中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050411

「基」少成多—探討 n 性生物之子代比例

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳品羲	王信元
高二 陳品翔	鍾佝佝
高二 林彥丞	

關鍵詞：生成函數、染色體組合數、第一型斯特林數

摘要

人類以兩性交配為生育方法，其子代性別比的理論值為1：1，本研究旨在探討當性別數 n 大於 2 時，由 n 性染色體組合出第 k 性子代染色體的方法數 G_k^n，再進而探討各性別所占的比例之理論值。研究方法為藉由討論性染色體組合的方式，找出和$\{G_k^n\}$對應的生成函數。接著，再藉由比較$\{G_k^n\}$的生成函數和第一型斯特林數(Stirling Number of the 1st kind，以下簡稱斯特林數)$\{s(n+1,k)\}$的生成函數，嘗試使用斯特林數表示出的G_k^n一般式。對組合數G_k^n有基礎認識後，本研究同樣地再接著嘗試G_k^n使用表示斯特林數。最後再將G_k^n的研究結果應用至遺傳疾病色盲發病比例討論上，討論在不同性別數的生物中所呈現的關係。

壹、 研究動機

在一次學校的生物課中，看到老師用棋盤方格討論性別比的問題，並以此方法說明，當人類子代繁衍數量愈大時男女人數會愈接近。於是，我們便想到：如果在人類的染色體(兩性)(XX, XY)中會有理論比例，其理論比例為 1：1，如表 1 所示；那麼假設有生物的性染色體個數比 2 多時，是否如兩性生物一樣會有一理論比例。以三性生物 $(XXX,\ XXY,\ XYY)$為例，若直接窮舉需要討論的就有27 種，如表 2 所示。性別數愈大，棋盤法的討論顯然愈不可行。由於正好剛學過排列組合，除了如棋盤方格般的窮舉法外，趨使我們想要找出更快速的方法來討論更多性別的規則，便因此展開了本研究。

表1

用棋盤方格討論二性

	X	X
X	XX	XX
Y	XY	XY

表 2
用棋盤方格討論三性

(第三性取 X)

	X	X	X
X	XXX	XXX	XXX
X	XXX	XXX	XXX
Y	XYX	XYX	XYX

(第三性取 Y)

	X	X	X
X	XXY	XXY	XXY
X	XXY	XXY	XXY
Y	XYY	XYY	XYY

(第三性取 Y)

	X	X	X
X	XXY	XXY	XXY
X	XXY	XXY	XXY
Y	XYY	XYY	XYY

貳、 研究目的

我們在知道二性生物數量趨近於無窮大時性別比是1：1之後，便想討論多性別下的性別比，從三性、四性、一直一般化到 n 性(n 為大於1的自然數)。兩性生物的性染色體組合是XX 、 XY 二種，本研究中則定義三性生物的染色體組合是XXX 、 XXY 、 XYY 三種；四性生物的染色體組合是XXXX 、 XXXY 、 XXYY 、 XYYY ；依此類推， n 性生物的性染色體組合為 $\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{n個\mathrm{X}}$ 、 $\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{n-1個\mathrm{X}}\mathrm{Y}$ 、 $\underbrace{\mathrm{XXX}\cdots\mathrm{X}}_{n-2個\mathrm{X}}\mathrm{YY}$ 、⋯、 $\mathrm{XX}\underbrace{\mathrm{YYY}\cdots\mathrm{Y}}_{n-2個\mathrm{Y}}$ 、 $\mathrm{X}\underbrace{\mathrm{YYY}\cdots\mathrm{Y}}_{n-1個\mathrm{Y}}$ 。接著，我們想找出 n 性生物他們的後代數量趨近於無窮大時比例是否會趨於一個理論比例，如果有，此理論比例為何。

研究出結果後，我們想將其應用在色盲比例的討論上，探討其子代中色盲的比例是否亦會趨於理論比例。

本研究將探討的問題條列如下：

一、研究三性生物、四性生物中，性別比是否有理論值，其理論比例為何。
二、推廣至 n 性生物中，研究性別比是否也有理論值，其理論比例為何。
三、研究在 n 性生物中，第 k 性的性染色體組合數 G_k^n 的求法與其生成函數為何。
四、討論第一型有符號斯特林數 $s(n,k)$ 與性染色體組合數 G_k^n 間的關係。
五、應用至色盲的範疇，證明在 n 性生物中，色盲之佔比是否有理論值，找出其與性別間比例的關係，並說明是否有 X 染色體較多的性別表現色盲的機會卻大於 X 染色體較少的性別。
六、如何以現有之色盲比例反求 X 染色體異常(即 X^-)之機率。

參、 研究器材

紙、筆、黑板、工程用計算機、電腦

肆、 研究過程與內容

二性生物中，決定性別的性染色體組合有XX 、 XY兩種。本研究對n性生物的性別染色體組合定義如下。

定義1.1

$n \geq 2$ ，$n \in N$ ，n性生物中，性別有n種，其性染色體組合分別為

$\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{n\text{個X}}$ 、 $\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{n-1\text{個X}}\mathrm{Y}$ 、 $\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{(n-2)\text{個X}}\mathrm{YY}$ 、⋯、 $\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{(n-k+1)\text{個X}}\underbrace{\mathrm{YY}\cdots\mathrm{Y}}_{(k-1)\text{個Y}}$ 、⋯、

$\mathrm{XXX}\underbrace{\mathrm{YY}\cdots\mathrm{Y}}_{(n-3)\text{個Y}}$ 、 $\mathrm{XX}\underbrace{\mathrm{YY}\cdots\mathrm{Y}}_{(n-2)\text{個Y}}$ 、 $\mathrm{X}\underbrace{\mathrm{YY}\ldots\mathrm{Y}}_{(n-1)\text{個Y}}$ 。依序稱$\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{n\text{個X}}$為第1性，$\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{n-1\text{個X}}\mathrm{Y}$為第2性， $\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{(n-2)\text{個X}}\mathrm{YY}$為第3性，⋯，$\underbrace{\mathrm{XX}\cdots\mathrm{X}}_{(n-k+1)\text{個X}}\underbrace{\mathrm{YY}\cdots\mathrm{Y}}_{(k-1)\text{個Y}}$為第$k$性，⋯，

$\mathrm{XXX}\underbrace{\mathrm{YY}\cdots\mathrm{Y}}_{(n-3)\text{個Y}}$為第$(n-2)$性，$\mathrm{XX}\underbrace{\mathrm{YY}\cdots\mathrm{Y}}_{(n-2)\text{個Y}}$為第$(n-1)$性，$\mathrm{X}\underbrace{\mathrm{YY}\ldots\mathrm{Y}}_{(n-1)\text{個Y}}$為第$n$性。

也就是說，有n個性染色體的n性生物中，第$k(1 \leq k \leq n)$性生物的性染色體含有$(n-k+1)$個X染色體和$(k-1)$個Y染色體。

二性生物若要繁衍出新的一代，則需要兩者不同性別XX、XY中的各一條性染色體，才能組成新一代的性染色體組合。以此類推，我們定義n性生物的產生下一代的性染色體組合方式如下。

定義2.1

$n \geq 2$ ，$n \in N$ ，n性生物中，繁衍下一代需要n種不同性別，第1性、第2性、第3性、⋯、第n性中的各一條性染色體，由n條性染色體方能組成新一代的性染色體組合。

以五性生物為例，繁衍下一代需要$\mathrm{X_1X_1X_1X_1X_1}$ 、 $\mathrm{X_2X_2X_2X_2Y_2}$ 、 $\mathrm{X_3X_3X_3Y_3Y_3}$ 、 $\mathrm{X_4X_4Y_4Y_4Y_4}$ 、 $\mathrm{X_5Y_5Y_5Y_5Y_5}$五者中的各一條性染色體。如此方能組合繁衍出如$\mathrm{X_1X_2X_4Y_3Y_5}$ 、 $\mathrm{X_1X_3X_4Y_2Y_5}$的第3性，但不會繁衍出有$\mathrm{X_1X_1X_2Y_5Y_5}$組合的第3性。

定義3.1 第一型有符號斯特林數

對於所有的自然數n ，其對應的遞降階乘為

$$\prod_{t=1}^{n}\left(x-(n-t)\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdots\left(x-(n-1)\right) ,$$

展開式的 x^k 項係數則定為 $s(n,k)$ ，即 $\prod_{t=0}^{n-1}(x-t)=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^k$ 。

例3.1.1

$n=3$ 時，其對應的遞降階乘為

$x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x=s(3,0)x^0+s(3,1)x^1+s(3,2)x^2+s(3,3)x^3$

因此，第一型有符號斯特林數 $s(3,0)=0$ ， $s(3,1)=2$ ， $s(3,2)=-3$ ，

$s(3,3)=1$。因為 x^4 項、 x^5 項皆不存在，即該項係數為 0 ，所以

$s(3,4)=s(3,5)=s(3,k)=0$ ， $\forall k>3$ 。

例3.1.2

$n=4$ 時，其對應的遞降階乘為 $x(x-1)(x-2)(x-3)=x^4-6x^3+11x^2-6x$

$=s(4,0)x^0+s(4,1)x^1+s(4,2)x^2+s(4,3)x^3+s(4,4)x^4$

因此，第一型有符號斯特林數 $s(4,0)=0$ ， $s(4,1)=-6$ ， $s(4,2)=11$ ，

$s(4,3)=-6$ ， $s(4,4)=1$ ，且 $s(4,k)=0$ ， $\forall k>4$ 。

定義3.2 第一型無符號斯特林數

由於遞降階乘的係數是正負交錯，所以取其絕對值並以 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 表示之，即

$s(n,k)=(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 。

例3.2.1

對照以 $n=3$ 時的斯特林數為例， $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}=|s(3,0)|=0$ ， $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=|s(3,1)|=2$ ，

$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=|s(3,2)|=3$ ， $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}=|s(3,3)|=1$ 。

引理3.3

對於所有的非負整數 n ， $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}=s(n,0)=0$ 。

引理3.4

第一型無符號斯特林數滿足遞迴關係式$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$，其中$n$和$k$為非負整數。

證明 $\left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \middle| \, k \in Z, 0 \le k \le n \right\}$ 的生成函數為

$$\sum_{k=0}^{n} \left| s(n,k) \right| x^k = \prod_{t=1}^{n} \left(x + (n-t) \right) = x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\cdots\left(x+(n-1)\right)。$$

$\left\{ \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \middle| \, k \in Z, 0 \le k \le n+1 \right\}$ 的生成函數為

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} \left| s(n+1,k) \right| x^k \\
&= \prod_{t=0}^{n} \left(x + (n-t) \right) \\
&= \left[\prod_{t=1}^{n} \left(x - (n-t) \right) \right] \left(x + n \right) \\
&= x\left[\prod_{t=1}^{n} \left(x - (n-t) \right) \right] + n\left[\prod_{t=1}^{n} \left(x - (n-t) \right) \right] \\
&= x\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k + n\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right) x^k
\end{aligned}$$

比較x^k項的係數即可得到$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$。

利用以上遞迴關係式以及起始條件$s(0,k) = \begin{cases} 1, 當 k = 0 \\ 0, 當 k \ne 0 \end{cases}$，便可以較迅速地製作出下表。

表3

部分第一類無符號斯特林數：

$n \backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0	0
6	0	120	274	225	85	15	1	0
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

觀察 4.1 三性生物的各性別比

依照定義，三性的三種性別分別為第一性(基因：XXX)，第二性(基因：XXY)，第三性(基因：XYY)，並假設其親代占比依序為$a:b:c$。三性生物的親代繁衍子代時需要一個第一性，一個第二性，一個第三性，缺一不可。表4是親代中各性染色體的占比，根據其占比，在表5中一一條列出子代中各性別中各組合的占比：

表4

性染色體產生的比

第一性	第二性	第三性
$\frac{a}{a+b+c}X_1$	$\frac{b}{a+b+c}X_2$	$\frac{c}{a+b+c}X_3$
$\frac{a}{a+b+c}X_1$	$\frac{b}{a+b+c}X_2$	$\frac{c}{a+b+c}Y_3$
$\frac{a}{a+b+c}X_1$	$\frac{b}{a+b+c}Y_2$	$\frac{c}{a+b+c}Y_3$

如同兩性染色體組合，在第一、二、三性中各取一個染色體進行組合，可以得到$3\times3\times3=27$種可能，一一列出如下表。

表 5

三性所有可能染色體的組合

XXX	XXY		XYY
$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2Y_3$
$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2Y_3$
$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2Y_3$
$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2Y_3$
$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2Y_3$
$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2X_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2Y_3$
	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1X_2Y_3$	
	$\frac{abc}{(a+b+c)^3}X_1Y_2X_3$		

由此可知，在XXX×XXY×XYY中，共有27種染色體組合情況，若子代的數量趨於無限大，則其子代比例趨近於

$6\cdot\frac{abc}{(a+b+c)^3}:15\cdot\frac{abc}{(a+b+c)^3}:6\cdot\frac{abc}{(a+b+c)^3}=6:15:6$。因此，不論一開始各性別的比例為何，只要子代數量愈大，最終的性別比例都會趨於$6:15:6$。

顯然地，窮舉法在性別數越來越大的時候便會逐漸無法適用，因此也嘗試

了以排列組合的角度來看：出現XXX的情況有$3\times2\times1$(從第一性取到的X有三種可能，從第二性取到的X有二種可能，從第三性取到的X則有一種可能)；出現XXY的可能有$3\times1\times1+3\times2\times2$(當Y取自第二性時，有$3\times1\times1$種可能，當Y取自第三性時，有$3\times2\times2$種可能)；出現XYY的情況有$3\times1\times2$(X取自第一性，Y取自第二性和第三性)。

觀察 4.2 四性生物的各性別比

同三性的討論方法，假設親代中第一性XXXX、第二性XXXY、第三性XXYY、第四性XYYY的占比依序為$a:b:c:d$，我們則在子代得到共有256種染色體的組合情況，而XXXX共出現24次，XXXY出現104次，XXYY出現104次，XYYY出現24次，依據親代各性別比，我們得知子代中各性的比例為

$$24\frac{abcd}{(a+b+c+d)^4}:104\frac{abcd}{(a+b+c+d)^4}:104\frac{abcd}{(a+b+c+d)^4}:24\frac{abcd}{(a+b+c+d)^4}$$
$=24:104:104:24$。

為了方便討論，我們將染色體組合數的表示方式作以下的定義。

定義 5.1

n性生物繁衍時，由n種不同性別的親代性染色體，產生第k性子代的組合數用G_k^n表示。

例如，$G_1^2=G_2^2=2$；$G_1^3=G_3^3=6$，$G_2^3=15$；$G_1^4=G_4^4=24$，$G_2^4=G_3^4=104$。

表6

***n* 性生物生出第 *k* 性者的染色體組合數**

n	G_1^n	G_2^n	G_3^n	G_4^n	G_5^n	G_6^n	$\cdots$	$\sum$
1	1	-	-	-	-	-	$\cdots$	1^1
2	2	2	-	-	-	-	$\cdots$	2^2
3	6	15	6	-	-	-	$\cdots$	3^3
4	24	104	104	24	-	-	$\cdots$	4^4
5	120	770	1345	770	120	-	$\cdots$	5^5
6	720	6264	16344	16344	6264	720	$\cdots$	6^6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$

由上表，可以看出對k而言數字是由兩旁外側向中間遞增，對n而言則是由上向下遞增。因為向中間遞增的速度很迅速，所以我們對G_k^n取常用對數，並觀察其增減，如下圖 1、圖 2 所示。

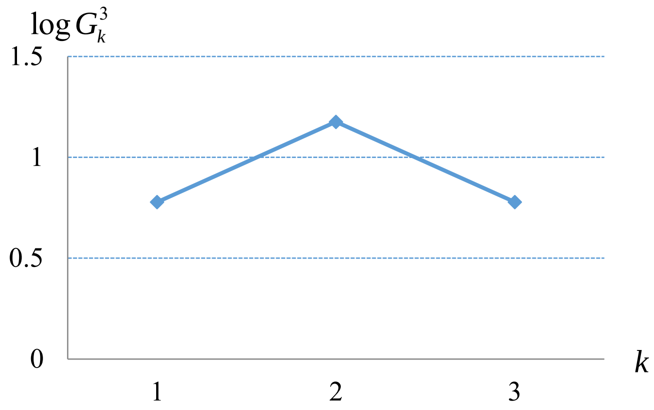


圖 1. $\log G_k^3$ 的增減情形.

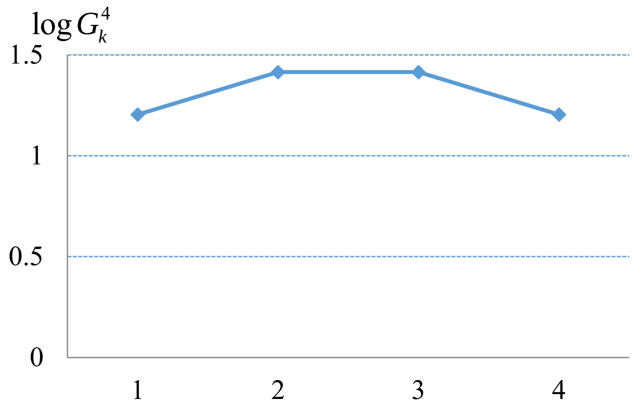


圖 2. $\log G_k^4$ 的增減情形.

在這裡，以排列組合的觀點列出愈來愈多的分割，再一一討論不同事件中的不同組合數的方法愈來愈趨於繁重，因為當我們要計算中間的性別時(如四性中的第二、三性)，要考慮太多情況，於是想要作出$\{G_k^n\}_{k=1}^n$的生成函數，以此計算出各性別的佔比。

找出生成函數前，以下觀察對我們找出生成函數的任務有莫大的幫助。

觀察 5.2

若觀察表 6 中$n=1\sim6$的染色體組合數，不難發現其具有對稱性(如在$n=6$時，$G_1^6=G_6^6=720$，$G_2^6=G_5^6=6264$，$G_3^6=G_4^6=16344$)。此外，我們也嘗試將染色體組合數$\{G_k^n\}_{k=1}^n$用在 n 次多項式的係數，並觀察是否能將其因式分解。

$n=2$時的生成函數為$2x^2+2x=2x(x+1)$，$n=3$時的生成函數為$6x^3+15x^2+6x=3x(2x+1)(x+2)$，$n=4$時的生成函數為$24x^4+104x^3+104x^2+24x=4x(3x+1)(2x+2)(x+3)$。發現可以將第 k 性的 X 染色體視為$n-(k-1)$個 x 相加，Y 染色體視為$(k-1)$個 1 相加，利用展開時會取各因式中的其中一項相乘的特性，恰好和 n 性生物繁衍時染色體的組合有一

對一的關係。例如，$n=3$時，生成函數為$(x+x+x)(x+x+1)(x+1+1)$，為了方便和觀察 4.1 中的染色體組合數的作比較，將各因式中的各項作區別並展開，

$$(x_1+x_1+x_1)(x_2+x_2+1_2)(x_3+1_3+1_3)=(x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3)+(x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3\ x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_1x_21_3+x_11_2x_3+x_11_2x_3+x_11_2x_3)+(x_11_21_3+x_11_21_3+x_11_21_3+x_11_21_3+x_11_21_3+x_11_21_3)$$

其各項恰和表 5 的組合一對一對應。而$1^{n-k}x^k$項的係數恰為第$(n-k+1)$性的染色體組合數G^3_{4-k}。

引理 5.3

染色體組合數有對稱性，即$G^n_k=G^n_{n+1-k}$，其中 n 和 k 為滿足$0<k\le n$的正整數。

綜合以上的觀察中的一對一對應關係，我們得到$\{G^n_k\}^n_{k=1}$的生成函數如下：

引理 5.4

染色體組合數$\{G^n_k\}^n_{k=1}$的生成函數為$G_n(x)=\prod_{k=1}^{n}[(n-k+1)x+(k-1)]$，即

$$G_n(x)=\prod_{k=1}^{n}[(n-k+1)x+(k-1)]=\sum_{k=0}^{n}G^n_kx^k=\sum_{k=0}^{n}G^n_{n+1-k}x^k$$ 。

此外，為了方便以下的討論，我們用$(x)_n$代表斯特林數的生成函數，即

$$(x)_n=\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^k$$ 。

觀察 6.1　二性子代的比例與其性染色體組合數

(1) 排容原理

我們用方陣$\begin{bmatrix}\mathrm{X} & \mathrm{X}\\ \mathrm{X} & \mathrm{Y}\end{bmatrix}$表示二性生物的染色體(第一列為第一性，第二列為第二性)；分別從二列中各取一條染色體，便可產生一個子代染色體的組合。G^n_k為n性生物產生第k性子代的方法數，這裡先透過文氏圖觀察當$n=2$時，G^2_1、G^2_2這 2 個數的求法。首先，考慮二個事件，「第一列取 1 個 X」以及「第二列取 1 個 X」。

若要組合出第一性的子代，需自兩列中各取1個X，故取兩事件交集，

因此 $G_1^2 = C_2^2 1\times 2$ 。

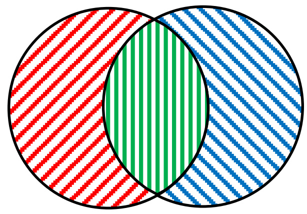
而要產生第二性的子代，可以從第一列或第二列中取1個X，剩下一列任取；但會有兩列都取到X的情況，計算時需扣掉。

第一列取1個X而第二列任取的方法數：2×2^1

第二列取1個X而第一列任取的方法數：1×2^1

兩列都取到X的方法數：1×2

第一列取1個X



第二列取1個X

因為第二性基因中只有一個X，依照排容原理，要將交集(有2個X)的部分全部扣掉(也就是扣掉2倍的1×2)。

因此 $G_2^2 = C_1^1 2\times 2^1 + C_1^1 1\times 2^1 - C_1^2 1\times 2 = C_1^1(2\times 2^1 + 1\times 2^1) - C_1^2(1\times 2)$

為了整理各項的規律，將1×2寫為$1\times 2\times 2^0$，即$G_1^2 = C_2^2 1\times 2\times 2^0$

$G_2^2 = C_1^1 2\times 2^1 + C_1^1 1\times 2^1 - C_1^2 1\times 2\times 2^0 = C_1^1(2\times 2^1 + 1\times 2^1) - C_1^2(1\times 2\times 2^0)$，

因為 $\prod_{k=0}^{n}(x-k) = (x-0)(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))(x-n)$ 展開式即斯特林數的生成函數 $s(n+1,n+1)x^{n+1} + s(n+1,n)x^n + \cdots + s(n+1,2)x^2 + s(n+1,1)x^1$，所以首項將$1+2$寫為$-s(3,2)$，$1\times 2$寫為$s(3,1)$，並進一步改寫：

$G_1^2 = C_2^2 1\times 2\times 2^0 = C_2^2 s(3,1)\times 2^0 = (-1)^2 C_2^2 s(3,1)\times 2^0$

$G_2^2 = C_1^1 2\times 2^1 + C_1^1 1\times 2^1 - C_1^2 1\times 2\times 2^0 = C_1^1(2\times 2^1 + 1\times 2^1) - C_1^2(1\times 2\times 2^0)$

$= -C_1^1 s(3,2)\times 2^1 - C_1^2 s(3,1)\times 2^0 = (-1)^1(C_1^1 s(3,2)\times 2^1 + C_1^2 s(3,1)\times 2^0)$

因此，$n=2$時可用斯特林數表示，$G_k^2 = (-1)^{3-k}\sum_{m=3-k}^{2} C_{3-k}^m s(3,3-m)\times 2^{2-m}$ 。

(2) 生成函數比較

此外，若將 $x = \frac{2}{1-t}$ 代入斯特林數的生成函數 $(x)_3 = x(x-1)(x-2)$ 得

$$\frac{2}{1-t}\left(\frac{2}{1-t}-1\right)\left(\frac{2}{1-t}-2\right)$$

$$= \frac{2}{1-t}\left[\frac{2-(1-t)}{1-t}\right]\left[\frac{2-2(1-t)}{1-t}\right]$$

$$= \frac{2}{1-t}\left(\frac{t+1}{1-t}\right)\left(\frac{2t}{1-t}\right)$$

$$= \frac{2}{(1-t)^3}2t(t+1) = \frac{2}{(1-t)^3}G_2(t)$$

又 $(x)_3 = s(3,0)x^0 + s(3,1)x^1 + s(3,2)x^2 + s(3,3)x^3$，$G_2(t) = G_1^2 t^2 + G_2^2 t^1$

$$\Rightarrow s(3,0)\left(\frac{2}{1-t}\right)^0 + s(3,1)\left(\frac{2}{1-t}\right)^1 + s(3,2)\left(\frac{2}{1-t}\right)^2 + s(3,3)\left(\frac{2}{1-t}\right)^3 = \frac{2}{(1-t)^3}G_2(t)$$

同乘以$(1-t)^3$得，

$$s(3,0)2^0(1-t)^3 + s(3,1)2^1(1-t)^2 + s(3,2)2^2(1-t)^1 + s(3,3)2^3(1-t)^0 = 2G_2(t)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2G_2(t) = {} & s(3,0)2^0\left[C_0^3 1^3(-t)^0 + C_1^3 1^2(-t)^1 + C_2^3 1^1(-t)^2 + C_3^3 1^0(-t)^3\right] \\ & + s(3,1)2^1\left[C_0^2 1^2(-t)^0 + C_1^2 1^1(-t)^1 + C_2^2 1^0(-t)^2\right] \\ & + s(3,2)2^2\left[C_0^1 1^1(-t)^0 + C_1^1 1^0(-t)^1\right] \\ & + s(3,3)2^3\left[C_0^0 1^0(-t)^0\right]\end{aligned}$$

整理得，

$$\begin{aligned}2(G_1^2 t^2 + G_2^2 t^1) = {} & (-t)^0\left[s(3,0)C_0^3 2^0\times 1^3 + s(3,1)C_0^2 2^1\times 1^2 + s(3,2)C_0^1 2^2\times 1^1 + s(3,3)C_0^0 2^3\times 1^0\right] \\ & + (-t)^1\left[s(3,0)C_1^3 2^0\times 1^2 + s(3,1)C_1^2 2^1\times 1^1 + s(3,2)C_1^1 2^2\times 1^0\right] \\ & + (-t)^2\left[s(3,0)C_2^3 2^0\times 1^1 + s(3,1)C_2^2 2^1\times 1^0\right] \\ & + (-t)^3\left[s(3,0)C_3^3 2^0\times 1^0\right]\end{aligned}$$

比較t^2、t係數可得

$$G_1^2 = \frac{s(3,0)C_2^3 2^0\times 1^1 + s(3,1)C_2^2 2^1\times 1^0}{2} = s(3,1)C_2^2 2^0$$

$$G_2^2 = -\frac{s(3,0)C_1^3 2^0\times 1^2 + s(3,1)C_1^2 2^1\times 1^1 + s(3,2)C_1^1 2^2\times 1^0}{2} = -s(3,1)C_1^2 2^0 - s(3,2)C_1^1 2^1$$

同手法(1)的結果，這裡同樣得到，$G_k^2 = (-1)^{3-k}\sum_{m=3-k}^{2} C_{3-k}^m s(3,3-m)\times 2^{2-m}$ 。

觀察 6.2 三性子代的比例與其性染色體組合數

(1) 排容原理

同觀察 6.1，使用方陣$\begin{bmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Y}\end{bmatrix}$表示三性生物的染色體(第一列為第一性，第二列為第二性，第三列為第三性)；分別從三列中各取一條染色體，便可產生一個子代的性染色體組合。三性時$n=3$，需討論G_1^3、G_2^3、G_3^3共3個數。

若要組合出第一性的子代，需自三列中各取1個X，因此$G_1^3 = \mathrm{C}_3^3 1\times 2\times 3$ 。

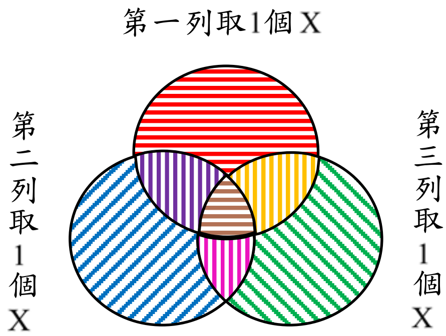
若要組合出第二性的子代，可以從任二列各取1個X，剩下一列任取，再扣

掉交集的部分。因此 $G_2^3 = C_2^2(3\times 2\times 3^1$(一、二列取X，第三列任取)

$+3\times 1\times 3^1$(一、三X，第二列任取) $+2\times 1\times 3^1$(二、三取X，第一列任取) $-C_2^3 1\times 2\times 3$

若要組合出第三性的子代，可以從第一列、第二列或第三列中取1個X，剩下二列任取；但會有其中二列都取到X或三列都取到X的情況，計算時需扣掉。

第一列取1個X而第二、三列任取的方法數：3×3^2
第二列取1個X而第一、三列任取的方法數：2×3^2
第三列取1個X而第一、二列任取的方法數：1×3^2
第一、二列都取到X而第三列任取的方法數：$3\times 2\times 3^1$
第一、三列都取到X而第二列任取的方法數：$3\times 1\times 3^1$
第二、三列都取到X而第一列任取的方法數：$2\times 1\times 3^1$
三列都取到X的方法數：$1\times 2\times 3$



因為第三性基因中只有一個X，依照排容原理，要將兩兩交集(有2個X及3個X)的部分全部扣掉(也就是扣掉2倍的 $3\times 2\times 3^1$、$3\times 1\times 3^1$、$2\times 1\times 3^1$)，再加回三個三個交集的部分(也就是加回3倍的 $1\times 2\times 3$)。

因此

$$G_3^3 = C_1^1 3\times 3^2 + C_1^1 2\times 3^2 + C_1^1 1\times 3^2 - C_1^2 3\times 2\times 3^1 - C_1^2 3\times 1\times 3^1 - C_1^2 2\times 1\times 3^1 + C_1^3 1\times 2\times 3$$
$$= C_1^1(3\times 3^2 + 2\times 3^2 + 1\times 3^2) - C_1^2(3\times 2\times 3^1 + 3\times 1\times 3^1 + 2\times 1\times 3^1) + C_1^3 1\times 2\times 3$$

仿照二性的作法，將 $1\times 2\times 3$ 寫為 $1\times 2\times 3\times 3^0$，即

$$G_1^3 = C_3^3 1\times 2\times 3\times 3^0$$
$$G_2^3 = C_2^2(3\times 2\times 3^1 + 3\times 1\times 3^1 + 2\times 1\times 3^1) - C_2^3 1\times 2\times 3\times 3^0$$
$$G_3^3 = C_1^1 3\times 3^2 + C_1^1 2\times 3^2 + C_1^1 1\times 3^2 - C_1^2 3\times 2\times 3^1 - C_1^2 3\times 1\times 3^1 - C_1^2 2\times 1\times 3^1 + C_1^3 1\times 2\times 3\times 3^0$$
$$= C_1^1(3\times 3^2 + 2\times 3^2 + 1\times 3^2) - C_1^2(3\times 2\times 3^1 + 3\times 1\times 3^1 + 2\times 1\times 3^1) + C_1^3 1\times 2\times 3\times 3^0$$

再將 $1+2+3$ 寫為 $-s(4,3)$，$1\times 2+2\times 3+1\times 3$ 寫為 $s(4,2)$，$1\times 2\times 3$ 寫為 $-s(4,1)$

進一步改寫：

$$G_1^3 = C_3^3 1\times 2\times 3\times 3^0 = -C_3^3 s(4,1)\times 3^0 = (-1)^3 C_3^3 s(4,1)\times 3^0$$
$$G_2^3 = C_2^2(3\times 2\times 3^1 + 3\times 1\times 3^1 + 2\times 1\times 3^1) - C_2^3 1\times 2\times 3\times 3^0 = C_2^2 s(4,2)\times 3^1 + C_2^3 s(4,1)\times 3^0$$
$$= (-1)^2(C_2^2 s(4,2)\times 3^1 + C_2^3 s(4,1)\times 3^0)$$
$$G_3^3 = C_1^1(3\times 3^2 + 2\times 3^2 + 1\times 3^2) - C_1^2(3\times 2\times 3^1 + 3\times 1\times 3^1 + 2\times 1\times 3^1) + C_1^3 1\times 2\times 3\times 3^0$$
$$= -C_1^1 s(4,3)\times 3^2 - C_1^2 s(4,2)\times 3^1 - C_1^3 s(4,1)\times 3^0$$

$$=(-1)^1(C_1^1 s(4,3)\times 3^2+C_1^2 s(4,2)\times 3^1+C_1^3 s(4,1)\times 3^0)$$

因此，$n=3$時可用斯特林數表示，$G_k^3=(-1)^{4-k}\sum_{m=4-k}^{3}C_{4-k}^{m}s(4,4-m)\times 3^{3-m}$ 。

(2) 生成函數比較

將$x=\dfrac{3}{1-t}$代入斯特林數的生成函數$(x)_4=x(x-1)(x-2)(x-3)$得

$$\frac{3}{1-t}(\frac{3}{1-t}-1)(\frac{3}{1-t}-2)(\frac{3}{1-t}-3)$$

$$=\frac{3}{1-t}\left[\frac{3-(1-t)}{1-t}\right]\left[\frac{3-2(1-t)}{1-t}\right]\left[\frac{3-3(1-t)}{1-t}\right]$$

$$=\frac{3}{1-t}(\frac{t+2}{1-t})(\frac{2t+1}{1-t})(\frac{3t}{1-t})$$

$$=\frac{3}{(1-t)^4}3t(2t+1)(t+2)=\frac{3}{(1-t)^4}G_3(t)$$

又$(x)_4=s(4,0)x^0+s(4,1)x^1+s(4,2)x^2+s(4,3)x^3+s(4,4)x^4$ ，所以

$$s(4,0)(\frac{3}{1-t})^0+s(4,1)(\frac{3}{1-t})^1+s(4,2)(\frac{3}{1-t})^2+s(4,3)(\frac{3}{1-t})^3+s(4,4)(\frac{3}{1-t})^4=\frac{3}{(1-t)^4}G_3(t)$$

同乘以$(1-t)^4$得，

$$s(4,0)3^0(1-t)^4+s(4,1)3^1(1-t)^3+s(4,2)3^2(1-t)^2+s(4,3)3^3(1-t)^1+s(4,4)3^4(1-t)^0=3G_3(t)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 3G_3(t)=&s(4,0)3^0\left[C_0^4 1^4(-t)^0+C_1^4 1^3(-t)^1+C_2^4 1^2(-t)^2+C_3^4 1^1(-t)^3+C_4^4 1^0(-t)^4\right]\\&+s(4,1)3^1\left[C_0^3 1^3(-t)^0+C_1^3 1^2(-t)^1+C_2^3 1^1(-t)^2+C_3^3 1^0(-t)^3\right]\\&+s(4,2)3^2\left[C_0^2 1^2(-t)^0+C_1^2 1^1(-t)^1+C_2^2 1^0(-t)^2\right]\\&+s(4,3)3^3\left[C_0^1 1^1(-t)^0+C_1^1 1^0(-t)^1\right]\\&+s(4,4)3^4\left[C_0^0 1^0(-t)^0\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&3(G_1^3t^3+G_2^3t^2+G_3^3t^1)\\&=(-t)^0\left[s(4,0)C_0^4 3^0\times 1^4+s(4,1)C_0^3 3^1\times 1^3+s(4,2)C_0^2 3^2\times 1^2+s(4,3)C_0^1 3^3\times 1^1+s(4,4)C_0^0 3^4\times 1^0\right]\\&+(-t)^1\left[s(4,0)C_1^4 3^0\times 1^3+s(4,1)C_1^3 3^1\times 1^2+s(4,2)C_1^2 3^2\times 1^1+s(4,3)C_1^1 3^3\times 1^0\right]\\&+(-t)^2\left[s(4,0)C_2^4 3^0\times 1^2+s(4,1)C_2^3 3^1\times 1^1+s(4,2)C_2^2 3^2\times 1^0\right]\\&+(-t)^3\left[s(4,0)C_3^4 3^0\times 1^1+s(4,1)C_3^3 3^1\times 1^0\right]\\&+(-t)^4\left[s(4,0)C_4^4 3^0\times 1^0\right]\end{aligned}$$

比較t^3、t^2、t的係數可得

$$G_1^3=-\frac{s(4,0)C_3^4 3^0\times 1^1+s(4,1)C_3^3 3^1\times 1^0}{3}\ ,$$

$$G_2^3=\frac{s(4,0)C_2^4 3^0\times 1^2+s(4,1)C_2^3 3^1\times 1^1+s(4,2)C_2^2 3^2\times 1^0}{3}\ ,$$

$$G_3^3=-\frac{s(4,0)C_1^4 3^0\times 1^3+s(4,1)C_1^3 3^1\times 1^2+s(4,2)C_1^2 3^2\times 1^1+s(4,3)C_1^1 3^3\times 1^0}{3}$$

同手法(1)的結果，這裡同樣得到，$G_k^3=\left(-1\right)^{4-k}\sum_{m=4-k}^{3}C_{4-k}^m s(4,4-m)\times 3^{3-m}$。

接著我們直接利用生成函數比較的策略，整理出染色體組合數的一般式。

定理 7.1

對於任意非負整數 n , k， $s(n,k)$ 為第一型斯特林數，$C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，

則 n 性生物中得到第 k 性子代的染色體組合數

$$G_k^n=(-1)^{n-k+1}\frac{\sum_{m=1}^{k}\left[s(n+1,m)C_{n+1-k}^{n+1-m}n^m\right]}{n}=(-1)^k\sum_{m=k}^{n}\left[s(n+1,n+1-m)C_k^m n^{n-m}\right]\ 。$$

證明 將 $x=\dfrac{n}{1-t}$ 代入 $(x)_{n+1}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))(x-n)$

$$\frac{n}{1-t}\left(\frac{n}{1-t}-1\right)\left(\frac{n}{1-t}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{1-t}-(n-1)\right)\left(\frac{n}{1-t}-n\right)$$

$$=\frac{n}{1-t}\left[\frac{n-(1-t)}{1-t}\right]\left[\frac{n-2(1-t)}{1-t}\right]\cdots\left[\frac{n-(n-1)(1-t)}{1-t}\right]\left[\frac{n-n(1-t)}{1-t}\right]$$

$$=\frac{n}{1-t}\left[\frac{t+(n-1)}{1-t}\right]\left[\frac{2t+(n-2)}{1-t}\right]\cdots\left[\frac{(n-1)t+1}{1-t}\right]\left[\frac{nt}{1-t}\right]$$

$$=\frac{n}{(1-t)^{n+1}}nt\left[(n-1)t+1\right]\cdots\left[2t+(n-2)\right]\left[t+(n-1)\right]=\frac{n}{(1-t)^{n+1}}G_n(t)$$

又 $(x)_{n+1}=s(n+1,0)x^0+s(n+1,1)x^1+\cdots+s(n+1,n)x^n+s(n+1,n+1)x^{n+1}$，

$$s(n+1,0)\left(\frac{n}{1-t}\right)^0+s(n+1,1)\left(\frac{n}{1-t}\right)^1+\cdots+s(n+1,n+1)\left(\frac{n}{1-t}\right)^{n+1}=\frac{n}{(1-t)^{n+1}}G_n(t)$$

同乘以 $(1-t)^{n+1}$ 得，

$$s(n+1,0)n^0(1-t)^{n+1}+s(n+1,1)n^1(1-t)^n+\cdots+s(n+1,n+1)n^{n+1}(1-t)^0=nG_n(t)$$

$$nG_n(t)=s(n+1,0)n^0\left[C_0^{n+1}1^{n+1}(-t)^0+C_1^{n+1}1^n(-t)^1+\cdots+C_{n+1}^{n+1}1^0(-t)^{n+1}\right]$$
$$+s(n+1,1)n^1\left[C_0^n1^n(-t)^0+C_1^n1^{n-1}(-t)^1+\cdots+C_{n-1}^n1^1(-t)^{n-1}+C_n^n1^0(-t)^n\right]$$
$$+\cdots+s(n+1,n)n^n\left[C_0^11^1(-t)^0+C_1^11^0(-t)^1\right]+s(n+1,n+1)n^{n+1}\left[C_0^01^0(-t)^0\right]$$

$$n(G_1^nt^n+G_2^nt^{n-1}+\cdots+G_{n-1}^nt^2+G_n^nt^1)$$
$$=(-t)^0\left[s(n+1,0)C_0^{n+1}n^0\times1^{n+1}+s(n+1,1)C_0^nn^1\times1^n+\cdots+s(n+1,n+1)C_0^0n^{n+1}\times1^0\right]$$
$$+(-t)^1\left[s(n+1,0)C_1^{n+1}n^0\times1^n+s(n+1,1)C_1^nn^1\times1^{n-1}+\cdots+s(n+1,n)C_1^1n^n\times1^0\right]$$
$$+\cdots+(-t)^n\left[s(n+1,0)C_n^{n+1}n^0\times1^1+s(n+1,1)C_n^nn^1\times1^0\right]$$
$$+(-t)^{n+1}\left[s(n+1,0)C_{n+1}^{n+1}n^0\times1^0\right]$$

$$=(-t)^0\sum_{m=0}^{n+1}\left[s(n+1,m)C_0^{n+1-m}n^m\right]+(-t)^1\sum_{m=0}^{n}\left[s(n+1,m)C_1^{n+1-m}n^m\right]$$
$$+\cdots+(-t)^n\sum_{m=0}^{1}\left[s(n+1,m)C_n^{n+1-m}n^m\right]+(-t)^{n+1}\sum_{m=0}^{0}\left[s(n+1,m)C_{n+1}^{n+1-m}n^m\right]$$

比較t^n 、 t^{n-1} 、⋯、t 項的係數可得

$$G_1^n=(-1)^n\frac{\sum_{m=0}^{1}\left[s(n+1,m)C_n^{n+1-m}n^m\right]}{n}，G_2^n=(-1)^{n-1}\frac{\sum_{m=0}^{2}\left[s(n+1,m)C_{n-1}^{n+1-m}n^m\right]}{n}，$$

$$\cdots，G_{n-1}^n=(-1)^2\frac{\sum_{m=0}^{n-1}\left[s(n+1,m)C_2^{n+1-m}n^m\right]}{n}，$$

$$G_n^n=(-1)^1\frac{\sum_{m=0}^{n}\left[s(n+1,m)C_1^{n+1-m}n^m\right]}{n}，G_k^n=(-1)^{n-k+1}\frac{\sum_{m=0}^{k}\left[s(n+1,m)C_{n+1-k}^{n+1-m}n^m\right]}{n}。$$

由引理 3.3，可再整理為$G_k^n=(-1)^{n-k+1}\frac{\sum_{m=1}^{k}\left[s(n+1,m)C_{n+1-k}^{n+1-m}n^m\right]}{n}$。

由引理 5.3 的對稱性，可再整理成$G_k^n=(-1)^k\sum_{m=k}^{n}\left[s(n+1,n+1-m)C_k^mn^{n-m}\right]$。

定理 7.1 利用了斯特林數$s(n,k)$來表示染色體組合數G_k^n，於是我們接著想嘗試用染色體組合數G_k^n表示斯特林數$s(n,k)$，研究的過程如下：

觀察 8.1

觀察 6.2(2)中使用到 $x=\frac{2}{1-t}\Rightarrow t=\frac{x-2}{x}=1-\frac{2}{x}$

將 $t=1-\frac{2}{x}$ 代入 $s(3,0)x^0+s(3,1)x^1+s(3,2)x^2+s(3,3)x^3=\frac{2}{(1-t)^3}(G_1^2t^1+G_2^2t^2)$ 展開得

$$
\begin{aligned}
&s(3,0)x^0+s(3,1)x^1+s(3,2)x^2+s(3,3)x^3\\
&=\frac{2}{(\frac{2}{x})^3}\left[G_1^2(1-\frac{2}{x})^1+G_2^2(1-\frac{2}{x})^2\right]\\
&=\frac{x^3}{4}\left\{G_1^2\left[C_0^1(1)^1(-\frac{2}{x})^0+C_1^1(1)^0(-\frac{2}{x})^1\right]+G_2^2\left[C_0^2(1)^2(-\frac{2}{x})^0+C_1^2(1)^1(-\frac{2}{x})^1+C_2^2(1)^0(-\frac{2}{x})^2\right]\right\}\\
&=\frac{x^3}{4}\left[G_2^2C_2^2(-\frac{2}{x})^2+\left(G_1^2C_1^1+G_2^2C_1^2\right)(-\frac{2}{x})^1+\left(G_1^2C_0^1+G_2^2C_0^2\right)(-\frac{2}{x})^0\right]\\
&=G_2^2C_2^2x^1-\left(G_1^2C_1^1+G_2^2C_1^2\right)\frac{x^2}{2}+\left(G_1^2C_0^1+G_2^2C_0^2\right)\frac{x^3}{4}
\end{aligned}
$$

比較係數可得

$s(3,0)=0$ ， $s(3,1)=G_2^2C_2^2$ ， $s(3,2)=-\frac{G_1^2C_1^1+G_2^2C_1^2}{2}$ ， $s(3,3)=\frac{G_1^2C_0^1+G_2^2C_0^2}{4}$

觀察 8.2

觀察 6.3(2)中使用到 $x=\frac{3}{1-t}\Rightarrow t=\frac{x-3}{x}=1-\frac{3}{x}$

將 $t=1-\frac{3}{x}$ 代入 $s(4,0)x^0+s(4,1)x^1+s(4,2)x^2+s(4,3)x^3+s(4,4)x^4$

$=\frac{3}{(1-t)^4}(G_1^3t^1+G_2^3t^2+G_3^3t^3)$ 並展開得

$$
\begin{aligned}
&s(4,0)x^0+s(4,1)x^1+s(4,2)x^2+s(4,3)x^3+s(4,4)x^4\\
&=\frac{3}{(\frac{3}{x})^4}\left[G_1^3(1-\frac{3}{x})^1+G_2^3(1-\frac{3}{x})^2+G_3^3(1-\frac{3}{x})^3\right]\\
&=\frac{x^4}{27}\left\{G_1^3\left[C_0^1(1)^1(-\frac{3}{x})^0+C_1^1(1)^0(-\frac{3}{x})^1\right]+G_2^3\left[C_0^2(1)^2(-\frac{3}{x})^0+C_1^2(1)^1(-\frac{3}{x})^1+C_2^2(1)^0(-\frac{3}{x})^2\right]\right.\\
&\qquad\left.+G_3^3\left[C_0^3(1)^3(-\frac{3}{x})^0+C_1^3(1)^2(-\frac{3}{x})^1+C_2^3(1)^1(-\frac{3}{x})^2+C_3^3(1)^0(-\frac{3}{x})^3\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{x^4}{27}\left[\left(G_3^3C_3^3\right)(-\frac{3}{x})^3+\left(G_2^3C_2^2+G_3^3C_2^3\right)(-\frac{3}{x})^2+\left(G_1^3C_1^1+G_2^3C_1^2+G_3^3C_1^3\right)(-\frac{3}{x})^1\right.$$
$$\left.+\left(G_1^3C_0^1+G_2^3C_0^2+G_3^3C_0^3\right)(\frac{3}{x})^0\right]$$
$$=-\left(G_3^3C_3^3\right)x^1+\left(G_2^3C_2^2+G_3^3C_2^3\right)\frac{x^2}{3}-\left(G_1^3C_1^1+G_2^3C_1^2+G_3^3C_1^3\right)\frac{x^3}{9}$$
$$+\left(G_1^3C_0^1+G_2^3C_0^2+G_3^3C_0^3\right)\frac{x^4}{27}$$

比較係數可得

$s(4,0)=0$，$s(4,1)=-G_3^3C_3^3$，$s(4,2)=\dfrac{G_2^3C_2^2+G_3^3C_2^3}{3}$，

$s(4,3)=-\dfrac{G_1^3C_1^1+G_2^3C_1^2+G_3^3C_1^3}{9}$，$s(4,4)=\dfrac{G_1^3C_0^1+G_2^3C_0^2+G_3^3C_0^3}{27}$

接著便將n一般化為任意自然數如下：

定理 9.1

G_k^n 為 n 性生物中得到第 k 性子代的組合數，$C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，則第一型斯特林數 $s(n,k)=(-1)^{n-k}\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-k}^{n-m-1}}{(n-1)^{k-1}}=(-1)^{n-k}\dfrac{\sum_{m=n-k}^{n-1}G_m^{n-1}C_{n-k}^m}{(n-1)^{k-1}}$。

證明 同以上觀察，考慮 $x=\dfrac{n-1}{1-t}\Rightarrow t=\dfrac{x-(n-1)}{x}=1-\dfrac{n-1}{x}$

將 $t=1-\dfrac{n-1}{x}$ 代入

$$s(n,0)x^0+s(n,1)x^1+s(n,2)x^2+\cdots+s(n,i)x^i+\cdots+s(n,n-1)x^{n-1}+s(n,n)x^n$$
$$=\frac{n-1}{(1-t)^n}(G_1^{n-1}t^1+G_2^{n-1}t^2+G_3^{n-1}t^3+\cdots+G_i^{n-1}t^i+\cdots+G_{n-2}^{n-1}t^{n-2}+G_{n-1}^{n-1}t^{n-1})$$ 並展開得

$$s(n,0)x^0+s(n,1)x^1+s(n,2)x^2+\cdots+s(n,i)x^i+\cdots+s(n,n-1)x^{n-1}+s(n,n)x^n$$
$$=\frac{n-1}{(\frac{n-1}{x})^n}\left[G_1^{n-1}(1-\frac{n-1}{x})^1+G_2^{n-1}(1-\frac{n-1}{x})^2+G_3^{n-1}(1-\frac{n-1}{x})^3+\cdots\right.$$
$$\left.+G_i^{n-1}(1-\frac{n-1}{x})^i+\cdots+G_{n-2}^{n-1}(1-\frac{n-1}{x})^{n-2}+G_{n-1}^{n-1}(1-\frac{n-1}{x})^{n-1}\right]$$

$$=\frac{x^n}{(n-1)^{n-1}}\left\{G_1^{n-1}\left[C_0^1(1)^1(-\frac{n-1}{x})^0+C_1^1(1)^0(-\frac{n-1}{x})^1\right]\right.$$

$$+G_2^{n-1}\left[C_0^2(1)^2(-\frac{n-1}{x})^0+C_1^2(1)^1(-\frac{n-1}{x})^1+C_2^2(1)^0(-\frac{n-1}{x})^2\right]$$

$$+G_3^{n-1}\left[C_0^3(1)^3(-\frac{n-1}{x})^0+C_1^3(1)^2(-\frac{n-1}{x})^1+C_2^3(1)^1(-\frac{n-1}{x})^2+C_3^3(1)^0(-\frac{n-1}{x})^3\right]$$

$$+\cdots+G_i^{n-1}\sum_{k=0}^{i}\left[C_k^i(1)^{i-k}\left(-\frac{n-1}{x}\right)^k\right]+\cdots$$

$$+G_{n-2}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left[C_k^{n-2}(1)^{(n-2)-k}\left(-\frac{n-1}{x}\right)^k\right]$$

$$\left.+G_{n-1}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[C_k^{n-1}(1)^{(n-1)-k}\left(-\frac{n-1}{x}\right)^k\right]\right\}$$

$$=\frac{x^n}{(n-1)^{n-1}}\left[\left(G_{n-1}^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\right)(-\frac{n-1}{x})^{n-1}+\left(G_{n-2}^{n-1}C_{n-2}^{n-2}+G_{n-1}^{n-1}C_{n-2}^{n-1}\right)(-\frac{n-1}{x})^{n-2}\right.$$

$$+\cdots+\left(\sum_{k=n-i}^{n-1}G_k^{n-1}C_{n-i}^k\right)(-\frac{n-1}{x})^{n-i}+\cdots$$

$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{n-1}G_k^{n-1}C_1^k\right)(-\frac{n-1}{x})^1+\left(\sum_{k=0}^{n-1}G_k^{n-1}C_0^k\right)(-\frac{n-1}{x})^0\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)^{i-1}}\left(\sum_{k=n-i}^{n-1}G_k^{n-1}C_i^k\right)x^i\right]$$

由染色體組合數的對稱性亦可表示為

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)^{i-1}}\left(\sum_{k=0}^{i-1}G_{n-k-1}^{n-1}C_{n-i}^{n-k-1}\right)x^i\right]$$

比較係數則可得

$s(n,0)=0$ ， $s(n,1)=(-1)^{n-1}\left[\sum_{m=0}^{0}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-1}^{n-m-1}\right]$ ，

$s(n,2)=(-1)^{n-2}\dfrac{\left[\sum_{m=0}^{1}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-2}^{n-m-1}\right]}{(n-1)^1}$ ，… $s(n,k)=(-1)^{n-k}\dfrac{\left[\sum_{m=0}^{k-1}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-k}^{n-m-1}\right]}{(n-1)^{k-1}}\cdots$ ，

$s(n,n-2)=(-1)^2\dfrac{\left[\sum_{m=0}^{n-3}G_{n-m-1}^{n-1}C_2^{n-m-1}\right]}{(n-1)^{n-3}}$ ， $s(n,n-1)=(-1)^1\dfrac{\left[\sum_{m=0}^{n-2}G_{n-m-1}^{n-1}C_1^{n-m-1}\right]}{(n-1)^{n-2}}$ ，

$$s(n,n)=(-1)^0\frac{\left[\sum_{m=0}^{n-1}G_{n-m-1}^{n-1}C_0^{n-m-1}\right]}{(n-1)^{n-1}}$$

因此，$s(n,k)=(-1)^{n-k}\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-k}^{n-m-1}}{(n-1)^{k-1}}=(-1)^{n-k}\dfrac{\sum_{m=n-k}^{n-1}G_m^{n-1}C_{n-k}^{m}}{(n-1)^{k-1}}$。

定義 10.1 得到色盲基因的染色體

在兩性中，色盲的染色體組合有 X^-X^- (女性、第一性)與 X^-Y (男性，第二性)，今我們定義在 n 性生物中，各性別的色盲染色體組合為：$\underbrace{X^-X^-X^-\cdots X^-}_{n}$

(第一性)、$\underbrace{X^-X^-X^-\cdots X^-}_{n-1}Y$ (第二性)、$\underbrace{X^-X^-X^-\cdots X^-}_{n-2}YY$ (第三性)、

$\underbrace{X^-X^-X^-\cdots X^-}_{n-k+1}\underbrace{YYY\cdots Y}_{k+1}$ (第 k 性)、$X^-X^-\underbrace{YYY\cdots Y}_{n-2}$ (第 $(n-1)$ 性)、$X^-\underbrace{YYY\cdots Y}_{n-1}$

(第 n 性)，亦即在 k 性中，成為色盲的條件須具有 $(n-k+1)$ 個 X^-。

關於色盲基因的遺傳

在現今的地球上，有男女兩個性別，其性染色體分別為(XY)、(XX)。色盲的基因位於性染色體上，且會經由交配遺傳給下一代，且色盲這個基因位只於 X 染色體上。今假設 X 染色體上帶有色盲基因的機率為 p；X 染色體上未帶有色盲基因的機率為 q，滿足 $p+q=1$。

觀察 11.1 兩性中的色盲比例

現在，我們來思考一個問題：兩性中，色盲的人數占比會趨於理論值嗎？(此理論比例為子代的色盲比例不變時之比例)

表 7

兩性中各性別的色盲占比討論

女性(第一性)	X_1X_2 q^2	$X_1X_2^-$ $2qp$	$X_1^-X_2^-$ p^2
男性(第二性)	X_1Y_1 q	$X_1^-Y_1$ p	

其中表格內黑字為其染色體，紅字則為機率

特別地，$p^2+2pq+q^2=(p+q)^2=1$；$p+q=1$，而且因為理論狀態的男女比為 1:1，所以我們推測女色盲與男色盲占全人類的比率應分別為 $\frac{p^2}{2}$ 與 $\frac{p}{2}$。

今欲計算色盲的人數，我們只需考慮女性中的($X_1X_2^-$)、($X_1^-X_2^-$)和男性中(X_1Y_1)、($X_1^-Y_1$)互相交配的結果就行了，我們將計算過程以下列表格呈現：

表格 8-1

	X_1	X_2^-
X_1		
Y_1		$X_2^-Y_1$

表格 8-2

	X_1^-	X_2^-
X_1		
Y_1	$X_1^-Y_1$	$X_2^-Y_1$

表格 8-3

	X_1	X_2^-
X_1^-		$X_1^-X_2^-$
Y_1		$X_2^-Y_1$

表格 8-4

	X_1^-	X_2^-
X_1^-	$X_1^-X_1^-$	$X_1^-X_2^-$
Y_1	$X_1^-Y_1$	$X_2^-Y_1$

※表格中空白處之染色體形式為正常人，故不列出。

可知色盲比例應為:

$$2pq\times q\times\frac{1}{4}+p^2\times q\times\frac{1}{2}+2pq\times p\times\frac{1}{2}+p^2\times p$$

$$=\frac{1}{2}(2pq)(\frac{q}{2}+p)+p^2(\frac{q}{2}+p)$$

$$=\left(\frac{2pq}{2}+p^2\right)(\frac{q}{2}+p)$$

$$=p\left(p+q\right)(\frac{q}{2}+p)$$

$$=p(\frac{q}{2}+p)$$

$$=\frac{pq}{2}+p^2$$

$$=\frac{p\left(1-p\right)}{2}+p^2$$

$$=\frac{p}{2}-\frac{p^2}{2}+p^2=\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}$$

符合我們的推測女性男性色盲比例為$\frac{p^2}{2}:\frac{p}{2}$

這時候，我們將$(X_1X_2^-)$的比例令為a，$(X_1^-X_2^-)$比例令為b，(X_1Y_1)比例令為c，$(X_1^-Y_1)$比例令為d，我們可以將上列式子表達如下：

$$
\begin{aligned}
& ac\times\frac{1}{4}+bc\times\frac{1}{2}+ad\times\frac{1}{2}+bd \\
&=\frac{1}{4}\left(ac\times 1+bc\times 2+ad\times 2+bd\times 4\right) \\
&=\frac{1}{4}\left(a\left(c+2d\right)+2b\left(c+2d\right)\right) \\
&=\frac{1}{4}\left(a+2b\right)\left(c+2d\right) \\
&=\frac{1}{4}\left(2pq+p^2\right)\left(q+2p\right) \\
&=\frac{1}{4}2p\left(p+q\right)\left(p+1\right) \\
&=\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}
\end{aligned}
$$

根據$\frac{1}{4}\left(ac\times 1+ad\times 2+bc\times 2+bd\times 4\right)$這個式子，我們可以把它看成

$\frac{1}{2^2}\left(\sum \text{親代比例相乘}\times\text{權數}\right)$，其中「權數」代表可產生的色盲子代數量，如**表格**8.1權數為1；**表格**8.2權數為2；**表格**8.3權數為2；**表格**8.4權數為4

經運算後，可得到$\frac{1}{4}\left(a+2b\right)\left(c+2d\right)$這個式子，我們可以把它看成

$\frac{1}{2^2}\prod\left(\sum \text{同一性別之親代比例}\times\text{權數}\right)$ 其中「權數」代表X^-與Y數量之和。

如$\left(X_1X_2^-\right)$權數為1、$\left(X_1^-X_2^-\right)$權數為2、$\left(X_1Y_1\right)$權數為1、$\left(X_1^-Y_1\right)$權數為2

※這裡的親代，指的是有可能產生色盲子代的染色體形式，像是X_1X_2都無色盲基因，所以不必列入計算。

觀察 11.2 三性色盲的比例

接著，我們觀察三性別的狀況，定義第一性染色體為$(X_1X_2X_3)$、第二性染色體為$(X_1X_2Y_1)$、第三性染色體$(X_1Y_1Y_2)$，且色盲基因仍只存在於X染色體上，故得到下面這個表格：

表 9

三性生物的親代色盲比例

第一性	$X_1X_2X_3$ q^3	$X_1^-X_2X_3$ $3q^2p$	$X_1^-X_2^-X_3$ $3qp^2$	$X_1^-X_2^-X_3^-$ p^3
第二性	$X_1X_2Y_1$ q^2	$X_1^-X_2Y_1$ $2qp$	$X_1^-X_2^-Y_1$ p^2	
第三性	$X_1Y_1Y_2$ q	$X_1^-Y_1Y_2$ p		

欲產生色盲後代，第一性必為$(X_1^-X_2X_3)$、$(X_1^-X_2^-X_3)$、$(X_1^-X_2^-X_3^-)$，而第二性和第三性的所有基因型都可以(因為就算 X 染色體上無色盲基因，仍可提供 Y)，沿襲上面的想法$\frac{1}{3^3}\prod\left(\sum\text{同一性別之親代比例}\times\text{權數}\right)$，我們可以得到下面這個式子：

$$\frac{1}{3^3}\left(3q^2p+6qp^2+3p^3\right)\left(q^2+4qp+3p^2\right)\left(2q+3p\right)$$

$$=\frac{1}{27}3p\left(q+p\right)^2\left(q+p\right)\left(q+3p\right)\left(p+2\right)$$

$$=\frac{1}{27}3p\left(2p+1\right)\left(p+2\right)$$

$$=\frac{1}{27}\left(6p^3+15p^2+6p\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(2p^3+5p^2+2p\right)$$

得到各性別的色盲佔總人口的比例是$6p^3:15p^2:6p=2p^3:5p^2:2p$ 。

觀察 11.3 四性色盲的比例

接著，我們討論四個性別的狀況，將這四性以以下表格來定義之：

表 10

四性生物的親代色盲比例

第一性	$X_1X_2X_3X_4$ q^4	$X_1^-X_2X_3X_4$ $4q^3p$	$X_1^-X_2^-X_3X_4$ $6q^2p^2$	$X_1^-X_2^-X_3^-X_4$ $4qp^3$	$X_1^-X_2^-X_3^-X_4^-$ p^4
第二性	$X_1X_2X_3Y_1$ q^3	$X_1^-X_2X_3Y_1$ $3q^2p$	$X_1^-X_2^-X_3Y_1$ $3qp^2$	$X_1^-X_2^-X_3^-Y_1$ p^3	
第三性	$X_1X_2Y_1Y_2$ q^2	$X_1^-X_2Y_1Y_2$ $2qp$	$X_1^-X_2^-Y_1Y_2$ p^2		
第四性	$X_1Y_1Y_2Y_3$ q	$X_1Y_1Y_2Y_3$ p			

根據上面的想法$\frac{1}{4^4}\prod\left(\sum\text{同一性別之親代比例}\times\text{權數}\right)$，我們可以把子代的各性別比例這樣計算:

$$\frac{1}{4^4}\left(4q^3p+12q^2p^2+12qp^3+4p^4\right)\left(q^3+6q^2p+9qp^2+4p^3\right)\left(2q^2+6qp+4p^2\right)\left(3q+4p\right)$$
$$=\frac{1}{4^4}4p\left(q+p\right)^3\left(q+4p\right)\left(q+p\right)^2\left(q+2p\right)\left(2q+2p\right)\left(3+p\right)$$
$$=\frac{1}{64}\left(3p+1\right)\left(2p+2\right)\left(p+3\right)p$$
$$=\frac{1}{64}\left(6p^4+26p^3+26p^2+6p\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(3p^4+13p^3+13p^2+3p\right)$$

得到各性別的色盲佔總人口的比例是$6p^4:26p^3:26p^2:6p=3p^4:13p^3:13p^2:3p$

討論11.4　n 性色盲的比例

接著，我們嘗試推到n維，即有n個性別的狀況

第 m 性　　　　$\underbrace{\mathrm{XXX\cdots X}}_{n-m+1}\underbrace{\mathrm{YYY\cdots Y}}_{m-1}$

而且從上面 2 性、3 性、4 性的表格中，我們可以觀察到同一性之間，不同基因型的比例係數和巴斯卡三角形中的元素一樣，因此我們可以推論出：

在n性中，第m性中具有 k 個 X^- 的染色體的機率可以這樣表示$C_k^{n-m+1}q^{n-m+1-k}p^k$，$k$介在 0～$(n-m+1)$ 之間。

利用上面的計算$\frac{1}{n^n}\prod\left(\sum\text{同一性別之親代比例}\times\text{權數}\right)$，現在我們先計算

$\sum$同一性別之親代比例×權數

第 1 性：

$$C_1^n 1pq^{n-1}+C_2^n 2p^2q^{n-2}+C_3^n 3p^3q^{n-3}+\cdots+C_n^n np^n=\sum_{k=1}^{n}C_k^n kp^kq^{n-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}kp^kq^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(n-1\right)!}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!}p^kq^{n-k}\times n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}^{n-1}p^kq^{n-k}\times n=\sum_{k=0}^{n-1}C_k^n p^{k-1}q^{n-k-1}\times np$$
$$=\left(p+q\right)^{n-1}\times np=np$$

第 2 性：

$$C_0^{n-1}1q^{n-1}+C_1^{n-1}2pq^{n-2}+C_2^{n-1}3p^2q^{n-3}+\cdots C_{n-1}^{n-1}np^{n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_k^{n-1}p^kq^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p^kq^{n-1-k}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}kp^kq^{n-1-k}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}p^kq^{n-1-k}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}kp^kq^{n-1-k}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}p^kq^{n-1-k}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$=(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}p^kq^{n-1-k}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}p^kq^{n-1-k}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$=(n-1)p\sum_{k=1}^{n-1}p^{k-1}q^{n-1-k}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}+(p+q)^{n-1}$$

$$=(n-1)p(p+q)^{n-2}+1$$

$$=(n-1)p+1$$

第 3 性：

$$C_0^{n-2}2q^{n-2}+C_1^{n-2}3pq^{n-3}+C_2^{n-2}4p^2q^{n-4}+\cdots+C_{n-2}^{n-2}(n-1)p^{n-2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)p^kq^{n-2-k}C_k^{n-2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}kp^kq^{n-2-k}C_k^{n-2}+2\sum_{k=0}^{n-2}p^kq^{n-2-k}C_k^{n-2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}kp^kq^{n-2-k}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}+2\sum_{k=0}^{n-2}p^kq^{n-2-k}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}$$

$$=(n-2)p\sum_{k=0}^{n-2}p^{k-1}q^{n-2-k}\frac{(n-3)!}{(k-1)!(n-2-k)!}+2(p+q)^{n-2}$$

$$=(n-2)p(p+q)^{n-3}+2$$

$$=(n-2)p+2$$

第m性：

$$C_0^{n-m+1}(m-1)q^{n-m+1}+C_1^{n-m+1}(m)pq^{n-m}+C_2^{n-m+1}(m+1)p^2q^{n-m-1}+\cdots+C_{n-m+1}^{n-m+1}np^{n-m+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-m+1}(m-1+k)C_k^{n-m+1}p^kq^{n-m+1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-m+1}kC_k^{n-m+1}p^kq^{n-m+1-k}+(m-1)\sum_{k=0}^{n-m+1}C_k^{n-m+1}p^kq^{n-m+1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-m+1}k\frac{(n-m+1)!}{k!(n-m+1-k)!}p^kq^{n-m+1-k}+(m-1)\sum_{k=0}^{n-m+1}\frac{(n-m+1)!}{k!(n-m+1-k)!}p^kq^{n-m+1-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-m+1}k\frac{(n-m+1)!}{k!(n-m+1-k)!}p^kq^{n-m+1-k}+(m-1)\sum_{k=0}^{n-m+1}\frac{(n-m+1)!}{k!(n-m+1-k)!}p^kq^{n-m+1-k}$$

$$=(n-m+1)\sum_{k=1}^{n-m+1}\frac{(n-m)!}{(k-1)!(n-m+1-k)!}p^kq^{n-m+1-k}+(m-1)(p+q)^{n-m+1}$$

$$=(n-m+1)p\sum_{k=1}^{n-m+1}\frac{(n-m)!}{(k-1)!(n-m+1-k)!}p^{k-1}q^{n-m+1-k}+(m-1)$$

$$=(n-m+1)p(p+q)^{n-m}+(m-1)=(n-m+1)p+(m-1)$$

第$n-1$性：

$$C_0^2(n-2)q^2+C_1^2(n-1)pq+C_2^2np^2$$

$$=(n-2)q^2+2(n-2)pq+(n-2)p^2+2pq+2p$$

$$=(n-2)(p+q)^2+2p(p+q)$$

$$=2p+(n-2)$$

第n性：

$$C_0^1(n-1)q+C_1^1np=(n-1)q+np=(n-1)(p+q)+p=p+(n-1)$$

我們將以上各性計算所得的結果相乘再乘上$\frac{1}{n^n}$，即：

$$\frac{1}{n^n}(np)\left[(n-1)p+1\right]\left[(n-2)p+2\right]\times\cdots\left[(n-m+1)p+(m-1)\right]\cdots\times\left[2p+(n-2)\right]\left[p+(n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{n^n}\prod_{k=0}^{n-1}\left[(n-k)p+k\right]$$

展開後各項即為各性別的色盲佔總人口的比例。
我們發現，子代各性別的色盲理論比例是子代間各性別比再乘上色盲機率，意即 n 性中第 m 性的色盲機率為 $\frac{1}{n^n}G_m^n p^{n-m+1}$ ，也就是說，我們也可以由各性別間的色盲係數去反推其各性別之比。

討論12.1

在人類的性別中，男性表現色盲的機會是 $\frac{p}{2}$，女性表現色盲的機會是 $\frac{p^2}{2}$，因此，不論 p 的值為何，男性表現色盲的機會永遠大於女性(因為 $0 \le p \le 1$)。然而，特別地，因為在 $n\,(n \ge 2)$ 性中，各性(從第一性到第二性)的色盲比例是 $G_1^n p^n：G_2^n p^{n-1}：G_3^n p^{n-2}：\cdots G_k^n p^{n-k+1}：\cdots G_{n-1}^n p^2：G_n^n p^1$，再根據**引理 5.3** 得知染色體組合數具有對稱性，我們可以得知：在第 m 性中($m \ge \left[\frac{n}{2}\right]+1$)，當 p 大於一個值時，便可能發生擁有 X 染色體較多的性別得到色盲的機率反而大於擁有 X 染色體較少的性別。

定理12.2

在 n 性中，若要使第 m 性到色盲的機率大於第 $m+k$ 性，其中 $m \ge \left[\frac{n}{2}\right]+1$ 且 $m+k \le n$，則 $p \ge \sqrt[k]{\frac{G_{m+k}^n}{G_m^n}}$，$p$ 為 X 染色體上有色盲基因的機率。

例12.2.1

以六性為例，若要使第四性獲得色盲的比例的機率大於第五性，則 $p \ge \frac{G_5^6}{G_4^6} = \frac{6264}{16344} = \frac{87}{227}$，若要使第五性獲得色盲的比例的機率大於第六性，則 $p \ge \frac{G_6^6}{G_5^6} = \frac{720}{6264} = \frac{10}{87}$，若要使第四性獲得色盲的比例的機率大於第六性，則 $p \ge \sqrt{\frac{G_6^6}{G_4^6}} = \sqrt{\frac{720}{16344}} = \sqrt{\frac{10}{227}} \approx .21$。

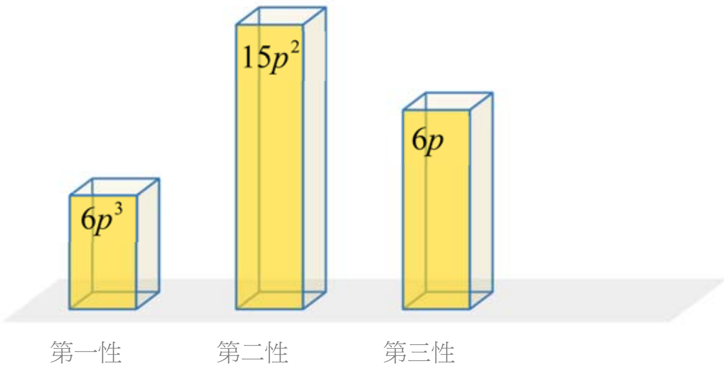


圖 3. 三性中當 $\sqrt{\dfrac{G_3^3}{G_2^3}}=\dfrac{2}{5}\le p<1$ 時各性別的色盲比

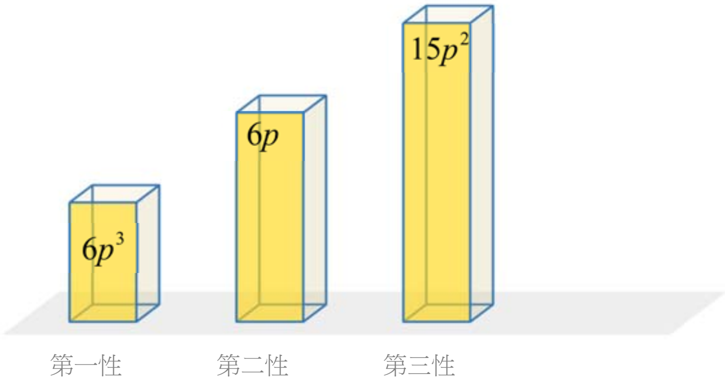


圖 4. 三性中當 $0<p<\dfrac{2}{5}=\sqrt{\dfrac{G_3^3}{G_2^3}}$ 時，性別的色盲比

因此，我們可以知道，當 p 小於某個值時，各性別色盲的佔比會隨著 Y 染色體數的增多而增大；當 p 大於某個值時，我們便可以控制 p 的範圍使得地 m 性的色盲比例大於第 $m+k$ 性。($m\ge\left[\dfrac{n}{2}+1\right]$ 且 $m+k\le n$)

討論13.1

如果我們已經知道 n 性生物患有色盲的機率，相反地我們則想知道是否能找出 X 染色體上帶有色盲基因的機率 p 之值為何。根據上面對色盲的研究，n 性生物中患有色盲的機率為 $\sum_{m=1}^{n}\dfrac{1}{n^n}G_m^n p^{n+1-m}$ ，我們假設此機率為 α ，可以得到如下之關係式：$\sum_{m=1}^{n}\dfrac{1}{n^n}G_m^n p^{n+1-m}=\alpha$ ；因此只要知道 α ，就能推導出 p 之值。

定理13.2

已知 n 性生物中患有色盲的機率為 α ，則可得知 X 染色體上帶有色盲基因的機率 p 符合方程式 $\sum_{m=1}^{n}\dfrac{1}{n^n}G_m^n p^{n+1-m}=\alpha$ ，即 p 為此一元 n 次式之解。

例13.2.1

兩性生物中，患有色盲的機率為$\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}$，若已知此機率為$\alpha$，則

$p=\frac{-1+\sqrt{1+8\alpha}}{2}$。

例13.2.2

三性生物中，患有色盲的機率為$\frac{2p^3}{9}+\frac{5p^2}{9}+\frac{2p}{9}=\alpha$，若已知此機率

$\alpha=\frac{1}{2}$，則可利用計算機推得p的近似值$p=0.6969$或$-1.5985\pm 0.82i$(不合)。

伍、 研究結果與討論

針對我們的研究問題，歸納以上的研究結果如下：

一、三性、四性中，各子代皆有理論比例，分別為$2:5:2$及$3:13:13:3$。

二、n性中，各性別之間亦有理論比例，為$\prod_{m=0}^{k-1}[(k-m)x+m]$中各項係數。

三、染色體組合數$\left\{G_k^n\right\}_{k=1}^{n}$的生成函數為$G_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left[(n-k+1)x+(k-1)\right]$，並可利用此生成函數或排容原理求出$G_k^n$

四、以第一型有符號斯特林數表示染色體組合數，其結果為：

$$G_k^n=(-1)^k\sum_{m=k}^{n}\left[s(n+1,n+1-m)C_k^m n^{n-m}\right]$$

以染色體組合數表示第一型有符號斯特林數，其結果為：

$$s(n,k)=(-1)^{n-k}\frac{\sum_{m=0}^{n-1}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-k}^{n-m-1}}{(n-1)^{k-1}}=(-1)^{n-k}\frac{\sum_{m=n-k}^{n-1}G_m^{n-1}C_{n-k}^{m}}{(n-1)^{k-1}}$$

五、利用色盲討論出的一般式乘開後所得之係數，亦為各性別之理論比例，可謂殊途同歸。若要使$n\ (n\geq 2)$性的第$m(m\geq\left[\frac{n}{2}\right]+1)$性表現色盲的機會大於地$m+k$性，則$p$必須大於$\sqrt[k]{\frac{G_{m+k}^n}{G_m^n}}$。

六、若已知現今$\frac{\text{表現色盲的生物}}{\text{全體生物}}$的值為$\alpha$，則可以藉由$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^n}G_m^n p^{n+1-m}=\alpha$解出X染色體中出現異常$X^-$的機率$p$。

陸、 結論

本研究中，我們從繁衍的角度出發，從最基礎的兩性開始，慢慢擴展至三性、四性，最後一般化 n 性。我們以自創的「染色體組合數」及排容原理和生成函數互相比較的方法，討論各個性別間的比例。接著，我們以斯特林數表達我們的染色體組合數，此外也反向地利用染色體組合數表示出斯特林數。最後，我們將其應用在遺傳疾病色盲上，並討論出在 n 性中， p 在各個不同的範圍時，在第 $m(m \geq \left[\frac{n}{2}\right]+1)$ 性以後的性別的大小關係會有不同的結果，我們亦可以利用現今表現色盲的比例反推出 X 染色體異常的 X^{-} 的機率 p ，在高次的情況下，則可以使用勘根定理，找出 p 的近似值。因為各個染色體上的基因檢驗成本較色盲檢查的成本高，所以本研究中利用現今表現色盲的比例反推出 X 染色體異常的 X^{-} 的機率 p ，提供了一個更經濟實惠的做法。

柒、 參考資料與其他

A.M.KHIDR；B.S.EL-DESOUKY. (1984). A Symmetric Sum Involving the Stirling Numbers of the First Kind. *European Journal of Combinatorics*(5), pp. 51-54.

El-Desouky, B. S., Mustafa, A., & Mahmoud, E. (2015). Some New Results on the Number of Paths. *Open Journal of Modelling and Simulation, 3*(3), pp. 63-69.

Sloane, N. J. (2020, 2 23). *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequence*. Retrieved from https://oeis.org/

尚強、胡炳生 (民 107)。 **問題解決與數學智慧**。 上海: 復旦大學出版社。

林福來 (譯著) (民 71)。 **組合數學**。 台北市: 中央圖書供應社。

陳界山 (民 108)。 **高中數學(二)**課本。 南一出版社。

維基百科 (民 108 年 7 月 3 日)。斯特林數。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/斯特林數

【評語】050411

本作品自創題目，很有創意，探討在假設有 n 種性別底下，在長期繁衍後之族群性別比。之後，並推廣兩性遺傳性色盲到 n 種性別情形下的色盲比例。前面的問題，是第一型 Stirling number 色盲的題目則稍微複雜一些，需多考慮機率 p 值的大小。整個作品利用了一些組合機率的技巧，有應用性。建議作者可以考慮較為複雜的 model，比如加入突變的因子，或假設馬可夫性質，都可以讓作品的層次更上一層樓。

作品海報

摘要

人類以兩性交配為生育方法，其子代性別比的理論值為1:1，本研究旨在探討當性別數 n 大於 2 時，由 n 性染色體組合出第 k 性子代染色體的方法數 G_k^n，再進而探討各性別所佔的比例之理論值。研究方法為藉由討論性染色體組合的方式，找出和$\{G_k^n\}$對應的生成函數。接著，再藉由比較$\{G_k^n\}$的生成函數和第一型斯特林數(Stirling Number of the 1st kind) $\{s(n+1,k)\}$的生成函數，嘗試使用斯特林數表示出 G_k^n 的一般式。對組合數 G_k^n 有基礎認識後，本研究同樣地再接著嘗試使用 G_k^n 表示斯特林數。最後再將 G_k^n 的研究結果應用至遺傳疾病色盲發病比例討論上，討論在不同性別數的生物中所呈現的關係。

研究目的

一、研究三性生物、四性生物中，性別比是否有理論值，其理論比例為何。

二、推廣至 n 性生物中，研究性別比是否也有理論值，其理論比例為何。

三、研究在 n 性生物中，第 k 性的性染色體組合數 G_k^n 的求法與其生成函數為何。

四、討論第一型有符號斯特林數 $s(n,k)$ 與性染色體組合數 G_k^n 間的關係。

五、應用至色盲的範疇，證明在 n 性生物中，色盲之佔比是否有理論值，找出其與性別間比例的關係，並說明是否有 X 染色體較多的性別表現色盲的機會卻大於 X 染色體較少的性別。

六、如何以現有之色盲比例反求 X 染色體異常(即 X^-)之機率。

名詞釋義

二性生物若要繁衍出新的一代，則需要兩者不同性別 XX、XY 中的各一條性染色體，才能組成新一代的性染色體組合。以此類推，我們定義 n 性生物的產生下一代的性染色體組合方式如下：

$n \geq 2$，$n \in N$，n 性生物中，繁衍下一代需要 n 種不同性別，第1性、第 2 性、第 3 性、…、第 n 性中的各一條性染色體，由 n 條性染色體方能組成新一代的性染色體組合。

以五性生物為例，繁衍下一代需要 $X_1X_1X_1X_1X_1$、$X_2X_2X_2X_2Y_2$、$X_3X_3X_3Y_3Y_3$、$X_4X_4Y_4Y_4Y_4$、$X_5Y_5Y_5Y_5Y_5$ 五者中的各一條性染色體。如此方能組合繁衍出如 $X_1X_2X_4Y_3Y_5$、$X_1X_3X_4Y_2Y_5$ 的第 3 性，但不會繁衍出有 $X_1X_1X_2Y_5Y_5$ 組合的第 3 性。

部分染色體組合數

n 性生物生出第 k 性子代的染色體組合數

n	G_1^n	G_2^n	G_3^n	G_4^n	G_5^n	G_6^n	$\cdots$	$\sum$
1	1	-	-	-	-	-	$\cdots$	1^1
2	2	2	-	-	-	-	$\cdots$	2^2
3	6	15	6	-	-	-	$\cdots$	3^3
4	24	104	104	24	-	-	$\cdots$	4^4
5	120	770	1345	770	120	-	$\cdots$	5^5
6	720	6264	16344	16344	6264	720	$\cdots$	6^6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$

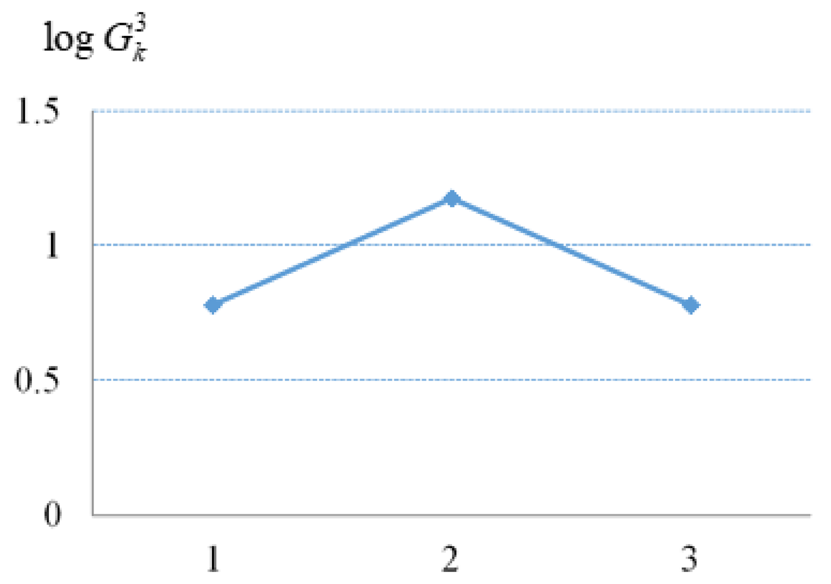


圖 1. $\log G_k^3$ 的增減情形

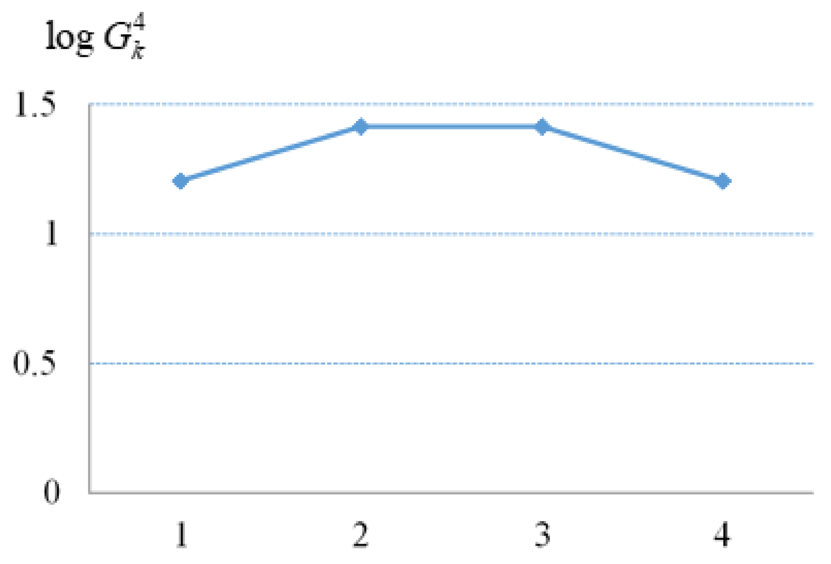


圖 2. $\log G_k^4$ 的增減情形

引理

引理 1

染色體組合數 $\left\{G_k^n\right\}_{k=1}^{n}$ 的生成函數為

$$G_n(x)=\prod_{k=1}^{n}[(n-k+1)x+(k-1)]=\sum_{k=0}^{n}G_k^n x^k=\sum_{k=0}^{n}G_{n+1-k}^n x^k$$

引理 2

斯特林數的生成函數

$$(x)_n=\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^k$$

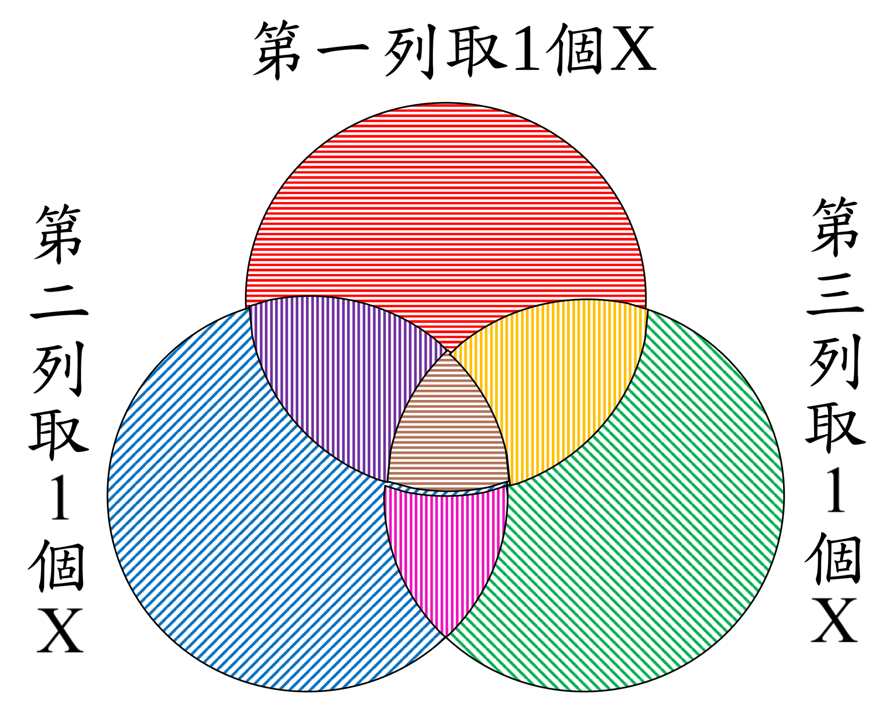
研究

研究 1　找出3性子代比例及其染色體組合數

方法 1　排容原理

$$G_1^3=(-1)^3C_3^3 s(4,1)\times 3^0$$
$$G_2^3=(-1)^2(C_2^2 s(4,2)\times 3^1+C_2^3 s(4,1)\times 3^0)$$
$$G_3^3=(-1)^1(C_1^1 s(4,3)\times 3^2+C_1^2 s(4,2)\times 3^1+C_1^3 s(4,1)\times 3^0)$$

推得 $G_k^3=(-1)^{n-k+1}\sum_{m=4-k}^{3}C_{4-k}^{m}s(4,4-m)\times 3^{3-m}$



方法 2　生成函數比較

利用 $x=\dfrac{3}{1-t}$ 找出斯特林生成函數與染色體組合數之間的關係為 $(x)_4=\dfrac{3}{(1-t)^4}G_3(t)$，再將等號兩邊展開並比較係數，可得到和方法1相同的結果

研究 2　反過來用染色體組合數表示斯特林數

方法　生成函數比較

將 $t=1-\dfrac{3}{x}$ 代入 $(x)_4=\dfrac{3}{(1-t)^4}G_3(t)$，再將等號兩邊展開並比較係數，

即可得到結果為 $s(4,k)=(-1)^{4-k}\dfrac{\sum_{m=0}^{3}G_{3-m}^{3}C_{4-k}^{3-m}}{3^{k-1}}$

定理

定理 1

G_k^n 的一般式為

$$G_k^n=(-1)^{n-k+1}\frac{\sum_{m=1}^{k}\left[s(n+1,m)C_{n+1-k}^{n+1-m}n^m\right]}{n}$$

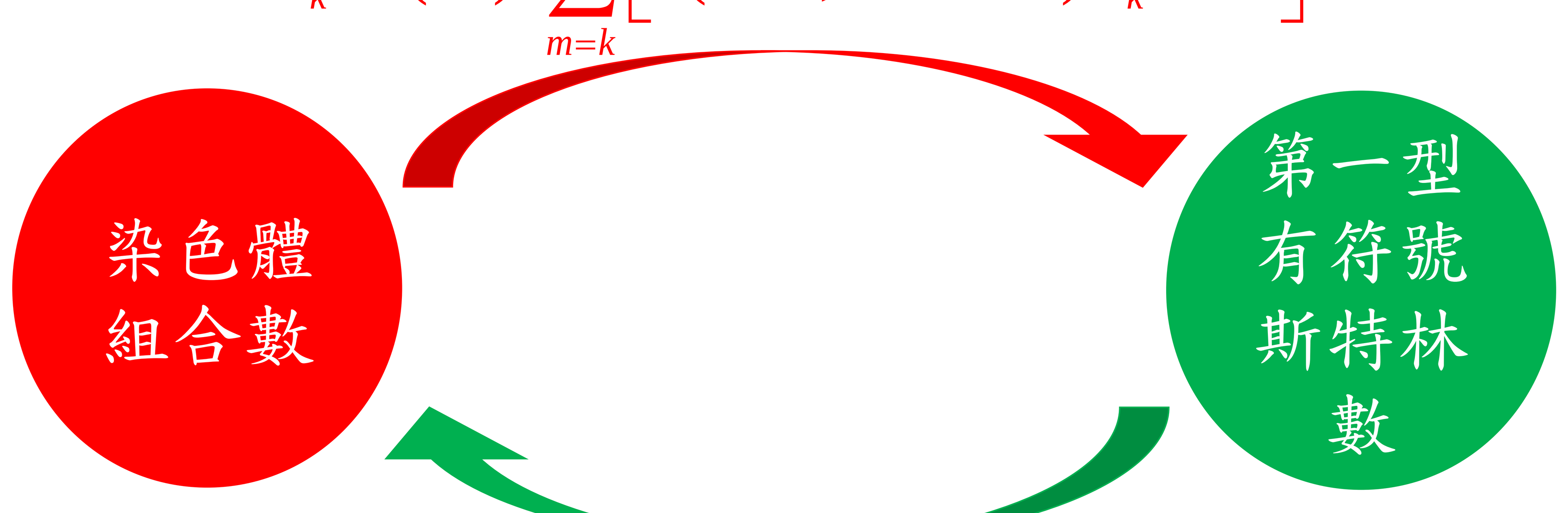
定理 2

$s(n,k)$和 G_k^n 之間的關係為

$$s(n,k)=(-1)^{n-k}\frac{\sum_{m=0}^{n-1}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-k}^{n-m-1}}{(n-1)^{k-1}}=(-1)^{n-k}\frac{\sum_{m=n-k}^{n-1}G_m^{n-1}C_{n-k}^{m}}{(n-1)^{k-1}}。$$

$s(n,k)$與 G_k^n 可互相表示：

$$G_k^n=(-1)^k\sum_{m=k}^{n}\left[s(n+1,n+1-m)C_k^m n^{n-m}\right]$$



$$s(n,k)=(-1)^{n-k}\frac{\sum_{m=0}^{n-1}G_{n-m-1}^{n-1}C_{n-k}^{n-m-1}}{(n-1)^{k-1}}=(-1)^{n-k}\frac{\sum_{m=n-k}^{n-1}G_m^{n-1}C_{n-k}^{m}}{(n-1)^{k-1}}$$

定義

定義成為色盲的充要條件為其 X 染色體上都須帶有色盲基因，以 X^- 表示。今我們定義在 n 性生物中，各性別的色盲染色體組合為：$\underbrace{X^-X^-X^-\cdots X^-}_{n-k+1}\underbrace{YYY\cdots Y}_{k+1}$ (第 k 性)，亦即在 k 性中，成為色盲的條件須具有 $(n-k+1)$ 個 X^-。

假設

今假設 X 染色體上帶有色盲基因的機率為 p，X 染色體上未帶有色盲基因的機率為 q，滿足 $p+q=1$

公式

n 性中色盲在各性別比例等於$\frac{1}{n^n}\sum$(同一性別色盲之親代比例×權數)

舉例

第一性	$X_1X_2X_3$ q^3	$X_1^-X_2X_3$ $3q^2p$	$X_1^-X_2^-X_3$ $3qp^2$	$X_1^-X_2^-X_3^-$ p^3
第二性	$X_1X_2Y_1$ q^2	$X_1^-X_2Y_1$ $2qp$	$X_1^-X_2^-Y_1$ p^2	
第三性	$X_1Y_1Y_2$ q	$X_1^-Y_1Y_2$ p		

$6p^3:15p^2:6p=2p^3:5p^2:2p$

結論

利用公式，得到$\frac{1}{n^n}\prod_{k=0}^{n-1}\left[(n-k)p+k\right]$展開後各項即為各性別的色盲佔總人口的比例。意即 n 性中第 m 性的色盲機率為$\frac{1}{n^n}G_m^n p^{n-m+1}$。也就是說，我們也可以由各性別間的色盲係數去反推其各性別之比。

定理

在 n 性中，若要使第 m 性到色盲的機率大於第$(m+k)$性，其中$m+k\le n$且 $m\ge\left[\frac{n}{2}\right]+1$，則 $p\ge\sqrt[k]{\frac{G_{m+k}^n}{G_m^n}}$，$p$為X染色體上面有色盲基因的機率。

定理

已知 n 性生物中患有色盲的機率為 a，則可得知 X 染色體上帶有色盲基因的機率 p 符合方程式 $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^n}G_m^n p^{n+1-m}=a$，即 p 為此一元 n 次式之解。

參考資料

A.M.KHIDR；B.S.EL-DESOUKY. (1984). A Symmetric Sum Involving the Stirling Numbers of the First Kind. *European Journal of Combinatorics*(5), pp. 51-54.

El-Desouky, B. S., Mustafa, A., & Mahmoud, E. (2015). Some New Results on the Number of Paths. *Open Journal of Modelling and Simulation, 3*(3), pp. 63-69.

Sloane, N. J. (2020, 2 23). *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequence*. Retrieved from https://oeis.org/

尚強、胡炳生 (民107)。 **問題解決與數學智慧**。 上海: 復旦大學出版社。

林福來 (譯著) (民71)。 **組合數學**。 台北市: 中央圖書供應社。

陳界山 (民108)。 **高中數學(二)**課本。 南一出版社。

維基百科 (民108年7月3日)。斯特林數。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/斯特林數