中華民國第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050410

錯中有序-部分錯排列的關係與討論

學校名稱：國立中科實驗高級中學

作者：	指導老師：
高二 李云瑄 高二 洪元甫 高二 徐偉博	林勝隆

關鍵詞：錯排列、遞迴關係式

摘要

把n個箱子依序編號後排成一排，接著把n顆球也依序編號，這樣一來每個球都有相對應的箱子可以放入。如果今天我們隨意的將球放置在箱子裡，再觀察球跟箱子的編號是否一致，我們可以發現到三種情形：

第一種：每顆球剛好都放進所對應號碼的箱子

第二種：有些球剛好放進所對應號碼的箱子，而有些沒有

第三種：每顆球皆沒有放進所對應號碼的箱子

除了第一種之外，其他兩種有很多種排列的方法數，在考量到排列總數量或是錯誤排列個數這兩個變因後，最後我們得出一個關係式為

$$f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n+x-t-y+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{t+y}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{t}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+x,t+y)$$ ，其中$n,t,x,y\in N$且$n\ge t>1$、$n+x\ge t+y>1$

壹、　研究動機

在高一下學期的排列組合課程中，老師在自製講義中補充了一個名詞—錯排列。錯排列的意思是一個排列中有一個以上的元素不在自己原來的位置上，那麼這樣的排列就稱為錯排列。其中錯排列又分為全錯排列和部分錯排列。老師有叮嚀我們要將幾個常見全錯排列的組合個數背起來，但在使用的過程中，我們發現全錯排列的方法數有一個很特別的關係⇒令$f(n)$為n個數的全錯排列方法數，則$f(n)$會滿足$f(n+2)=\left[f(n)+f(n+1)\right]\times(n+1)$，其中$n\ge 1$。

我們原本想要證明此關係式，但查閱了幾篇文獻發現已經不少人做過全錯排列研究了，我們便想要更進一步的去了解既然全錯排列的方法數能用遞迴關係式表達，那部分錯排列是否也擁有其特別的關係式？於是開始了我們的探討與研究。

貳、　研究目的

若n個數排列，其中有t個數排錯的部分錯排列方法數以$f(n,t)$表示，其中$n,t\in N$且$n\ge t>1$，因為在錯排列中錯誤排列的個數不會比總排列個數多，否則不成立。本研究目的如下：

一、當n個數與$n+1$個數分別進行排列，且皆有t個數排列錯誤時，$f(n+1,t)$與$f(n,t)$的關係為何？

二、當n個數進行排列，且分別有t個數及$t+1$個數排列錯誤時，$f(n,t+1)$與$f(n,t)$的關係為何？

三、當 t 分別為 n 及 $n-1$ 時，$f(n,n)$ 與 $f(n,n-1)$ 的關係為何？

四、當 t 相隔 2 時，$\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$ 與 $\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$ 的關係為何？

五、當 t 相隔 y 時，$\dfrac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$ 與 $\dfrac{f(n,t+y)}{f(n,t)}$ 的關係為何？

六、當 n 相隔 x，t 相隔 y 時，$f(n,t)$ 與 $f(n+x,t+y)$ 的關係為何？

參、 研究設備及器材

筆、計算紙、計算機、電腦、mathtype

肆、 研究過程或方法

一、 說明及定義

1. 在研究中，所探討的排列方式都是以直線排列，其餘排列方式不在我們的探討範圍內。
2. 錯誤排列：在直線排列中，我們可以假設每個物品皆有其相對應的號碼相對應的位置，如果物品不在其對應位置，便稱為錯誤排列。
3. 找到關係式後，我們會利用數學歸納法來證明我們得出的公式是否在任何情況下皆成立。

二、 研究方法

在本次實驗中，我們將會用到下列公式來計算部分錯排列的數量

$f(n,t)=C_t^n\left[C_0^t\times t!-C_1^t\times(t-1)!+C_2^t\times\left(t-2\right)!-\cdots+C_t^t\times(-1)^t\times 0!\right]$，其中 $n,t\in N$ 且 $n\geq t$

根據上面的公式，如果我們已經知道 t 的全錯排列個數，則我們可以令 D_t 為 t 的全錯排列個數，將算式簡化為

$f(n,t)=C_t^n\times D_t$

三、 研究過程

我們先把個數 2~7 的部分錯排列個數列算出來，整理後可得到以下的表格：

	第一行	第二行	第三行	第四行	第五行	第六行
第一列	$f(2,2)=1$	$f(3,2)=3$	$f(4,2)=6$	$f(5,2)=10$	$f(6,2)=15$	$f(7,2)=21$
第二列		$f(3,3)=2$	$f(4,3)=8$	$f(5,3)=20$	$f(6,3)=40$	$f(7,3)=70$
第三列			$f(4,4)=9$	$f(5,4)=45$	$f(6,4)=135$	$f(7,4)=315$
第四列				$f(5,5)=44$	$f(6,5)=264$	$f(7,5)=924$
第五列					$f(6,6)=265$	$f(7,6)=1855$
第六列						$f(7,7)=1854$

◆ 表一：排列個數 2~7 的部分錯排列個數

1. 我們先從每一列中的相鄰兩項開始找其關係，而我們分列討論後發現

第一列：$\frac{f(3,2)}{f(2,2)}=\frac{3}{1}$ 、 $\frac{f(4,2)}{f(3,2)}=\frac{4}{2}$ 、 $\frac{f(5,2)}{f(4,2)}=\frac{5}{3}$ 、 $\frac{f(6,2)}{f(5,2)}=\frac{6}{4}$ 、 $\frac{f(7,2)}{f(6,2)}=\frac{7}{5}$

第二列：$\frac{f(4,3)}{f(3,3)}=\frac{4}{1}$ 、 $\frac{f(5,3)}{f(4,3)}=\frac{5}{2}$ 、 $\frac{f(6,3)}{f(5,3)}=\frac{6}{3}$ 、 $\frac{f(7,3)}{f(6,3)}=\frac{7}{4}$ 、 $\frac{f(8,3)}{f(7,3)}=\frac{8}{5}$

第三列：$\frac{f(5,4)}{f(4,4)}=\frac{5}{1}$ 、 $\frac{f(6,4)}{f(5,4)}=\frac{6}{2}$ 、 $\frac{f(7,4)}{f(6,4)}=\frac{7}{3}$ 、 $\frac{f(8,4)}{f(7,4)}=\frac{8}{4}$ 、 $\frac{f(9,4)}{f(8,4)}=\frac{9}{5}$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

由此我們推出的公式為 $f(n+1,t)=\frac{n+1}{n+1-t}\times f(n,t)$

用數學歸納法證明如下：

當 $n=2$ 時，

$f(2,t)\times\frac{3}{3-t}$

$=C_t^2\times D_t\times\frac{3}{3-t}$

$=\frac{2!}{t!(2-t)!}\times\frac{3}{3-t}\times D_t$

$=C_t^3\times D_t$

$=f(3,t)$成立

設$n=k$時成立，即$f(k,t)\times\dfrac{k+1}{k+1-t}=f(k+1,t)$

則$n=k+1$時，

$$f(k+1,t)\times\frac{(k+1)+1}{(k+1)+1-t}$$

$$=f(k,t)\times\frac{k+1}{k+1-t}\times\frac{(k+1)+1}{(k+1)+1-t}$$

$$=C_t^k\times D_t\times\frac{(k+1)(k+2)}{(k+1-t)(k+2-t)}$$

$$=\frac{(k+2)!}{t!(k+2-t)!}\times D_t$$

$$=C_t^{k+2}\times D_t$$

$=f(k+2,t)$成立

2. 接著我們找每一行中，相鄰兩項的關係，我們分行討論後發現

第三行：$\dfrac{f(4,3)}{f(4,2)}=\dfrac{4}{3}$、$\dfrac{f(4,4)}{f(4,3)}=\dfrac{9}{8}$

第四行：$\dfrac{f(5,3)}{f(5,2)}=\dfrac{2}{1}$、$\dfrac{f(5,4)}{f(5,3)}=\dfrac{9}{4}$、$\dfrac{f(5,5)}{f(5,4)}=\dfrac{44}{45}$

第五行：$\dfrac{f(6,3)}{f(6,2)}=\dfrac{8}{3}$、$\dfrac{f(6,4)}{f(6,3)}=\dfrac{27}{8}$、$\dfrac{f(6,5)}{f(6,4)}=\dfrac{8}{45}$、$\dfrac{f(6,6)}{f(6,5)}=\dfrac{265}{264}$

⋮

⋮

由此我們推出的公式為$f(n,t+1)=\dfrac{n-t}{t+1}\times\dfrac{D_{t+1}}{D_t}\times f(n,t)$

用數學歸納法證明如下：

當$t=2$時，

$$f(n,2)\times\frac{n-2}{2+1}\times\frac{D_3}{D_2}$$

$$=C_2^n\times D_2\times\frac{D_3}{D_2}\times\frac{n-2}{3}$$

$$=\frac{n!}{2!(n-2)!}\times\frac{n-2}{3}\times D_3$$

$$=\frac{n!}{3!(n-3)!}\times D_3$$

$$=C_3^n\times D_3$$

$=f(n,3)$成立

設 $t=k$ 時成立，即 $f(n,k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{D_{(k+1)}}{D_k}=f(n,k+1)$

則 $t=k+1$ 時，

$$f(n,k+1)\times\frac{n-(k+1)}{(k+1)+1}\times\frac{D_{[(k+1)+1]}}{D_{(k+1)}}$$

$$=f(n,k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{D_{(k+1)}}{D_k}\times\frac{n-(k+1)}{(k+1)+1}\times\frac{D_{[(k+1)+1]}}{D_{(k+1)}}$$

$$=C_k^n\times D_k\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{D_{(k+2)}}{D_k}\times\frac{n-(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+1)(k+2)}\times D_{(k+2)}$$

$$=C_{k+2}^n\times D_{(k+2)}$$

$=f(n,k+2)$ 成立

3. 而我們發現每一行中的倒數兩項，皆有 ±1 的關係，我們分行討論後發現

$f(3,2)=f(3,3)+1$

$f(4,3)+1=f(4,4)$

$f(5,4)=f(5,5)+1$

$f(6,5)+1=f(6,6)$

⋮

⋮

由此我們推出的公式為

當 $t=n$ 時， $f(n,n-1)+D_n-n\times D_{n-1}=f(n,n)\Rightarrow f(n,n-1)+(-1)^n=f(n,n)$

證明如下：

$f(n,n)-f(n,n-1)$

$$=C_n^nD_n-C_1^n\times D_{n-1}$$

$$=D_n-n\times D_{n-1}$$

$$=[C_0^nn!-C_1^n(n-1)!+C_2^n(n-2)!-\cdots-C_{n-1}^n(-1)^{n-1}\times1!+C_n^n(-1)^n\times0!]$$

$$-n[C_0^{n-1}(n-1)!-C_1^{n-1}(n-2)!+C_2^{n-1}(n-3)!-\cdots+C_{n-1}^{n-1}(-1)^{n-1}\times0!]$$

$$=[C_0^nn!-nC_0^{n-1}(n-1)!]-[C_1^n(n-1)!-nC_1^{n-1}(n-2)!]+\cdots-[C_{n-1}^n(-1)^{n-1}\times1!+nC_{n-1}^{n-1}(-1)^n\times0!]$$

$+[C_n^n(-1)^n \times 0!]$

$=0+0+\cdots+(-1)^n=(-1)^n$

亦可用數學歸納法證明 $f(n,n-1)+D_n-n\times D_{n-1}=f(n,n)$

當 $n=3$ 時，

$f(3,2)+D_3-3\times D_2$

$=C_2^3\times D_2+D_3-3\times D_2$

$=3\times D_2+D_3-3\times D_2$

$=D_3$

$=f(3,3)$ 成立

設 $n=k$ 時成立，即 $f(k,k-1)+D_k-k\times D_{k-1}=f(k,k)$

則 $n=k+1$ 時，

$f(k+1,k)+D_{k+1}-(k+1)\times D_k$

$=C_k^{k+1}\times D_k+D_{k+1}-(k+1)\times D_k$

$=\dfrac{(k+1)!}{k!}\times D_k+D_{k+1}-(k+1)\times D_k$

$=(k+1)\times D_k+D_{k+1}-(k+1)\times D_k$

$=D_{k+1}$

$=f(k+1,k+1)$ 成立

4-1. 接著我們把相隔兩列相除，分項討論後我們發現

$\dfrac{\text{第三列}}{\text{第一列}}$ ： $\dfrac{f(4,4)}{f(4,2)}+\dfrac{6}{2}=\dfrac{f(5,4)}{f(5,2)}$ 、 $\dfrac{f(5,4)}{f(5,2)}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{f(6,4)}{f(6,2)}$ 、 $\dfrac{f(6,4)}{f(6,2)}+\dfrac{12}{2}=\dfrac{f(7,4)}{f(7,2)}$

$\dfrac{\text{第四列}}{\text{第二列}}$ ： $\dfrac{f(5,5)}{f(5,3)}+\dfrac{22}{5}=\dfrac{f(6,5)}{f(6,3)}$ 、 $\dfrac{f(6,5)}{f(6,3)}+\dfrac{33}{5}=\dfrac{f(7,5)}{f(7,3)}$ 、 $\dfrac{f(7,5)}{f(7,3)}+\dfrac{44}{5}=\dfrac{f(8,5)}{f(8,3)}$

$\dfrac{\text{第五列}}{\text{第三列}}$ ： $\dfrac{f(6,6)}{f(6,4)}+\dfrac{106}{27}=\dfrac{f(7,6)}{f(7,4)}$ 、 $\dfrac{f(7,6)}{f(7,4)}+\dfrac{159}{27}=\dfrac{f(8,6)}{f(8,4)}$ 、 $\dfrac{f(8,6)}{f(8,4)}+\dfrac{212}{27}=\dfrac{f(9,6)}{f(9,4)}$

$\vdots$

$\vdots$

由此我們推出的關係式為 $\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}+2\times\dfrac{D_{t+2}}{D_t}\times\dfrac{t!}{(t+2)!}\times(n-t)=\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$

用數學歸納法證明如下：

當 $n=4$ 時，

$\dfrac{f(4,t+2)}{f(4,t)}+2\times\dfrac{D_{t+2}}{D_t}\times\dfrac{t!}{(t+2)!}\times(4-t)$

$$=\frac{C_{t+2}^{4}}{C_{t}^{4}}\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}+2\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}\times\frac{t!}{(t+2)!}\times(4-t)$$

$$=\left[\frac{C_{t+2}^{4}}{C_{t}^{4}}+2\times\frac{t!}{(t+2)!}\times(4-t)\right]\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\left[\frac{\dfrac{4!}{(t+2)!(-t+2)!}}{\dfrac{4!}{t!(-t+4)!}}+\frac{2(4-t)}{(t+2)(t+1)}\right]\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\left[\frac{(-t+4)(-t+3)}{(t+2)(t+1)}+\frac{2(-t+4)}{(t+2)(t+1)}\right]\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\left[\frac{(-t+4)(-t+5)}{(t+2)(t+1)}\right]\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\left[\frac{t!}{(t+2)!}\times\frac{(-t+5)!}{(-t+3)!}\right]\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\frac{\dfrac{5!}{(t+2)!(-t+3)!}}{\dfrac{5!}{t!(-t+5)!}}\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\frac{C_{t+2}^{5}}{C_{t}^{5}}\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\frac{f(5,n+2)}{f(5,t)}\text{成立}$$

設$n=k$時成立，即$\dfrac{f(k,t+2)}{f(k,t)}+2\times\dfrac{D_{t+2}}{D_{t}}\times\dfrac{t!}{(t+2)!}\times(k-t)=\dfrac{f(k+1,t+2)}{f(k+1,t)}$

則$n=k+1$時，

$$\frac{f(k+1,t+2)}{f(k+1,t)}+2\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}\times\frac{t!}{(t+2)!}\times\left[(k+1)-t\right]$$

$$=\frac{f(k,t+2)}{f(k,t)}+2\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}\times\frac{t!}{(t+2)!}\times(k-t)+2\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}\times\frac{t!}{(t+2)!}\times\left[(k+1)-t\right]$$

$$=\frac{C_{t+2}^{k}}{C_{t}^{k}}\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}+2\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}\times\frac{t!}{(t+2)!}\times(k-t)+2\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}\times\frac{t!}{(t+2)!}\times\left[(k+1)-t\right]$$

$$=\left\{\frac{\dfrac{k!}{(t+2)!(k-t-2)!}}{\dfrac{k!}{t!(k-t)!}}+2\times\frac{t!}{(t+2)!}\times(k-t)+2\times\frac{t!}{(t+2)!}\times\left[(k+1)-t\right]\right\}\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\left\{\frac{t!}{(t+2)!}\times(k-t)(k-t-1)+\frac{t!}{(t+2)!}\times2\times(k-t)+\frac{t!}{(t+2)!}\times2\times\left[(k+1)-t\right]\right\}\times\frac{D_{t+2}}{D_{t}}$$

$$=\frac{(k-t)(k-t-1)+2\times(k-t)+2\times(k-t+1)}{(t+2)(t+1)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{(k-t+2)(k-t+1)}{(t+2)(t+1)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{t!}{(t+2)!}\times\frac{(k-t+2)!}{(k-t)!}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{\dfrac{(k+2)!}{(t+2)!(k-t)!}}{\dfrac{(k+2)!}{t!(k-t+2)!}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{C_{t+2}^{k+2}}{C_t^{k+2}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{f(k+2,t+2)}{f(k+2,t)}\text{成立}$$

4.2. 除了有二階等差的關係式以外，我們還發現其另一種的關係

$$\frac{\text{第三列}}{\text{第一列}}：\frac{f(4,4)}{f(4,2)}\times\frac{3}{1}=\frac{f(5,4)}{f(5,2)}、\frac{f(5,4)}{f(5,2)}\times\frac{4}{2}=\frac{f(6,4)}{f(6,2)}、\frac{f(6,4)}{f(6,2)}\times\frac{5}{3}=\frac{f(7,4)}{f(7,2)}$$

$$\frac{\text{第四列}}{\text{第二列}}：\frac{f(5,5)}{f(5,3)}\times\frac{3}{1}=\frac{f(6,5)}{f(6,3)}、\frac{f(6,5)}{f(6,3)}\times\frac{4}{2}=\frac{f(7,5)}{f(7,3)}、\frac{f(7,5)}{f(7,3)}\times\frac{5}{3}=\frac{f(8,5)}{f(8,3)}$$

$$\frac{\text{第五列}}{\text{第三列}}：\frac{f(6,6)}{f(6,4)}\times\frac{3}{1}=\frac{f(7,6)}{f(7,4)}、\frac{f(7,6)}{f(7,4)}\times\frac{4}{2}=\frac{f(8,6)}{f(8,4)}、\frac{f(8,6)}{f(8,4)}\times\frac{5}{3}=\frac{f(9,6)}{f(9,4)}$$

$\vdots$

$\vdots$

其關係式為 $\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}\times\dfrac{n-t+1}{n-t-1}=\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$

用數學歸納證明如下：

當 $n=4$ 時，

$$\frac{f(4,t+2)}{f(4,t)}\times\frac{(4-t+1)}{(4-t-1)}$$

$$=\frac{C_{t+2}^{4}}{C_t^{4}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}\times\frac{(5-t)}{(3-t)}$$

$$=\frac{\dfrac{4!}{(t+2)!(-t+2)!}}{\dfrac{4!}{t!(-t+4)!}}\times\frac{(5-t)}{(3-t)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{(-t+4)(-t+3)}{(t+2)(t+1)}\times\frac{(-t+5)}{(-t+3)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{(-t+5)(-t+4)}{(t+2)(t+1)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{t!}{(t+2)!}\times\frac{(-t+5)!}{(-t+3)!}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{\dfrac{5!}{(t+2)!(-t+3)!}}{\dfrac{5!}{t!(-t+5)!}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{C_{t+2}^{5}}{C_t^{5}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{f(5,t+2)}{f(5,t)}$$成立

設$n=k$時成立，即$\dfrac{f(k,t+2)}{f(k,t)}\times\dfrac{(k-t+1)}{(k-t-1)}=\dfrac{f(k+1,t+2)}{f(k+1,t)}$

則$n=k+1$時，

$$\frac{f(k+1,t+2)}{f(k+1,t)}\times\frac{(k+1)-t+1}{(k+1)-t-1}$$

$$=\frac{f(k,t+2)}{f(k,t)}\times\frac{(k-t+1)}{(k-t-1)}\times\frac{(k-t+2)}{(k-t)}$$

$$=\frac{C_{t+2}^{k}}{C_t^{k}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}\times\frac{(k-t+1)(k-t+2)}{(k-t)(k-t-1)}$$

$$=\frac{\dfrac{k!}{(t+2)!(k-t-2)!}}{\dfrac{k!}{t!(k-t)!}}\times\frac{(k-t+1)(k-t+2)}{(k-t)(k-t-1)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{t!(k-t)!}{(t+2)!(k-t-2)!}\times\frac{(k-t+1)(k-t+2)}{(k-t)(k-t-1)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{t!(k-t+2)!}{(t+2)!(k-t)!}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{\dfrac{(k+2)!}{(t+2)!(k-t)!}}{\dfrac{(k+2)!}{t!(k-t+2)!}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{C_{t+2}^{k+2}}{C_t^{k+2}}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}$$

$$=\frac{f(k+2,t+2)}{f(k+2,t)}$$成立

5-1. 我們從研究過程 4-1 發現到當相隔兩列相除時，$\frac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$ 與 $\frac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$ 有著二階等差的關係，而我們進一步推測 $\frac{f(n,t+3)}{f(n,t)}$ 與 $\frac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$ 為三階等差的關係，於是我們把相隔三列的值算出來並製成下面兩張圖，如圖一、圖二：

$\frac{第四列}{第一列}$：

$$\frac{f(5,5)}{f(5,2)} \quad \frac{f(6,5)}{f(6,2)} \quad \frac{f(7,5)}{f(7,2)} \quad \frac{f(8,5)}{f(8,2)} \quad \frac{f(9,5)}{f(9,2)}$$

$$\frac{198}{15} \quad \frac{396}{15} \quad \frac{660}{15} \quad \frac{990}{15}$$

$$\frac{198}{15} \quad \frac{264}{15} \quad \frac{330}{15}$$

$$\frac{66}{15} \quad \frac{66}{15}$$

◆ 圖一：將第四列除以第一列的關係圖

$\frac{第五列}{第二列}$：

$$\frac{f(6,6)}{f(6,3)} \quad \frac{f(7,6)}{f(7,3)} \quad \frac{f(8,6)}{f(8,3)} \quad \frac{f(9,6)}{f(9,3)} \quad \frac{f(10,6)}{f(10,3)}$$

$$\frac{159}{8} \quad \frac{318}{8} \quad \frac{530}{8} \quad \frac{795}{8}$$

$$\frac{159}{8} \quad \frac{212}{8} \quad \frac{265}{8}$$

$$\frac{53}{8} \quad \frac{53}{8}$$

◆ 圖二：將第五列除以第二列的關係圖

根據上圖，我們發現當相隔三列時，有三階等差的關係，剛好證明我們的推測是正確的。我們找出當相隔三列相除時，其為三階等差的關係後，我們才進一步的去找其關係式，而最後我們成功計算出當相隔三列相除時，$\frac{f(n,t+3)}{f(n,t)}$ 與 $\frac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$ 的關係式為

$\frac{f(n,t+3)}{f(n,t)}+3(n-t-1)\times\frac{D_{t+3}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+3)!}\times(n-t)=\frac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$ ；接著我們也用相同的方法去

證明當相隔四列相除時，其關係為四階等差，並求得關係式為

$$\frac{f(n,t+4)}{f(n,t)}+4(n-t-1)(n-t-2)\times\frac{D_{t+4}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+4)!}\times(n-t)=\frac{f(n+1,t+4)}{f(n+1,t)}$$

。於是我們大膽推論，當相隔 y 列時，$\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}$ 與 $\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$ 的關係為 y 階等差，且關係式為

$$\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}+y\frac{\prod_{i=n-t-y+2}^{n-t} i}{n-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(n-t)=\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$$

用數學歸納法證明如下：

當 $n=4$ 時，

$$\frac{f(4,t+y)}{f(4,t)}+y\times\frac{\prod_{i=4-t-y+2}^{4-t} i}{4-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(4-t)$$

$$=\frac{C^4_{t+y}}{C^4_t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}+y\times\frac{\prod_{i=4-t-y+2}^{4-t} i}{4-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(4-t)$$

$$=\left[\frac{C^4_{t+y}}{C^4_t}+y\times\frac{(3-t)!}{(5-t-y)!}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(4-t)\right]\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left[\frac{\frac{4!}{(t+y)!(4-t-y)!}}{\frac{4!}{t!(4-t)!}}+y\times\frac{(3-t)!}{(5-t-y)!}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(4-t)\right]\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left[\frac{t!(4-t)!}{(t+y)!(4-t-y)!}+y\times\frac{(3-t)!}{(5-t-y)!}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(4-t)\right]\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left[\frac{(4-t)!(5-t-y)+y(3-t)!(4-t)}{(5-t-y)!}\right]\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left\{\frac{(4-t)!\left[(5-t-y)+y\right]}{(5-t-y)!}\right\}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{(5-t)!}{(5-t-y)!}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{C^5_{t+y}}{C^5_t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{f(5,t+y)}{f(5,t)}$$ 成立

設$n=k$時成立，即$\dfrac{f(k,t+y)}{f(k,t)}+y\times\dfrac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t} i}{k-t}\times\dfrac{D_{t+y}}{D_t}\times\dfrac{t!}{(t+y)!}\times(k-t)=\dfrac{f(k+1,t+y)}{f(k+1,t)}$

則$n=k+1$時，

$$\frac{f(k+1,t+y)}{f(k+1,t)}+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t} i}{(k+1)-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\left[(k+1)-t\right]$$

$$=\frac{f(k,t+y)}{f(k,t)}+y\times\frac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t} i}{k-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(k-t)+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t} i}{(k+1)-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\left[(k+1)-t\right]$$

$$=\frac{C_{t+y}^{k}}{C_t^{k}}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}+y\times\frac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t} i}{k-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(k-t)+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t} i}{(k+1)-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\left[(k+1)-t\right]$$

$$=\left\{\frac{\dfrac{k!}{(t+y)!(k-t-y)!}}{\dfrac{k!}{t!(k-t)!}}+y\times\frac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t} i}{k-t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(k-t)+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t} i}{(k+1)-t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\left[(k+1)-t\right]\right\}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left\{\frac{t!(k-t)!}{(t+y)!(k-t-y)!}+y\times\frac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t} i}{k-t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(k-t)+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t} i}{(k+1)-t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\left[(k+1)-t\right]\right\}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left\{\frac{(k-t)!}{(k-t-y)!}+y\times\frac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t} i}{k-t}\times(k-t)+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t} i}{(k+1)-t}\times\left[(k+1)-t\right]\right\}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left\{\frac{(k-t)!}{(k-t-y)!}+y\left[\frac{(k-t-1)!}{(k-t-y+1)!}\times(k-t)+\frac{(k-t)!}{(k-t-y+2)!}(k-t+1)\right]\right\}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left\{\frac{(k-t)!}{(k-t-y)!}+y\left[\frac{(k-t)!(k-t-y+2)+(k-t+1)!}{(k-t-y+2)!}\right]\right\}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left[\frac{(k-t)!(k-t-y+2)(k-t-y+1)+y(k-t)!(k-t-y+2)+y(k-t+1)!}{(k-t-y+2)!}\right]\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\left[\frac{(k-t)!(k-t-y+2)(k-t+1)+y(k-t+1)!}{(k-t-y+2)!}\right]\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{(k-t+2)!}{(k-t-y+2)!}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{C_{t+y}^{k+2}}{C_t^{k+2}}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{f(k+2,t+y)}{f(k+2,t)}$$ 成立

5-2. 從研究過程 4-2 延伸，我們發現了其關係式的規律如下

相隔三列的關係式：$\frac{f(n,t+3)}{f(n,t)}\times\frac{n+1-t}{n-t-2}=\frac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$

相隔四列的關係式：$\frac{f(n,t+4)}{f(n,t)}\times\frac{n+1-t}{n-t-3}=\frac{f(n+1,t+4)}{f(n+1,t)}$

相隔五列的關係式：$\frac{f(n,t+5)}{f(n,t)}\times\frac{n+1-t}{n-t-4}=\frac{f(n+1,t+5)}{f(n+1,t)}$

$\vdots$

$\vdots$

由此我們推出一個為當相隔 y 列相除時，相鄰兩項的關係式通式為

$$\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}\times\frac{(n+1)-t}{(n+1)-(t+y)}=\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$$

用數學歸納法證明如下：

當 $n=4$ 時，

$$\frac{f(4,t+y)}{f(4,t)}\times\frac{(4+1)-t}{(4+1)-(t+y)}$$

$$=\frac{C_{t+y}^{4}}{C_t^{4}}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{(5-t)}{5-(t+y)}$$

$$=\frac{\frac{4!}{(t+y)!(4-t-y)!}}{\frac{4!}{t!(4-t)!}}\times\frac{(5-t)}{(5-t-y)}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{(5-t)!}{(5-t-y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{\frac{5!}{(t+y)!(5-t-y)!}}{\frac{5!}{t!(5-y)!}}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}$$

$$=\frac{C_{t+y}^{5}}{C_{t}^{5}}\times\frac{D_{t+y}}{D_{t}}$$

$$=\frac{f(5,t+y)}{f(5,t)}$$成立

設 $n=k$ 時成立，即 $\frac{f(k,t+y)}{f(k,t)}\times\frac{(k+1)-t}{(k+1)-(t+y)}=\frac{f(k+1,t+y)}{f(k+1,t)}$

則 $n=k+1$ 時，

$$\frac{f(k+1,t+y)}{f(k+1,t)}\times\frac{\left[\left(k+1\right)+1\right]-t}{\left[\left(k+1\right)+1\right]-(t+y)}$$

$$=\frac{f(k,t+y)}{f(k,t)}\times\frac{\left(k+1\right)-t}{\left(k+1\right)-(t+y)}\times\frac{\left(k+2\right)-t}{\left(k+2\right)-(t+y)}$$

$$=\frac{C_{t+y}^{k}}{C_{t}^{k}}\times\frac{D_{t+y}}{D_{t}}\times\frac{(k-t+1)(k-t+2)}{(k-t-y+1)(k-t-y+2)}$$

$$=\frac{\frac{k!}{(t+y)!(k-t-y)!}}{\frac{k!}{t!(k-t)!}}\times\frac{(k-t+1)(k-t+2)}{(k-t-y+1)(k-t-y+2)}\times\frac{D_{t+y}}{D_{t}}$$

$$=\frac{t!}{(t+y)!}\times\frac{(k-t+2)!}{(k-t-y+2)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_{t}}$$

$$=\frac{\frac{(k+2)!}{(t+y)!(k-t-y+2)!}}{\frac{(k+2)!}{t!(k-t+2)!}}\times\frac{D_{t+y}}{D_{t}}$$

$$=\frac{C_{t+y}^{k+2}}{C_{t}^{k+2}}\times\frac{D_{t+y}}{D_{t}}$$

$$=\frac{f(k+2,t+y)}{f(k+2,t)}$$成立

6. 我們從上面幾點研究推測每個錯排列之間應該都有其特殊的乘積關係，於是我們開始推我們想要求出的萬用公式，而在研究中我們發現，有兩種方法可以找出的我們要求的萬用公式。

方法一：先分別找出 $f(n,t)$ 與 $f(n+x,t)$ 以及 $f(n,t)$ 與 $f(n,t+y)$ 的關係式後，再以代入的方式求關係式

$$f(n,t)\times\frac{(n+1)}{(n+1-t)}=f(n+1,t)$$

$$f(n,t)\times\frac{(n+1)(n+2)}{(n-t+1)(n-t+2)}=f(n+2,t)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

由以上可推得 $f(n,t)$ 與 $f(n+x,t)$ 的關係式為 $f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n-t+x}k}=f(n+x,t)$ ... (1)

$$f(n,t)\times\frac{(n-t)}{(t+1)}\times\frac{D_{t+1}}{D_t}=f(n,t+1)$$

$$f(n,t)\times\frac{(n-t)(n-t-1)}{(t+1)(t+2)}\times\frac{D_{t+2}}{D_t}=f(n,t+2)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

由以上可推得 $f(n,t)$ 與 $f(n,t+y)$ 的關係式為 $f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n-t-y+1}^{n-t}k}{\prod_{k=t+1}^{t+y}k}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}=f(n,t+y)$ ... (2)

當我們把(2)的 n 以 $n+x$ 帶入，則該式會變成

$$f(n+x,t)\times\frac{\prod_{k=(n+x)-t-y+1}^{(n+x)-t}k}{\prod_{k=t+1}^{t+y}k}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}=f(n+x,t+y)\quad ...\ (3)$$

最後再由(1)帶入(3)，得到我們所求的關係式

$$f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n-t+x}k}\times\frac{\prod_{k=(n+x)-t-y+1}^{(n+x)-t}k}{\prod_{k=t+1}^{t+y}k}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}=f(n+x,t+y)$$

方法二：利用其兩兩之間皆有特殊的乘積關係求得公式

令 $f(n,t)$ 和 $f(n+x,t+y)$ 有 m 倍的關係，即 $f(n,t)\times m=f(n+x,t+y)$ ，則

$$m=\frac{f(n+x,t+y)}{f(n,t)}$$

$$=\frac{\frac{(n+x)!}{(t+y)!(n+x-t-y)!}\times D_{t+y}}{\frac{n!}{t!(n-t)!}\times D_t}$$

$$=\frac{(n+x)!\times t!\times(n-t)!\times\left[\frac{\cancel{(t+y)!}}{2!}-\frac{\cancel{(t+y)!}}{3!}+\cdots+(-1)^{t+y-1}\times\frac{\cancel{(t+y)!}}{(t+y-1)!}+(-1)^{t+y}\times\frac{\cancel{(t+y)!}}{(t+y)!}\right]}{\cancel{(t+y)!}\times n!\times(n+x-t-y)!\times\left[\frac{t!}{2!}-\frac{t!}{3!}+\cdots+(-1)^{t-1}\times\frac{t!}{(t-1)!}+(-1)^{t}\times\frac{t!}{t!}\right]}$$

$$=\frac{(n+x)!\times\cancel{t!}\times(n-t)!\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{t+y-1}\times\frac{1}{(t+y-1)!}+(-1)^{t+y}\times\frac{1}{(t+y)!}\right]}{n!\times(n+x-t-y)!\times\left[\frac{\cancel{t!}}{2!}-\frac{\cancel{t!}}{3!}+\cdots+(-1)^{t-1}\times\frac{\cancel{t!}}{(t-1)!}+(-1)^{t}\times\frac{\cancel{t!}}{t!}\right]}$$

$$=\frac{(n+x)!\times\cancel{(n-t)!}\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{t+y-1}\times\frac{1}{(t+y-1)!}+(-1)^{t+y}\times\frac{1}{(t+y)!}\right]}{\cancel{n!}\times(n+x-t-y)!\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{t-1}\times\frac{1}{(t-1)!}+(-1)^{t}\times\frac{1}{t!}\right]}$$

$$=\frac{\cancel{(n+x)!}\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{t+y-1}\times\frac{1}{(t+y-1)!}+(-1)^{t+y}\times\frac{1}{(t+y)!}\right]}{(n-t+1)\times(n-t+2)\times\ldots\times(n-1)\times n\times\cancel{(n+x-t-y)!}\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{t-1}\times\frac{1}{(t-1)!}+(-1)^{t}\times\frac{1}{t!}\right]}$$

$$=\frac{(n+x-t-y+1)\times(n+x-t-y)\times\ldots\times(n+x)\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{t+y-1}\times\frac{1}{(t+y-1)!}+(-1)^{t+y}\times\frac{1}{(t+y)!}\right]}{(n-t+1)\times(n-t+2)\times\ldots\times(n-1)\times n\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{t-1}\times\frac{1}{(t-1)!}+(-1)^{t}\times\frac{1}{t!}\right]}$$

$$=\frac{\prod_{k=n+x-t-y+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{t+y}\left[(-1)^{k}\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{t}\left[(-1)^{k}\times\frac{1}{k!}\right]}$$

經過整理之後，我們發現兩種方法求得的公式是相同的，且在範圍內皆成立。

伍、 研究結果

一、 當 n 個數與 $n+1$ 個數分別進行排列，且皆有 t 個數排列錯誤時，其方法數的關係式為

$$f(n+1,t)=\frac{n+1}{n+1-t}\times f(n,t)$$

二、 當 n 個數進行排列，且分別有 t 個數及 $t+1$ 個數排列錯誤時，其方法數的關係式為

$$f(n,t+1)=\frac{n-t}{t+1}\times\frac{D_{t+1}}{D_t}\times f(n,t)$$

三、　當 t 分別為 n 及 $n-1$ 時，有下列關係式

$$f(n,n-1)+D_n-n\times D_{n-1}=f(n,n)\Rightarrow f(n,n-1)+(-1)^n=f(n,n)$$

四、　當 t 相差 2 時，$\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$ 與 $\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$ 的關係能用兩種關係式表示

關係式一：$\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}+2\times\dfrac{D_{t+2}}{D_t}\times\dfrac{t!}{(t+2)!}\times(n-t)=\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$

關係式二：$\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}\times\dfrac{n-t+1}{n-t-1}=\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$

五、　從研究結果四延伸，當 t 相差 y 時，$\dfrac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$ 與 $\dfrac{f(n,t+y)}{f(n,t)}$ 的關係也能用兩種關係式來表示

關係式一：$\dfrac{f(n,t+y)}{f(n,t)}+y\times\dfrac{\prod_{i=n-t-y+2}^{n-t} i}{n-t}\times\dfrac{D_{t+y}}{D_t}\times\dfrac{t!}{(t+y)!}\times(n-t)=\dfrac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$

關係式二：$\dfrac{f(n,t+y)}{f(n,t)}\times\dfrac{(n+1)-t}{(n+1)-(t+y)}=\dfrac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$

六、　當 n 相差 x，t 相差 y 時，$f(n,t)$ 與 $f(n+x,t+y)$ 的關係式為

$$f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n+x-t-y+1}^{n+x} k}{\prod_{k=n-t+1}^{n} k}\times\frac{\sum_{k=2}^{t+y}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{t}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+x,t+y)$$

，且此關係即為所求的部分錯排列萬用公式。

陸、　討論

一、在討論研究過程 4-1 時，一開始我們發現 $\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$ 與 $\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$ 有著二階等差的關係。而它們的關係是否為二階等差，須證明其滿足 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=R$，且 R 為定值，而我們將數字代入後皆成立，故 $\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$ 與 $\dfrac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$ 為二階等差。

但當t的數字不同時，公差會有所改變，所以我們目前找出當$t=2,3,4$時，$\dfrac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$的一般式

當$t=2$時，一般式為$\dfrac{f(n,4)}{f(n,2)}=\dfrac{3}{4}(n-3)^2+\dfrac{3}{4}(n-3)$，其中$n\in N$，且$n\geq 4$

我們利用二階等差一般式$a_i=Ai^2+Bi+C$，將i分別以$1,2,3$代入

$$a_1=\frac{f(4,4)}{f(4,2)}=A+B+C=\frac{3}{2}\quad ...(1)$$

$$a_2=\frac{f(5,4)}{f(5,2)}=4A+2B+C=\frac{9}{2}\quad ...(2)$$

$$a_3=\frac{f(6,4)}{f(6,2)}=9A+3B+C=\frac{18}{2}\quad ...(3)$$

用$(2)-(1)$得到$3A+B=3\quad ...(4)$

用$(3)-(2)$得到$5A+B=3\quad ...(5)$

再用$(5)-(4)$，求得$A=\dfrac{3}{4}$、$B=\dfrac{3}{4}$、$C=0$

故$a_i=\dfrac{3}{4}i^2+\dfrac{3}{4}i$

但我們的變數並不是i，而是n，所以我們令$i=n-3$即可得到關係式

$$a_{n-3}=\frac{3}{4}(n-3)^2+\frac{3}{4}(n-3)$$

而$a_{n-3}=\dfrac{f(n,4)}{f(n,2)}$，所以我們得到最終的一般式為$\dfrac{f(n,4)}{f(n,2)}=\dfrac{3}{4}(n-3)^2+\dfrac{3}{4}(n-3)$

以此類推當$t=3$時，一般式為$\dfrac{f(n,5)}{f(n,3)}=\dfrac{11}{10}(n-4)^2+\dfrac{11}{10}(n-4)$，其中$n\in N$，且$n\geq 5$，

當$t=4$時，一般式為$\dfrac{f(n,6)}{f(n,4)}=\dfrac{53}{54}(n-5)^2+\dfrac{53}{54}(n-5)$，其中$n\in N$，且$n\geq 6$

⋮

⋮

二、 根據研究過程 5-1 的圖一和圖二，我們發現當相隔三列相除時，會有三階等差的關係，而為了更嚴謹的證實$\dfrac{f(n,t+3)}{f(n,t)}$與$\dfrac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$為三階等差的關係，須證明其滿足$a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=R$，其中$R$為定值，而我們將計算出的數字代入後皆成立，故$\dfrac{f(n,t+3)}{f(n,t)}$與$\dfrac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$為三階等差。

三、 而最後我們想知道到底我們研究出的部分錯排列萬用公式，能不能符合我們最一開始發現的全錯排列公式 $f\left(n+2\right)=\left[f(n)+f\left(n+1\right)\right]\times(n+1)$ 呢？

在萬用公式中，我們令 $t=n$ 、 $x=2$ 、 $y=2$ 代入

$$f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n+x-t-y+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{t+y}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{t}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+x,t+y)$$ 可以得到

$$f(n,n)\times\frac{\prod_{k=1}^{n+2}k}{\prod_{k=1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{n+2}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+2,n+2)$$ ，即

$$f(n)\times(n+2)(n+1)\times\frac{\sum_{k=2}^{n+2}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+2)$$

再令 $t=n$ 、 $x=1$ 、 $y=1$ 代入萬用公式得到

$$f(n,n)\times\frac{\prod_{k=1}^{n+1}k}{\prod_{k=1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+1,n+1)$$ ，即

$$f(n)\times(n+1)\times\frac{\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+1)$$

故 $\left[f(n)+f(n+1)\right]\times(n+1)=\left\{f(n)+f(n)\times(n+1)\times\frac{\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}\right\}\times(n+1)$

$$=f(n)\times\left\{1+(n+1)\times\frac{\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}\right\}\times(n+1)$$

$$=f(n)\times\left\{\frac{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]+(n+1)\times\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}\right\}\times(n+1)$$

$$= f(n)\times\left\{\frac{\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+(n+1)\times\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}\right\}\times(n+1)$$

$$= f(n)\times(n+1)\times\frac{(n+2)\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}$$

$$= f(n)\times(n+1)\times\frac{(n+2)\sum_{k=2}^{n+1}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]+\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}$$

$$= f(n)\times(n+1)\times\frac{(n+2)\sum_{k=2}^{n+2}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}$$

$= f(n+2)$ 得證

柒、 結論

在成功找到部分錯排列的關係式及萬用公式後，當我們需要計算數字較大的部分錯排列方法數時，不用再使用原本較為複雜的計算方式，可以利用本研究結果，簡單且快速的求得想要的答案。再者，我們發現部分錯排列的萬用公式，可以解釋全錯排列關係式 $f(n+2)=\left[f(n)+f(n+1)\right]\times(n+1)$，是研究過程中，意料之外的收穫。

捌、 參考資料

一、 蘇俊鴻、董涵冬(2019)。【新突破】高中數學講義第二冊。龍騰出版社

二、 蘇信成、吳勝雄、張淑娟(2019)。【互動式】高中數學講義第二冊。翰林出版社

三、 結城浩(2017)。《數學女孩秘密筆記：排列組合篇》。世茂出版社

四、 盧開澄(1983)。《組合數學》。儒林出版社

【評語】050410

本作品主要是利用 n 個數中，有 t 個數排錯的可能性之組合公式，再找出一些和 n,t 差 a，差 b(例如 n-a, t+b)的錯排數組合公式之間的遞迴關係式。主要的手法為列出相關數字後，判斷可能的遞迴式，然後以數學歸納法驗證。建議作者應該多著重於研究動機，以及對數學問題的描述，並建立研究主軸與著重呈現研究脈絡。類似的作品曾在今年初的臺灣國際科展出現，應該參考。

作品海報

一. 研究動機

在高一下學期的排列組合課程中，學到了一個新的專有名詞-錯排列。錯排列的意思是排列中有一個以上的元素不在自己對應的位置，這樣的排列就稱為錯排列。其中錯排列又分為全錯排列和部分錯排列。我們發現全錯排列的方法數有一個很特別的關係⇒令$f(n)$為全錯排列方法數的函數，則$f(n)$會滿足$f(n+2)=[f(n+1)+f(n)]\times(n+1)$。因為全錯排列有其特殊的關係式，所以我們便想要更進一步取探討部分錯排列是否也擁有其特別的關係式？於是開始了我們的探討與研究。

二. 研究目的

1. 當n個數與$n+1$個數進行排列，且皆有t個數排列錯誤時，$f(n,t)$ 與$f(n+1,t)$ 的關係為何？
2. 當n個數進行排列，且分別有t個數及$t+1$個數排列錯誤時，$f(n,t)$ 與$f(n,t+1)$的關係為何？
3. 當t分別為n及$n-1$時，$f(n,n)$與$f(n,n-1)$的關係為何？
4. 當t相隔2時，$\frac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$的關係為何？
5. 當t相隔y時，$\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$的關係為何？
6. 當n相隔x，t相隔y時，$f(n,t)$與$f(n+x,t+y)$的關係為何？

三. 研究設備及器材

筆、計算紙、計算機、電腦、mathtype

四. 說明及定義

1. 在研究中所探討的錯排列方式都是以直線排列，其餘排列方式不在我們的探討之範圍內。
2. 錯誤排列：在直線排列中，我們可以假設每個物品皆有其相對應的號碼相對應的位置，如果物品不在其對應位置，便稱為錯誤排列。
3. $f(n,t)$為我們在研究中對於部分錯排列數量的表示方法
   n表示研究數據中元素的總個數
   t表示研究數據中元素未在相對應位置上(錯誤排列)的個數
   ($n,t\in N$ 且$n\geq t>1$，在錯排列中錯誤排列的個數不會比總排列個數多，否則不成立)
4. 找到關係式後，我們會利用數學歸納法來證明我們得出的公式是否在任何情況下皆成立。

五. 研究方法

在本次實驗中，我們將會用到下面公式計算部分錯排列的數量：

$f(n,t)=C_t^n\left[C_0^t\times t!-C_1^t\times(t-1)!+C_2^t\times(t-2)!-\cdots+C_t^t\times(-1)^t\times 0!\right]$，其中$n,t\in N$且$n\geq t>1$

根據上面的公式，如果我們已經知道t的全錯排列個數，則我們可以令D_t為t的全錯排列個數，將算式簡化為：$f(n,t)=C_t^n\times D_t$

六. 研究過程

我們先把個數2~7的部分錯排列個數列算出來，整理後可得到以下的表格(如表一)

	第一行	第二行	第三行	第四行	第五行	第六行
第一列	$f(2,2)=1$	$f(3,2)=3$	$f(4,2)=6$	$f(5,2)=10$	$f(6,2)=15$	$f(7,2)=21$
第二列		$f(3,3)=2$	$f(4,3)=8$	$f(5,3)=20$	$f(6,3)=40$	$f(7,3)=70$
第三列			$f(4,4)=9$	$f(5,4)=45$	$f(6,4)=135$	$f(7,4)=315$
第四列				$f(5,5)=44$	$f(6,5)=264$	$f(7,5)=924$
第五列					$f(6,6)=265$	$f(7,6)=1855$
第六列						$f(7,7)=1854$

◆ 表一：排列個數2~7的部分錯排列個數

1. 觀察每一列，我們發現每一列相鄰兩項皆有 $f(n+1,t)=\dfrac{n+1}{n+1-t}\times f(n,t)$ 的關係

證明如下：

當$n=2$時，

$f(2,t)\times\dfrac{3}{3-t}$

$=C_t^2\times D_t\times\dfrac{3}{3-t}$

$=\dfrac{2!}{t!(2-t)!}\times\dfrac{3}{3-t}\times D_t$

$=C_t^3\times D_t$

$=f(3,t)$

設$n=k$時成立，即 $f(k,t)\times\dfrac{k+1}{k+1-t}=f(k+1,t)$

則$n=k+1$時，

$f(k+1,t)\times\dfrac{(k+1)+1}{(k+1)+1-t}$

$=f(k,t)\times\dfrac{k+1}{k+1-t}\times\dfrac{(k+1)+1}{(k+1)+1-t}=C_t^k\times D_t\times\dfrac{(k+1)(k+2)}{(k+1-t)(k+2-t)}$

$=\dfrac{(k+2)!}{t!(k+2-t)!}\times D_t=C_t^{k+2}\times D_t=f(k+2,t)$ 成立

2. 而接著觀察每一行，我們發現每一行相鄰兩項也有 $f(n,t+1)=\frac{n-t}{t+1}\times\frac{D_{t+1}}{D_t}\times f(n,t)$ 的關係

證明如下：

當$t=2$時，

$$f(n,2)\times\frac{n-2}{2+1}\times\frac{D_3}{D_2}$$

$$=C_2^n\times D_2\times\frac{D_3}{D_2}\times\frac{n-2}{3}$$

$$=\frac{n!}{2!(n-2)!}\times\frac{n-2}{3}\times D_3$$

$$=\frac{n!}{3!(n-3)!}\times D_3$$

$$=C_3^n\times D_3$$

$$=f(n,3)$$

設$t=k$時成立，即 $f(n,k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{D_{(k+1)}}{D_k}=f(n,k+1)$

則$t=k+1$時，

$$f(n,k+1)\times\frac{n-(k+1)}{(k+1)+1}\times\frac{D_{[(k+1)+1]}}{D_{(k+1)}}$$

$$=f(n,k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{D_{(k+1)}}{D_k}\times\frac{n-(k+1)}{(k+1)+1}\times\frac{D_{[(k+1)+1]}}{D_{(k+1)}}$$

$$=C_k^n\times D_k\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{D_{(k+2)}}{D_k}\times\frac{n-(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+1)(k+2)}\times D_{(k+2)}=C_{k+2}^n\times D_{(k+2)}=f(n,k+2)\text{ 成立}$$

3. 我們把表格整理完後觀察倒數兩項，可以發現以下的關係：

當n為奇數時，$f(n,n-1)=f(n,n)+1$；當n為偶數時，$f(n,n-1)+1=f(n,n)$

由此我們可以推出表示其關係的式子為：

當$t=n$時，$f(n,n-1)+D_n-n\times D_{n-1}=f(n,n)\rightarrow f(n,n-1)+(-1)^n=f(n,n)$

證明如下：

$$f(n,n)-f(n,n-1)=C_n^nD_n-C_1^n\times D_{n-1}=D_n-n\times D_{n-1}$$

$$=[C_0^nn!-C_1^n(n-1)!+\cdots+C_{n-1}^n(-1)^{n-1}\times1!+C_n^n(-1)^n\times0!]-n[C_0^{n-1}(n-1)!-C_1^{n-1}(n-2)!+\cdots+C_{n-1}^{n-1}(-1)^{n-1}\times0!]$$

$$=[C_0^nn!-nC_0^{n-1}(n-1)!]-[C_1^n(n-1)!-nC_1^{n-1}(n-2)!]+\cdots-[C_{n-1}^n(-1)^{n-1}\times1!+nC_{n-1}^{n-1}(-1)^n\times0!]+[C_n^n(-1)^n\times0!]$$

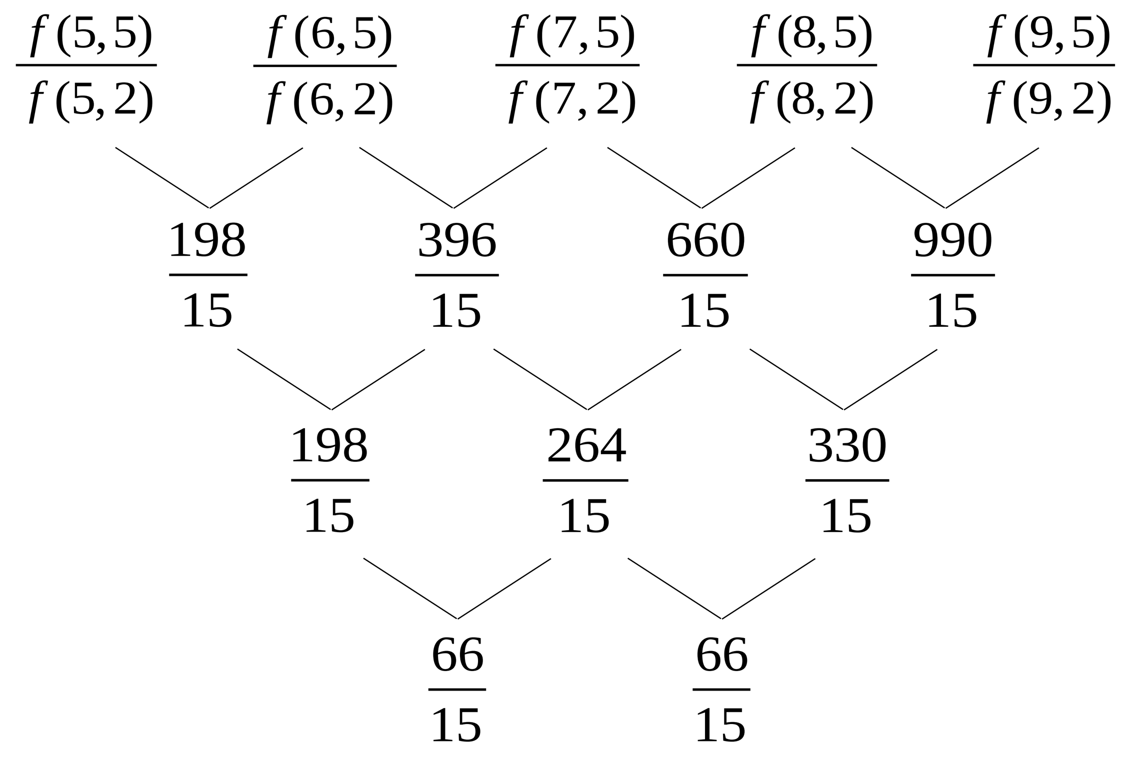
$$=0+0+\cdots+(-1)^n=(-1)^n$$

4. 我們繼續找將第四列除以第二列後，其相鄰兩項的關係，我們發現有兩個關係式皆能符合

關係式一：$\frac{f(n,t+2)}{f(n,t)}+2\times\frac{D_{t+2}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+2)!}\times(n-t)=\frac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$

關係式二：$\frac{f(n,t+2)}{f(n,t)}\times\frac{n-t+1}{n-t-1}=\frac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$

5-1. 我們從研究過程4的關係式一發現到當相隔兩列相除時，$\frac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$有著二階等差的關係，而我們進一步推測$\frac{f(n,t+3)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$三階等差的關係，於是我們把相隔三列的值算出來並製成下圖(一)



◆圖一：將第四列除以第一列的關係圖

根據圖一，我們發現當相隔三列時，有三階等差的關係，剛好證明我們的推測是正確的。而我們也求得$\frac{f(n,t+3)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$的關係式為 $\frac{f(n,t+3)}{f(n,t)}+3(n-t-1)\times\frac{D_{t+3}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+3)!}\times(n-t)=\frac{f(n+1,t+3)}{f(n+1,t)}$

於是我們大膽推論，當相隔y列相除時，$\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$的關係為$y$階等差，且關係式為

$$\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}+y\frac{\prod_{i=n-t-y+2}^{n-t}i}{n-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(n-t)=\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$$

證明如下：

設$t=k$時成立，即 $\frac{f(k,t+y)}{f(k,t)}+y\times\frac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t}i}{k-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(k-t)=\frac{f(k+1,t+y)}{f(k+1,t)}$

則$t=k+1$時，

$$\frac{f(k+1,t+y)}{f(k+1,t)}+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t}i}{(k+1)-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times[(k+1)-t]$$

$$=\frac{f(k,t+y)}{f(k,t)}+y\times\frac{\prod_{i=k-t-y+2}^{k-t}i}{k-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times(k-t)+y\times\frac{\prod_{i=(k+1)-t-y+2}^{(k+1)-t}i}{(k+1)-t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{t!}{(t+y)!}\times[(k+1)-t]$$

$$=\frac{C_{t+y}^k}{C_t^k}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}+\cdots\times\frac{t!}{(t+y)!}\times[(k+1)-t]=\cdots=\frac{C_{t+y}^{k+2}}{C_t^{k+2}}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}=\frac{f(k+2,t+y)}{f(k+2,t)}\text{ 成立}$$

5-2. 接著我們繼續從相隔三列、相隔四列……開始找尋關係式，而我們發現，當相隔y列相除後，相鄰兩項的關係式通式為 $\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}\times\frac{(n+1)-t}{(n+1)-(t+y)}=\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$

證明如下：

當$n=4$時，

$$\frac{f(4,t+y)}{f(4,t)}\times\frac{(4+1)-t}{(4+1)-(t+y)}=\frac{C^4_{t+y}}{C^4_t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}\times\frac{(5-t)}{5-(t+y)}=\frac{t!(5-t)!}{(t+y)!(5-t-y)!}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}=\frac{C^5_{t+y}}{C^5_t}\times\frac{D_{t+y}}{D_t}=\frac{f(5,t+y)}{f(5,t)}\text{成立}$$

6. 最後我們找到了部分錯排列的萬用公式，即為當n相隔x，t相隔y時，

$f(n,t)$與$f(n+x,t+y)$的關係式為 $f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n+x-t-y+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{t+y}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{t}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+x,t+y)$

證明如下：

令$f(n,t)$與$f(n+x,t+y)$為m倍的關係，即 $f(n,t)\times m=f(n+x,t+y)$，則

$$m=\frac{f(n+x,t+y)}{f(n,t)}=\frac{\frac{(n+x)!}{(t+y)!(n+x-t-y)!}\times D_{t+y}}{\frac{n!}{t!(n-t)!}\times D_t}$$

$$=\frac{\cancel{(n+x)!}\times\cancel{t!}\times\cancel{(n-t)!}\times\left[\frac{\cancel{(t+y)!}}{2!}-\frac{\cancel{(t+y)!}}{3!}+\cdots+(-1)^{t+y-1}\times\frac{\cancel{(t+y)!}}{(t+y-1)!}+(-1)^{t+y}\times\frac{\cancel{(t+y)!}}{(t+y)!}\right]}{\cancel{(t+y)!}\times\cancel{n!}\times\cancel{(n+x-t-y)!}\times\left[\frac{\cancel{t!}}{2!}-\frac{\cancel{t!}}{3!}+\cdots+(-1)^{t-1}\times\frac{\cancel{t!}}{(t-1)!}+(-1)^t\times\frac{\cancel{t!}}{t!}\right]}$$

$$=\frac{(n+x-t-y+1)\times(n+x-t-y)\times\ldots\times(n+x)\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{t+y-1}\times\frac{1}{(t+y-1)!}+(-1)^{t+y}\times\frac{1}{(t+y)!}\right]}{(n-t+1)\times(n-t+2)\times\ldots\times(n-1)\times n\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{t-1}\times\frac{1}{(t-1)!}+(-1)^t\times\frac{1}{t!}\right]}=\frac{\prod_{k=n+x-t-y+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{t+y}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{t}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}$$

七. 研究結果

1. 當n個數與$n+1$個數分別進行排列，且皆有t個數排列錯誤時，$f(n,t)$ 與$f(n+1,t)$ 的關係為

$$f(n+1,t)=\frac{n+1}{n+1-t}\times f(n,t)$$

2. 當n個數進行排列，且分別有t個數及$t+1$個數排列錯誤時，$f(n,t)$ 與$f(n,t+1)$的關係為

$$f(n,t+1)=\frac{n-t}{t+1}\times\frac{D_{t+1}}{D_t}\times f(n,t)$$

3. 當t分別為n及$n-1$時，$f(n,n)$與$f(n,n-1)$的關係為 $f(n,n-1)+(-1)^n=f(n,n)$

4. 當t相隔2時，$\frac{f(n,t+2)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+2)}{f(n+1,t)}$的關係能用兩種關係式來表達

5. 當t相隔y時，$\frac{f(n,t+y)}{f(n,t)}$與$\frac{f(n+1,t+y)}{f(n+1,t)}$的關係也能用兩種關係式來表達

6. 當n相隔x，t相隔y時，$f(n,t)$與$f(n+x,t+y)$的關係為

$$f(n,t)\times\frac{\prod_{k=n+x-t-y+1}^{n+x}k}{\prod_{k=n-t+1}^{n}k}\times\frac{\sum_{k=2}^{t+y}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}{\sum_{k=2}^{t}\left[(-1)^k\times\frac{1}{k!}\right]}=f(n+x,t+y)$$

八. 討論

我們想知道到底我們研究出的部分錯排列萬用公式，能不能符合我們最一開始發現的全錯排列公式

$f(n+2)=[f(n+1)+f(n)]\times(n+1)$呢？於是我們分別令$t=n$、$x=2$、$y=2$以及$t=n$、$x=1$、$y=1$代入我們所求得的萬用公式，我們發現，我們所求出的部分錯排列萬用公式，帶入全錯排列的公式是成立的，也就是用我們所求的部分錯排列公式可以解釋全錯排列的公式。

九. 結論及未來展望

在成功找到部分錯排列的關係式及萬用公式後，當我們需要計算數字較大的部分錯排列方法數時，不用再使用原本較為複雜的計算方式，可以利用本研究結果，簡單且快速的求得想要的答案。再者，我們發現部分錯排列的萬用公式，可以解釋全錯排列關係式$f(n+2)=[f(n+1)+f(n)]\times(n+1)$，是意料之外的收穫。

十. 參考資料

1. 蘇俊鴻、董涵冬(2019)。【新突破】高中數學講義第二冊。龍騰出版社
2. 蘇信成、吳勝雄、張淑娟(2019)。【互動式】高中數學講義第二冊。翰林出版社
3. 結城浩(2017)。《數學女孩秘密筆記：排列組合篇》。世茂出版社
4. 盧開澄(1983)。《組合數學》。儒林出版社