1 \geq 2$)

$m = r_1 \times q_2 + r_2$ ($r_2 \neq r_1 - 1$)

則$f(n,1,m)$ =3

證明六之二：

若 n、m 不滿足定理二，所以不用考慮 r_1 偶數且 r_2 奇數

1. r_2 = 0 時，由引理 5.4 可得

2. r_2 = 1 時，由引理 5.2 可得

3. $r_2 \geq 2$ 時

(1) r_1 奇數且 r_2 奇數

①$r_2 \leq r_1/3$

將<u>定理五之一證明過程 2.(1)(2)</u>中構造環[$n,1,m$]方法的 n 代入現在的 r_1，m 代入現在的 r_2，r_1 代入現在的 r_1 除以 r_2 的餘數，可構造出不大於 3 色的環[$r_1,1,r_2$]，且此時第 2 節 M_2 的頭尾同色且相距r_2-1。

再由引理 5.1 得證此時$f(n,1,m)$ =3。

②$r_2 \geq (r_1-1)/2$

3 色構造環[$r_1,1$]：$\overline{32}_{(r_1-r_2)/2}\overline{12}_{(r_2-1)/2}1$

由第 2+(r_1-r_2)位到第 2 位距離 r_2 且兩位同色值 2。

令引理 5.3 證明過程中 R_{11} 由環[$r_1,1$]的第 3+(r_1-r_2)位開始排起，

則滿足第 i 點色值對應到第 i + r_2 點色值符合 x→ x 或 x-1。

且 R_{11} 第 r_2 位同環$[r_1,1]$第 2 位，R_{11} 第 r_1 位同環$[r_1,1]$第 2+(r_1−r_2)

位。所以由引理 5.3 得$f(n,1,m)$ =3。

③$r_1/3<r_2<(r_1-1)/2$時

用 r_2 去除 r_1，得商 2，餘數 r_3。

先 3 色構造兩個 r_2 節 S_1、S_2 與一個 r_3 節 T：

$S_1=\overline{12}_{(r_2-r_3)/2}\overline{13}_{(r_3-1)/2}1$, $S_2=\overline{32}_{(r_2-1)/2}3$, $T=\overline{21}_{(r_3-1)/2}2$

再接成環[r_1 , 1]= S_1S_2T

第 2 位到第 2+r_2 位距離 r_2 且兩位同色值 2。

令引理 5.3 證明過程中 R_{11} 由環$[r_1,1]$的第 3 位開始排起，

則滿足第 i 點色值對應到第 i + r_2 點色值符合 x→ x 或 x-1。

且 R_{11} 第 r_2 位同環$[r_1,1]$第 2+r_2 位，R_{11} 第 r_1 位同環$[r_1,1]$第 2 位。

所以由引理 5.3 得$f(n,1,m)$ =3。

(2) r_1 奇數且 r_2 偶數

令 r_2'= r_1-r_2，則 r_2'為奇數。

將 r_2'比照(1)中三個範圍的討論對應到 r_2 三個範圍：

①$r_2\geq 2r_1/3$時，但排除 r_2= r_1−1，($r_2'\leq r_1/3$)

將<u>定理五之一證明過程 2.(1)(2)</u>中構造環$[n,1,m]$方法的 n 代入 r_1，

m 代入 r_2'，r_1 代入現在的 r_1 除以 r_2'的餘數，可構造出不大於 3 色

的環$[r_1,1,r_2']$，且由第 r_1−1 位到第 r_2'位距離 r_2'+1 且兩位同色值

3。令引理 5.1 證明過程中的 R_{11} 由環[r_1 , 1 , r_2']的第 r_1−1 位開始反

向排起，則環[r_1 , 1 , r_2]同色值會出現在第 1 位與第 r_2 位(相距r_2-1)。

由引理 5.1 得$f(n,1,m)$ =3。

②$r_2\leq(r_1+1)/2$ 時，($r_2'\geq(r_1-1)/2$)

取對應的環$[r_1,1]$= $\overline{32}_{(r_1-r_2)/2}\overline{12}_{(r_2-1)/2}1$

令引理 5.3 證明過程中的 R_{11} 由環$[r_1,1]$的第 1+(r_1−r_2)位開始反向

排起，則滿足第 i 點色值對應到第 i + r_2 點色值符合 x→ x 或 x-1。

且 R_{11} 第 r_2 位同環$[r_1,1]$第 2 位，R_{11} 第 r_1 位同環$[r_1,1]$第 2+(r_1-r_2)位，色值相同。由引理 5.3 得$f(n,1,m)$ =3。

③$(r_1+1)/2<r_2<2r_1/3$ 時

$(r_1/3<r_2'<(r_1-1)/2)$

取對應的環$[r_1,1]$：$\overline{12}_{(r_2-r_3)/2}\overline{13}_{(r_3-1)/2}1\overline{32}_{(r_2-1)/2}3\overline{21}_{(r_3-1)/2}2$

令引理 5.3 證明過程中的 R_{11} 由環$[r_1,1]$的第 1 位開始反向排起，

則滿足第 i 點色值對應到第 i + r_2 點色值符合 x→ x 或 x-1。

且 R_{11} 第 r_2 位同環$[r_1,1]$第 2+r_2 位，R_{11} 第 r_1 位同環$[r_1,1]$第 2 位，色值相同。所以由引理 5.3 得$f(n,1,m)$ =3。

(3) r_1 偶數且 r_2 偶數

2 色構造環$[r_1,1]$= $\overline{12}_{r_1/2}$

因第 i 點色值對應到第 i + r_2 點色值符合 x→ x

且第 2 位到第 2+r_2 位距離 r_2 且兩位同色值 2。

所以由引理 5.3 得$f(n,1,m)$ =3。

定理六之三：若 n、m 不滿足定理二~四的條件

且 $n=2m+r_1$ (r_1≥2)

$m=r_1\times q_2+r_2$ ($r_2=r_1-1$)

則：(1)$f(13,1,5)$ =4

(2)除(1)外的所有情況，$f(n,1,m)=3$

證明六之三：

因 n、m 不滿足定理二條件，所以只須考慮 r_1 奇數，r_2 偶數

1. r_1>3 時

用 3 色構造環[r_1 ,1 ,r_1-1] = $\overline{12}_{(r_1-3)/2}312$

且第 1 位與第r_1-1位同色(相距r_1-2)。

由引理 5.1 得$f(n,1,m)$ =3

2. r_1=3 (此時 r_2=2)

(1) q_2=1 時(n=13 , m=5)

①3 色無法構造環[13,1,5]：

設 3 色可構造環=$< V_i >_{i=1}^{13}$，則由鴿籠原理知必可找到 5 點同色。不失一般性設其色值為 1 且 C(V_7)=1，此時色值不能為 1 的點有{V_2 , V_6 , V_8 , V_{12}}。由對稱性只要再確定{V_1 , V_3 , V_4 , V_5}這四點中無法選出兩點放色值 1 即可：

- 若選 C(V_1)=1，則色值 1 可選的點剩{V_3 , V_4 , V_5 , V_{10} , V_{11}}。
  此時同義於環[5 ,1]=<V_3 , V_4 , V_5 , V_{10} , V_{11}>
  明顯不可能再選 3 個點色值 1(矛盾)。
- 若選 C(V_3)=1，則色值 1 可選的點剩{V_5 , V_9 , V_{10} , V_{13}}。因 V_5、V_{13} 相距 5 且 V_9、V_{10} 相鄰，所以最多只能再有兩點色值 1 (矛盾)。
- 若選 C(V_4)=1，則色值 1 可選的點剩{V_{10} , V_{11}, V_{13} }。因 V_{10}、V_{11} 相鄰，所以最多只能再有兩點色值 1(矛盾)。

②可用 4 色構造環[13,1,5]=$\overline{123}_4 4$

(2) $q_2 \geq 2$時 (n=6q_2+7 , m=3q_2+2)

因(3q_2+2)(2q_2+3)≡ −1(mod6q_2+7)

所以由引理 4.2 知 f(6q_2+7,1,3q_2+2)= f(6q_2+7,1,2q_2+3)

又此時 r_1=2q_2+1>3 且 r_2 =2

由定理六之二得 f(6q_2+7,1,2q_2+3)=3。

將定理六之一~三合併成定理六。

定理六：若 n、m 不滿足定理二~四的條件(即 $r_1 \neq 1$)，

$n = 2m + r_1$

則：(1)$f(13,1,5) = 4$

(2)除(1)外的所有情形，$f(n, 1, m)$ =3

(二)m_1、m_2皆不與 n 互質

定理七：若 m_1、m_2 皆不與 n 互質

(1)n 偶數且 m_1、m_2 皆奇數$\Leftrightarrow f(n , m_1 , m_2)=2$

(2)除(1)情況外，則 $f(n , m_1 , m_2)=3$

證明七：

設 $\gcd(n,m_1)=d_1>1, \gcd(n,m_2)=d_2>1$ 且$(d_1,d_2)=1$。

再令 $n= d_1 d_2 n'$, $m_1=d_1 m_1'$, $m_2= d_2 m_2'$，易知 $\gcd(n', m_1')=\gcd(n', m_2')=1$。

先將 n 環$< V_i >_{i=0}^{n-1}$中所有點的編號依規則排入矩陣 A 中

令 A=$[a_{ij}]_{d_1\times d_2 n'}$，其中$a_{ij}\equiv (j-1)m_1+(i-1)m_2 \ (mod\ n)$。

環$[n , m_1, m_2]$結構等價於同時符合環$[n , m_1]$與環$[n , m_2]$。

1.環$[n , m_1]$：可分成獨立的 d_1 個環$[d_2 n' , 1]$來看，對應到 A 中每一列。

2.環$[n , m_2]$：

因 $\gcd(n', m_1')= 1$ 且 $\gcd(n', m_2')=1$，所以存在 α' $(0 <\alpha'< n')$，使 $m_2'\equiv\alpha' m_1' (\text{mod } n')$

可得 $d_1 m_2\equiv (d_2\alpha')m_1 (\text{mod n})$

由 V_0 開始逐次前進距離 m_2 走過的點號對應 A 中的元就是由第 1 行開始依序從上到下經過每一元，再接到第 $1+ d_2\alpha'$行依序從上到下經過每一元，再接到第 $1+2(d_2\alpha')$行依序從上到下經過每一元，…

(若行數超出 $1\sim d_2 n'$，則對模 $d_2 n'$取同餘)

又由 $\gcd(n', m_1')= 1$, $\gcd(n', m_2')=1$ 與 $m_2'\equiv\alpha' m_1' (\text{mod } n')$知 $\gcd(\alpha',n')= 1$

所以由 a_{11} 出發會將第 $1+ (d_2 j)$行$(j=0,1,2,\cdots, n'-1)$全走光才再回到 a_{11}，正好走過 $d_1 n'$個元，因此環$[n , m_2]$可分成獨立的 d_2 個環$[d_1 n', 1]$來看，其中第 i 個環$(1\le i \le d_2)$走光所有第 $i+ (d_2 j)$列$(j=0,1,2,\ldots, n'-1)$。

結論(1)證明

①$\Rightarrow$

用 2 色構造 n 環：$\overline{12}_{n/2}$

②⇐

$f(n, m_1, m_2)=2 \Rightarrow f(n, m_1)=2$

由定理一知 d_2n'偶且 m_1'奇，同理得 d_1n'偶且 m_2'奇。設 a_{11} 色值 1，由定理一亦得 A 中奇數列色值必$\overline{12}_{d_2n'/2}$且偶數列色值必$\overline{21}_{d_2n'/2}$。若 d_1 偶，則$a_{d_1,1}$色值是 2。因 $\gcd(d_1, d_2)=1$，所以 d_2 奇且 n'偶。又因 $\gcd(\alpha', n')=1$，所以α'奇 $\Rightarrow d_2\alpha'$奇 $\Rightarrow a_{1,1+d_2\alpha'}$色值 2。得$a_{d_1,1}$，$a_{1,1+d_2\alpha'}$同色值(矛盾)。

同理 d_2 偶不合。因此 d_1, d_2 皆奇⇒ n'偶。得證 n 偶數且 m_1、m_2 皆奇數。

結論(2)證明

由結論(1)知此時 $f(n, m_1, m_2)\geq 3$

又可用 3 色構造 n 環：

①視 A 中每一列為 n'個 d_2 節，由定理一知可找到 3 色構造的環$[d_2, 1]$填入第一列的第一節。從第二節後的每節都複製第一節的色值。

②在 a_{11} 已填下，由定理一知找到 3 色構造的環$[d_1, 1]$填入第一行。

③第 j 行($j=2,3,4,\ldots,d_2n'$)只要將第 1 行的色值對模 3 平移[(a_{1j} 色值)−(a_{11} 色值)]即可。

底下舉出對應兩種情形的例子：

1. n 偶數且 m_1、m_2 皆奇數：

以環[120,35,27]為例，其中 $d_1=5$，$d_2=3$，$m_1'=7$，$m_2'=40$，$n'=8$。f(120,35,27)=2

0	35	70	105	20	55	90	5	40	75	110	25	60	95	10	45	80	115	30	65	100	15	50	85
27	62	97	12	47	82	117	32	67	102	17	52	87	2	37	72	107	22	57	92	7	42	77	112
54	89	4	39	74	109	24	59	94	9	44	79	114	29	64	99	14	49	84	119	34	69	104	19
81	116	31	66	101	16	51	86	1	36	71	106	21	56	91	6	41	76	111	26	61	96	11	46
108	23	58	93	8	43	78	113	28	63	98	13	48	83	118	33	68	103	18	53	88	3	38	73

2. n 奇數或 m_1、m_2 至少有一偶數：

以環[120,25,18]為例，其中 $d_1=5$，$d_2=6$，$m_1'=5$，$m_2'=3$，$n'=4$。f(120,25,18)=3

0	25	50	75	100	5	30	55	80	105	10	35	60	85	110	15	40	65	90	115	20	45	70	95
18	43	68	93	118	23	48	73	98	3	28	53	78	103	8	33	58	83	108	13	38	63	88	113
36	61	86	111	16	41	66	91	116	21	46	71	96	1	26	51	76	101	6	31	56	81	106	11
54	79	104	9	34	59	84	109	14	39	64	89	114	19	44	69	94	119	24	49	74	99	4	29
72	97	2	27	52	77	102	7	32	57	82	107	12	37	62	87	112	17	42	67	92	117	22	47

五、gcd(n , m_1 , m_2 , … , m_k) = 1 , f(n , m_1 , m_2 , … , m_k)的上下界探討

(一)絕對上界與絕對下界

定理八：$2 \leq f(n,m_1,m_2,\ldots,m_k) \leq 2k+1$

證明八：

1. 1 色明顯無法完成構造，所以 $f(n,m_1,m_2,\ldots,m_k)\geq 2$

且易知當 n 偶數且 $m_1, m_2 , \ldots , m_k$ 皆奇數時，

環[$n , m_1 , m_2 , \ldots , m_k$]可用 2 色構造：$\overline{12}_{n/2}$

2.設環[$n,1,m_2,\ldots,m_k$]能用 2k+1 色塗完的最大頂點數為 n^*

若 $n^*< n$, 則必可找到尚未塗色的點 V。

因 V 最多只與 2k 個點異色，所以可在原有 2k+1 種色中找到合適的顏色塗上，

此時能用原來 2k+1 色塗完的頂點數 $> n^*$(矛盾)

即 $n^*= n$，得證 $f(n,m_1,m_2,\ldots,m_k) \leq 2k+1$

且當 $n=2k+1$, $\{m_1, m_2 , \ldots , m_k\} = \{1,2,\ldots,k\}$時，環[$n , m_1 , m_2 , \ldots , m_k$]的所有點皆異色，須用 2k+1 色構造。

(二)符合某整數分類規則的上界

定理九：$p,a\in N$, 當 $n\equiv a \pmod p$且 $m_i\not\equiv a \pmod p$, $\forall i\in\{1,2,3,\ldots,k\}$，則 $f(n,m_1,m_2,\ldots,m_k)\leq p$

證明九：

令 $n=pq+a$

可用 p 色構造環[$n , m_1 , m_2 , \ldots , m_k$]：$\overline{123\ldots p}_q 12\ldots a$

若兩同色頂點相距 b，則必符合 $b\equiv 0$或 $a \pmod p$

得證 $f(n,m_1,m_2,\ldots,m_k)\leq p$

(三)m_1、m_2、…、m_k 中至少有一個與 n 互質的上、下界

不失一般性設 $\gcd(n,m_1)=1$，則環[$n,m_1,m_2,\ldots,m_k$]可同義於環[$n,1,m_2',\ldots,m_k'$]，其中 $m_i\equiv m_i'm_1 \pmod n$ ($2\leq i\leq k$)，此時 $f(n,m_1,m_2,\ldots,m_k)=f(n,1,m_2',\ldots,m_k')$。為方便討論起見，以下直接當成討論環[$n,1,m_2,\ldots,m_k$]，且設定 $m_i\leq n/2$ ($2\leq i\leq k$)。

先討論某些特殊情況下的下界，並寫成定理十

定理十：當有兩正整數 i,j($k \ge i, j \ge 2$)，使 $n=2m_i+m_j$ 時($m_i>m_j$)且

$3\nmid[(m_i-m_j)/\gcd(m_i,m_j)] \Rightarrow f(n,1,m_2,m_3,\ldots,m_k)\ge 4$

證明十：

由定理二知此時 $f(n,1,m_2,m_3,\ldots,m_k)\ge 3$，不失一般性假設 i=2、j=3

假設以三色可以完成塗色，在 n 環中頂點編號 n 填上色值 1

頂點編號 m_2 可填 2 或 3，不失一般性，填 2，則編號 $2m_2$ 必填 3。

在編號 m_2+m_3 的點，因和編號 n 距離 m_2，和編號 m_2 距離 m_3，所以必須填 3

同理，編號 m_2 的點填入色值 2，編號 m_2+2m_3 的點填入色值 1

由此可知，與自己頂點編號相差 m_2-m_3 的點與自己的色值相同。

若能找到s,t為正整數使$(m_2-m_3)s=(2m_2+m_3)t+m_2$ 成立時。

則代表有兩相距 m_2 點塗上相同顏色，與條件矛盾，於是可知 $f(n,1,m_2,m_3,\ldots,m_k)\ge 4$

而符合此情況的條件為：$3\nmid[(m_2-m_3)/\gcd(m_2,m_3)]$

1. $(m_2-m_3)s=(2m_2+m_3)t+m_2 \Leftarrow 3\nmid[(m_2-m_3)/\gcd(m_2,m_3)]$
   令 $m_2/\gcd(m_2,m_3)=m_2'$，$m_3/\gcd(m_2,m_3)=m_3'$
   由條件可知 $\gcd(m_2'-m_3',3)=1$
   因 $\gcd(m_2'-m_3',m_2')=1$
   $\Rightarrow \gcd(m_2'-m_3',3m_2')=1$
   $\Rightarrow \gcd(m_2'-m_3', 2m_2'+m_3')=1$
   又因 $\gcd(m_2'-m_3', m_2')=1$
   必可找到正整數 s,t 滿足$(m_2'-m_3')s=(2m_2'+m_3')t+m_2'$，兩邊同乘 $\gcd(m_2,m_3)$
   $\Rightarrow (m_2-m_3)s=(2m_2+m_3)t+m_2$
2. $(m_2-m_3)s=(2m_2+m_3)t+m_2 \Rightarrow 3\nmid[(m_2-m_3)/\gcd(m_2,m_3)]$
   令 $m_2/\gcd(m_2,m_3)=m_2'$，$m_3/\gcd(m_2,m_3)=m_3'$
   得$(m_2'-m_3')s=(2m_2'+m_3')t+m_2'$
   因 $\gcd(m_2'-m_3',m_2')=1$
   所以 $\gcd(m_2'-m_3', 2m_2'+m_3')=1$
   $\Rightarrow \gcd(m_2'-m_3', 3m_2')=1$
   $\Rightarrow \gcd(m_2'-m_3',3)=1$
   $\Rightarrow 3\nmid[(m_2-m_3)/\gcd(m_2,m_3)]$

在討論完上面的狀況後，我們再來討論一般情況下的下界

以環[17,1,3,8]為例，列出下圖：

環 初始點號	01020304050607080910111213141516 17
前進 3 點號	010203040506070809101112131415161 7010203
前進 8 點號	0102030405060708091011121314151617010203040506070 8

若要成功構造環[17,1,3,8]，須滿足下列三條件：

1.環初始點號對到陰影部分(以下稱 A 區)的點號不能同色

2.環初始點號對到有框部分(以下稱 B 區)的點號不能同色

3.環的相鄰點異色(包含尾、頭兩點 17 與 01)

定理十一：n 為奇數，$\{m_2, m_3, \ldots, m_k\}$中最大數為 M，最大奇數為 M_O，最小偶數為 m_e。

設 $n_s = \left\lfloor \frac{M}{m_e} \right\rfloor + 1$, $r = n - m_e n_s \left\lfloor \frac{n}{m_e n_s} \right\rfloor$, $n_r = \left\lfloor \frac{r}{m_e} \right\rfloor$

1.m_i 皆奇數

(1)若 $\frac{n}{M_O} \geq 3$，則 $f(n, 1, m_2, \ldots, m_k) = 3$

(2)若 $\frac{n}{M_O} < 3$，則 $f(n, 1, m_2, \ldots, m_k) \leq 4$

2. m_i 奇數、偶數皆有

(1) $r = 0$ 時，則 $f(n,1,m_2,\ldots,m_k) \leq 2n_s$

(2) $r > 0$ 時

①不存在奇數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$

•若 $r \geq m_e$，則 $f(n,1,m_2,\ldots,m_k) \leq 2n_s$

•若 $r < m_e$，則 $f(n,1,m_2,\ldots,m_k) \leq 2n_s + 1$

②若存在奇數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$，若 m 中有符合
$A_i = 2p - 1 (1 \leq p \leq m_e/2)$，$B_i = r - A_q - 1 (1 \leq q \leq m_e/2)$
使 $m = A_k + B_m (1 \leq k, m \leq m_e/2)$則需要 $2n_s + 2n_r$ 色，
若無 m 符合以上條件，則需 $2n_s + n_r$ 色。

證明十一：

1.m_i 皆奇數

(1)$\frac{n}{M_O} \geq 3$ 時

設 m 為小或等於 n/3 的最大奇數，利用定理五之一證明過程 2.(1)(2)的方法

可用 3 色構造出環[n,1,m]。此時環[n,1,m]也會滿足環$[n,1,m_2,\ldots,m_k]$結構。

(2)$\frac{n}{M_O} < 3$ 時

設 m = (n-1)/2，利用定理五之一證明過程 2.(1)(2)的方法用 3 色構造 n 環。此時環初始點號中 1 除外的部分奇數號對上 A 區的偶數點號會同色，只須將環在 3~n/2 範圍內的奇數點號換上第 4 色即可完成環[n,1,m_2,...,m_k]構造。

2.m_i 奇數、偶數皆有

n 環從第 1 點開始，每 m_e 個點看成一節，最後 1 節不一定是 m_e 個點，第 1 節塗上$\overline{12}$，第 2 節塗上$\overline{34}$，第 3 節塗上$\overline{56}$，...，第 n_s 節塗上 $\overline{(2n_s-1)(2n_s)}$，第 n_s+1 節開始再重複第 1 節開始的塗法，第 $2n_s$+1 節開始再重複第 1 節開始的塗法，...，一直持續到塗完所有點，共用 $2n_s$ 色。此時對所有偶數 m_i 而言，環初始點號在 A、B 兩區皆不會對到同色。而對所有奇數 m_i 而言，環初始點號在 A 區皆不會對到同色。

(1) r = 0 時

因$m_e\left\lceil\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m_e}}\right\rceil \geq m_e\cdot\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m_e}}$ = M ≥ 所有奇數 m_i，即對所有奇數 m_i 而言，環初始點號在 B 區不會對到同色。又此時環的尾、頭接點是異色。所以 $2n_s$ 色可完成環[n,1,m_2,...,m_k]的構造。

(2) r > 0 時

①若不存在奇數 m_i 使$|m_i-r|<m_e$，則對所有奇數 m_i 而言，環初始點號在 B 區不會對到同色。

•若 r≥m_e，則環的尾、頭接點是異色。所以 $2n_s$ 色可完成環[n,1,m_2,...,m_k]

•若 r<m_e，則環的尾、頭接點是同色，須將尾點換上新的 1 色。所以 $2n_s$+1 色可完成環[n,1,m_2,...,m_k]

②若存在奇數 m_i 使$|m_i-r|<m_e$，則環初始點號從第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節到最後 1 節內都有點在 B 區會對到同色，若在第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節其中有偶數點號和第一區的奇數點號相距 m 格，則該兩格不可換成同一顏色。須再將第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節的的偶數點號換上新的第 1 種顏色與第 1 節的奇數點號換上

新的第 2 種顏色，第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+2)節的偶數點號換上新的第 3 種顏色`與第 2 節的奇數點號換上新的第 4 種顏色，一直持續到最後一節的偶數點號換上新的第 $2n_r$−1 種顏色與第 n_r 節的奇數點號換上新的第 $2n_r$ 種顏色。此時環的尾、頭會異色。所以 $2n_s$+$2n_r$ 色可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。若無 m 符合上述條件，則將第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節的的偶數點號與第 1 節的奇數點號換上新的同樣第 1 種顏色，將第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+2)節的的偶數點號與第 2 節的奇數點號換上新的同樣第 2 種顏色，一直持續到最後一節的偶數點號與第 n_r 節的奇數點號換上新的同樣第 n_r 種顏色，此時頭尾必異色。

所以 $2n_s$+n_r 色即可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。

定理十二：n 為偶數，{m_2 , m_3 , … , m_k}中最大偶數為 M_e，最小偶數為 m_e。

設 n_s =($\left\lceil\frac{M_e}{m_e}\right\rceil+1$) , r = $n-m_e n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$, n_r =$\left\lceil\frac{r}{m_e}\right\rceil$

1.m_i 皆奇數，則 f(n,1,m_2,…,m_k) = 2

2.m_i 皆偶數

(1) r = 0 時，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤n_s+1

(2) r > 0 時

①若不存在偶數 m_i 使$|m_i-r|<m_e$，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤n_s+1

②若存在偶數 m_i 使$|m_i-r|<m_e$，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤n_s + n_r + 1

3.m_i 奇數、偶數皆有

(1) r = 0 時，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤2n_s

(2) r > 0 時

①若不存在偶數 m 使$|m_i-r|<m_e$，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤2n_s

②若存在偶數 m_i 使$|m_i-r|<m_e$

若 m 中有符合 A_i=$2p$(1≤ $p\le m_e/2$)，B_i=r-A_q+1(1≤ $q\le m_e/2$)

使 m=A_m+B_k(1≤ $k,m\le m_e/2$)，則需要 $2n_s$+$2n_r$ 色，

若無 m_i 符合上述條件，則需 $2n_s$+n_r 色

證明十二：

1.m_i 皆奇數

造 n 環 = $\overline{12}_{n/2}$

2.m_i 皆偶數

n 環從第 1 點開始，每 m_e 個點看成一節，最後 1 節不一定是 m_e 個點，第 1~n_s 節顏色由$\overline{12}$、$\overline{23}$、$\overline{34}$、$\overline{\mathrm{n_s}(\mathrm{n_s}+1)}$中適當選取相異，使前一節尾與後一節頭能異色相接，且第$\left\lceil\frac{r}{m_e}\right\rceil$節尾與第 1 節頭亦能異色相接。第 n_s+1 節開始再重複第 1 節開始的塗法，第 2n_s+1 節開始再重複第 1 節開始的塗法，…，一直持續到塗完所有點，共用 n_s + 1 色。此時環初始點號在 A 區皆不會對到同色且環的尾、頭接點是異色。

(1) r = 0 時

因$m_e\left\lceil\frac{\mathrm{M_e}}{\mathrm{m_e}}\right\rceil \geq m_e\cdot\frac{\mathrm{M_e}}{\mathrm{m_e}}$ = Me ≥ 偶 m_i (i=1,2,…,k)

所以環初始點號在 B 區不會對到同色。即 n_s+1 色可完成環[n,m_1,m_2,…,m_k]的構造。

(2) r > 0 時

①若不存在偶數 m_i 使$|m_i-r|<m_e$，則環初始點號在 B 區不會對到同色，所以 n_s+1 色可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。

②若存在偶數 m_i 使$|m_i-r|<m_e$，則環初始點號從第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節到最後 1 節內都有點在 B 區會對到同色，須將第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節的的奇數點號與第 1 節的偶數點號換上新的第 1 種顏色，第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+2)節的奇數點號與第 2 節的偶數點號換上新的第 2 種顏色，一直持續到最後一節的偶數點號與第 n_r 節的奇數點號換上新的第 n_r 種顏色。所以 n_s+n_r+1 色可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。

3.m_i 奇數、偶數皆有

修改 2.中第 1~n_s 節顏色為$\overline{12}$ ，$\overline{34}$ ，$\overline{56}$ ，… ，$\overline{(2\mathrm{n_s}-1)(2\mathrm{n_s})}$，共用 2$n_s$ 色。此時環初始點號在 A 區皆不會對到同色且環的尾、頭接點是異色。

(1) r = 0 時

由上 2.(1)知$m_e\left\lceil\frac{\mathrm{M_e}}{\mathrm{m_e}}\right\rceil \geq$ 所有偶數 m_i，即對所有偶數 m_i 而言，環初始點號在

B 區不會對到同色。又對所有奇數 m_i 而言，環初始奇數點號在 B 區會對偶數點號，環初始偶數點號在 B 區會對奇數點號，此時環初始點號在 B 區也不會對到同色。所以 $2n_s$ 色可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。

(2) r > 0 時

①若不存在偶數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$，則環初始點號在 B 區不會對到同色，所以 $2n_s$ 色可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。

②若存在偶數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$，則環初始點號從第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節到最後 1 節內都有點在 B 區會對到同色，若在第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節其中有奇數點號和第一區的偶數點號相距 m 格，則該兩格不可換成同一顏色。須再將第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節的的奇數點號換上新的第 1 種顏色與第 1 節的偶數點號換上新的第 2 種顏色，第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+2)節的奇數點號換上新的第 3 種顏色與第 2 節的偶數點號換上新的第 4 種顏色，一直持續到最後一節的奇數點號換上新的第 $2n_r-1$ 種顏色與第 n_r 節的偶數點號換上新的第 $2n_r$ 種顏色。此時環的尾、頭沒動到，會繼續異色。而環中同色點皆相距偶數，即滿足相距奇數 m_i 的點會異色。所以 $2n_s+2n_r$ 色可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。若無 m 符合上述條件，則將第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+1)節的奇數點號與第 1 節的偶數點號換上新的同樣第 1 種顏色，將第($n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$+2)節的的奇數點號與第 2 節的偶數點號換上新的同樣第 2 種顏色，一直持續到最後一節的奇數點號與第 n_r 節的偶數點號換上新的同樣第 n_r 種顏色，此時頭尾必異色。所以 $2n_s+n_r$ 色即可完成環[n,1,m_2,…,m_k]的構造。

(四)m_1、m_2、…、m_k 皆不與 n 互質的上界

定理十三：m_1、m_2、…、m_k 皆不與 n 互質，{ m_1,m_2, m_3, … , m_k}中最大數為 M，最小數為 m。設 n_s =($\left\lceil\frac{M}{m}\right\rceil + 1$) , r = $n - mn_s\left\lfloor\frac{n}{mn_s}\right\rfloor$, n_r =$\left\lceil\frac{r}{m}\right\rceil$

1.若 n 偶數且 m_i 皆奇數，則 f(n , m_1, m_2, … , m_k) = 2

2.不滿足 1.的條件下

(1) $r = 0$ 時，則 $f(n , m_1 , m_2 , \ldots , m_k) \le n_s$

(2) $r > 0$ 時

①不存在 m_i 使 $|m_i - r| < m$

•若 $r \ge m$，則 $f(n , m_1 , m_2 , \ldots , m_k) \le n_s$

•若 $r<m$，則 $f(n , m_1 , m_2 , \ldots , m_k) \le n_s+1$

②若存在 m_i 使 $|m_i - r| < m$，則 $f(n , m_1 , m_2 , \ldots , m_k) \le n_s + n_r$

證明十三：

1.若 n 偶數且 m_i 皆奇數，構造 n 環 $= \overline{12}_{n/2}$

2.不滿足 1.的條件下

n 環從第 1 點開始，每 m 個點看成一節，最後 1 節不一定是 m 個點。第 1 節塗上$\overline{1}$，第 2 節塗上$\overline{2}$，第 3 節塗上$\overline{3}$，…，第 n_s 節塗上$\overline{n_s}$。第 n_s+1 節開始再重複第 1 節開始的塗法，第 $2n_s+1$ 節開始再重複第 1 節開始的塗法，…，一直持續到塗完所有點，共用 n_s 色。此時環初始點號在 A 區不會對到同色。

(1) $r = 0$ 時，因 $m\left\lceil\frac{M}{m}\right\rceil \ge m\cdot\frac{M}{m} = M \ge m_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$

所以環初始點號在 B 區不會對到同色。又此時環的尾、頭相接兩點異色。

所以 n_s 色可完成環$[n,m_1,m_2,\ldots,m_k]$的構造。

(2) $r > 0$ 時

①若不存在 m_i 使 $|m_i - r| < m$，則環初始點號在 B 區不會對到同色

•當 $r>m$ 時

環的尾、頭接點會是異色，所以 n_s 色可完成環$[n,m_1,m_2,\ldots,m_k]$的構造。

•當 $r \le m$ 時

環的尾、頭接點會是同色，須再將最後 1 節的每一點全換上新加的 1 色才行。所以 n_s+1 色可完成環$[n,m_1,m_2,\ldots,m_k]$的構造。

②若存在 m_i 使 $|m_i - r| < m$，則環初始點號從第$(n_s\left\lfloor\frac{n}{mn_s}\right\rfloor+1)$節到最後 1 節內都有點在 B 區會對到同色，須再將第$(n_s\left\lfloor\frac{n}{mn_s}\right\rfloor+1)$節的所有點換上新的第 1 色，第$(n_s\left\lfloor\frac{n}{mn_s}\right\rfloor+2)$節的所有點換上新的第 2 色，…，到最後 1 節的所有點換上新的第 n_r 色，共再加上 n_r 色。此時環的尾、頭接點會是異色。

所以 n_s+n_r 色可完成環$[n,m_1,m_2,\ldots,m_k]$的構造

伍、 結論

一、$f(n, m_1, m_2, \dots, m_k) = f(n/d, m_1/d, m_2/d, \dots, m_k/d)$，其中 $d=\gcd(n, m_1, m_2, \dots, m_k)$。

所以下面結論皆設定 d=1。

二、$\gcd(n,m)=1$

(一)若 n 偶數，則$f(n,m)=2$

(二)若 n 奇數，則$f(n,m)=3$

三、$\gcd(n, m_1, m_2)=1$

(一)m_1、m_2 有一與 n 互質(設為 m_1)，則存在滿足$m_2 \equiv mm_1 (mod\ n)$的正整數 m ($1 \le m < n$)，將 $f(n,m_1,m_2)$轉換成計算 $f(n,1,m)$

1. n 偶數且 m 奇數 $\Leftrightarrow f(n,1,m)=2$

2. $f(5,1,2) = f(5,1,3) = 5$

3.若$3 \nmid n$且 $n \neq 5$，則$f(n,1,2)=f(n,1,n-2)=4$

4.若 n 奇數且$3 \nmid n$且 $n \neq 5$，則$f(n,1,(n-1)/2)=f(n,1,(n+1)/2)=4$

5. $f(13,1,5)=4$

6.排除 1~5 的情形，$f(n,1,m)=3$

(二)m_1、m_2 皆不與 n 互質

1. n 偶數且 m_1、m_2 皆奇數 $\Leftrightarrow f(n, m_1, m_2)=2$

2.不滿足 1 的條件，$f(n, m_1, m_2)=3$

四、$\gcd(n,m_1,m_2,\dots,m_k)=1$

(一)$2 \le f(n,m_1,m_2,\dots,m_k) \le 2k+1$

(二)$p,a \in N$, 當 $n \equiv a \pmod p$且 $m_i \not\equiv a \pmod p$, $\forall i \in \{1,2,3,\dots,k\}$，則 $f(n,m_1,m_2,\dots,m_k) \le p$

(三)當 $n=2m_i+m_j$ 時($m_i>m_j$)且 $3 \nmid [(m_i-m_j)/\gcd(m_i,m_j)] \Rightarrow f(n,1,m_2,m_3,\dots,m_k) \ge 4$

(四) n 奇數，$\{m_2, m_3, \dots, m_k\}$中最大數為 M，最大奇數為 M_O，最小偶數為 m_e

設 $n_s = \left\lfloor \frac{M}{m_e} \right\rfloor + 1$，$r = n - m_e n_s \left\lfloor \frac{n}{m_e n_s} \right\rfloor$，$n_r = \left\lfloor \frac{r}{m_e} \right\rfloor$

1.m_i 皆奇數：

(1)若 $\frac{n}{M_O} \geq 3$，則 f(n , 1 , m_2 , … ,m_k) = 3

(2)若 $\frac{n}{M_O} < 3$，則 f(n , 1 , m_2 , … , m_k)≤4

2. m_i 奇數、偶數皆有

(1) r = 0 時，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤2n_s

(2) r > 0 時

①不存在奇數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$

•若 r≥m_e，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤ 2n_s

•若 r<m_e，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤ 2n_s + 1

②若存在奇數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$

i.若 m 中有符合 A_i=$2p-1$(1≤ $p \leq m_e/2$)，B_i=r-A_q-1(1≤ $q \leq m_e/2$)

使 m=A_k+B_m(1≤ $k, m \leq m_e/2$)，則需要 2n_s+2n_r 色，

ii.若無 m 符合以上條件，則需 2n_s+n_r 色。

(五) n 偶數，{m_2 , m_3 , … , m_k}中最大偶數為 M_e，最小偶數為 m_e。

設 n_s =($\left[\frac{\mathrm{M_e}}{\mathrm{m_e}}\right] + 1$) , r = $n - m_e n_s \left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$, n_r =$\left[\frac{r}{m_e}\right]$

1.m_i 皆奇數，則 f(n,1,m_2,…,m_k) = 2

2.m_i 皆偶數

(1) r = 0 時，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤n_s+1

(2) r > 0 時

①若不存在偶數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤n_s+1

②若存在偶數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤n_s + n_r + 1

3. m_i 奇數、偶數皆有

(1) r = 0 時，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤2n_s

(2) r > 0 時

①若不存在偶數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$，則 f(n,1,m_2,…,m_k) ≤2n_s

②若存在偶數 m_i 使$|m_i - r| < m_e$

i. m 中有符合 A_i=$2p$(1≤ $p \leq m_e/2$)，B_i=r-A_q+1(1≤ $q \leq m_e/2$)

使 m=A_m+B_k(1≤ $k, m \leq m_e/2$)，則需要 2n_s+2n_r 色。

ii. 若無 m 符合上述條件，則需 $2n_s+n_r$ 色

(六)m_1、m_2、…、m_k 皆不與 n 互質，{ $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$}中最大數為 M，最小數為 m

設 $n_s = (\left\lceil \frac{M}{m} \right\rceil + 1)$, $r = n - mn_s \left\lfloor \frac{n}{mn_s} \right\rfloor$, $n_r = \left\lceil \frac{r}{m} \right\rceil$

1.若 n 偶數且 m_i 皆奇數，則 $f(n, m_1, m_2, \dots, m_k) = 2$

2.不滿足 1.的條件下

(1) r = 0 時，則 $f(n, m_1, m_2, \dots, m_k) \le n_s$

(2) r > 0 時

①不存在 m_i 使$|m_i - r| < m$

•若 $r \ge m$，則 $f(n, m_1, m_2, \dots, m_k) \le n_s$

•若 $r < m$，則 $f(n, m_1, m_2, \dots, m_k) \le n_s+1$

②若存在 m_i 使$|m_i - r| < m$，則 $f(n, m_1, m_2, \dots, m_k) \le n_s + n_r$

陸、 未來展望

一、求出 $f(n,m_1,m_2,m_3)$

二、估出 $f(n,m_1,m_2,\dots,m_k)$下界或更精密的上、下界以幫助找到 $f(n,m_1,m_2,\dots,m_k)$的解答

柒、 參考資料

一、除法原理(2007 年 6 月 28 日)

https://math.ntnu.edu.tw/~li/ent-html/node4.html

二、歐幾里得及其輾轉相除法(2007 年 11 月)

https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/1011.pdf

三、完全剩餘系(2018 年 7 月 5 日)

https://baike.baidu.com/item/%E5%AE%8C%E5%85%A8%E5%89%A9%E4%BD%99%E7%B3%BB

四、貝祖定理(2019 年 1 月 9 日)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%B2%9D%E7%A5%96%E7%AD%89%E5%BC%8F

五、圖論：如何錯誤地證明四色定理(2018 年 3 月 4 日)

https://www.bilibili.com/read/cv267681/

【評語】050412

本作品探討在正多邊形的頂點塗上顏色的問題；在規定距離的頂點給予不同的顏色。若是轉換成圖的語言，這樣的問題是循環圖的點著色問題：Chromatic number of circulant graphs。當規定的距離數比較多的時候，這是一個非常困難的問題；這也是為什麼本作品只能夠得到適當上下界的原因。未能適當應用圖的性質，使得作品的內容變得十分複雜，結果雖然不是非常令人滿意，但也是有一些具體的成果。

作品海報

摘要

本科展作品在研究正N邊形的頂點塗色，定義相鄰兩頂點的距離為1，先設定距離m，規定若兩頂點相距m則塗不同色，求塗完N個頂點的最少色數。當只設定1個m時，我們研究出最少色數只有2與3兩種，並清楚區分出對應條件。而設定兩個m時，我們研究出最少色數有2，3，4，5等四種，同樣清楚區分出對應條件。最後推廣到設定k個m時，我們證出最少色數的絕對下界為2，絕對上界為2k+1。並以N、m的奇偶性細分各情況來做出更精密的上界估計。

研究目的

一、圓上有n個點，規定相鄰兩點距離1，限定相距m的兩點異色，將所有點都塗上顏色的最少塗色數為何？

二、若限定相距m_1、m_2的兩點異色，最少塗色數為何？

三、若限定相距m_1、m_2、…、m_k的兩點異色，最少塗色數的上、下界估計。

研究過程及方法

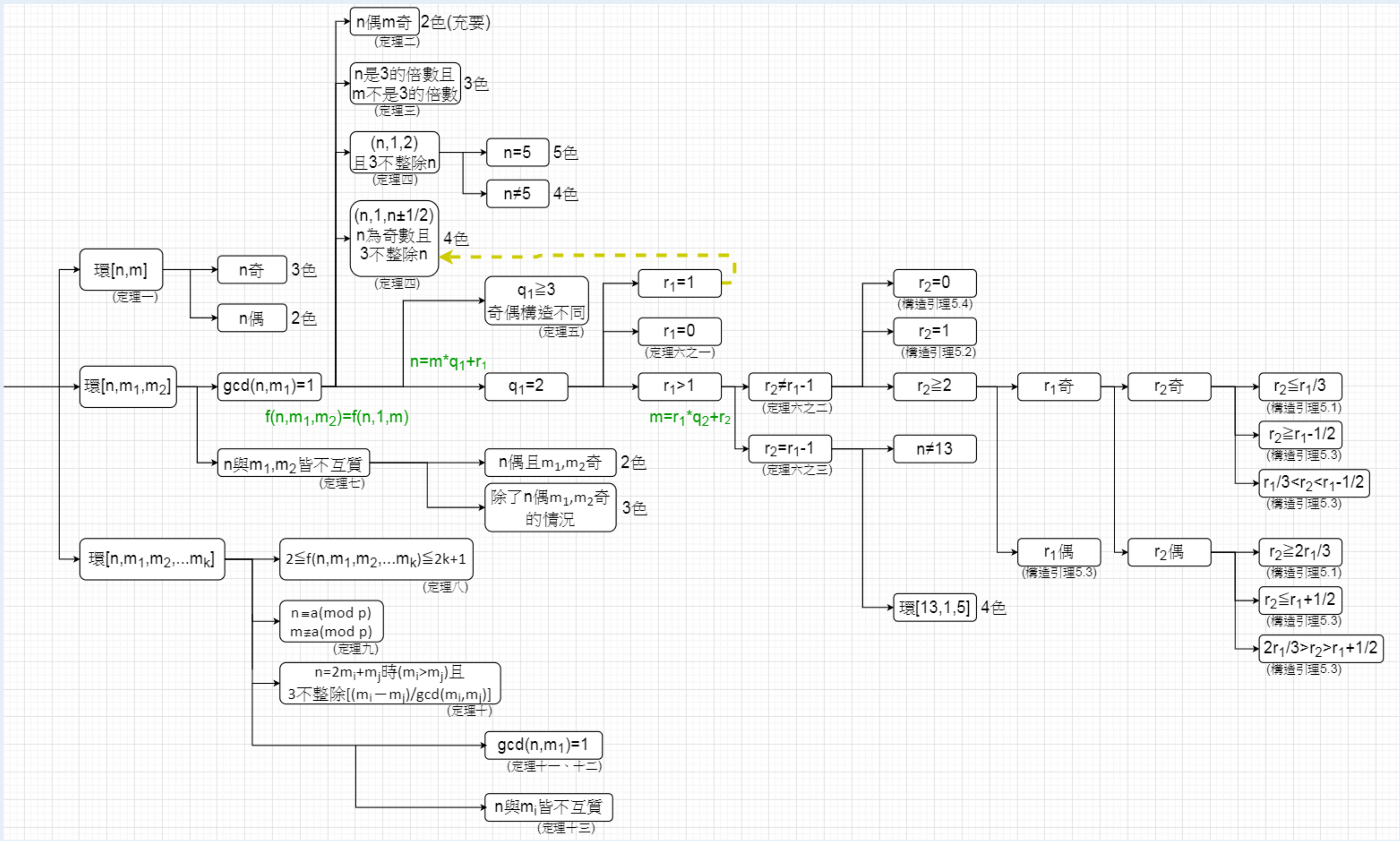
一、圓上n點，每點塗上一色，稱為n環。限定相距m_1、m_2、… 、m_k的兩點異色，稱為環[n , m_1, m_2, … , m_k]。

此時最少塗色數定義為*f*(n , m_1, m_2, … , m_k)。環上每點V_i上的顏色以數字1,2,3,…表示。

二、由引理二知 *f*(n , m_1, m_2, … , m_k) = *f*(n/d , m_1/d , m_2/d , … , m_k/d)，其中d=gcd(n , m_1, m_2, … , m_k)。所以底下直接設gcd(n , m_1, m_2, … , m_k)=1。

除突顯結論或部分證明的需要，我們皆設$m_i \le n/2$。

三、以樹狀圖呈現我們的研究架構與結論：



四、求$f(n,m)$

(一)引理3：

n環$< V_i >_{i=0}^{n-1}$中由V_0開始，每次前進m，則會把每個點都先走過一次後再回到V_0。即環$[n,m]$會同義於環$[n,1]$。

(二)定理一：

1.若n偶數，則$f(n,m)=2$。環$[n,1]$：$\overline{12}_{n/2}$

2.若n奇數，則$f(n,m)=3$。環$[n,1]$：$\overline{12}_{(n-1)/2}3$

五、gcd(n,m_1)=1，求$f(n,m_1,m_2)$

(一)由引理4.1知，直接討論$f(n,1,m)$即可。

引理4.1：

若$\gcd(n,m_1)=1$，則存在正整數m (1≤m<n)

滿足$m_2 \equiv mm_1 (mod\ n)$，使環$[n,m_1,m_2]$同義於環$[n,1,m]$。

(二)定理二：n偶數且m奇數⇔ $f(n,1,m)=2$

(三)定理三：

若n、m不滿足定理二的條件且n是3的倍數，m不是3的倍數，

則$f(n,1,m)=3$。n環：$\overline{123}_{n/3}$

(四)定理四：

若n、m不滿足定理二、三的條件

1. m=2 , n−2

(1)$f(5,1,2)=f(5,1,3)=5$

(2) n≠5時，$f(n,1,2)=f(n,1,n-2)=4$

2. m = (n ± 1)/2

(1)n為奇數且n≠5時，$f\left(n,1,\frac{n-1}{2}\right)=f\left(n,1,\frac{n+1}{2}\right)=4$

(五)定理四.1結論可由引理4.2轉換為定理四.2結論

引理4.2：若$mm' \equiv \pm 1 (mod\ n)$，則$f(n,1,m)$=$f(n,1,m')$

證明4.2：1.$mm' \equiv 1(mod\ n)$時，環$[n,m,1]$同義於環$[n,1,m']$

2.$mm' \equiv -1(mod\ n)$時，$m(n-m') \equiv 1(mod\ n)$

由1.知$f(n,1,m)$=$f(n,1,n-m')$

故$f(n,1,n-m')=f(n,1,m')$

(六)定理五：

若n、m不滿足定理二~四的條件且$n=m\times q_1+r_1$ (q_1 ≥3)

則$f(n,1,m)$ =3

用例子說明我們的構造方式

1.n奇數且m奇數(n=25,m=7)

環初始色值 1212121 2121212 1212121 2121

前進 7 色值 1212121 2121212 1212121 2121121 2121

(初始色值頭 7 個)

2.n奇數且m偶數(n=29,m=8與n=35,m=8)

環初始色值 12121212 31212123 12121212 31212

前進 8 色值 12121212 31212123 12121212 31212121 21212

(初始色值頭 8 個)

環初始色值 12121212 31212123 12121212 31212123 121←與第一點同色

前進 8 色值 12121212 31212123 12121212 31212123 12112121 212 須調成 3

(初始色值頭 8 個)

3. n偶數且m偶數(n=46,m=8)

環[46,1,8]:

環初始色值 12323231 23131312 31212123 23131312 31212123 231313

前進 8 色值 12323231 23131312 31212123 23131312 31212123 23131312 323231

(初始色值前 8 個)

(七)定理六：

若n、m不滿足定理二~四的條件(即$r_1 \neq 1$)，$n=2m+r_1$

則：1.$f(13,1,5)=4$

2.除(1)外的所有情形，$f(n,1,m)$ =3

證明六之一：

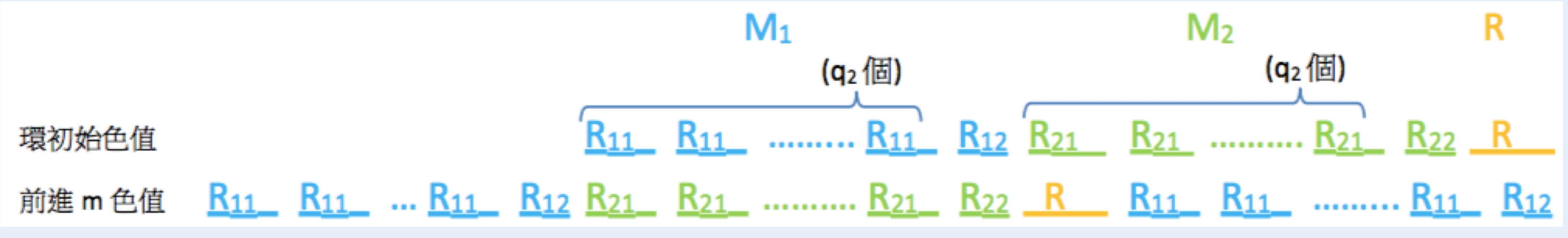
以下將情況分為$r_1=0,1$和$r_1>1$

1. $r_1=0$ ，環[n,1,m]=$\overline{12}_{m/2}3\overline{12}_{(m-2)/2}3$

2. $r_1=1$ ，在定理四結論2已討論

3. $r_1>1$ ，設 n = $2m+r_1$ ，m = $r_1 \times q_2+r_2$

先引入兩個重要的構造法引理5.1與5.3



引理5.1：若n、m不滿足定理二~四的條件$r_2>2$且可找到兩同色點相距r_2-1的不大於3色構造環$[r_1,1,r_2]$，則$f(n,1,m)=3$

構造5.1：將不大於3色構造的環$[r_1,1,r_2]$直接取出排成R_{11}，同時調整兩同色點對應的色值於第1位與第r_2位。不失一般性令R_{11}頭、尾的色值分別為1,2，即R_{11}=1…2，則R_{12}=1…1。且令$R_{21}=R_{11}+1 \pmod 3$且$R=R_{11}$，即可成功構造。

引理5.2：r_2=1時，引理5.1中用到的環$[r_1,1,r_2]$不須具備兩同色點相距r_2-1的條件。

引理5.3：若n、m不滿足定理二~四的條件

$r_2>1$且可找到兩同色點相距r_2的不大於3色構造環$[r_1,1]$

使第i點色值對應到第i + r_2點色值符合x→ x或x-1，則$f(n,1,m)=3$

構造5.3：將不大於3色構造的環$[r_1,1]$直接取出排成R_{11}，使第i點色值對應到第i + r_2點色值符合x→x或x-1，同時將兩同色點的色值置於第r_2位與第r_1位。

不失一般性令R_{11}頭、尾的色值分別為1 , 2，即R_{11}=1…2，則

R_{12}=1…2。令$R_{21}=R_{11}+2 \pmod 3$且$R=R_{11}+1 \pmod 3$，成功構造出環$[n,1,m]$。

引理5.4：r_2=0時，引理5.3中用環$[r_1,1]$不須具備兩同色點相距r_2的條件。

證明六之二：$r_2\neq r_1-1$

1. r_2 = 0時，由引理5.4可得

2. r_2 = 1時，由引理5.2可得

3. $r_2\geq2$時

(1)r_1奇數且r_2奇數

①$r_2\leq r_1/3$

將定理五之一中構造$[n,1,m]$方法的n代入現在的r_1，m代入現在的r_2，r_1代入現在的r_1除以r_2的餘數，且此時第2節的頭尾同色且相距 r_2-1，由引理5.1得證。

②$r_2\geq(r_1-1)/2$

3色構造環$[r_1,1]$：$\overline{32}_{(r_1-r_2)/2}\overline{12}_{(r_2-1)/2}1$

由第2+(r_1−r_2)位到第2位距離r_2且兩位同色值2。令引理5.3證明過程中R_{11}由環$[r_1,1]$的第3+(r_1−r_2)位開始排起，由引理5.3得證。

③$r_1/3<r_2<(r_1-1)/2$時

用r_2去除r_1，得商2，餘數r_3。

先3色構造兩個r_2節S_1、S_2與一個r_3節T：

$S_1=\overline{12}_{(r_2-r_3)/2}\overline{13}_{(r_3-1)/2}1$, $S_2=\overline{32}_{(r_2-1)/2}3$, $T=\overline{21}_{(r_3-1)/2}2$

再接成環$[r_1 , 1]$= S_1S_2T

第2位到第2+r_2位距離r_2且兩位同色值2。令引理5.3證明過程中R_{11}由環$[r_1,1]$的第3位開始排起，由引理5.3得證。

(2) r_1奇數且r_2偶數

設r_2'=r_1-r_2，使r_2'為奇數，將情況(2)轉變為情況(1)，再將情況(1)的r_1節構造從特定位置以逆方向重新排列並符合引理5.1和5.3的條件即可。

(3) r_1偶數且r_2偶數

構造環$[r_1 , 1]$=$\overline{12}_{r_1/2}$

因第i點色值對應到第i + r_2點色值符合x→ x

且第2位到第2+r_2位距離r_2且兩位同色值2。

由引理5.3得證。

n=93, m=39, r_1=15, r_2=9
r_1節= 323232121212121
R_{11} = 121212132323212
n環: 121212132323212 121212132323212 121212132
313131321212131 313131321232323 213131323
313131321212131 313131321212131 313131321
121212132323212 121212132323212 121212132
232323213131323
313131321212131

環[93,1,39]
應用證明六3(1)②構造R_{11}

n=109, m=45, r_1=19, r_2=7, r_3=5
r_1節= 1213131323232321212
R_{11} = 1313132323232121212
n環: 1313132323232121212 1313132323232121212 1313132
3232321212121313131 3232321212121313131 3232323
3232321212121313131 3232321212121313131 3232321
1313132323232121212 1313132323232121212 1313132
2121213131313232323
3232321212121313131

環[109,1,45]
應用證明六3(1)③構造R_{11}

n=87, m=36, r_1=15, r_2=6
r_1節=323232121212121
r_1節逆轉=123232312121212
R_{11} =121212323231212
n環: 121212323231212 121212323231212 121212
313131212123131 313131232323131 312323
313131212123131 313131212123131 313131
121212323231212 121212323231212 121212
232323131312323
313131212123131

環[87,1,36]
以構造環[93,1,39]的r_1節重新排列構造成R_{11}

證明六之三：$r_2=r_1-1$

1.r_1>3時

用3色構造環$[r_1 ,1 ,r_1-1]$ = $\overline{12}_{(r_1-3)/2}312$

且第1位與第r_1-1位同色(相距r_1-2)。由引理5.1得證。

2.r_1=3

(1) q_2=1時(n=13 , m=5)

3色無法構造環[13,1,5]:

因若以3色構造環[13,1,5]，則必有一色填入最少五個頂點， 失一般性設V_7填入色值1，由對稱性只需證明 {V_1 , V_3 , V_4 , V_5}這四點中無法選出兩點填入色值1即可。

可用4色構造環[13,1,5]=$\overline{123}_4$4。

(2) $q_2\geq2$時 (n=6q_2+7 , m=3q_2+2)

因(3q_2+2)(2q_2+3)≡ −1(mod6q_2+7)

所以由引理4.2知f(6q_2+7,1,3q_2+2)= f(6q_2+7,1,2q_2+3)

又此時r_1=2q_2+1>3且r_2 =2

由定理六之二得f(6q_2+7,1,2q_2+3)=3。

六、m_1、m_2皆不與n互質，求$f(n,m_1,m_2)$

定理七：若m_1、m_2皆不與n互質

1.n偶數且m_1、m_2皆奇數⟺f(n , m_1 , m_2)=2

2.除1.情況外，則f(n , m_1 , m_2)=3

證明七：先將n環$\langle V_i\rangle_{i=0}^{n-1}$中所有點的編號依規則排入矩陣A中

令A=$[a_{ij}]_{d_1\times d_2n'}$，其中$a_{ij}\equiv(j-1)m_1+(i-1)m_2 \pmod n$。

再依照下列方法填色

1.n偶數且m_1、m_2皆奇數：每一格交錯填入兩色。

2.其餘情況：

(1)視A中每一列為n'個d_2節，由定理一知可找到3色構造的環[d_2 , 1]填入第一列的第一節。從第二節後的每節都複製第一節的色值。

(2)在a_{11}已填下，由定理一知找到3色構造的環[d_1 , 1]填入第一行。

(3)第j行(j=2,3,…,d_2n')只要將第1行的色值對模3平移[(a_{1j}色值)−(a_{11}色值)]

n偶數且m_1、m_2皆奇數：以環[120,35,27]為例

0	35	70	105	20	55	90	5	40	75	110	25	60	95	10	45	80	115	30	65	100	15	50	85
27	62	97	12	47	82	117	32	67	102	17	52	87	2	37	72	107	22	57	92	7	42	77	112
54	89	4	39	74	109	24	59	94	9	44	79	114	29	64	99	14	49	84	119	34	69	104	19
81	116	31	66	101	16	51	86	1	36	71	106	21	56	91	6	41	76	111	26	61	96	11	46
108	23	58	93	8	43	78	113	28	63	98	13	48	83	118	33	68	103	18	53	88	3	38	73

n奇數或m_1、m_2至少有一偶數：以環[120,25,18]為例

0	25	50	75	100	5	30	55	80	105	10	35	60	85	110	15	40	65	90	115	20	45	70	95
18	43	68	93	118	23	48	73	98	3	28	53	78	103	8	33	58	83	108	13	38	63	88	113
36	61	86	111	16	41	66	91	116	21	46	71	96	1	26	51	76	101	6	31	56	81	106	11
54	79	104	9	34	59	84	109	14	39	64	89	114	19	44	69	94	119	24	49	74	99	4	29
72	97	2	27	52	77	102	7	32	57	82	107	12	37	62	87	112	17	42	67	92	117	22	47

七、f(n , m_1 , m_2 , … , m_k)的上下界探討

(一)絕對上界與絕對下界

定理八：2 ≤ f(n,m_1,m_2,…,m_k) ≤ 2k+1

證明八：

1. 1色明顯無法完成構造，且當n偶數且m_1, m_2 , … , m_k皆奇數時，環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]可用2色構造：$\overline{12}_{n/2}$

2. 設環[n,m_1,m_2,…,m_k]能用2k+1色塗完的最大頂點數為n*

若n*< n , 則可找到尚未塗色的點V。因V最多只與2k個點異色

所以可在原有2k+1種色中找到合適的顏色塗上，

此時能用原來2k+1色塗完的頂點數 > n*(矛盾)

即n*= n，得證f(n,m_1,m_2,…,m_k) ≤ 2k+1

且當n=2k+1 , {m_1, m_2 , … , m_k} = {1,2,…,k}時

環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]須用2k+1色構造。

(二)符合某整數分類規則的上界

定理九：p,a∈N , 當n≡a (mod p)且m_i≢a(mod p) ,∀i∈{1,2,3,…,k}

則f(n,m_1,m_2,…,m_k)≤p

證明九：

令n=pq+a

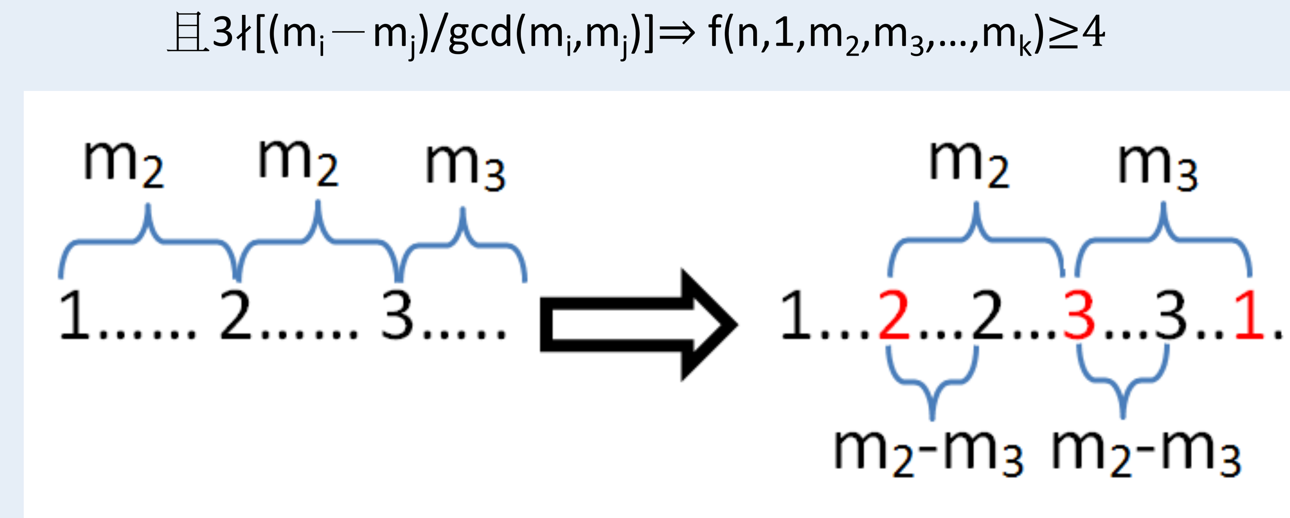
可用p色構造環[n , m_1 , m_2 , … , m_k]：$\overline{123\ldots p}_q12\ldots a$

若兩同色頂點相距b，則必符合b≡ 0或a (mod p)

得證f(n,m_1,m_2,…,m_k)≤p

定理十：當有兩正整數i,j($k\geq i,j\geq2$)，使n=2m_i+m_j時(m_i>m_j)

且3∤[(m_i−m_j)/gcd(m_i,m_j)]⇒ f(n,1,m_2,m_3,…,m_k)≥4



(三)m_1、m_2、…、m_k中至少有一個與n互質的上界

定理十一：n為奇數，{m_2, m_3, … , m_k}中最大數為M，最大奇數為M_O，最小偶數為m_e。

設$n_s=\left\lfloor\frac{M}{m_e}\right\rfloor+1$，$r=n-m_e n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$，$n_r=\left\lfloor\frac{r}{m_e}\right\rfloor$

1.m_i皆奇數

(1)若$\frac{n}{M_O}\ge 3$，則f(n , 1 , m_2, … ,m_k) = 3

(2)若$\frac{n}{M_O}<3$，則f(n , 1 , m_2, … ,m_k)≤4

2.m_i奇數、偶數皆有

(1) r = 0時，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤2n_s

(2) r > 0時

①不存在奇數m_i使$|m_i-r|<m_e$

•若r≥m_e，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤ 2n_s

•若r<m_e，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤ 2n_s + 1

②若存在奇數m_i使$|m_i-r|<m_e$，若m中有符合

$A_i=2p-1(1\le p\le m_e/2)$，$B_i=r-A_q-1(1\le q\le m_e/2)$

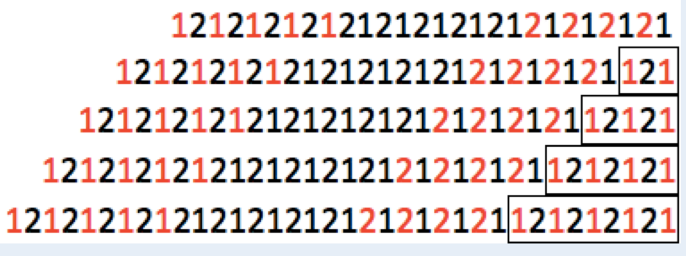
使$m=A_k+B_m(1\le k,m\le m_e/2)$則需要2$n_s$+2$n_r$色，

若無m符合以上條件，則需2n_s+n_r色。

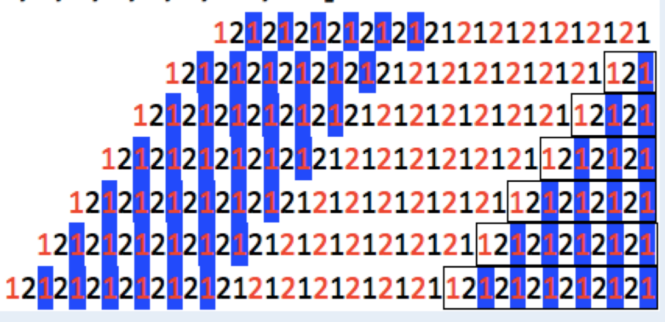
證明十一：

1.m_i皆奇數

環[27,1,3,5,7,9]



環[27,1,3,5,7,9,11,13]



2.m_i奇、偶數皆有

n環中每m_e個點看成一節，第1節塗上$\overline{12}$，第2節塗上$\overline{34}$...

第n_s節塗上$\overline{(2n_s-1)(2n_s)}$，第$n_s$+1節開始再重複第1節開始的塗法，一直持續到塗完所有點，共用2n_s色。

(1)r = 0時

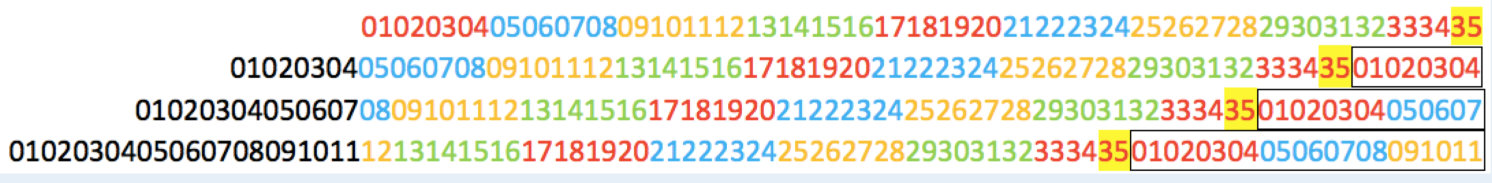
因$m_e\left\lfloor\frac{M}{m_e}\right\rfloor\ge m_e\cdot\frac{M}{m_e}$ = M，即對所有奇數m_i而言，每一區必與塗上同色區相距m_i以上。又此時環的尾、頭接點是異色。

所以2n_s色可完成環[n,1,m_2,...,m_k]的構造。

(2)r > 0時

①若不存在奇數m_i使$|m_i-r|<m_e$

環[35,1,4,5,7,11]



②若存在奇數m_i使$|m_i-r|<m_e$

環[35,1,4,5,7,11,13,15]

定理十二：n為偶數，{m_2, m_3, … , m_k}中最大偶數為M_e，最小偶數為m_e。

設$n_s=(\left\lfloor\frac{M_e}{m_e}\right\rfloor+1)$，$r=n-m_e n_s\left\lfloor\frac{n}{m_e n_s}\right\rfloor$，$n_r=\left\lfloor\frac{r}{m_e}\right\rfloor$

1.m_i皆奇數，則f(n,1,m_2,...,m_k) = 2

2.m_i皆偶數

(1) r = 0時，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤n_s+1

(2) r > 0時

①若不存在偶數m_i使$|m_i-r|<m_e$，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤n_s+1

②若存在偶數m_i使$|m_i-r|<m_e$，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤n_s + n_r + 1

3.m_i奇數、偶數皆有

(1) r = 0時，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤2n_s

(2) r > 0時

①若不存在偶數m_i使$|m_i-r|<m_e$，則f(n,1,m_2,...,m_k) ≤2n_s

②若存在偶數m_i使$|m_i-r|<m_e$

若m中有符合$A_i=2p(1\le p\le m_e/2)$，$B_i=r-A_q+1(1\le q\le m_e/2)$

使$m=A_m+B_k(1\le k,m\le m_e/2)$，則需要2$n_s$+2$n_r$色，

若無m_i符合上述條件，則需2n_s+n_r色

證明十二：

1.m_i皆奇數：環[n,1,m_2,...,m_k]= $\overline{12}_{n/2}$

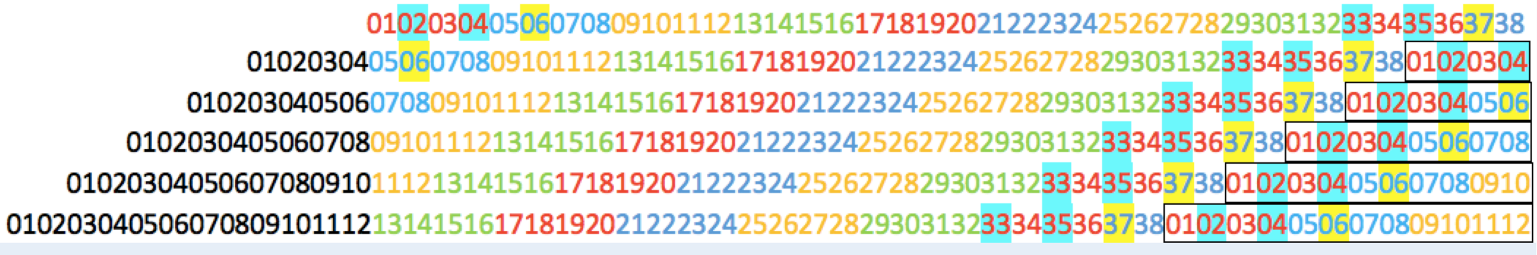
2.m_i皆偶數：

n環從第1點開始，每m_e個點看成一節，第1~n_s節顏色由$\overline{12}$、$\overline{23}$、$\overline{34}$、…、$\overline{n_s(n_s+1)}$中適當選取相異節，使前一節尾與後一節頭能異色相接，且第$\left\lfloor\frac{r}{m_e}\right\rfloor$節尾與第1節頭亦能異色相接。第$n_s$+1節開始再重複第1節開始的塗法，一直持續到塗完所有點，共用n_s + 1色。

(1)r=0時：原因同證明十 2. (1)

(2)r>0時：

環[38,1,4,6,8,10,12]



3. m_i偶、奇數皆有：

塗法同證明十 2.

(1)r=0時：原因同證明十 2. (1)

(2)r>0時：

環[32,1,4,11,12,13,16]

(四)m_1、m_2、…、m_k皆不與n互質的上界

定理十三：m_1、m_2、…、m_k皆不與n互質，{m_1,m_2, m_3, … , m_k}中最大數為M，最小數為m。設$n_s=(\left\lfloor\frac{M}{m}\right\rfloor+1)$，$r=n-mn_s\left\lfloor\frac{n}{mn_s}\right\rfloor$，$n_r=\left\lfloor\frac{r}{m}\right\rfloor$

1.若n偶數且m_i皆奇數，則f(n , m_1, m_2, … , m_k) = 2

2.不滿足1.的條件下

(1) r = 0時，則f(n , m_1, m_2, … , m_k)≤n_s

(2) r > 0時

①不存在m_i使$|m_i-r|<m$

•若r≥m，則f(n , m_1, m_2, … , m_k)≤n_s

•若r<m，則f(n , m_1, m_2, … , m_k)≤n_s+1

②若存在m_i使$|m_i-r|<m$，則f(n , m_1, m_2, … , m_k)≤n_s + n_r

證明十三：

1.若n偶數且m_i皆奇數：n環 = $\overline{12}_{n/2}$

2.不滿足1.的條件下

n環從第1點開始，每m個點看成一節，最後1節不一定是m個點。第1節塗上$\overline{1}$，第2節塗上$\overline{2}$，…，第n_s節塗上$\overline{n_s}$。

第n_s+1節開始再重複第1節開始的塗法，一直持續到塗完所有點，共用n_s色。

(1)r=0：原因同證明十 2. (1)

(2)r>0：

①不存在m_i使$|m_i-r|<m$

若r<m則頭尾同色，將最後一點改為新色，新增一色

②若存在m_i使$|m_i-r|<m$

將最後重複的每一節改為相異新色，共新增n_r色

結論

一、環[n,m]，gcd(n,m)=1

(一) n為奇數則$f(n,m)=3$

(二) n為偶數則$f(n,m)=2$

二、環[n,m_1,m_2]，gcd(n,m_1,m_2)=1

(一) m_1、m_2有一與n互質(設為m_1)，則存在滿足$m_2\equiv mm_1(mod\ n)$的正整數m(1≤m<n)，將f(n,m_1,m_2)轉換成f(n,1,m)

1.n偶數且m奇數 ⟺ $f(n,1,m)=2$

2.$f(5,1,2)=f(5,1,3)=5$

3.若3∤n且n≠5，則$f(n,1,2)$=$f(n,1,n-2)$=4

4.若n奇數且3∤n且n≠5，則$f(n,1,(n-1)/2)$=$f(n,1,(n+1)/2)$=4

5.$f(13,1,5)$=4

6.排除1~5的情形，$f(n,1,m)$=3

(二) m_1、m_2皆不與n互質

1.n偶數且m_1、m_2皆奇數 ⟺ f(n , m_1 , m_2)=2

2.不滿足1的條件，f(n , m_1 , m_2)=3

三、環[n,m_1,m_2,...,m_k]，gcd(n,m_1,m_2,...,m_k)=1

(一) 2 ≤f(n,m_1,...,m_k)≤ 2k + 1

(二)p,a∈N,當n≡a (mod p)且m_i≢a(mod p),∀i∈{1,2,3,...,k}，f(n,m_1,...,m_k)≤p

(三)當有兩正整數i,j($k\ge i,j\ge 2$)，使n=2m_i+m_j時(m_i>m_j)

且3∤[(m_i－m_j)/gcd(m_i,m_j)]⇒ f(n,1,m_2,m_3,...,m_k)≥4

(四)若m_i中有一數與n互質(設為m_1)，則f(n,m_1,m_2,...,m_k)=f(n,1,m_2',...,m_k')

1.n為奇數：見定理十一

2.n為偶數：見定理十二

(五)若m_1、m_2、…、m_k皆不與n互質：見定理十三