中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050408

密克點與心圓的美麗邂逅

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高一 周子言 高一 楊佳樺 高一 楊舒絢	楊玉星

關鍵詞：密克點、心圓

摘要

本研究是探討一般位置的n條直線**(無三線共點且無平行線組)**，皆會產生圓共點和圓心共圓的現象。在一般位置的四條直線中，四個三角形的外接圓會共點，稱此點為**密克點**。同時其圓心也會共圓，稱此圓為**心圓**。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的心圓，而這五個心圓**仍然會共點**，同時其**圓心又會共圓**。為了證明此種情況會不斷地延續下去，我們利用**數學歸納法**以及**四點共圓的性質**證出一般位置的$n(n \geq 4)$線形都會有密克點和心圓。此外，如果考慮退化的情形**(共點或平行)**，也會同時有密克點和心圓。我們還進一步發現**四面體**也有相對應的**密克點和心球**，但五面體以上就沒有。

壹、研究動機

在 2008 年台灣國際科展有一件作品**---共點圓、共圓點**中提到：「在完全四邊形中，四個三角形的外接圓會共點，稱此點為限制點。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的限制點，而這些限制點又會共圓，稱此圓為限制圓。此種情況會不斷地延續下去。」，於是我們試著用動態幾何軟體 Ggb 畫看看，發現在完全四邊形中，四個三角形的**外接圓圓心也會共圓**。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的心圓，而這些**心圓仍然會共點**，同時**其圓心又會共圓**。而這樣的現象，讓我們聯想到可否推廣到**多條兩兩相交一點的直線**，因此決定以此當作研究題材。

貳、研究目的

在完全四邊形中，四個三角形的外接圓會共點，稱其為**密克點**。同時其圓心也會共圓，稱其為**心圓**。若將其推廣到$n(n \geq 4)$條**無三線共點且無平行線組**的直線，則會有相對應的**n線形的密克點和心圓**。本研究的目的在探究**這種現象會不斷地延續下去，並給予證明**。

參、研究設備及器材

本研究主要利用動態幾何軟體**Geogebra**進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、研究過程與方法

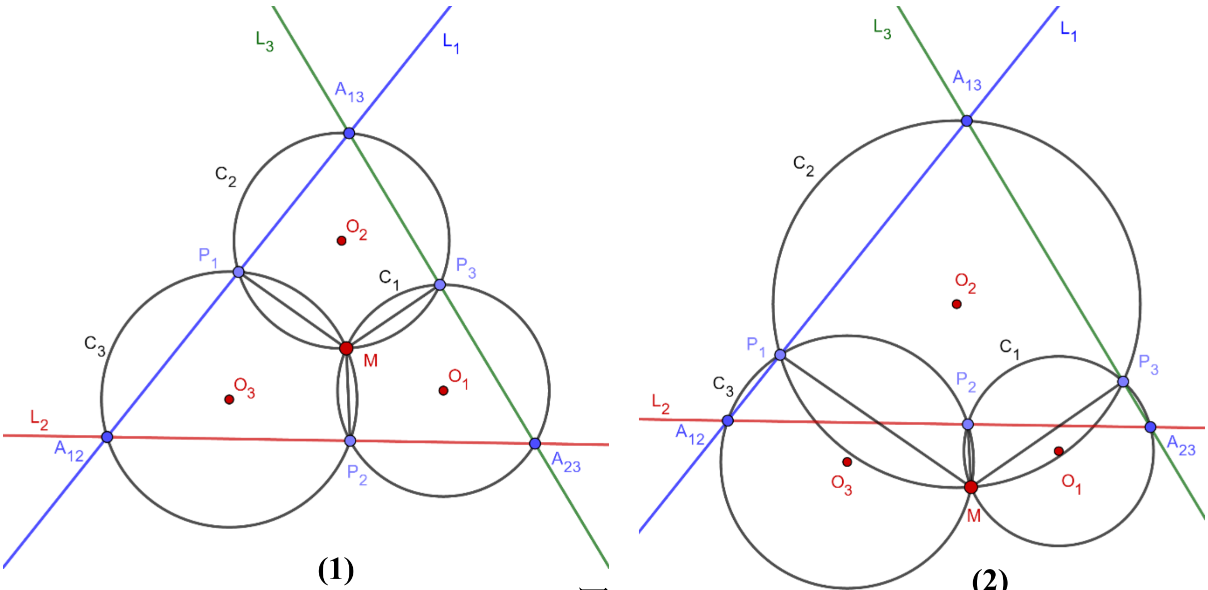
一、文獻探討

(一)密克定理

密克定理是 Auguste Miquel 於西元 1838 年發表的諸多定理之一，其定理如下：

> 設L_1、L_2、L_3是一般位置的三條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。A_{12}是L_1和L_2的交點；A_{13}是L_1和L_3的交點，其餘類推。分別在L_1、L_2、L_3各取一點P_1、P_2、P_3、O_1是$\Delta A_{23}P_2P_3$的外接圓C_1之圓心；O_2是$\Delta A_{13}P_1P_3$的外接圓C_2之圓心，其餘類推。則三個外接圓C_1、C_2、C_3會交於同一點M，此點M稱為$n=3$的密克點。

[證明] 證明請參考 趙文敏教授 科學教育月刊第 234 期 Miquel 定理及其應用。

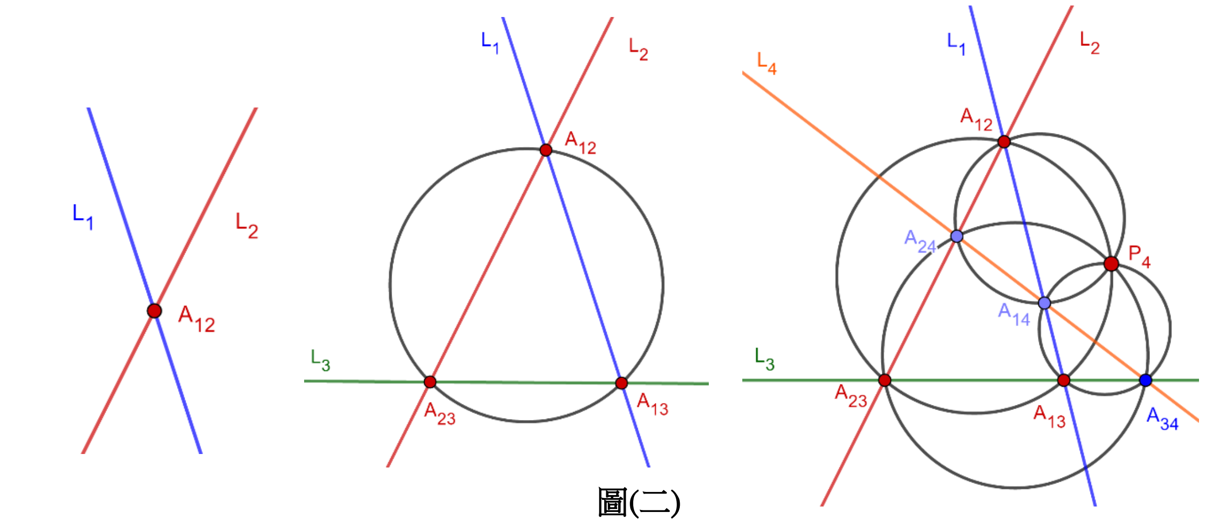


(1) (2)

圖(一)

(二)陳凱傑。共點圓、共圓點。2008 年台灣國際科展

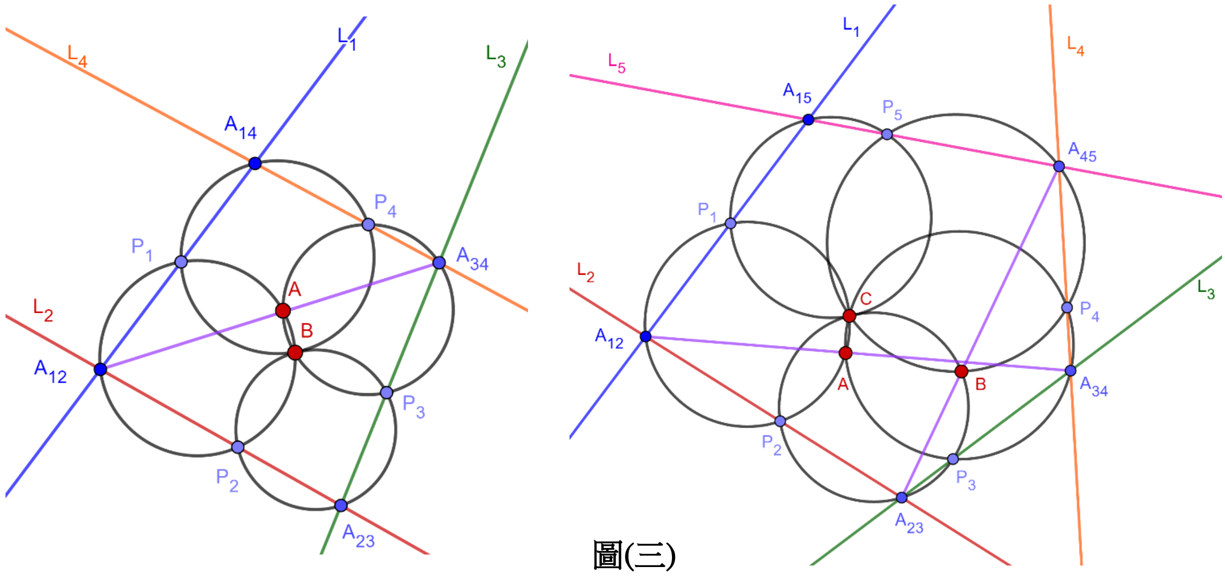
此作品由四條直線**(無共點且無平行線組)**所構成的圖形中，找到四個三角形及它們的外接圓。而這四個外接圓會共點，稱其為**限制點**。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的限制點，而這些限制點又會共圓，稱其為**限制圓**。作者欲證明此種情況會不斷延續下去。如圖(二)，將兩條直線的交點視為限制點，三條直線的三交點的外接圓視為限制圓，則**當n為偶數時，存在限制點；當n為奇數時，存在限制圓**。也就是說，**限制點和限制圓是交替出現**，由限制點所共的圓定義限制圓，再由限制圓所共的點定義限制點。



圖(二)

(三)劉安家。從三個交於一點的圓形想起—Miquel's Theorem 之推廣

此作品為關於 Miquel's Theroem 的討論，作者針對此定理作了更廣義形式的探討。在證明完三角形密克定理和密克逆定理後，並在三角形中的四個面向推廣此定理和逆定理。如圖(三)，在n邊形成立的條件為「**連續 $n-3$組只隔一頂點的對角圓交點之一**」**各位在**「**只隔一點的對角線上**」。此研究所探討的對象是**有限制條件下的多邊形**，才會有多邊形的密克定理和密克逆定理，也就是說，一般的多邊形未必有密克定理和密克逆定理。



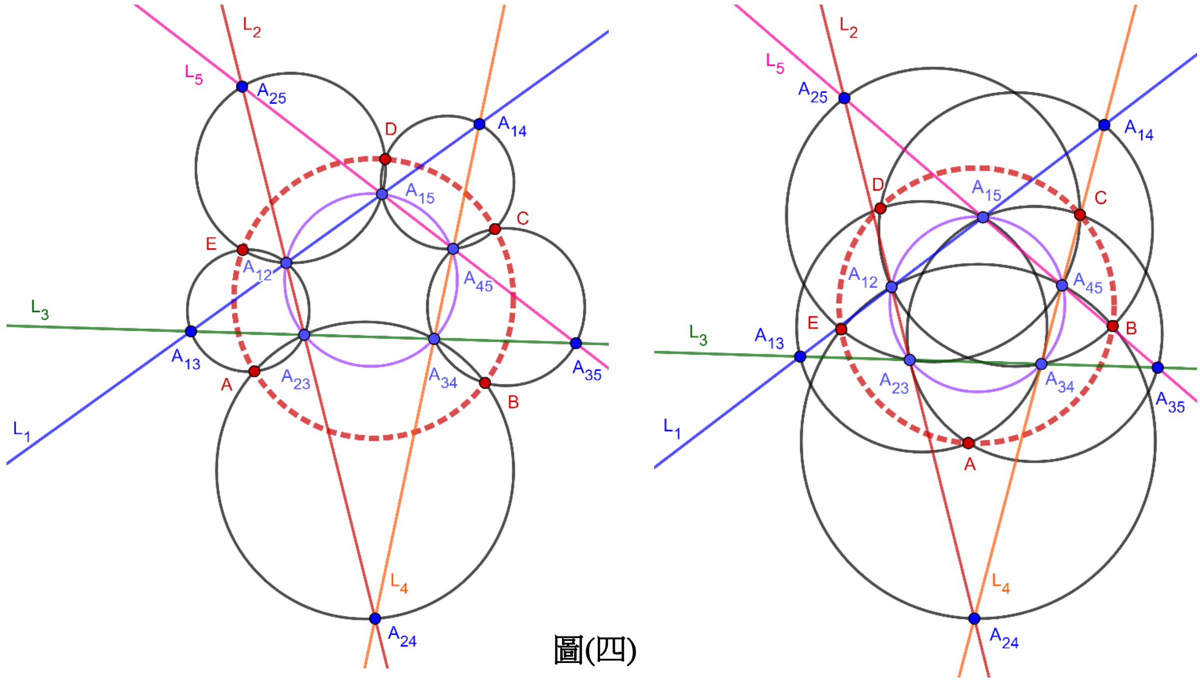
圖(三)

(四)張勛絜．林郁傑．黃偉特。

循「密」尋謎，「克」不容緩—密克定理系列圖形幾何推論與證明

此作品題材源自描述密克定理的資料，有關密克五圓定理有許多未被證明的性質，作者以幾何作圖為主，代數運算為輔進行研究。

如圖(四)，此研究亦針對原始圖形的定義產生**原定義**及**新定義**兩個部分，並比較原定義及新定義圖形的對應關係。然而作者需要新定義的原因為何？新舊定義的差異所造成的性質差異為何？又新定義對四個點有影響嗎？可以再延伸推廣到六個點嗎？或更一般化嗎？此份作品並沒有找到我們要的答案。

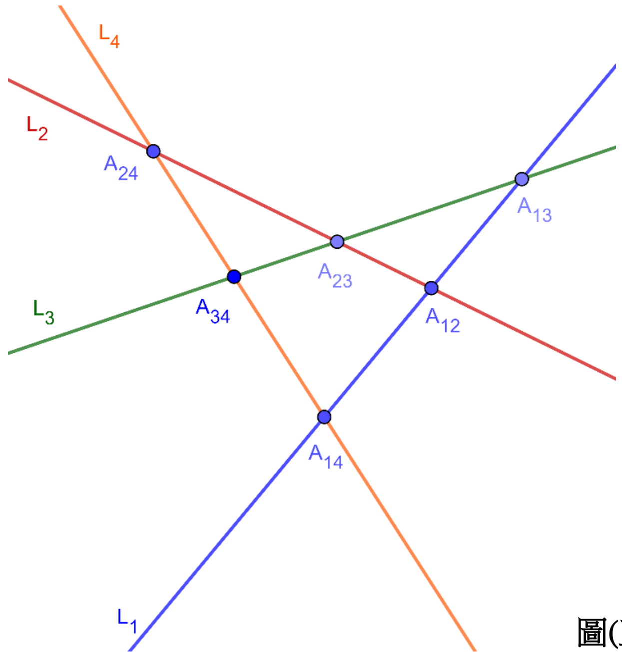


圖(四)

二、定義與性質

(一)完全四邊形

如圖(五)，當共平面的四相異直線中每兩線都相交，且任意三線都不共點時，我們稱此四直線構成一個完全四邊形。



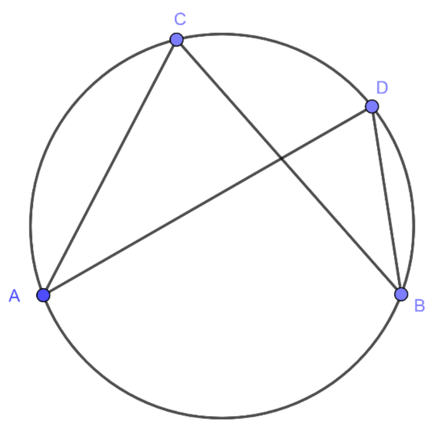
圖(五)

(二)密克點和心圓

直線數用n表示，且$n \geq 4$。藉由觀察可以發現在完全四邊形中，因為任意三條直線可構成一個三角形，所以有$C_3^4 = 4$ 個三角形，其外接圓會共點，稱此點為$n = 4$的密克點。同時，四個外接圓圓心也會共圓，不妨稱此圓為$n = 4$的心圓。若再加入新的一條直線，同樣在**無三線共點且無平行線組**的情況下，根據前述的說明，因為任意四條直線可決定一個$n = 4$的心圓，所以有$C_4^5 = 5$個心圓，若此五個$n = 4$的心圓會共點，稱此點為$n = 5$的密克點。同時，五個$n = 4$的心圓，其圓心會共圓，則稱此圓為$n = 5$的心圓。因此可以依序定義：$n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ 的密克點和心圓。

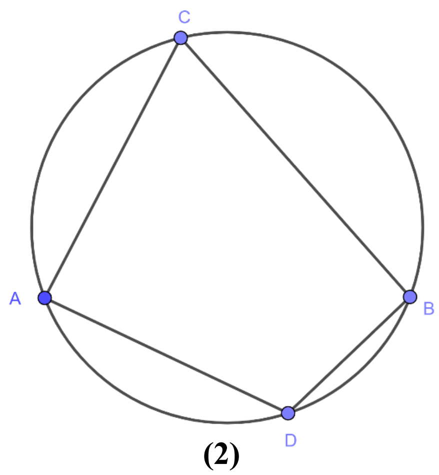
(三)兩角相等或互補

為了證明**圓共點、圓心共圓**的性質，本文採用以下共圓的性質---四點所形成兩角相等或互補時，此四點共圓。如圖(六)，$\angle ACB = \angle ADB$或$\angle ACB + \angle BDA = 180°$時，A、B、C、D四點共圓。而藉由觀察得知，在不同情況下，有時兩角會相等，有時會互補，但通常難以判斷會發生這哪種情況。因此本文定義**兩角$\boldsymbol{\theta_1}$和$\boldsymbol{\theta_2}$相等或互補為等價角，以$\boldsymbol{\theta_1 \equiv \theta_2}$表示**。即$\angle ACB \equiv \angle ADB$表示$\angle ACB = \angle ADB$或$\angle ACB + \angle BDA = 180°$。



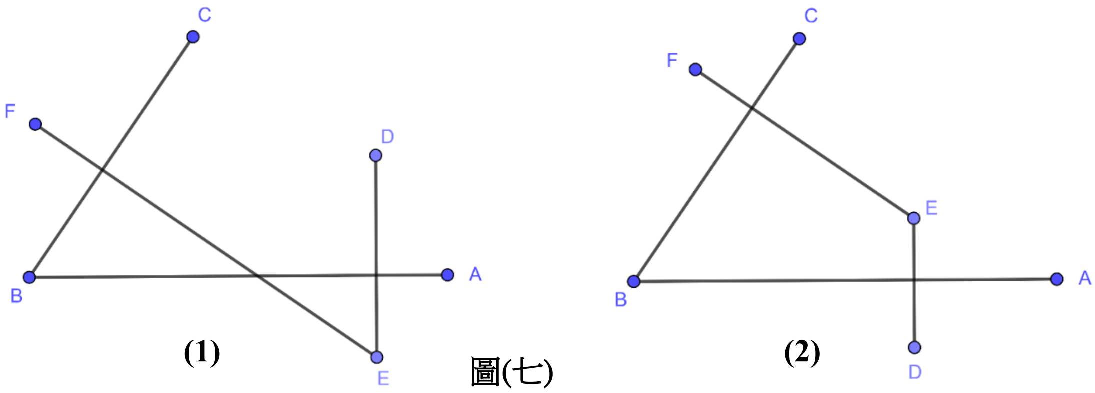
(1)

圖(六)



(2)

如圖(七)，當兩個角$\angle ABC$和$\angle DEF$的兩邊各自垂直時，則$\angle ABC = \angle DEF$或$\angle ABC + \angle FED = 180°$。即$\angle ABC$和$\angle DEF$兩邊各自垂直時，可得$\angle ABC \equiv \angle DEF$。



圖(七)

(四)角的運算性質

性質一	若定義$\angle ACB \equiv \angle ADB$為$\angle ACB = \angle ADB$或$\angle ACB + \angle BDA = 180°$， 則「≡」滿足(1)遞移律：$\angle ABC \equiv \angle DEF$且$\angle DEF \equiv \angle GHI \Longrightarrow \angle ABC \equiv \angle GHI$。 (2)加法律：$\angle ABC + \angle CBD \equiv \angle ABD$。

[證明]

1. 設$\angle DEF = x$，則由定義(三)知：$\angle ABC \equiv \angle DEF \Longrightarrow \angle ABC = x$或$\angle ABC = 180° - x$；

$$\angle DEF \equiv \angle GHI \Longrightarrow \angle GHI = x\text{或}\angle GHI = 180° - x\text{。}$$

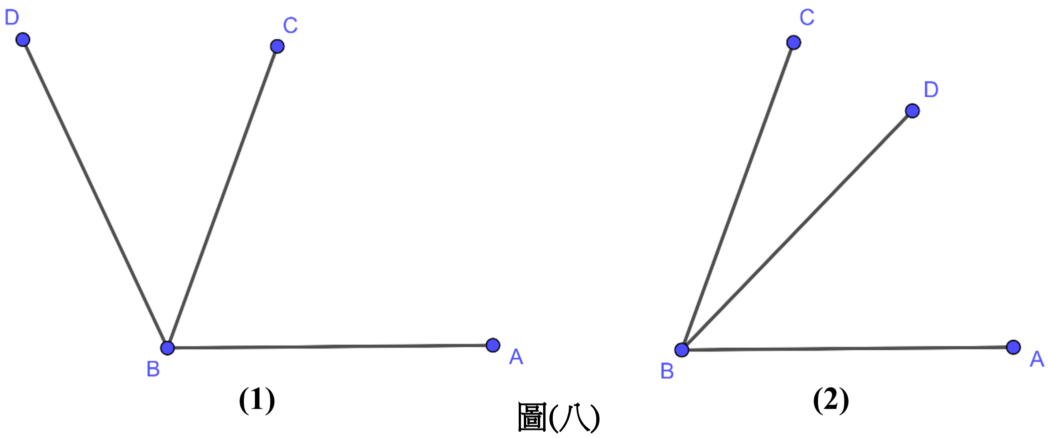
由上易知：$\angle ABC = \angle GHI$或$\angle ABC + \angle GHI = 180°$，從而$\angle ABC \equiv \angle GHI$。

2. 如圖(八)(1)，若D點在$\angle ABC$之外，設$\angle ABC = \alpha$，$\angle CBD = \beta$，

則$\angle ABC + \angle CBD = \alpha + \beta = \angle ABD$，從而$\angle ABC + \angle CBD \equiv \angle ABD$。

如圖(八)(2)，若D點在$\angle ABC$之內，設$\angle ABC = \alpha$，$\angle DBC = \gamma$，

則$\angle ABC + \angle CBD = \alpha + (-\gamma) = \alpha - \gamma = \angle ABD$，從而$\angle ABC + \angle CBD \equiv \angle ABD$。



圖(八)

性質二	若記號$\angle(L_2, L_3)$、$\angle(L_3, L_1)$和$\angle(L_2, L_1)$分別表示直線L_2到L_3、L_3到L_1和L_2到L_1的逆時針夾角，則「≡」滿足 $\angle(L_2, L_3) + \angle(L_3, L_1) \equiv \angle(L_2, L_1)$。

[證明]

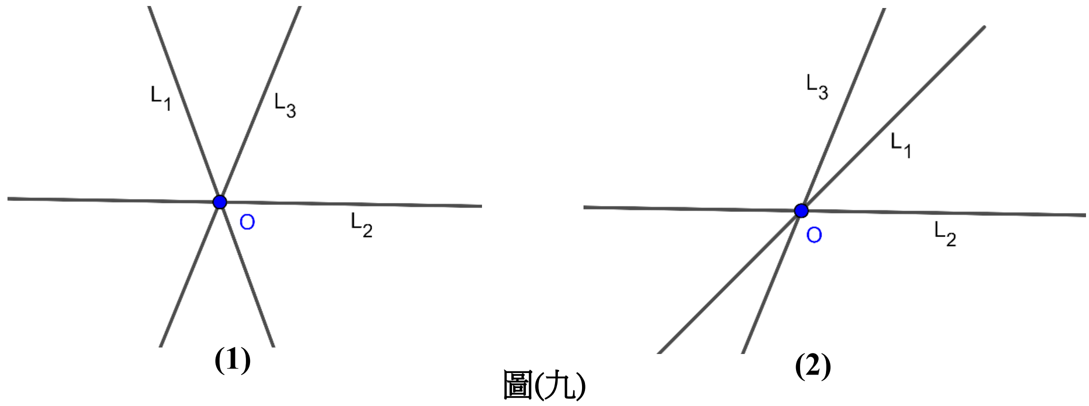
設直線L_2和L_3相交於O點，再將直線L_1平移並通過O點，則

如圖(九)(1)，若直線L_1在L_2和L_3之外，設 $\angle(L_2,L_3)=\alpha$，$\angle(L_3,L_1)=\beta$，

則$\angle(L_2,L_3)+\angle(L_3,L_1)=\alpha+\beta=\angle(L_2,L_1)$，從而$\angle(L_2,L_3)+\angle(L_3,L_1)\equiv\angle(L_2,L_1)$。

如圖(九)(2)，若直線L_1在L_2和L_3之間，設 $\angle(L_2,L_3)=\alpha$，$\angle(L_1,L_3)=\gamma$，

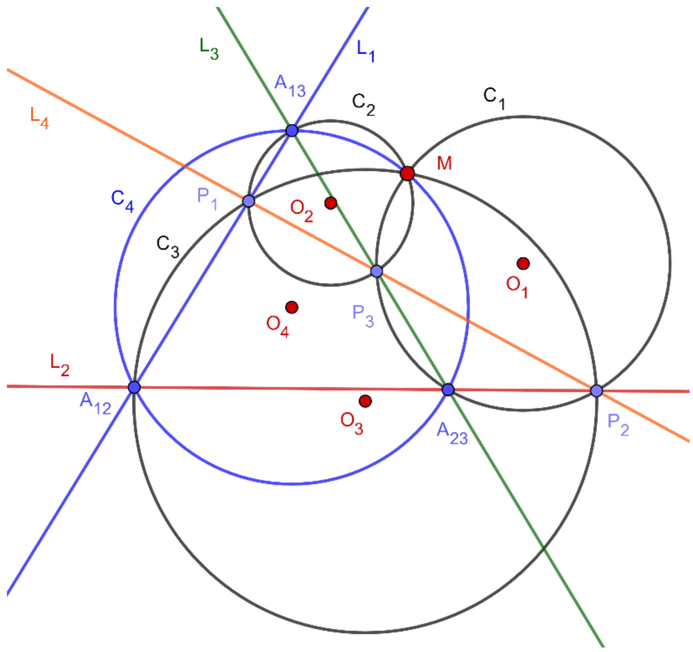
則$\angle(L_2,L_3)+\angle(L_3,L_1)=\alpha+(-\gamma)=\angle(L_2,L_1)$，從而$\angle(L_2,L_3)+\angle(L_3,L_1)\equiv\angle(L_2,L_1)$。



圖(九)

三、密克定理的推廣

為了讓密克定理的推廣可以一般化，不需有限制條件也可以定義密克點，如圖(十)，首先考慮$n=3$，即三條直線時，讓三直線上的**三個動點共線**，得到第四條直線。並畫出原三角形的外接圓，發現此圓和原來的三圓也會共點，不妨稱此點為**$n=4$的密克點**。同時此四圓的圓心也會共圓，不妨稱此圓為**$n=4$的心圓**。於是我們得到以下的定理：

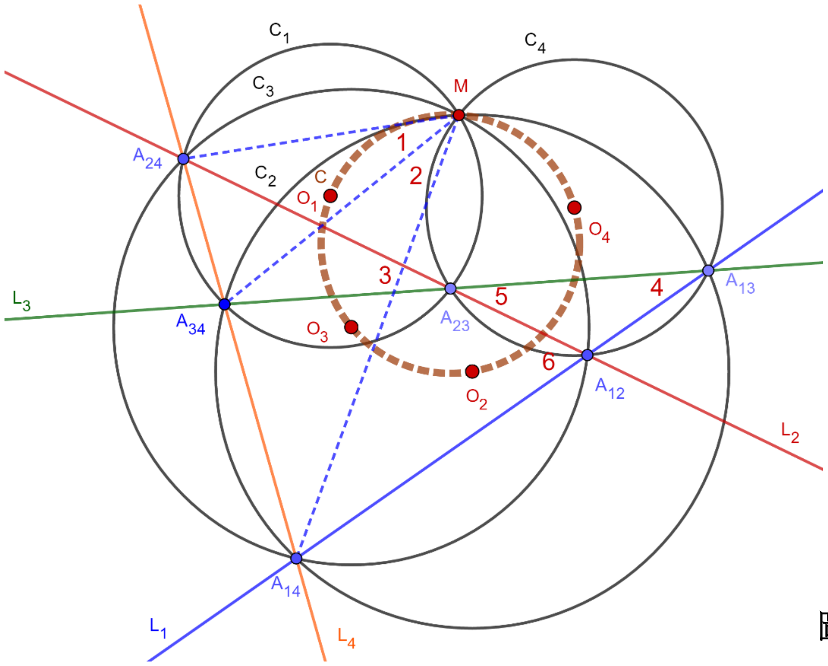


圖(十)

(一)$N=4$的密克點和心圓

定理一	設L_1、L_2、L_3、L_4是一般位置的四條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。A_{12}是L_1和L_2的交點；A_{13}是L_1和L_3的交點，其餘類推。O_1是直線L_2、L_3、L_4所構成三角形的外接圓C_1之圓心；O_2是直線L_1、L_3、L_4所構成三角形的外接圓C_2之圓心，其餘類推。則四個外接圓C_1、C_2、C_3、C_4會交於同一點M，此點M稱為$n=4$的密克點。其四個圓心O_1、O_2、O_3、O_4會共一圓C，此圓C稱為$n=4$的心圓。

[證明]



圖(十一)

1. 如圖(十一)，設M是圓C_1和C_2異於A_{34}的交點，則

在圓C_1中，$\angle A_{24}MA_{34}=\frac{1}{2}\widehat{A_{24}A_{34}}=\angle A_{24}A_{23}A_{34}=\angle A_{12}A_{23}A_{13}=\angle(L_2,L_3)$，

在圓C_2中，$\angle A_{34}MA_{14}=\frac{1}{2}\widehat{A_{34}A_{14}}=\angle A_{34}A_{13}A_{14}=\angle A_{23}A_{13}A_{12}=\angle(L_3,L_1)$。

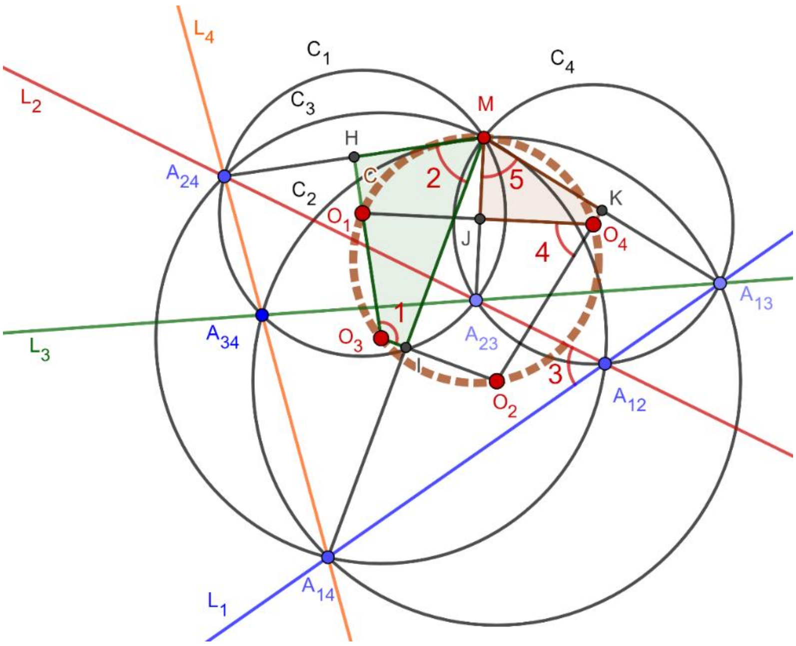
其中記號$\angle(L_2,L_3)$和$\angle(L_3,L_1)$分別表示直線L_2到L_3以及L_3到L_1的逆時針夾角，以下類同。由此可得

$\angle A_{24}MA_{14}=\angle A_{24}MA_{34}+\angle A_{34}MA_{14}=\angle A_{12}A_{23}A_{13}+\angle A_{23}A_{13}A_{12}=\angle A_{24}A_{12}A_{14}$

即$\angle A_{24}MA_{14}=\angle A_{24}A_{12}A_{14}=\angle(L_2,L_1)$，所以圓$C_3$經過$M$。同理可證，圓$C_4$也經過$M$。

故四個圓C_1、C_2、C_3、C_4會交於同一點M。

並從中發現 $\angle(L_2,L_3)+\angle(L_3,L_1)=\angle(L_2,L_1)$ 這樣的性質。



圖(十二)

2. 如圖(十二)，延長$\overline{O_3O_1}$和$\overline{A_{24}M}$交於H點，$\overline{O_3O_2}$和$\overline{A_{14}M}$交於I點，$\overline{O_1O_4}$和$\overline{A_{23}M}$交於J點，延長$\overline{O_2O_4}$和$\overline{A_{13}M}$交於K點。

因為圓C_1和C_3的公共弦為$\overline{A_{24}M}$，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_3O_1}$與$\overline{A_{24}M}$垂直。

同理，$\overleftrightarrow{O_3O_2}$與$\overline{A_{14}M}$垂直。於是，$\angle O_2O_3O_1 + \angle A_{24}MA_{14} = 180°$。

又 A_{12}、A_{14}、A_{24}、M四點共圓C_3，推知 $\angle A_{24}MA_{14} = \angle A_{24}A_{12}A_{14} = \angle(L_2, L_1)$。

所以 $\angle O_2O_3O_1 + \angle(L_2, L_1) = 180°$，即$\angle O_2O_3O_1 \equiv \angle(L_2, L_1) \cdots$①。

因為圓C_2和C_4的公共弦為$\overline{A_{13}M}$，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_2O_4}$與$\overline{A_{13}M}$垂直。

同理，$\overleftrightarrow{O_1O_4}$與$\overline{A_{23}M}$垂直。於是，$\angle O_1O_4O_2 = \angle A_{23}MA_{13}$。

又 A_{13}、A_{12}、A_{23}、M四點共圓C_4，推知 $\angle A_{23}MA_{13} = \angle A_{24}A_{12}A_{14} = \angle(L_2, L_1)$。

所以 $\angle O_1O_4O_2 = \angle(L_2, L_1)$，即$\angle O_1O_4O_2 \equiv \angle(L_2, L_1) \cdots$②。

由①②可知：$\angle O_2O_3O_1 + \angle O_1O_4O_2 = 180°$，即$\angle O_2O_3O_1 \equiv \angle O_1O_4O_2$。

故四個圓心O_1、O_2、O_3、O_4也會共一圓C。

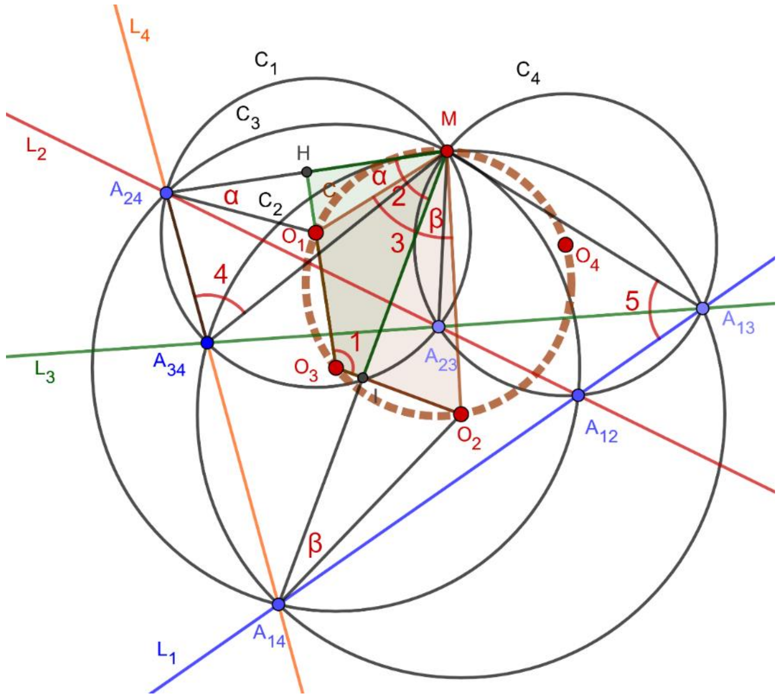
定理二 密克點M會和這四個外接圓的圓心O_1、O_2、O_3、O_4共一圓C，

此時$\angle A_{24}MA_{14} \equiv \angle O_2O_3O_1$，$\angle O_1MO_2 \equiv \angle O_1O_4O_2 \equiv \angle(L_2, L_1) \equiv \angle O_2O_3O_1$，

表示這些角相等或互補。另外，$\angle O_jMO_k \equiv \angle O_jO_iO_k \equiv \angle(L_k, L_j) \equiv \angle O_kO_lO_j$，

其中i, j, k, l相異，且$i, j, k, l \in \{1,2,3,4\}$。

[證明]



圖(十三)

1. 如圖(十三)，因為$\overleftrightarrow{O_3O_1}$與$\overline{A_{24}M}$垂直，且$\overleftrightarrow{O_3O_2}$與$\overline{A_{14}M}$垂直，

   所以 $\angle O_2O_3O_1 + \angle A_{24}MA_{14} = 180°$，即 $\angle A_{24}MA_{14} \equiv \angle O_2O_3O_1 \cdots$①。

   又 A_{13}、A_{14}、A_{34}、M四點共圓C_2，所以 $\angle MA_{34}A_{24} = \angle MA_{13}A_{14}$。

   由**同弧上的圓周角是圓心角的一半**，可得

   在等腰$\Delta A_{24}O_1M$中，$\angle A_{24}MO_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle MO_1A_{24} = 90° - \angle MA_{34}A_{24}$。

   在等腰$\Delta A_{14}O_2M$中，$\angle A_{14}MO_2 = 90° - \frac{1}{2}\angle MO_2A_{14} = 90° - \angle MA_{13}A_{14}$。

   故 $\angle A_{24}MO_1 = \angle A_{14}MO_2$。推得 $\angle A_{24}MO_1 + \angle O_1MA_{14} = \angle A_{14}MO_2 + \angle O_1MA_{14}$。

   於是，$\angle A_{24}MA_{14} = \angle O_1MO_2 \cdots$②。

2. 由①②可知: $\angle O_2O_3O_1 + \angle O_1MO_2 = 180°$，即$\angle O_2O_3O_1 \equiv \angle O_1MO_2$。

   推知 圓心O_1、O_2、O_3、M共一圓，又圓心O_1、O_2、O_3、O_4也共一圓，

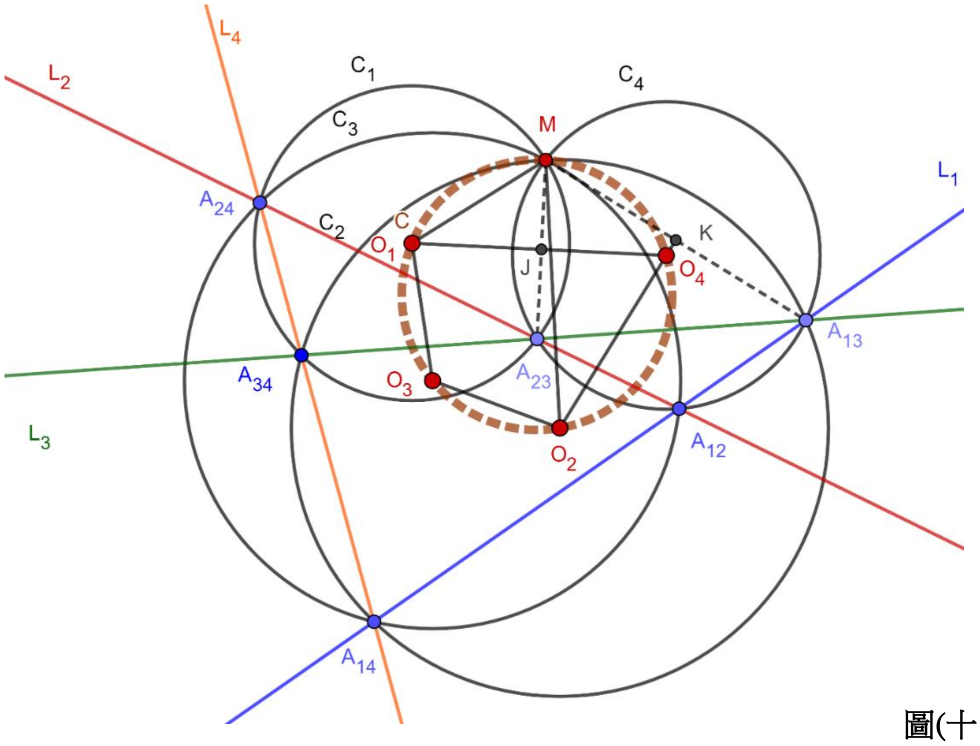
   因為**這兩組四點中都包含$\boldsymbol{O_1}$，$\boldsymbol{O_2}$，$\boldsymbol{O_3}$三點**，而**過三點的圓是唯一的**，

   所以密克點M會和這四個外接圓的圓心O_1、O_2、O_3、O_4共一圓。如圖(十四)，

   滿足$\angle O_1MO_2 \equiv \angle O_1O_4O_2 \equiv \angle(L_2, L_1) \equiv \angle O_2O_3O_1$，表示這些角相等或互補。

   同理可得，$\angle O_jMO_k \equiv \angle O_jO_iO_k \equiv \angle(L_k, L_j) \equiv \angle O_kO_lO_j$，其中$i, j, k, l$相異，

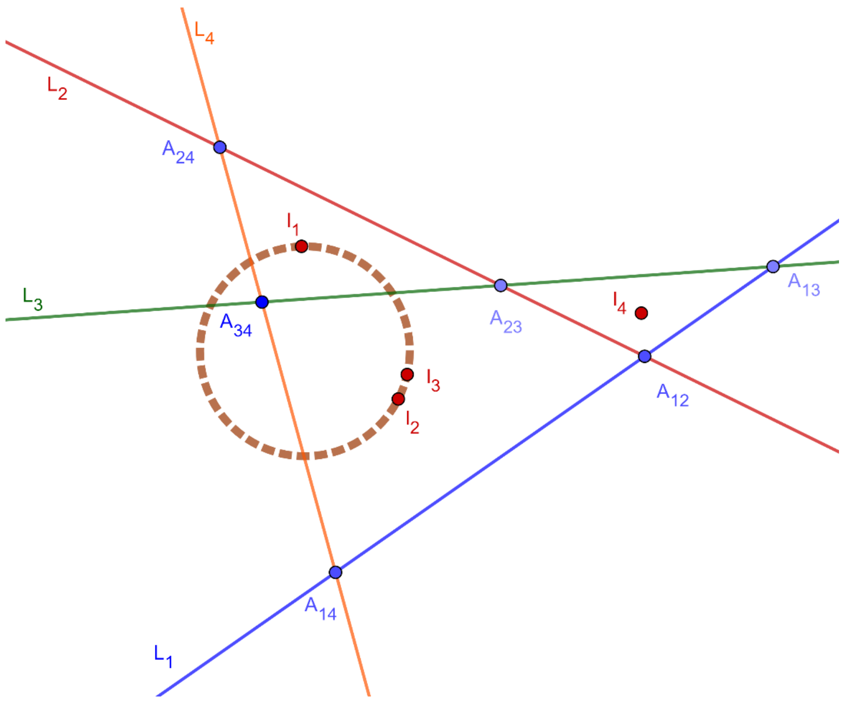
   且$i, j, k, l \in \{1,2,3,4\}$。



圖(十四)

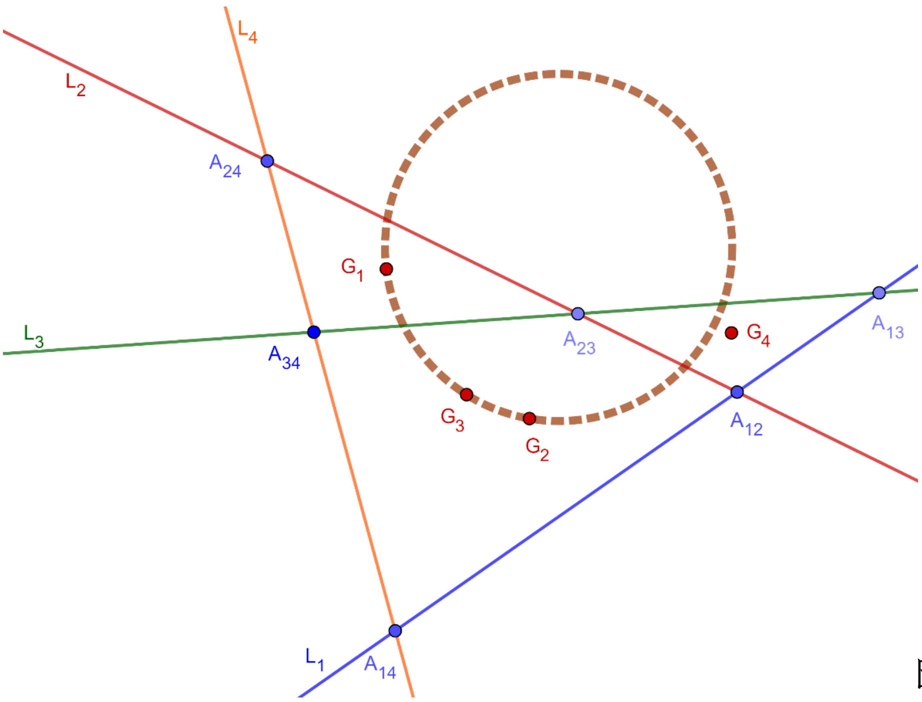
在圖(五)的在完全四邊形中，我們前面考慮四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的外接圓圓心(外心)，發現這四個外心會共圓。如果考慮這些三角形的其它心，情況又會如何？

> 一、如圖(十五)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$A_{12}A_{13}A_{23}$的內心分別為$I_1$、$I_2$、$I_3$、$I_4$，但$I_1$、$I_2$、$I_3$、$I_4$並沒有共圓或共線的現象。



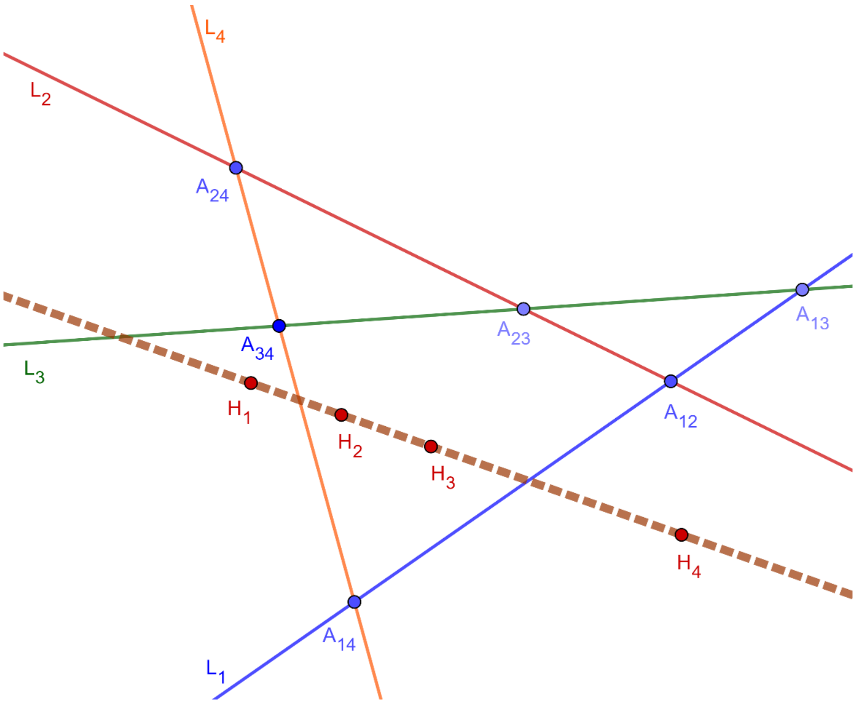
圖(十五)

二、如圖(十六)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的重心分別為$G_1$、$G_2$、$G_3$、$G_4$，但$G_1$、$G_2$、$G_3$、$G_4$並沒有共圓或共線的現象。



圖(十六)

三、如圖(十七)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的垂心分別為$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$，則$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$四點共線。



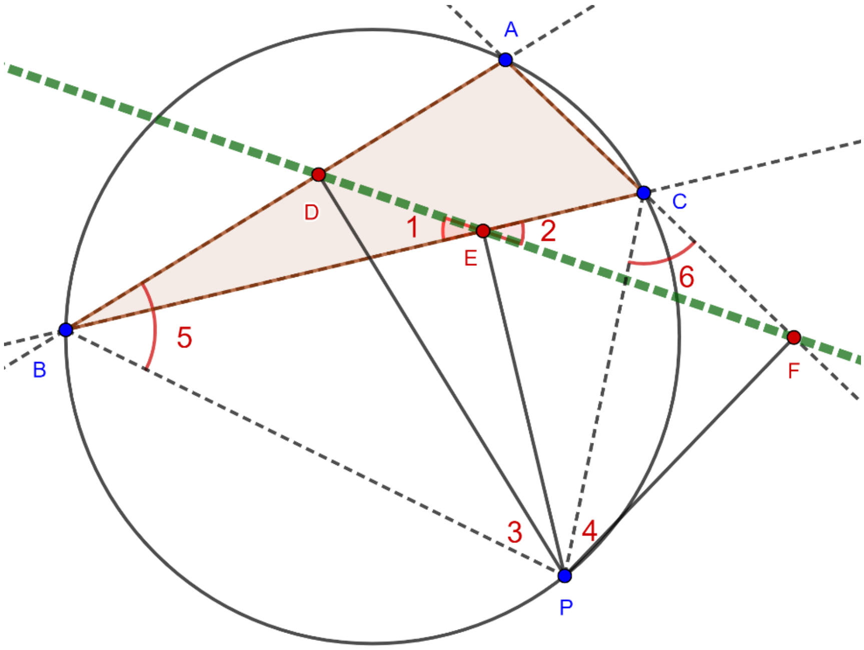
圖(十七)

為了證明上面這個定理，我們必須先證明下述三個引理：

引理一　西姆松(*Simson*)定理

如圖(十八)，設P為ΔABC的外接圓上異於頂點的一點，過P點分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$的垂線，垂足依序為D、E、F，則D、E、F三點共線。(此線稱為P對ΔABC的 *Simson* 線)

[證明]



圖(十八)

連接$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，因為$\overline{PD}\perp\overleftrightarrow{AB}$，$\overline{PE}\perp\overleftrightarrow{BC}$，$\overline{PF}\perp\overleftrightarrow{CA}$，所以四邊形$BDEP$、$PECF$均為圓內接四邊形，因此$\angle 1=\angle 3$，$\angle 4=\angle 2$。而且外接圓的直徑分別為$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，於是$\angle 3+\angle 5=90°$，$\angle 4+\angle 6=90°$。又因為四邊形$ABPC$也是圓內接四邊形，所以$\angle 5=\angle 6$。

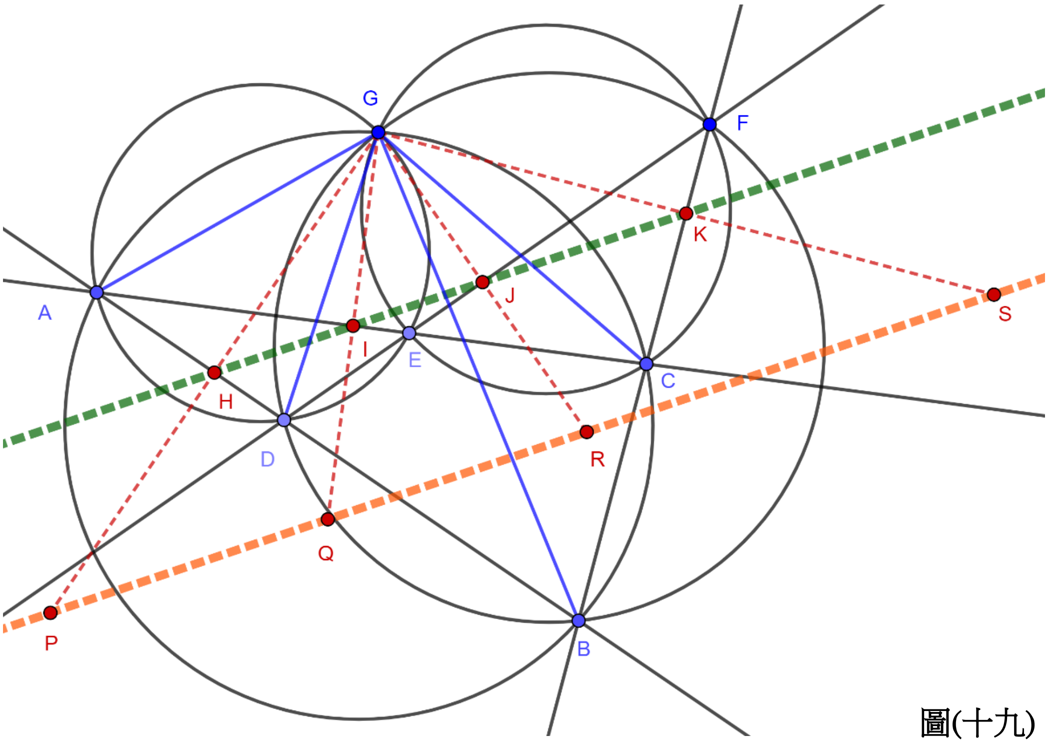
推得 $\angle 1=\angle 3=90°-\angle 5=90°-\angle 6=\angle 4=\angle 2$，即$\angle 1=\angle 2$。

因為 B、E、C三點共線，所以 $\angle BEF+\angle 2=180°$，推知 $\angle BEF+\angle 1=180°$。

故D、E、F三點共線。

引理二　如圖(十九)，已知A、D、B三點共線，A、E、C三點共線，B、C、F三點共線，D、E、F三點共線，則ΔABC、ΔBDF、ΔADE、ΔCEF的外接圓有共同的交點G，且此點G關於四直線的對稱點P、Q、R、S共線。

[證明]



圖(十九)

1. 設ΔABC和ΔBDF的外接圓除B外的交點為G，連接$\overline{GA}$、$\overline{GB}$、$\overline{GC}$、$\overline{GD}$。

   因為 $\angle AED=\angle CEF=\angle ACB-\angle DFB=\angle AGB-\angle DGB=\angle AGD$，

   所以G在ΔADE的外接圓上，同理可證：G在ΔCEF的外接圓上，

   故ΔABC、ΔBDF、ΔADE、ΔCEF的外接圓有共同的交點G。

2. 如圖(十九)，因為點G關於四直線的對稱點為P、Q、R、S，所以H、I、J、K分別是$\overline{GP}$、$\overline{GQ}$、$\overline{GR}$、$\overline{GS}$的中點，且H、I、J、K就分別是點G關於四直線的垂足。

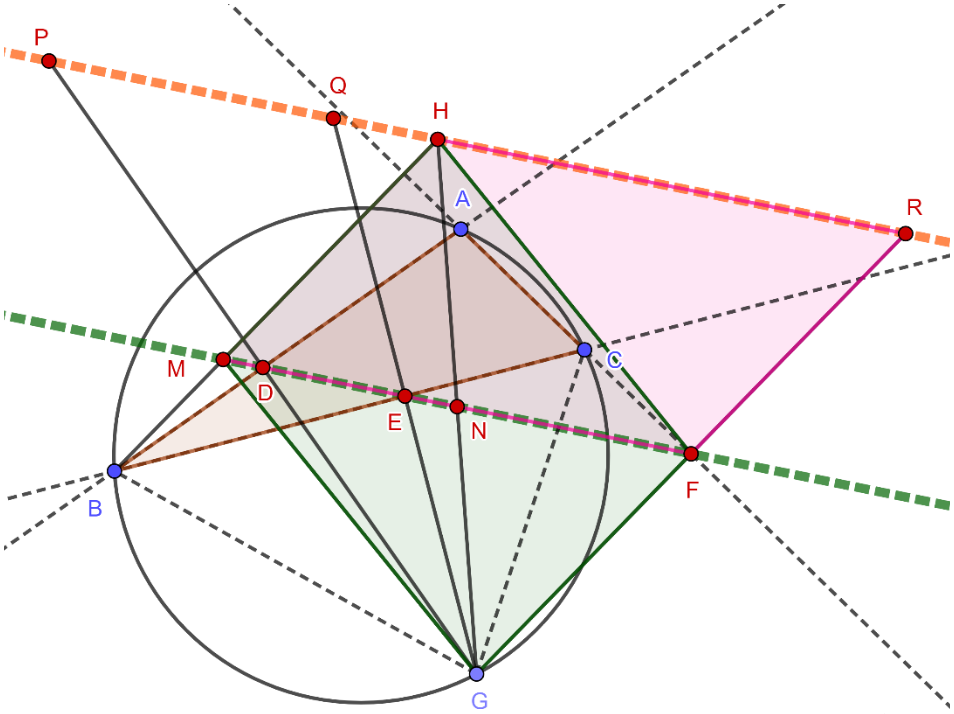
   因為點G在ΔABC的外接圓上，所以由**西姆松(*Simson*)定理**得H、I、K共線。

   同理，H、J、K共線，故H、I、J、K四點共線**(此線稱為完全四邊形的 *Simson* 線)**，

   於是P、Q、R、S共線。

引理三	如圖(二十)，設G為ΔABC的外接圓上異於頂點的一點，過G點分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$的垂線，垂足依序為D、E、F。G點關於此三直線的對稱點分別為P、Q、R，若H為ΔABC的垂心，則P、Q、R、H四點共線。

[證明]



圖(二十)

1. 由**引理一**知：D、E、F三點共線，又點G關於三直線的對稱點分別為P、Q、R，

   所以D、E、F分別是$\overline{GP}$、$\overline{GQ}$、$\overline{GR}$的中點，因此P、Q、R三點也共線。

   因為H為ΔABC的垂心， $\overleftrightarrow{BH} \perp \overleftrightarrow{AC}$且$\overleftrightarrow{GF} \perp \overleftrightarrow{AC}$，所以$\overleftrightarrow{BH} // \overleftrightarrow{GF}$。

   又$\overleftrightarrow{GF}$和**西姆松線** $\boldsymbol{D-E-F}$交於F點，所以$\overleftrightarrow{BH}$必和**西姆松線** $\boldsymbol{D-E-F}$交於一點，

   設為M，並連接$\overline{GM}$和$\overline{FH}$。

2. 因為D、E、F分別是$\overline{GP}$、$\overline{GQ}$、$\overline{GR}$的中點，且D、E、F三點共線$\overleftrightarrow{DF}$，

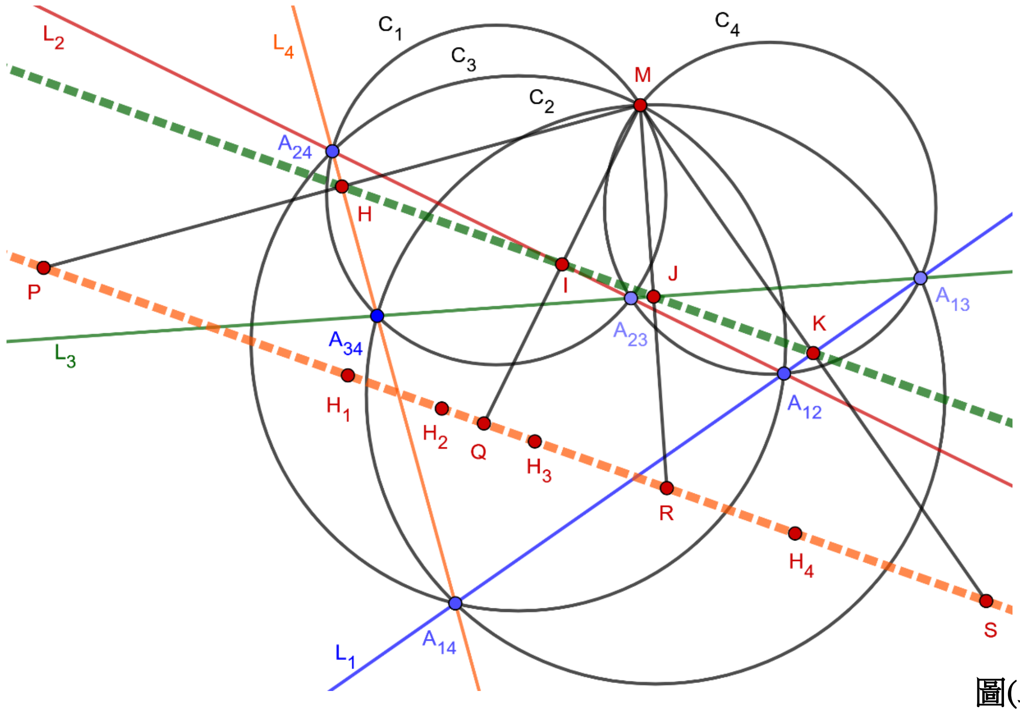
   所以P、Q、R三點也共線$\overleftrightarrow{PR}$，推得$\overleftrightarrow{DF} // \overleftrightarrow{PR}$，因此四邊形$MHRF$為平行四邊形。

   推得$\overline{MH} = \overline{FR}$且$\overline{FR} = \overline{GF}$，所以$\overline{MH} = \overline{GF}$，又$\overleftrightarrow{MH} // \overleftrightarrow{GF}$，因此四邊形$MHFG$也是平行四邊形。連接$\overline{GH}$和$\overline{MF}$，設$\overline{GH}$和$\overline{MF}$互相平分於$N$點，則$\overline{GN} = \overline{NH}$。

   又因為N點在**西姆松線**$\overleftrightarrow{DF}$上，所以H點在$\overleftrightarrow{PR}$上，因此P、Q、R、H四點共線。

定理三　如圖(二十一)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的垂心分別為$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$，則$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$四點共線。

[證明]



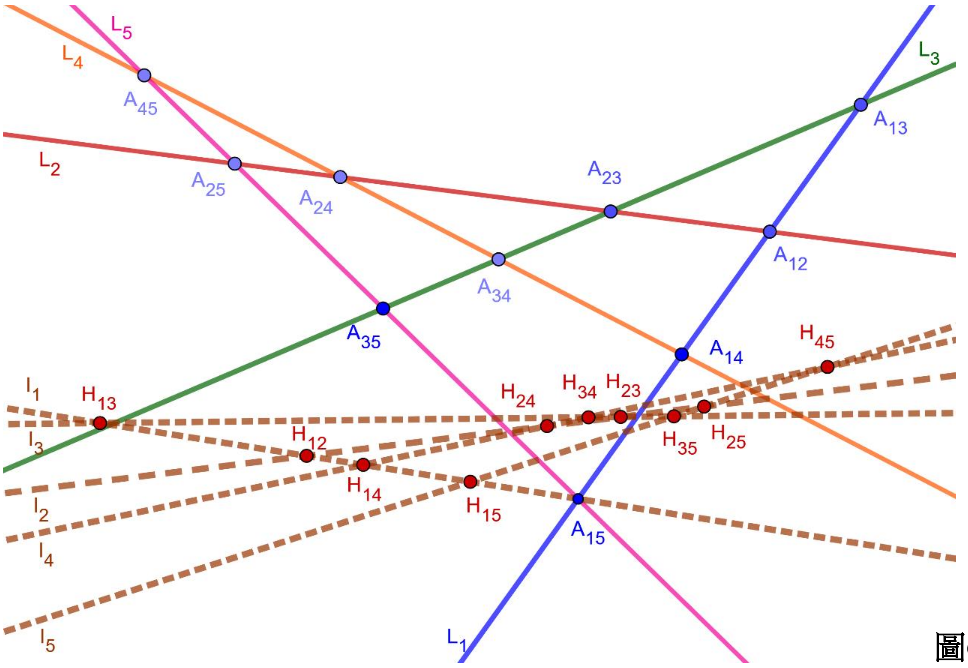
圖(二十一)

1. 已知$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的外接圓有共同的交點$M$，由**引理二**知，此點$M$關於四直線$\overleftrightarrow{A_{24}A_{34}}$、$\overleftrightarrow{A_{24}A_{23}}$、$\overleftrightarrow{A_{34}A_{23}}$、$\overleftrightarrow{A_{14}A_{13}}$的對稱點$P$、$Q$、$R$、$S$四點共線。

2. 已知M為$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$外接圓上一點，過$M$點作$\overleftrightarrow{A_{24}A_{34}}$、$\overleftrightarrow{A_{24}A_{23}}$、$\overleftrightarrow{A_{34}A_{23}}$的垂線，垂足分別為$H$、$I$、$J$。$M$點關於此三直線的對稱點為$P$、$Q$、$R$，又$H_1$為$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$的垂心，由**引理三**知，$P$、$Q$、$R$、$H_1$四點共線。同理可得，$P$、$R$、$S$、$H_2$四點共線，$P$、$Q$、$S$、$H_3$四點共線，$Q$、$R$、$S$、$H_4$四點共線，即$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$都在$P$、$Q$、$R$、$S$所共的直線上，故$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$四點共線。

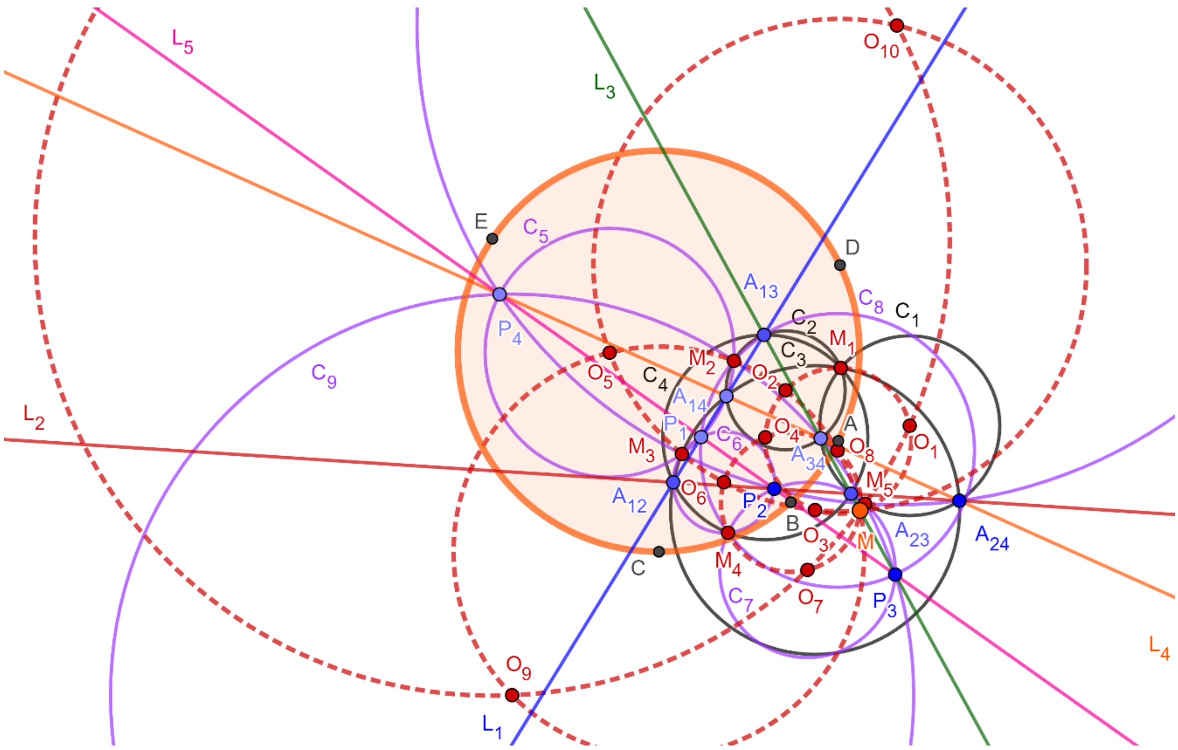
四、如圖(二十二)，設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。H_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的垂心；H_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的垂心，其餘類推。再設垂心H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}所共直線為l_1；垂心H_{12}、H_{23}、H_{24}、H_{25}所共直線為l_2，其餘類推。則這五條直線l_1、l_2、l_3、l_4、l_5是一般位置的五條直線。

[證明] 因為直線l_1、l_2、l_3、l_4、l_5滿足每兩線都相交，且任意三線都不共點，所以直線l_1、l_2、l_3、l_4、l_5為一般位置的五條直線。



圖(二十二)

如圖(二十三)，考慮$n = 4$，即四條直線時，讓四直線上的**四個動點共線**，得到第五條直線。並畫出新增加的六個三角形的外接圓，發現此六圓和原來完全四邊形的四圓**並不會共點**。但如果任意取五條直線中的四條直線，則會找到五個完全四邊形並得到五個$n = 4$的心圓，此五個心圓會共點，不妨稱此點為**$n = 5$的密克點**。同時此五個心圓的圓心也會共圓，不妨稱此圓為**$n = 5$的心圓**。於是我們得到以下的定理：

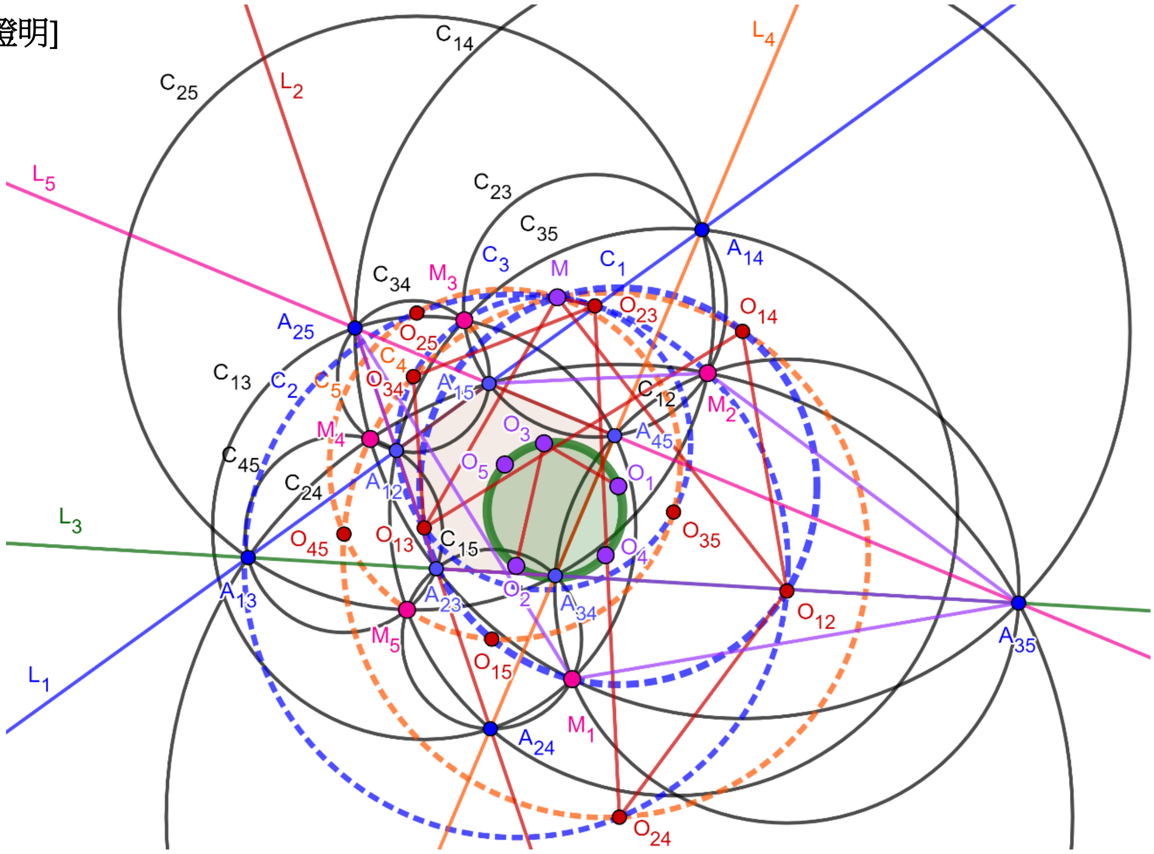


圖(二十三)

(二) $N=5$的密克點和心圓

定理四 設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。O_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{45}之圓心；O_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的外接圓C_{35}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}所共圓為心圓C_1；圓心O_{12}、O_{23}、O_{24}、O_{25}所共圓為心圓C_2，其餘類推。則五個心圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M，此點M稱為$n=5$的密克點。其五個圓心O_1、O_2、O_3、O_4、O_5會共一圓C，此圓C稱為$n=5$的心圓。

[證明]



圖(二十四)

1. 如圖(二十四)，因為O_1是四條直線L_2、L_3、L_4、L_5的心圓C_1的圓心；O_2是四條直線L_1、L_3、L_4、L_5的心圓C_2的圓心，其餘類推。O_{12}是三條直線L_3、L_4、L_5的外接圓C_{12}的圓心，也是圓C_1和C_2的一個交點；O_{13}是三條直線L_2、L_4、L_5的外接圓C_{13}的圓心，也是圓C_1和C_3的一個交點，其餘類推。

   設M是圓C_1和C_2異於O_{12}的交點，於是M同時在圓C_1和C_2上。

   因為圓C_{13}和C_{14}交於點M_1和A_{25}，圓C_{12}和C_{14}交於點M_1和A_{35}，

   所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_{13}O_{14}}$與$\overline{A_{25}M_1}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_{12}O_{14}}$與$\overline{A_{35}M_1}$垂直。

於是 $\angle O_{13}O_{14}O_{12} \equiv \angle A_{35}M_1A_{25}$。

又圓C_{14}為$\Delta A_{25}A_{23}A_{35}$的外接圓，且過點$M_1$，所以$\angle A_{35}M_1A_{25} \equiv \angle A_{35}A_{23}A_{25}$。

推得 $\angle O_{13}MO_{12} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{13}O_{12}} \equiv \angle O_{13}O_{14}O_{12} \equiv \angle A_{35}M_1A_{25} \equiv \angle A_{35}A_{23}A_{25} \equiv \angle(L_2, L_3)$。

同理可證$\angle O_{12}MO_{23} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{12}O_{23}} \equiv \angle O_{12}O_{24}O_{23} \equiv \angle A_{15}M_2A_{35} \equiv \angle A_{35}A_{13}A_{15} \equiv \angle(L_3, L_1)$。

由此推出 $\angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}MO_{12} + \angle O_{12}MO_{23} \equiv \angle(L_2, L_3) + \angle(L_3, L_1) \equiv \angle(L_2, L_1)$。

同理可得，$\angle O_{13}O_{34}O_{23} \equiv \angle A_{25}M_3A_{15} \equiv \angle A_{15}A_{12}A_{25} \equiv \angle(L_2, L_1)$，

即$\angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}O_{34}O_{23}$，推知圓$C_3$經過$M$。同理可證：圓$C_4$、$C_5$也經過$M$，

故五個圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M。

2. 現在考慮經過同一點M的三個圓C_1、C_2和C_3，O_{13}是圓C_1和C_3的第二個交點；O_{23}是圓C_2和C_3的第二個交點，因為圓C_1和C_3的公共弦為$\overline{O_{13}M}$，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_1O_3}$與$\overline{O_{13}M}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_2O_3}$與$\overline{O_{23}M}$垂直。

   於是，$\angle O_2O_3O_1 \equiv \angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}O_{34}O_{23} \equiv \angle(L_2, L_1)$。

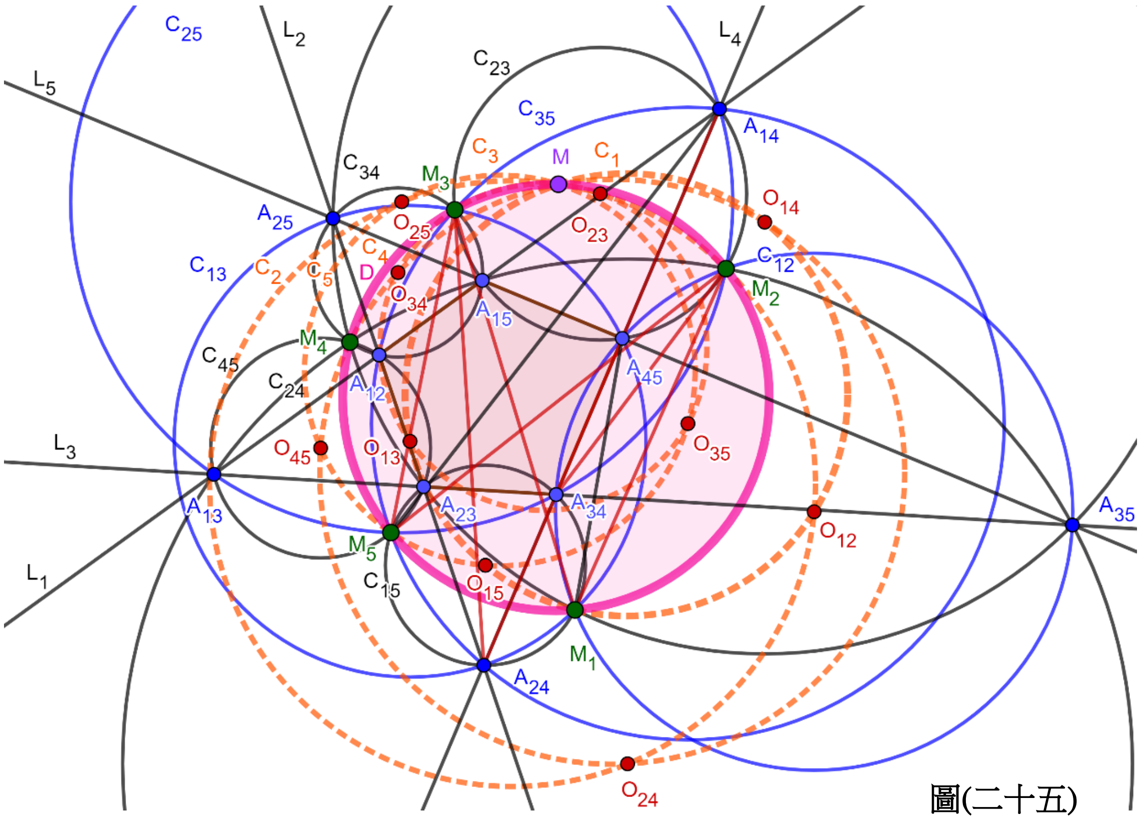
   同理可證，$\angle O_1O_4O_2 \equiv \angle(L_2, L_1) \equiv \angle O_2O_5O_1$。

   由此推得：五個圓心O_1、O_2、O_3、O_4、O_5會共一圓，此圓就是$n = 5$的心圓。

無獨有偶，除了五個心圓的圓心會共圓，五個密克點也會和新的密克點共圓

定理五	如圖(二十五)，設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。M_1是直線L_2、L_3、L_4、L_5所構成的完全四邊形之密克點；M_2是直線L_1、L_3、L_4、L_5所構成的完全四邊形之密克點，其餘類推。則這五個密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5會共圓，此圓稱為$n = 5$的限制圓。如圖(二十六)，設O_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{45}之圓心；O_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的外接圓C_{35}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}所共圓為心圓C_1；圓心O_{12}、O_{23}、O_{24}、O_{25}所共圓為心圓C_2，其餘類推。則五個心圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M，此點M稱為$n = 5$的密克點。而密克點M和這五個$n = 4$的密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5也會共一圓。

[證明]



圖(二十五)

1. 設M_1、M_2、M_3的外接圓為D，連接$\overline{M_5M_3}$、$\overline{M_5M_2}$、$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_1M_2}$、$\overline{M_5A_{14}}$、$\overline{M_1A_{45}}$、$\overline{A_{24}M_3}$、$\overline{A_{34}M_2}$，由同弧上的圓周角相等，可得

   在圓C_{35}中，$\angle M_3M_5A_{14} = \angle M_3A_{24}A_{14}$；在圓$\mathrm{C}_{25}$中，$\angle A_{14}M_5M_2 = \angle A_{14}A_{34}M_2$，

   在圓C_{13}中，$\angle M_3A_{24}A_{45} = \angle M_3M_1A_{45}$；在圓$\mathrm{C}_{12}$中，$\angle A_{45}A_{34}M_2 = \angle A_{45}M_1M_2$，

   所以 $\angle M_3M_5M_2 = \angle M_3M_5A_{14} + \angle A_{14}M_5M_2 = \angle M_3A_{24}A_{14} + \angle A_{14}A_{34}M_2$

   $= \angle M_3A_{24}A_{45} + \angle A_{45}A_{34}M_2 = \angle M_3M_1A_{45} + \angle A_{45}M_1M_2 = \angle M_3M_1M_2$，

   即$\angle M_3M_5M_2 = \angle M_3M_1M_2$，因此$M_1$、$M_2$、$M_3$、$M_5$會共圓$D$。

   同理M_1、M_2、M_3、M_4也會共圓D，故這五個密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5會共圓。

2. 設M_1、M_2、M_3的外接圓為D，連接$\overline{MM_1}$、$\overline{MM_2}$、$\overline{M_3M_1}$、$\overline{M_3M_2}$、$\overline{MO_{12}}$、$\overline{M_3A_{45}}$，由**同弧上的圓周角相等**，可得

   在圓C_1中，$\angle M_1MO_{12} = \angle M_1O_{13}O_{12}$；在圓$\mathrm{C}_2$中，$\angle O_{12}MM_2 = \angle O_{12}O_{23}M_2$，

   再連接$\overline{O_{13}M_1}$、$\overline{O_{13}O_{12}}$、$\overline{O_{13}A_{45}}$、$\overline{O_{12}A_{45}}$、$\overline{O_{12}M_1}$、$\overline{O_{23}M_2}$、$\overline{O_{23}O_{12}}$、$\overline{O_{23}A_{45}}$、$\overline{O_{12}M_2}$，

   因為圓C_{12}和C_{13}交於點M_1和A_{45}，圓C_{12}和C_{23}交於點M_2和A_{45}，

   所以四邊形$O_{12}M_1O_{13}A_{45}$、$O_{12}M_2O_{23}A_{45}$均為鳶形。

由鳶形**一組對角線平分對角**以及**同弧上的圓周角是圓心角的一半**

可得 $\angle M_1O_{13}O_{12}=\frac{1}{2}\angle M_1O_{13}A_{45}$，$\angle O_{12}O_{23}M_2=\frac{1}{2}\angle A_{45}O_{23}M_2$；

$\angle M_1M_3A_{45}=\frac{1}{2}\angle M_1O_{13}A_{45}$，$\angle A_{45}M_3M_2=\frac{1}{2}\angle A_{45}O_{23}M_2$，

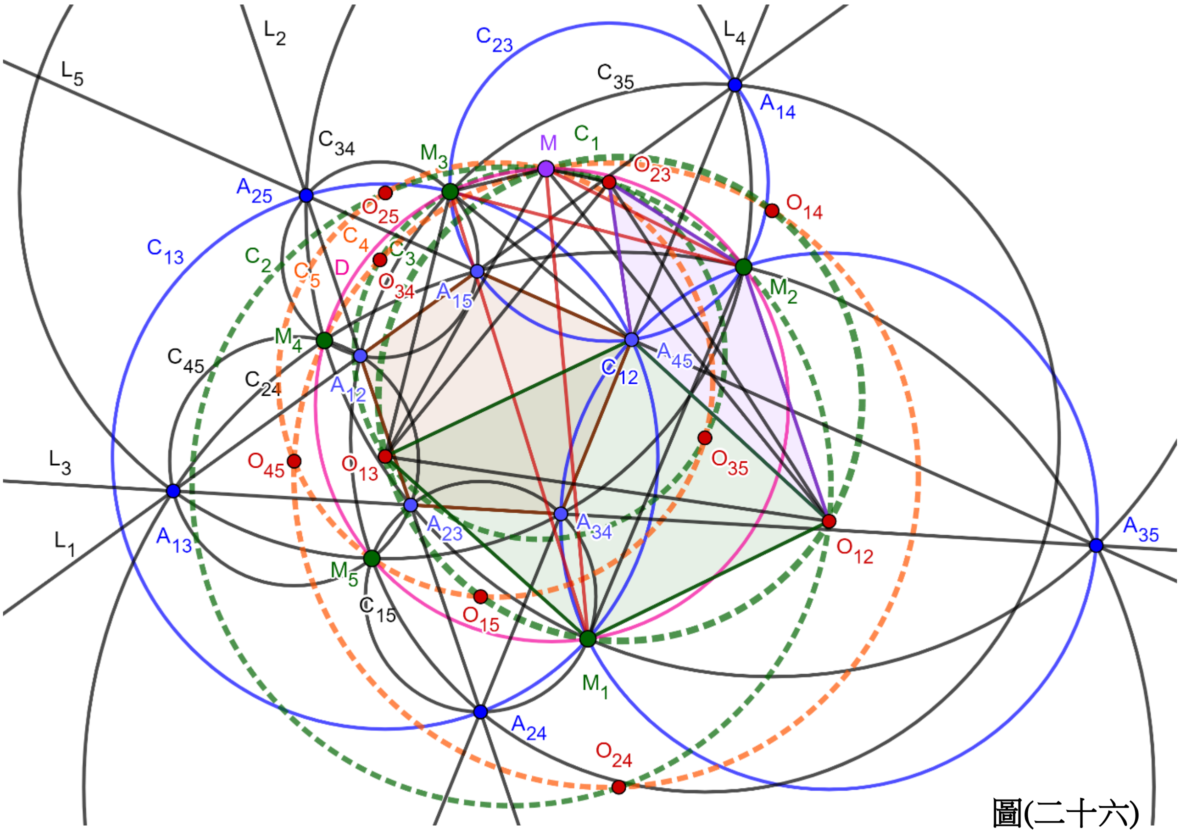
所以 $\angle M_1MM_2=\angle M_1MO_{12}+\angle O_{12}MM_2=\angle M_1O_{13}O_{12}+\angle O_{12}O_{23}M_2$

$=\frac{1}{2}\angle M_1O_{13}A_{45}+\frac{1}{2}\angle A_{45}O_{23}M_2=\angle M_1M_3A_{45}+\angle A_{45}M_3M_2=\angle M_1M_3M_2$，

即$\angle M_1MM_2=\angle M_1M_3M_2$，因此$M_1$、$M_2$、$M_3$、$M$會共圓$D$。

又M_1、M_2、M_3、M_4、M_5會共圓，故$n=5$的密克點M和這五個$n=4$的密克點

M_1、 M_2、M_3、M_4、M_5也會共一圓。



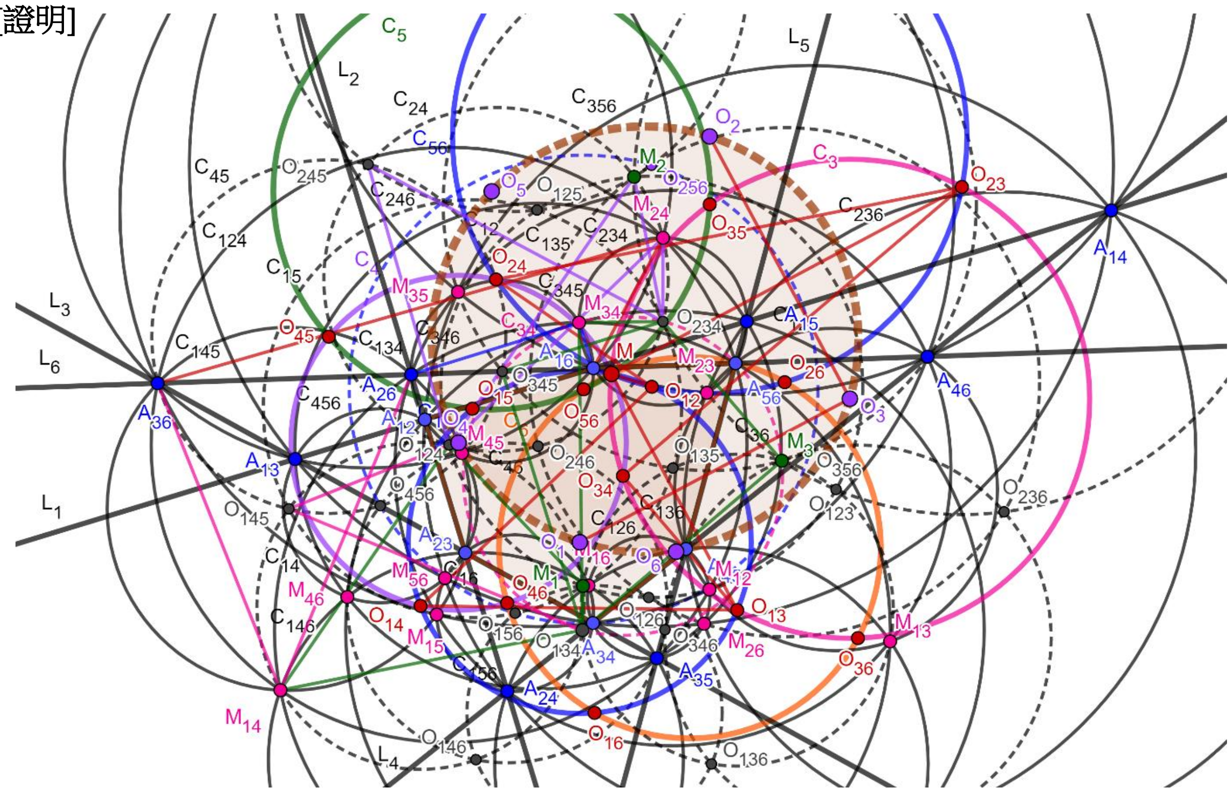
圖(二十六)

進一步考慮$n=5$，即五條直線時，讓五直線上的**五個動點共線**，得到第六條直線。任意取六條直線中的五條直線，會找到六個$n=5$的心圓，此六個心圓會共點，不妨稱此點為$\boldsymbol{n=6}$**的密克點**。同時此六個心圓的圓心也會共圓，不妨稱此圓為$\boldsymbol{n=6}$**的心圓**。於是我們得到以下的定理：

(三) $N=6$的密克點和心圓

定理六 設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6是一般位置的六條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。O_{456}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{456}之圓心；O_{356}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的外接圓C_{356}之圓心，其餘類推。O_{56}是直線L_1、L_2、L_3、L_4的心圓C_{56}之圓心；O_{46}是直線L_1、L_2、L_3、L_5的心圓C_{46}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}、O_{16}所共圓為心圓C_1；圓心O_{12}、O_{23}、O_{24}、O_{25}、O_{26}所共圓為心圓C_2，其餘類推。則六個心圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、C_6會交於同一點M，此點M稱為$n=6$的密克點。其六個圓心O_1、O_2、O_3、O_4、O_5、O_6會共一圓C，此圓C稱為$n=6$的心圓。

[證明]



圖(二十七)

1. 如圖(二十七)，因為O_1是五條直線L_2、L_3、L_4、L_5、L_6的心圓C_1的圓心；O_2是五條直線L_1、L_3、L_4、L_5、L_6的心圓C_2的圓心，其餘類推。O_{12}是四條直線L_3、L_4、L_5、L_6的心圓C_{12}的圓心，也是圓C_1和C_2的一個交點；O_{13}是四條直線L_2、L_4、L_5、L_6的心圓C_{13}的圓心，也是圓C_1和C_3的一個交點，其餘類推。

   設M是圓C_1和C_2異於O_{12}的交點，於是M同時在圓C_1和C_2上。

   因為圓C_{13}和C_{14}交於點M_1和O_{134}，圓C_{12}和C_{14}交於點M_1和O_{124}，

   所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_{13}O_{14}}$與$\overline{O_{134}M_1}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_{12}O_{14}}$與$\overline{O_{124}M_1}$垂直。

於是 $\angle O_{13}O_{14}O_{12} \equiv \angle O_{124}M_1O_{134}$。

且圓C_{14}過O_{124}、O_{134}、M_1、M_{14}，所以$\angle O_{124}M_1O_{134} \equiv \angle O_{134}M_{14}O_{124}$。

又圓C_{134}和C_{145}交於點M_{14}和A_{26}，圓C_{145}和C_{124}交於點M_{14}和A_{36}，

因此 $\overleftrightarrow{O_{134}O_{145}}$與$\overline{A_{26}M_{14}}$垂直，$\overleftrightarrow{O_{145}O_{124}}$與$\overline{A_{36}M_{14}}$垂直。

於是 $\angle O_{134}O_{145}O_{124} \equiv \angle A_{26}M_{14}A_{36}$。

又圓C_{145}為$\Delta A_{26}A_{23}A_{36}$的外接圓，且過點$M_{14}$，所以$\angle A_{26}M_{14}A_{36} \equiv \angle A_{26}A_{23}A_{36}$。

推得 $\angle O_{13}MO_{12} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{13}O_{12}} \equiv \angle O_{13}O_{14}O_{12} \equiv \angle O_{124}M_1O_{134} \equiv \angle O_{134}M_{14}O_{124}$

$$\equiv \angle O_{134}O_{145}O_{124} \equiv \angle A_{26}M_{14}A_{36} \equiv \angle A_{26}A_{23}A_{36} \equiv \angle(L_2, L_3)。$$

同理可證 $\angle O_{12}MO_{23} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{12}O_{23}} \equiv \angle O_{12}O_{24}O_{23} \equiv \angle O_{124}M_2O_{234} \equiv \angle O_{124}M_{24}O_{234}$

$$\equiv \angle O_{124}O_{245}O_{234} \equiv \angle A_{36}M_{24}A_{16} \equiv \angle A_{16}A_{13}A_{36} \equiv \angle(L_3, L_1)。$$

由此推出 $\angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}MO_{12} + \angle O_{12}MO_{23} \equiv \angle(L_2, L_3) + \angle(L_3, L_1) \equiv \angle(L_2, L_1)$

同理可得 $\angle O_{13}O_{34}O_{23} \equiv \angle O_{134}M_3O_{234} \equiv \angle O_{134}M_{34}O_{234} \equiv \angle O_{134}O_{345}O_{234}$

$$\equiv \angle A_{26}M_{34}A_{16} \equiv \angle A_{16}A_{12}A_{26} \equiv \angle(L_2, L_1)，$$

即$\angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}O_{34}O_{23}$，推知圓$C_3$經過$M$。

同理可證：圓C_4、C_5、C_6也經過M，故六個圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、C_6會交於同一點M。

2. 現在考慮經過同一點M的三個圓C_1、C_2和C_3，O_{13}是圓C_1和C_3的第二個交點；O_{23}是圓C_2和C_3的第二個交點，因為圓C_1和C_3的公共弦為$\overline{O_{13}M}$，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_1O_3}$與$\overline{O_{13}M}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_2O_3}$與$\overline{O_{23}M}$垂直。

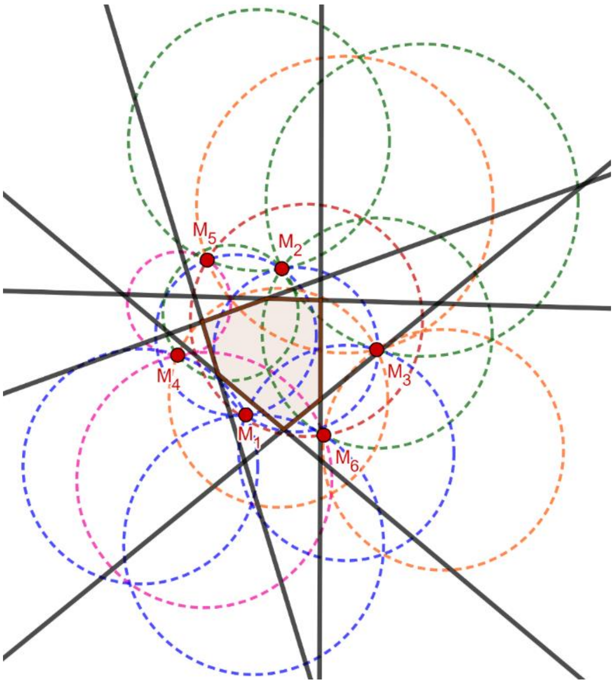
   於是，$\angle O_2O_3O_1 \equiv \angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}O_{34}O_{23} \equiv \angle(L_2, L_1)$。

   同理可證：$\angle O_1O_4O_2 \equiv \angle(L_2, L_1) \equiv \angle O_1O_5O_2 \equiv \angle O_2O_6O_1$。

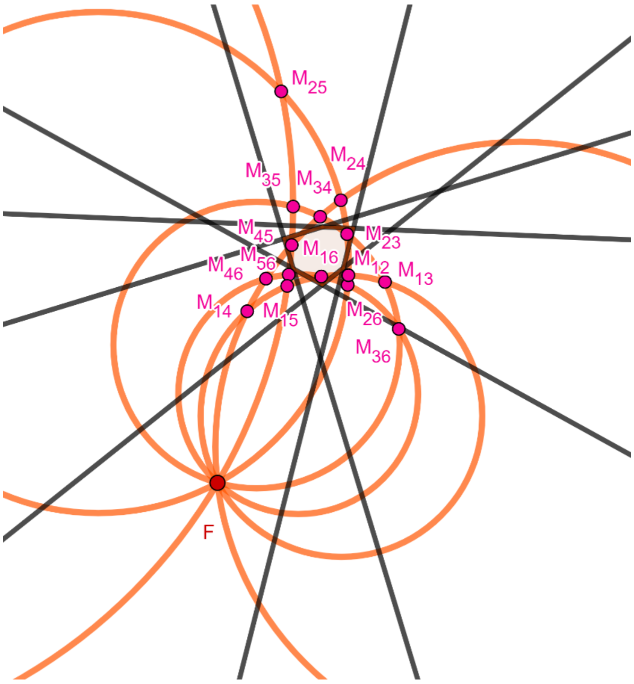
   由此推得：六個圓心O_1、O_2、O_3、O_4、O_5、O_6會共一圓，此圓就是$n = 6$的心圓。

雖然六個心圓的圓心會共圓，但六個密克點並不會共圓。然而，除了六個心圓會共密克點外，六個限制圓也會共限制點。

定理七 如圖(二十八)，$n = 6$時，這六個密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5、M_6不會共圓。如圖(二十九)，但六個$n = 5$的限制圓會共交點F，此點F稱為$n = 6$的限制點。



圖(二十八)



圖(二十九)

(四) $\boldsymbol{N=n(n\geq 4)}$的密克點和心圓

定理八 假設我們已經定義了k條直線的心圓，並設已經給出$k+1$條一般位置的直線L_1、L_2、⋯、L_{k+1}，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。用O_1表示k條直線L_2、L_3、⋯、L_{k+1}的心圓之圓心，用O_2表示k條直線L_1、L_3、⋯、L_{k+1}的心圓之圓心，其餘類推。則$k+1$個心圓C_1、C_2、⋯、C_{k+1}會交於同一點M，此點M稱為$n=k+1$的密克點，$k+1$個圓心O_1、O_2、⋯、O_{k+1}會共一圓C，此圓C稱為$n=k+1$的心圓。由數學歸納法可知：任意$n(n\geq 4)$的自然數，都有n個心圓C_1、C_2、⋯、C_n會交於同一點M，此點M稱為$N=n$的密克點。其n個圓心O_1、O_2、⋯、O_n會共一圓C，此圓C稱為$N=n$的心圓。

[證明]

1. 假設對於k條直線我們的結論為真，且已經證明：k條直線L_1、L_2、⋯、L_k的心圓在$k-1$條直線L_2、L_3、⋯、L_k與$k-1$條直線L_1、L_3、⋯、L_k的心圓之**圓心$\boldsymbol{O_1}$和$\boldsymbol{O_2}$之間的弧**等於**直線$\boldsymbol{L_2}$和$\boldsymbol{L_1}$之間夾角的 2 倍**，即$\widehat{O_1O_2}\equiv 2\angle(L_2,L_1)$，$\angle(L_2,L_1)\equiv\frac{1}{2}\widehat{O_1O_2}\equiv\angle O_1O_iO_2$，其中 $i=3,4,\cdots,k$，其餘類推。現在考慮$k+1$條一般位置的直線L_1、L_2、⋯、L_{k+1}，設O_1表示k條直線L_2、L_3、⋯、L_{k+1}的心圓C_1之圓心，其餘類推；O_{12}表示$k-1$條直線L_3、L_4、⋯、L_{k+1}的心圓C_{12}之圓心，其餘類推，設M是圓C_1和C_2異於O_{12}的交點，因為

M同時在圓C_1和C_2上，所以　$\angle O_{13}MO_{12} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{13}O_{12}} \equiv \angle O_{13}O_{14}O_{12} \equiv \angle(L_2, L_3)$，

$\angle O_{12}MO_{23} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{12}O_{23}} \equiv \angle O_{12}O_{24}O_{23} \equiv \angle(L_3, L_1)$。

由此推出

$\angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}MO_{12} + \angle O_{12}MO_{23} \equiv \angle(L_2, L_3) + \angle(L_3, L_1) \equiv \angle(L_2, L_1) \equiv \angle O_{13}O_{34}O_{23}$，即圓$C_3$經過$M$。同理可證：其餘的每一個圓$C_4$、$C_5$、⋯、$C_{k+1}$都經過$M$，故$k+1$個心圓$C_1$、$C_2$、⋯、$C_{k+1}$會交於同一點$M$。

2. 現在考慮經過同一點M的三個圓C_1、C_2和C_3，O_{13}是圓C_1和C_3的第二個交點；O_{23}是圓C_2和C_3的第二個交點，因為圓C_1和C_3的公共弦為$\overline{O_{13}M}$，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_1O_3}$與$\overline{O_{13}M}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_2O_3}$與$\overline{O_{23}M}$垂直。

於是，$\angle O_2O_3O_1 \equiv \angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}O_{43}O_{23} \equiv \angle(L_2, L_1)$。

同理可證：對於任意的圓心$O_i(i = 4,5,\cdots,k+1)$，滿足$\angle O_1O_iO_2 \equiv \angle(L_2, L_1)$。

由此推得：所有的圓心O_1、O_2、⋯、O_{k+1}會共一圓，此圓就是$n = k+1$的心圓。

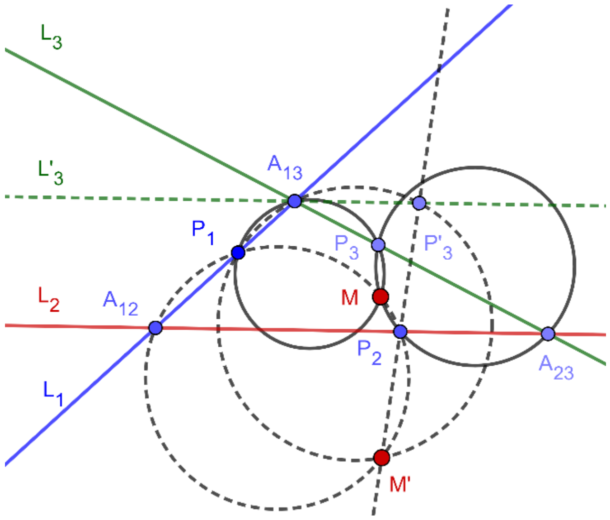
由**數學歸納法**可知：任意$n(n \geq 4)$的自然數，都有n個心圓C_1、C_2、⋯、C_n會交於同一點M，此點M稱為$N = n$的密克點，其n個圓心O_1、O_2、⋯、O_n會共一圓C，此圓C稱為$N = n$的心圓。

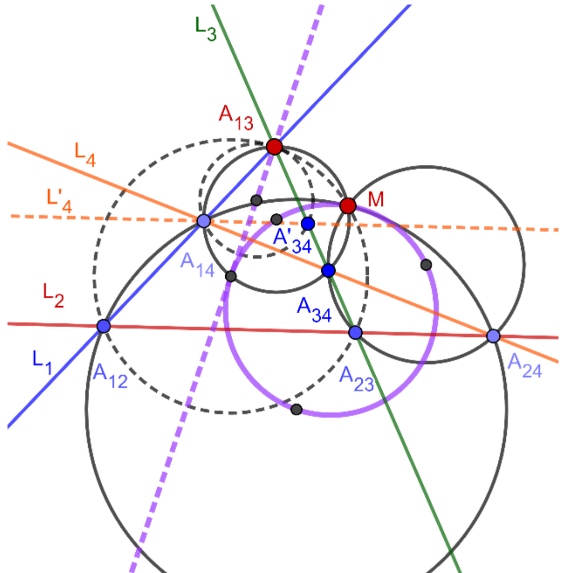
(五)如果設L_1、L_2、⋯、L_n不是一般位置的n條直線，即退化的情形**(平行或共點)**，其實也會同時有**密克點和心圓**。只是我們必須作以下的定義：

1. 就以平行而論，如圖(三十)，可將**平行直線組**視為**交於無窮遠點**，則某直線L(不與此平行線組平行)交於此平行線組任意兩點，則此兩點與無窮遠點的外接圓即為L，即**視直線為圓的退化情形**。

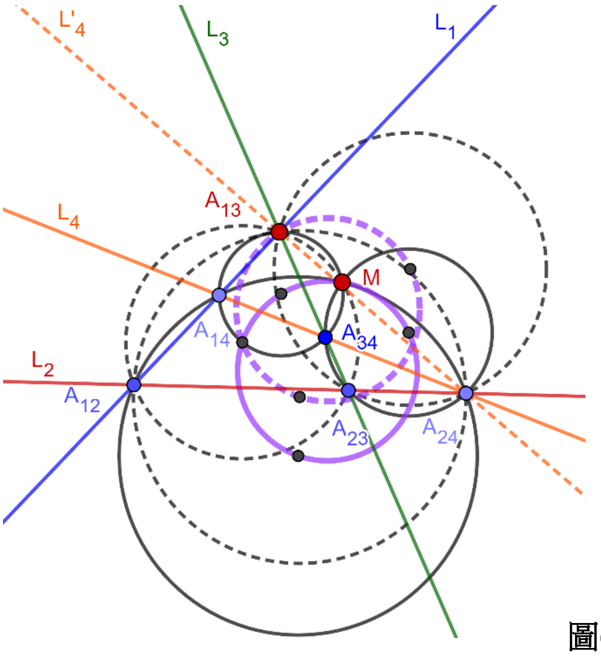
2. 就以共點而論，如圖(三十一)，可將**共點直線組的交點**視為**原本兩兩直線相交的點無窮接近**，則此共點線組之**外接圓**即為此交點。

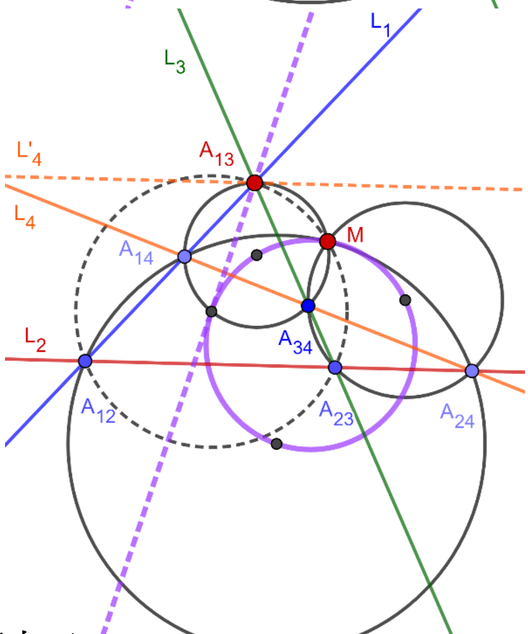
3. 雖然知道這類的退化情形，也皆能符合上述結論，如圖(三十二)，但有些情況心圓會**退化成心線**，因此密克點可能是一些心圓或心線的交點，因為需要龐大的討論才能確認各種情形，故本文不予討論。



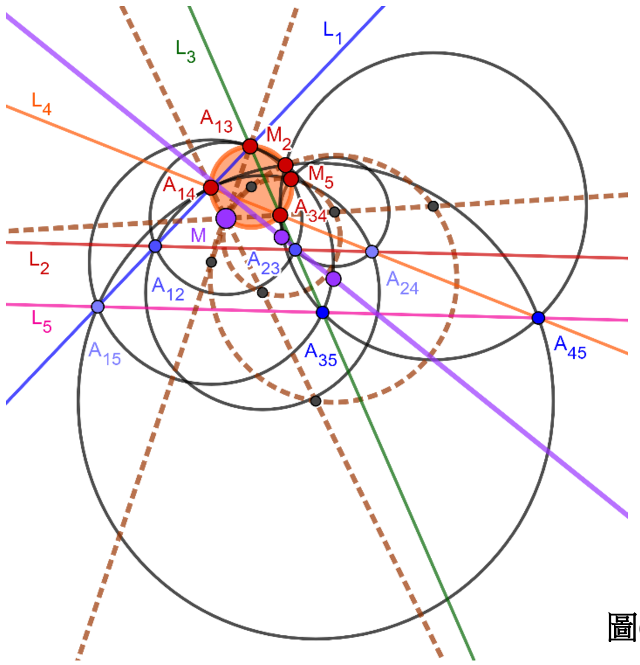


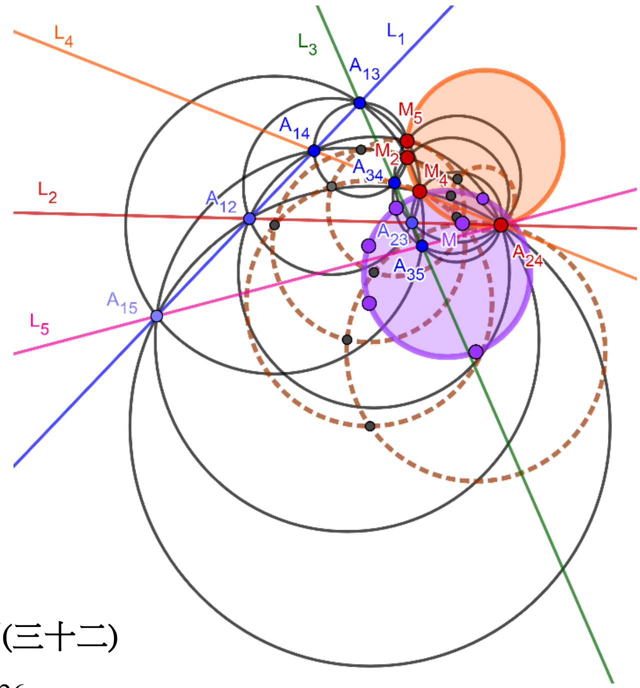
圖(三十)





圖(三十一)

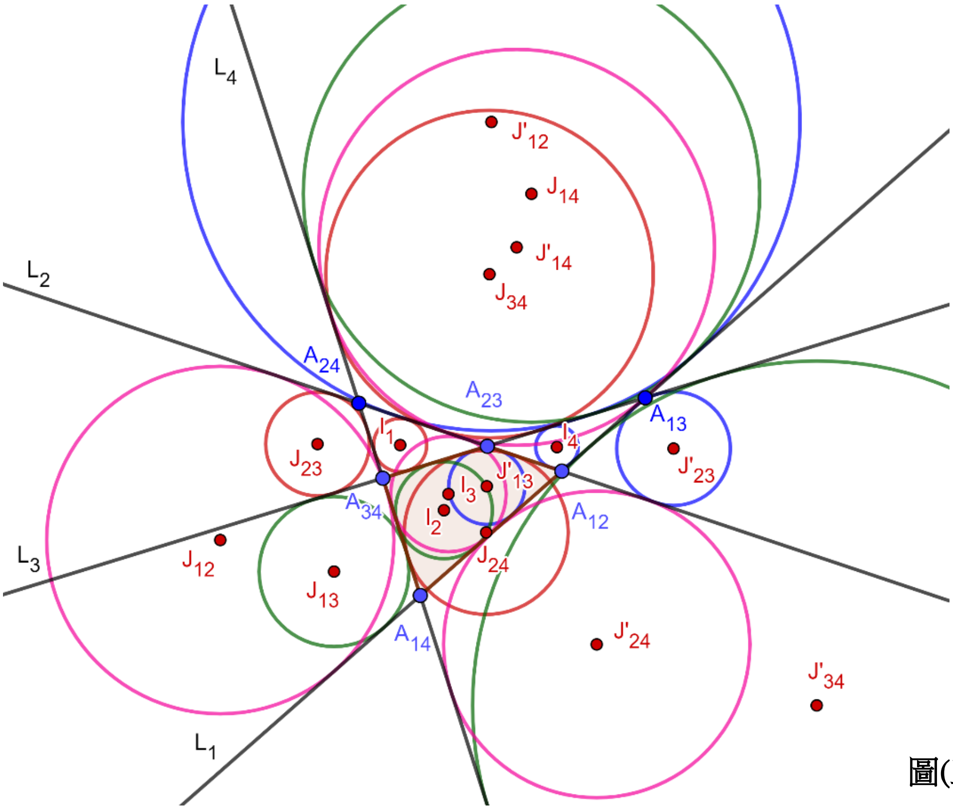




圖(三十二)

(六)在圖(五)的完全四邊形中，我們之前考慮四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的外接圓，發現這四個圓會共點。如果考慮這些三角形的**內切圓或旁切圓**，情況又會如何？

如圖(三十三)，分別作出四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$各自的一個內切圓和三個旁切圓，但這十六個圓中並沒有四圓共點的現象。



圖(三十三)

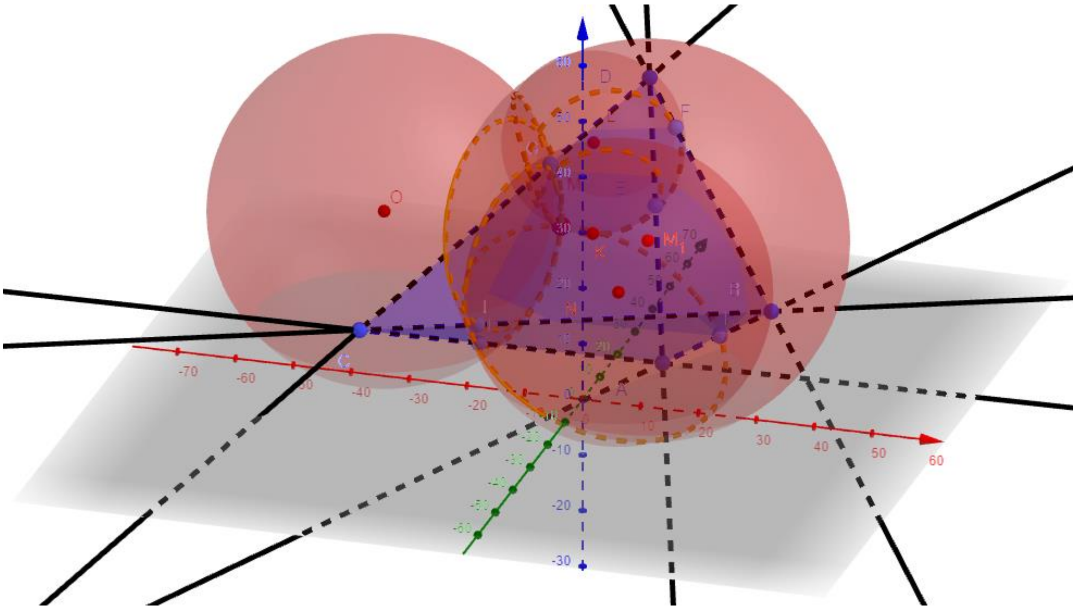
(七)三維空間的延伸思考

如果我們將原問題進一步推廣到三維空間，而有以下的**猜想**：

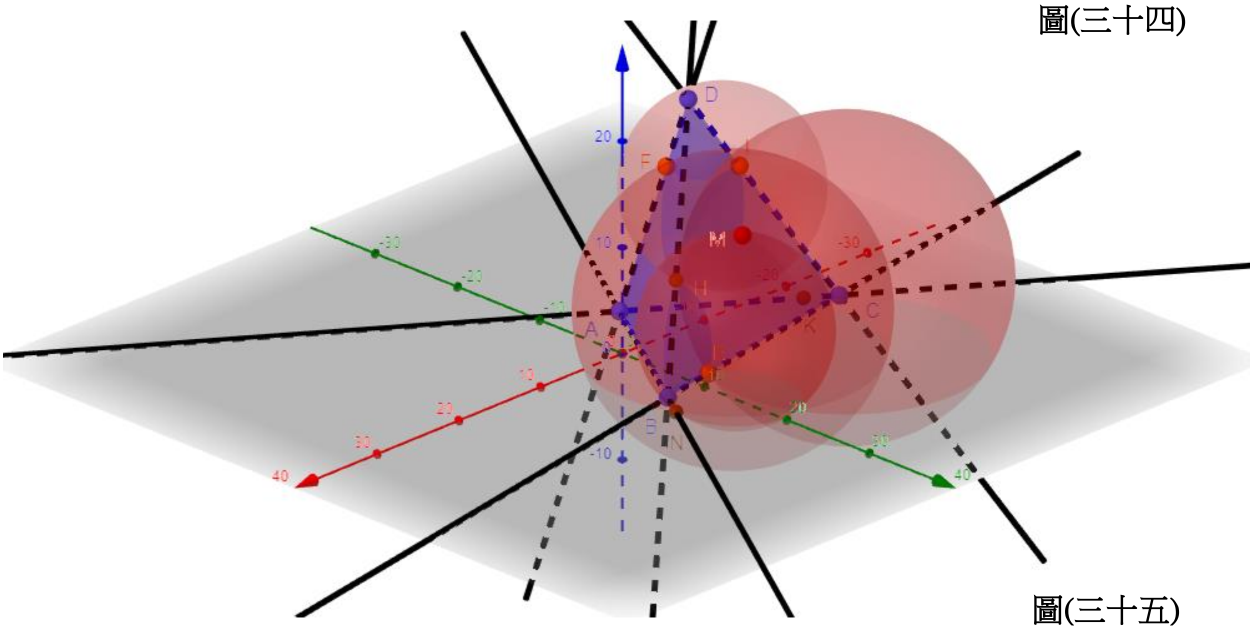
設E_1、E_2、…、E_n是一般位置的n個平面，即其中**任意兩個平面都不平行，任意三個平面都不共線**。(1)那麼對任意$n(n \geq 5)$的自然數，是否存在n個心球S_1、S_2、…、S_n會**交於同一點M**？ (2)而n個球心O_1、O_2、…、O_n是否**會共一球面S**？

首先考慮**三角形的密克定理**的推廣，如圖(三十四)，若以角頂和角的稜線上各一點作四個球面，則其六組兩兩交圓會共點，因此四個球面會共點，同時此四個球面的球心也會共一球面，即**四面體也有密克定理**。為了說明六條稜線上各取一點，再以角頂和角的稜線上各一點所作的四個球面**一定共點**。

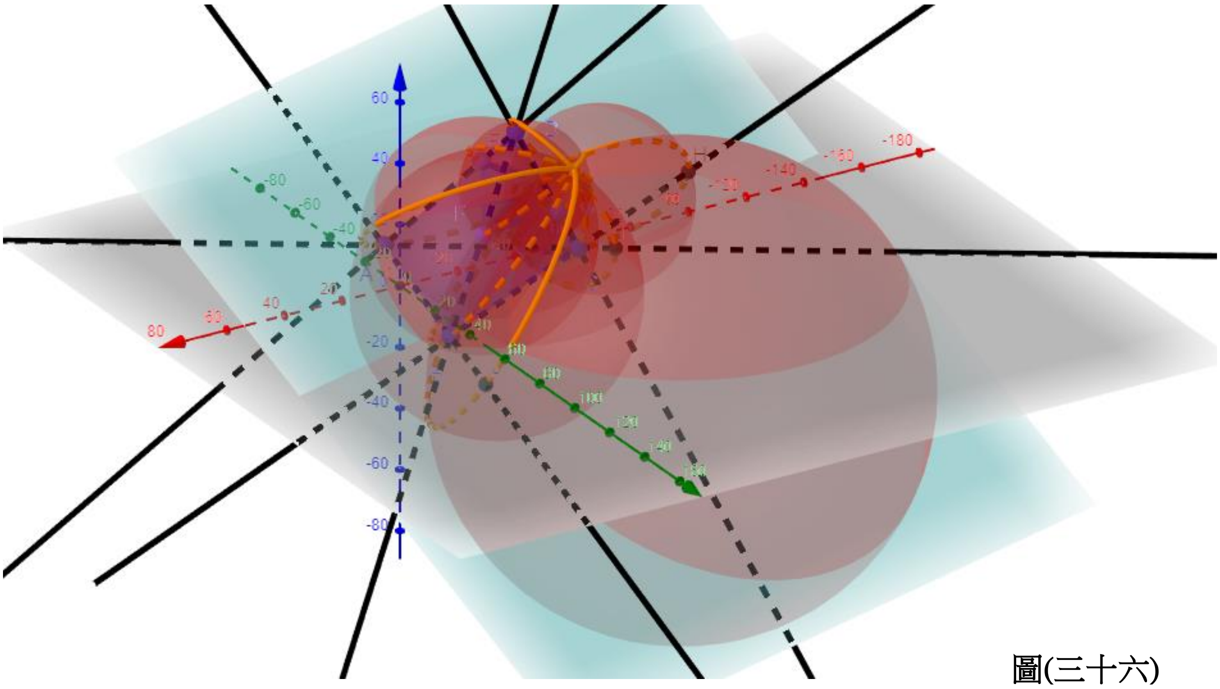
如圖(三十五)，我們設此共點為**密克點M(不在四面體的各面和稜線上)**，並在一個角頂的其中兩條稜線上各取一個點，則包括密克點M、角頂共四點所作的球面會和此角頂的另一條稜線交於一點。接著過密克點M，取這角頂的第三條稜線上一點和共稜線的另一角頂，並在第二角頂的其餘二稜線之一再取一點作第二個球面，也會和第二個角頂的另一稜線交於一點。再過密克點M、第三個角頂及其兩稜線的點作第三個球面，也會和第三個角頂的另一稜線交於一點。最後過密克點M和第四個角頂的三稜線上的點作第四個球面，恰好過第四個角頂。因此這四個過角頂的球面恰交一個定點**(密克點M)**。但如圖(三十六)，考慮第五個平面去截原來的四面體，經由 Ggb 作圖發現**五面體並沒有球面共點、球心共球面的現象**，因此六面體以上的情形就沒辦法定義密克點和心球，故**這樣的猜想不真**。



圖(三十四)



圖(三十五)



圖(三十六)

伍、研究結果與討論

一、設L_1、L_2、⋯、L_n是一般位置的n條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。則任意$n(n \geq 4)$的自然數，都有n個心圓C_1、C_2、⋯、C_n會交於同一點M，此點M稱為$N = n$的密克點，n個圓心O_1、O_2、⋯、O_n會共一圓C，此圓C稱為$N = n$的心圓。且在$\boldsymbol{n = 4}$**時，密克點正好在心圓上**。但$\boldsymbol{n \geq 5}$**時，密克點不一定在心圓上**。

二、設L_1、L_2、L_3、L_4是一般位置的四條直線，其中A_{12}是L_1和L_2的交點；A_{13}是L_1和L_3的交點，其餘類推。設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的垂心分別為$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$，則$\boldsymbol{H_1}$**、**$\boldsymbol{H_2}$**、**$\boldsymbol{H_3}$**、**$\boldsymbol{H_4}$**四點共線**。

三、設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，H_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的垂心；H_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的垂心，其餘類推。再設垂心H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}所共直線為l_1；垂心H_{12}、H_{23}、H_{24}、H_{25}所共直線為l_2，其餘類推。
則這五條**直線** $\boldsymbol{l_1}$**、**$\boldsymbol{l_2}$**、**$\boldsymbol{l_3}$**、**$\boldsymbol{l_4}$**、**$\boldsymbol{l_5}$**也是一般位置的五條直線**。

四、設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，M_1是直線L_2、L_3、L_4、L_5所構成的完全四邊形之密克點，其餘類推。設O_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{45}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}所共圓為心圓C_1，其餘類推。則五個心圓C_1

、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M，此點M稱為$n=5$的密克點。而**密克點M和這五個$n=4$的密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5會共一圓，此圓也稱為$n=5$的限制圓**。

五、如果設L_1、L_2、⋯、L_n不是一般位置的n條直線，即退化的情形**(平行或共點)**，若將**直線**和**共點直線組的交點**定義為圓的退化，則此時也會同時有密克點和心圓。

六、**三角形的密克定理**在三維空間的推廣中，我們發現**四面體也有密克定理**，即四面體的六條稜線上各取一點，再以角頂和相鄰三點所作的四個球面**會共點**，且此四個球面的**球心也會共球面**，但五面體以上就沒有。

陸、結論

一、設有一般位置的n條直線，則任意$n(n \geq 4)$的自然數，都有n個心圓**會交於同一點**，

此點稱為**密克點**，此n個心圓的圓心**會共一圓**，此圓稱為**心圓**。

二、特別地，在一般位置的**四條直線**時，**密克點正好在心圓上**。若此時將三角形的外接圓圓心改成垂心，則四個垂心也正好共線。而一般位置的**五條直線**時，**密克點**和**五個四條直線的密克點**會共一圓。

三、如果n條直線**不是一般位置的直線**，即有共點或平行的情形時，也會有密克點和心圓。

四、**三角形的密克定理**可以在三維空間中推廣，得到**四面體的密克定理**。

柒、參考資料及其他

1. 李冬梅・白世忠譯。幾何學中的歸納法。九章出版社・開明(大陸)出版社，P113~117。
2. 陳凱傑。共點圓、共圓點。2008 年台灣國際科展。
3. 劉安家。從三個交於一點的圓形想起—Miquel's Theorem 之推廣
4. 張勛絜・林郁傑・黃偉特。

   循「密」尋謎，「克」不容緩—密克定理系列圖形幾何推論與證明
5. 趙文敏。Miquel 定理及其應用。科學教育月刊第 234 期(2000 年 11 月)。P2~10。
6. 趙文敏。Miquel 定理及其應用(續)。科學教育月刊第 237 期(2001 年 3 月)。P22~33。
7. 馮志剛著。數學歸納法的證明方法與技巧。華東師範大學出版社。

【評語】050408

本作品將原本三角形以及四條線的密克點與心圓的結果推廣到任意 n 條線的情況，文獻探討完整。並且對於不同的 n 值逐一作圖解釋，證明脈絡清晰易懂，結論漂亮。

但是當 n 越來越大，圖形亦越發複雜，直觀觀察已無法看出密克點與心圓的性質。因此證明上也只能以「同理可證」或「基於數學歸納法」帶過，較為可惜，建議作者們可以再多閱讀相關文獻。

作品海報

摘要

本研究是探討一般位置的n條直線(無三線共點且無平行線組)，皆會產生圓共點和圓心共圓的現象。在一般位置的四條直線中，四個三角形的外接圓會共點，稱此點為密克點。同時其圓心也會共圓，稱此圓為心圓。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的心圓，而這五個心圓仍然會共點，同時其圓心又會共圓。為了證明此種情況會不斷地延續下去，我們利用數學歸納法以及四點共圓的性質證出一般位置的n(n≥4)線形都會有密克點和心圓。此外，如果考慮退化的情形(共點或平行)，也會同時有密克點和心圓。我們還進一步發現四面體也有相對應的密克點和心球，但五面體以上就沒有。

壹、研究動機

在2008年台灣國際科展有一件作品---共點圓、共圓點中提到：「在完全四邊形中，四個三角形的外接圓會共點，稱此點為限制點。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的限制點，而這些限制點又會共圓，稱此圓為限制圓。此種情況會不斷地延續下去。」，於是我們試著用動態幾何軟體Ggb畫看看，發現在完全四邊形中，四個三角形的外接圓圓心也會共圓，不妨稱此圓為完全四邊形的心圓。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的心圓，而這些心圓仍然會共點，同時其圓心又會共圓。而這樣的現象，讓我們聯想到可否推廣到多條兩兩相交一點的直線，因此決定以此當作研究題材。

貳、研究目的

在完全四邊形中，四個三角形的外接圓會共點，稱其為密克點。同時其圓心也會共圓，稱其為心圓。若將其推廣到$n(n \geq 4)$條無三線共點且無平行線組的直線，則會有相對應的$\boldsymbol{n}$線形的密克點和心圓。本研究的目的在探究這種現象會不斷地延續下去，並給予證明。

參、研究設備及器材

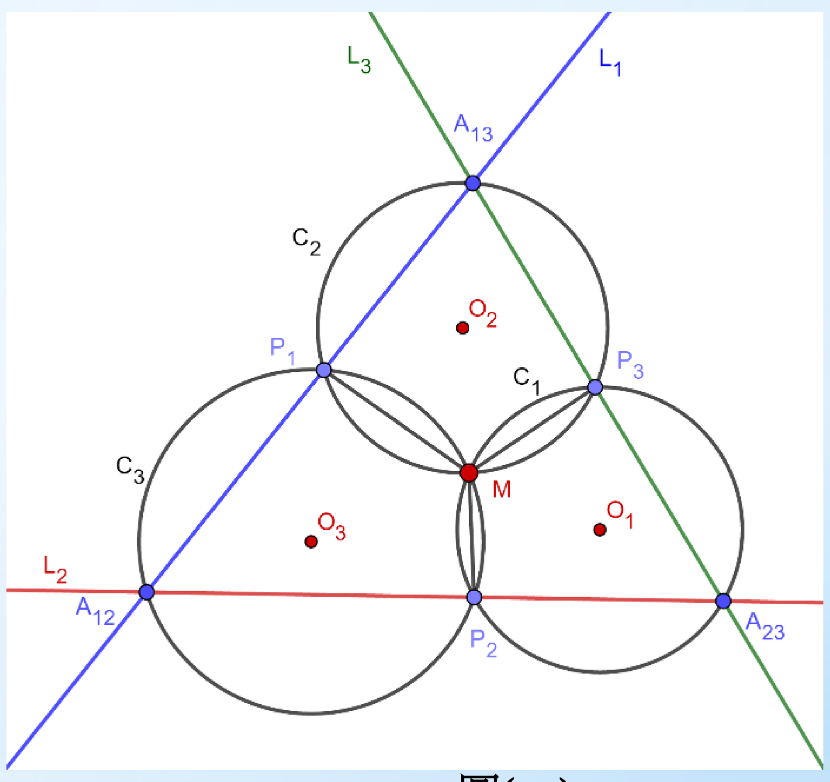
本研究主要利用動態幾何軟體Geogebra進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討

(一)密克定理

如圖(一)，設L_1、L_2、L_3是一般位置的三條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。A_{12}是L_1和L_2的交點；A_{13}是L_1和L_3的交點，其餘類推。分別在L_1、L_2、L_3各取一點P_1、P_2、P_3、O_1是$\Delta A_{23}P_2P_3$的外接圓C_1之圓心；O_2是$\Delta A_{13}P_1P_3$的外接圓C_2之圓心，其餘類推。則三個外接圓C_1、C_2、C_3會交於同一點M，此點M稱為$n=3$的密克點。



圖(一)

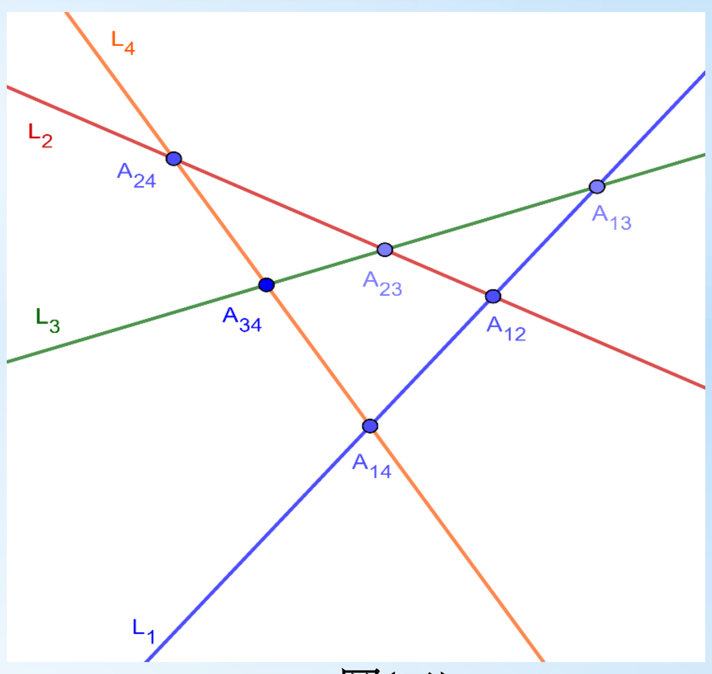
(二)陳凱傑。共點圓、共圓點。2008年台灣國際科展

此作品由四條直線(無共點且無平行線組)所構成的圖形中，找到四個三角形及它們的外接圓。而這四個外接圓會共點，稱其為限制點。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的限制點，而這些限制點又會共圓，稱其為限制圓。作者欲證明此種情況會不斷地延續下去。將兩條直線的交點視為限制點，三條直線的三交點的外接圓視為限制圓，則當n為偶數時，存在限制點；當n為奇數時，存在限制圓。也就是說，限制點和限制圓是交替出現，由限制點所共的圓定義限制圓，再由限制圓所共的點定義限制點。

二、定義與性質

(一)完全四邊形

如圖(二)，當共平面的四相異直線中每兩線都相交，且任意三線都不共點時，我們稱此四直線構成一個完全四邊形。


圖(二)

(二)密克點和心圓

直線數用$\boldsymbol{n}$表示，且$\boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$。藉由觀察可以發現在完全四邊形中，因為任意三條直線可構成一個三角形，所以有$\boldsymbol{C_3^4} = \mathbf{4}$個三角形，其外接圓會共點，稱此點為$\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$的密克點。同時，四個外接圓圓心也會共圓，不妨稱此圓為$\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$的心圓。

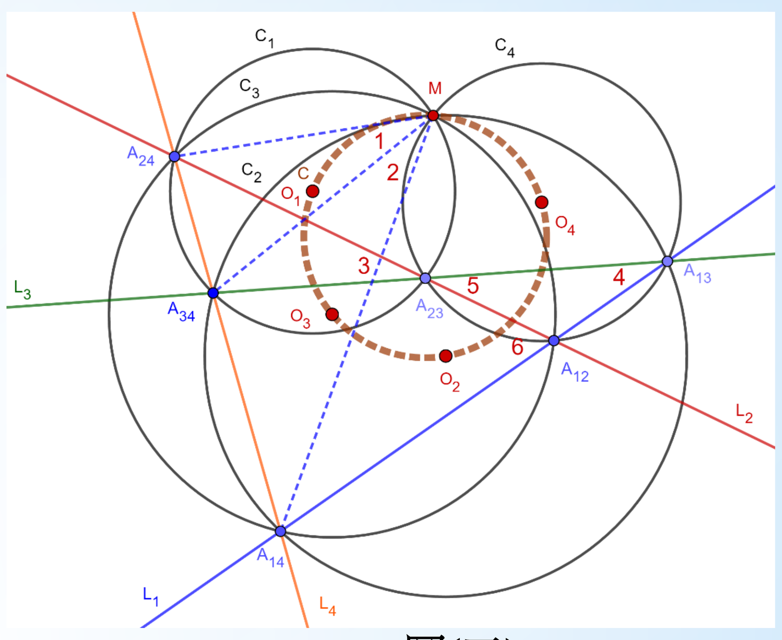
(三)兩角相等或互補

本文定義兩角$\boldsymbol{\theta_1}$和$\boldsymbol{\theta_2}$相等或互補為等價角，以$\boldsymbol{\theta_1} \equiv \boldsymbol{\theta_2}$表示。即$\angle \boldsymbol{ACB} \equiv \angle \boldsymbol{ADB}$表示$\angle \boldsymbol{ACB} = \angle \boldsymbol{ADB}$或$\angle \boldsymbol{ACB} + \angle \boldsymbol{BDA} = \mathbf{180°}$。

(四)角的運算性質

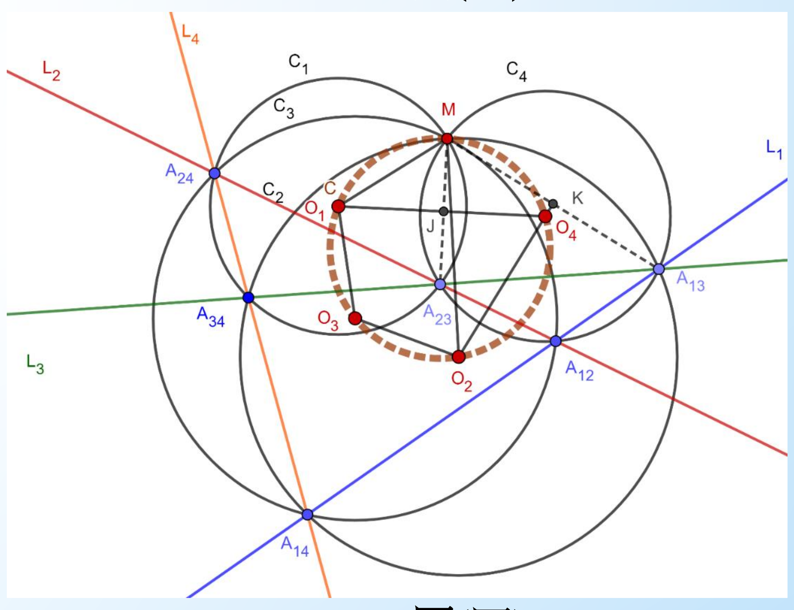
性質一 若定義$\angle ACB \equiv \angle ADB$為$\angle ACB = \angle ADB$或$\angle ACB + \angle BDA = 180°$，則「≡」滿足
(1)遞移律：$\angle ABC \equiv \angle DEF$且$\angle DEF \equiv \angle GHI \Rightarrow \angle ABC \equiv \angle GHI$。
(2)加法律：$\angle ABC + \angle CBD \equiv \angle ABD$。

性質二 若記號$\angle(L_2, L_3)$、$\angle(L_3, L_1)$和$\angle(L_2, L_1)$分別表示直線L_2到L_3、L_3到L_1和L_2到L_1的逆時針夾角，則「≡」滿足$\angle(L_2, L_3) + \angle(L_3, L_1) \equiv \angle(L_2, L_1)$。


圖(三)

三、密克定理的推廣

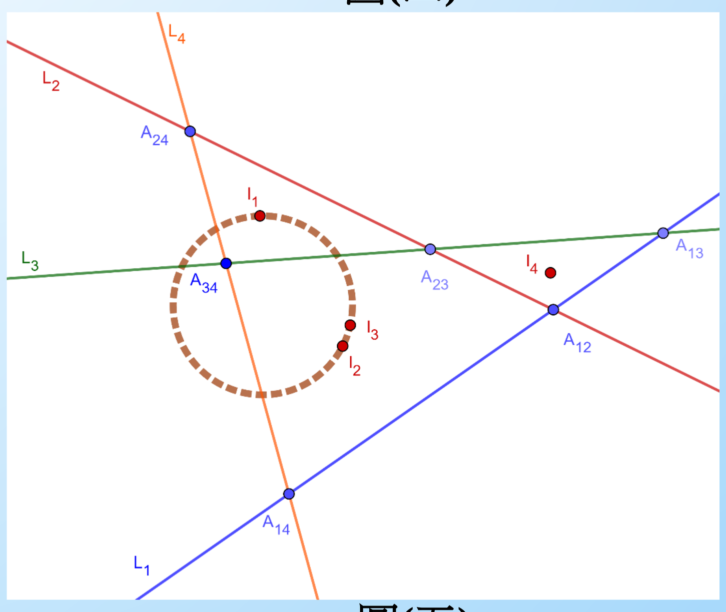
定理一 如圖(三)，設$\boldsymbol{L_1}$、$\boldsymbol{L_2}$、$\boldsymbol{L_3}$、$\boldsymbol{L_4}$是一般位置的四條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。$\boldsymbol{A_{12}}$是$\boldsymbol{L_1}$和$\boldsymbol{L_2}$的交點；$\boldsymbol{A_{13}}$是$\boldsymbol{L_1}$和$\boldsymbol{L_3}$的交點，其餘類推。$\boldsymbol{O_1}$是直線$\boldsymbol{L_2}$、$\boldsymbol{L_3}$、$\boldsymbol{L_4}$所構成三角形的外接圓$\boldsymbol{C_1}$之圓心；$\boldsymbol{O_2}$是直線$\boldsymbol{L_1}$、$\boldsymbol{L_3}$、$\boldsymbol{L_4}$所構成三角形的外接圓$\boldsymbol{C_2}$之圓心，其餘類推。則四個外接圓$\boldsymbol{C_1}$、$\boldsymbol{C_2}$、$\boldsymbol{C_3}$、$\boldsymbol{C_4}$會交於同一點$\boldsymbol{M}$，此點$\boldsymbol{M}$稱為$\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$的密克點。其四個圓心$\boldsymbol{O_1}$、$\boldsymbol{O_2}$、$\boldsymbol{O_3}$、$\boldsymbol{O_4}$會共一圓$\boldsymbol{C}$，此圓$\boldsymbol{C}$稱為$\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$的心圓。


圖(四)

定理二 如圖(四)，密克點$\boldsymbol{M}$會和這四個外接圓的圓心$\boldsymbol{O_1}$、$\boldsymbol{O_2}$、$\boldsymbol{O_3}$、$\boldsymbol{O_4}$共一圓$\boldsymbol{C}$，此時$\angle \boldsymbol{A_{24}MA_{14}} \equiv \angle \boldsymbol{O_2O_3O_1}$，$\angle \boldsymbol{O_1MO_2} \equiv \angle \boldsymbol{O_1O_4O_2} \equiv \angle(\boldsymbol{L_2}, \boldsymbol{L_1}) \equiv \angle \boldsymbol{O_2O_3O_1}$，表示這些角相等或互補。另外，$\angle \boldsymbol{O_jMO_k} \equiv \angle \boldsymbol{O_jO_iO_k} \equiv \angle(\boldsymbol{L_k}, \boldsymbol{L_j}) \equiv \angle \boldsymbol{O_kO_lO_j}$，其中$\boldsymbol{i, j, k, l}$相異，且$\boldsymbol{i, j, k, l} \in \{\mathbf{1, 2, 3, 4}\}$。

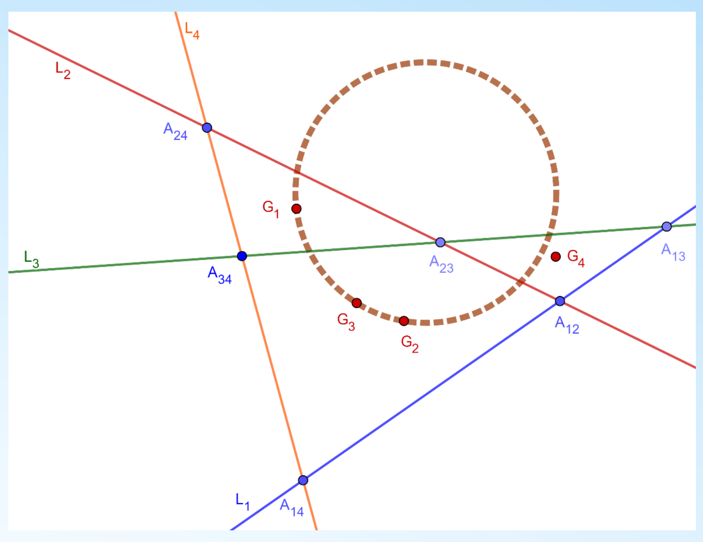
在圖(二)的完全四邊形中，我們前面考慮四個三角形$\Delta \boldsymbol{A_{23}A_{24}A_{34}}$、$\Delta \boldsymbol{A_{13}A_{14}A_{34}}$、$\Delta \boldsymbol{A_{12}A_{14}A_{24}}$、$\Delta \boldsymbol{A_{12}A_{13}A_{23}}$的外接圓圓心(外心)，發現這四個外心會共圓。如果考慮這些三角形的其它心，情況又會如何？

一、如圖(五)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$A_{12}A_{13}A_{23}$的內心分別為$I_1$、$I_2$、$I_3$、$I_4$，但$I_1$、$I_2$、$I_3$、$I_4$並沒有共圓或共線的現象。

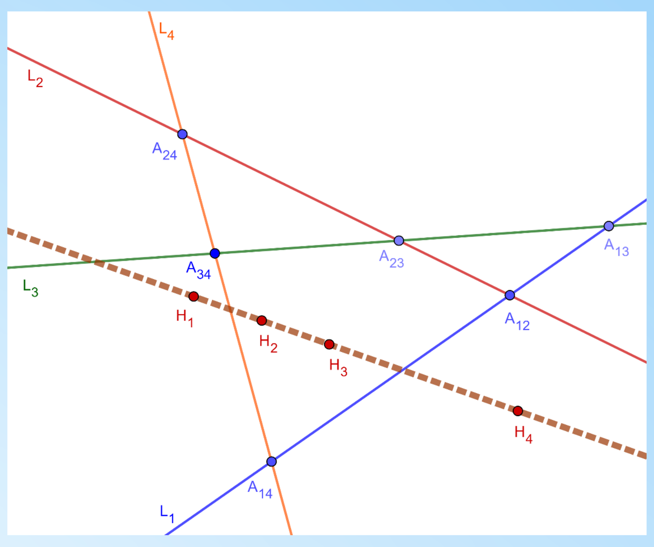

圖(五)

二、如圖(六)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的重心分別為$G_1$、$G_2$、$G_3$、$G_4$，但$G_1$、$G_2$、$G_3$、$G_4$並沒有共圓或共線的現象。

三、如圖(七)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的垂心分別為$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$，則$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$四點共線。



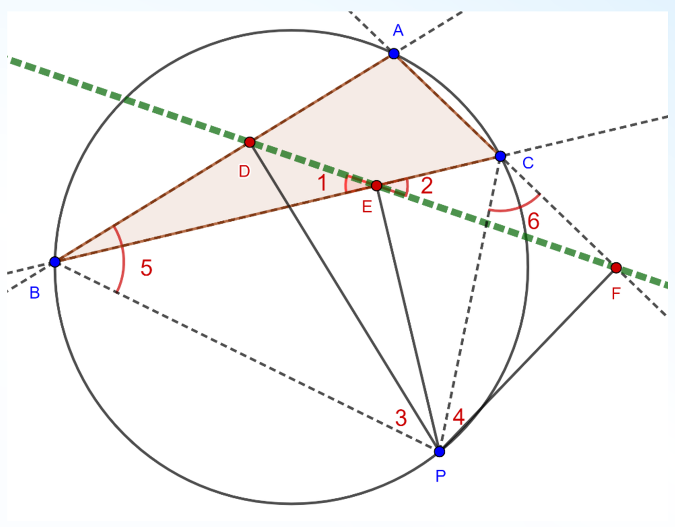
圖(六)



圖(七)

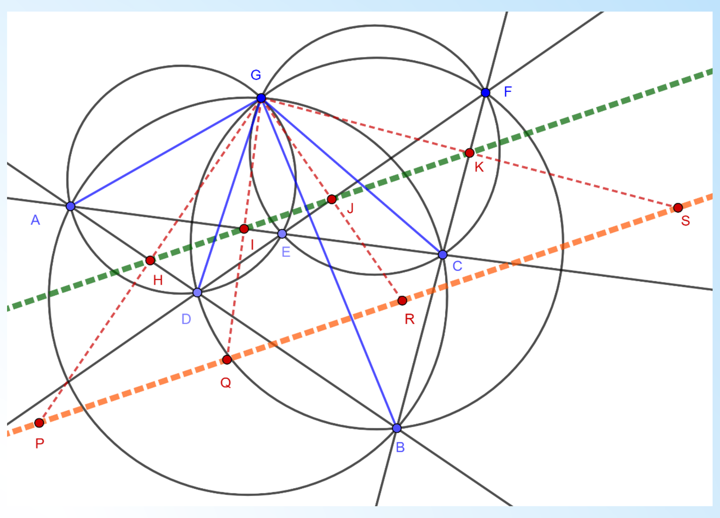
為了證明上面這個定理，我們必須先證明下述三個引理：

引理一 如圖(八)，設P為ΔABC的外接圓上異於頂點的一點，過P點分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$的垂線，垂足依序為D、E、F，則D、E、F三點共線。(Simson定理)



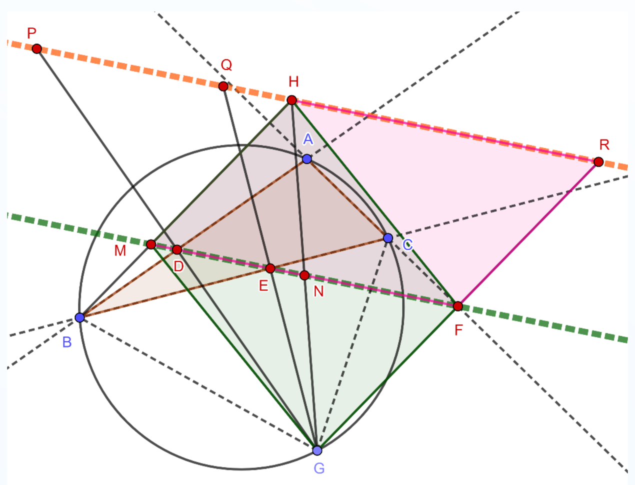
圖(八)

引理二 如圖(九)，已知A、D、B三點共線，A、E、C三點共線，B、C、F三點共線，D、E、F三點共線，則ΔABC、ΔBDF、ΔADE、ΔCEF的外接圓有共同的交點G，且此點G關於四直線的對稱點P、Q、R、S共線。



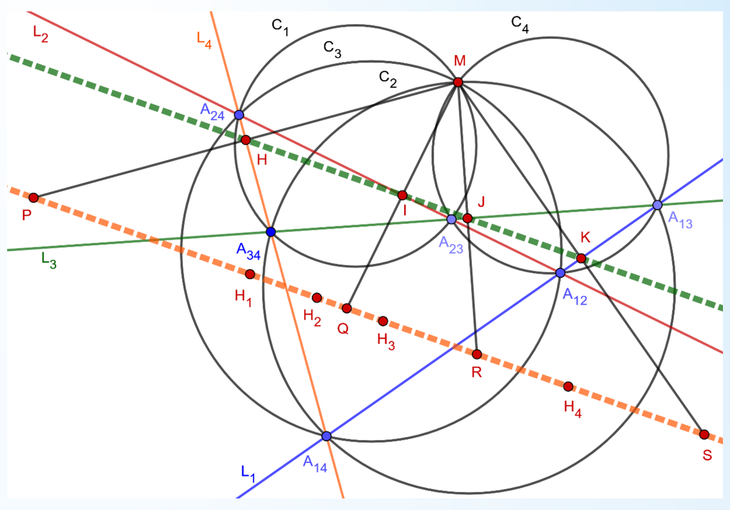
圖(九)

引理三 如圖(十)，設G為ΔABC的外接圓上異於頂點的一點，過G點分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$的垂線，垂足依序為D、E、F。G點關於此三直線的對稱點分別為P、Q、R，若H為ΔABC的垂心，則P、Q、R、H四點共線。



圖(十)

定理三 如圖(十一)，設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的垂心分別為$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$，則$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$四點共線。



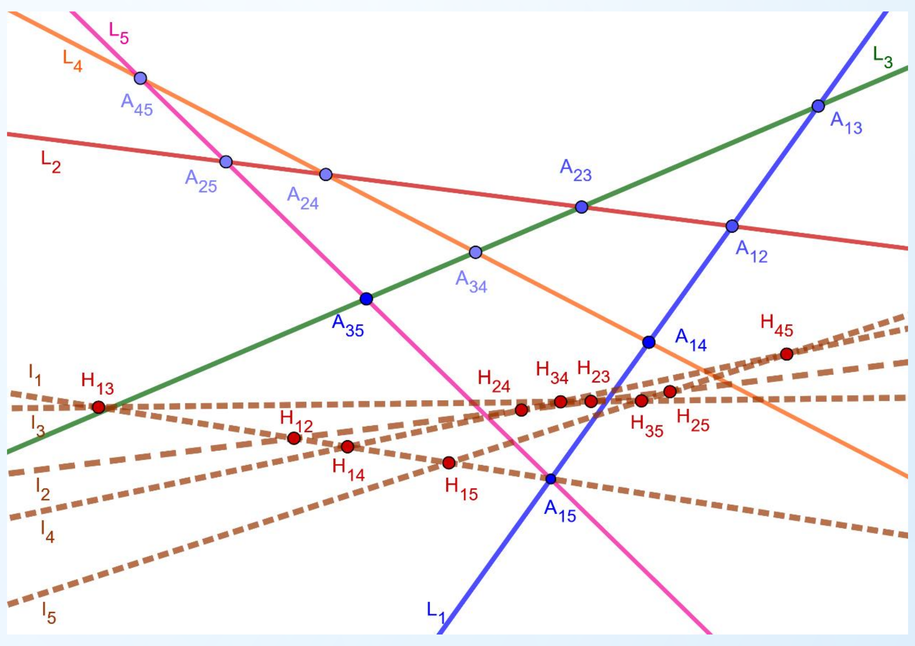
圖(十一)

四、如圖(十二)，設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。H_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的垂心；H_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的垂心，其餘類推。再設垂心H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}所共直線為l_1；垂心H_{12}、H_{23}、H_{24}、H_{25}所共直線為l_2，其餘類推。則這五條直線l_1、l_2、l_3、l_4、l_5是一般位置的五條直線。

定理四 設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。O_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{45}之圓心；O_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的外接圓C_{35}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}所共圓為心圓C_1；圓心O_{12}、O_{23}、O_{24}、O_{25}所共圓為心圓C_2，其餘類推。則五個心圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M，此點M稱為$n=5$的密克點。其五個圓心O_1、O_2、O_3、O_4、O_5會共一圓C，此圓C稱為$n=5$的心圓。

[證明]

1.如圖(十三)，因為O_1是四條直線L_2、L_3、L_4、L_5的心圓C_1的圓心；O_2是四條直線L_1、L_3、L_4、L_5的心圓C_2的圓心，其餘類推。O_{12}是三條直線L_3、L_4、L_5的外接圓C_{12}的圓心，也是圓C_1和C_2的一個交點；O_{13}是三條直線L_2、L_4、L_5的外接圓C_{13}的圓心，也是圓C_1和C_3的一個交點，其餘類推。設M是圓C_1和C_2異於O_{12}的交點，於是M同時在圓C_1和C_2上。因為圓C_{13}和C_{14}交於點M_1和A_{25}，圓C_{12}和C_{14}交於點M_1和A_{35}，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_{13}O_{14}}$與$\overline{A_{25}M_1}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_{12}O_{14}}$與$\overline{A_{35}M_1}$垂直。



圖(十二)

於是$\angle O_{13}O_{14}O_{12}\equiv\angle A_{35}M_1A_{25}$。又圓$C_{14}$為$\Delta A_{25}A_{23}A_{35}$的外接圓，且過點$M_1$，
所以$\angle A_{35}M_1A_{25}\equiv\angle A_{35}A_{23}A_{25}$。

推得 $\angle O_{13}MO_{12}\equiv\frac{1}{2}\widehat{O_{13}O_{12}}\equiv\angle O_{13}O_{14}O_{12}\equiv\angle A_{35}M_1A_{25}\equiv\angle A_{35}A_{23}A_{25}\equiv\angle(L_2,L_3)$。

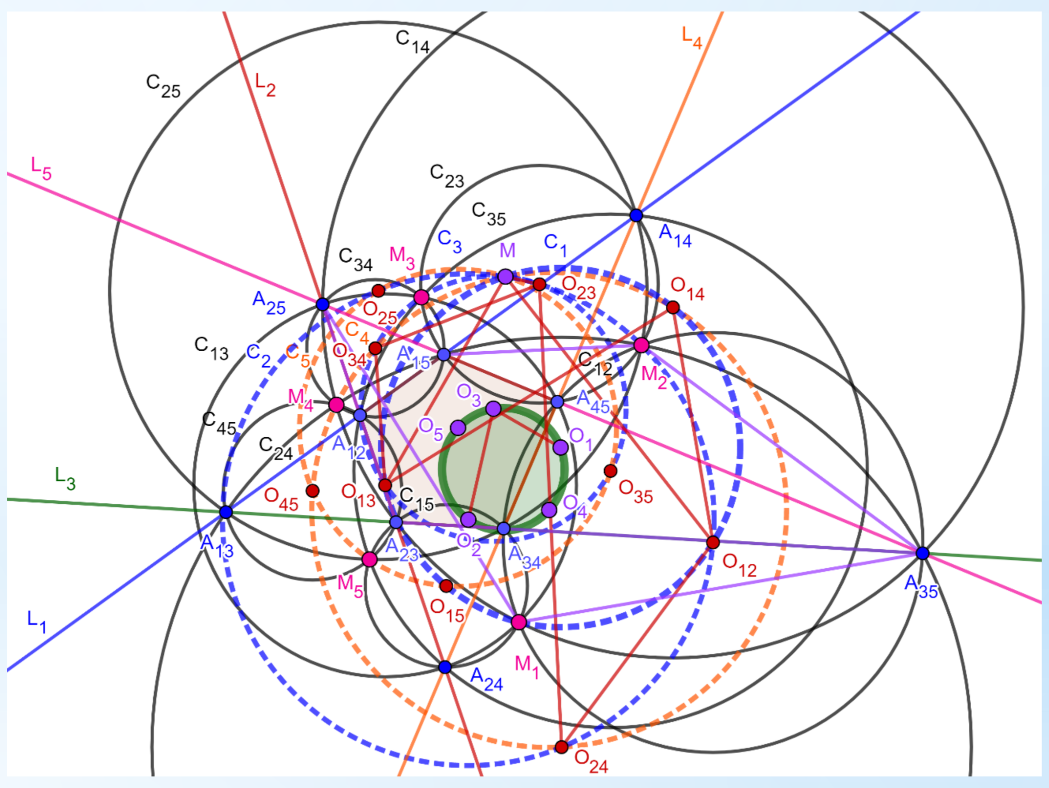
同理可證$\angle O_{12}MO_{23}\equiv\frac{1}{2}\widehat{O_{12}O_{23}}\equiv\angle O_{12}O_{24}O_{23}\equiv\angle A_{15}M_2A_{35}\equiv\angle A_{35}A_{13}A_{15}\equiv\angle(L_3,L_1)$。

由此推出 $\angle O_{13}MO_{23}\equiv\angle O_{13}MO_{12}+\angle O_{12}MO_{23}\equiv\angle(L_2,L_3)+\angle(L_3,L_1)\equiv\angle(L_2,L_1)$。

同理可得，$\angle O_{13}O_{34}O_{23}\equiv\angle A_{25}M_3A_{15}\equiv\angle A_{15}A_{12}A_{25}\equiv\angle(L_2,L_1)$，

即$\angle O_{13}MO_{23}\equiv\angle O_{13}O_{34}O_{23}$，推知圓$C_3$經過$M$。同理可證：圓$C_4$、$C_5$也經過$M$，

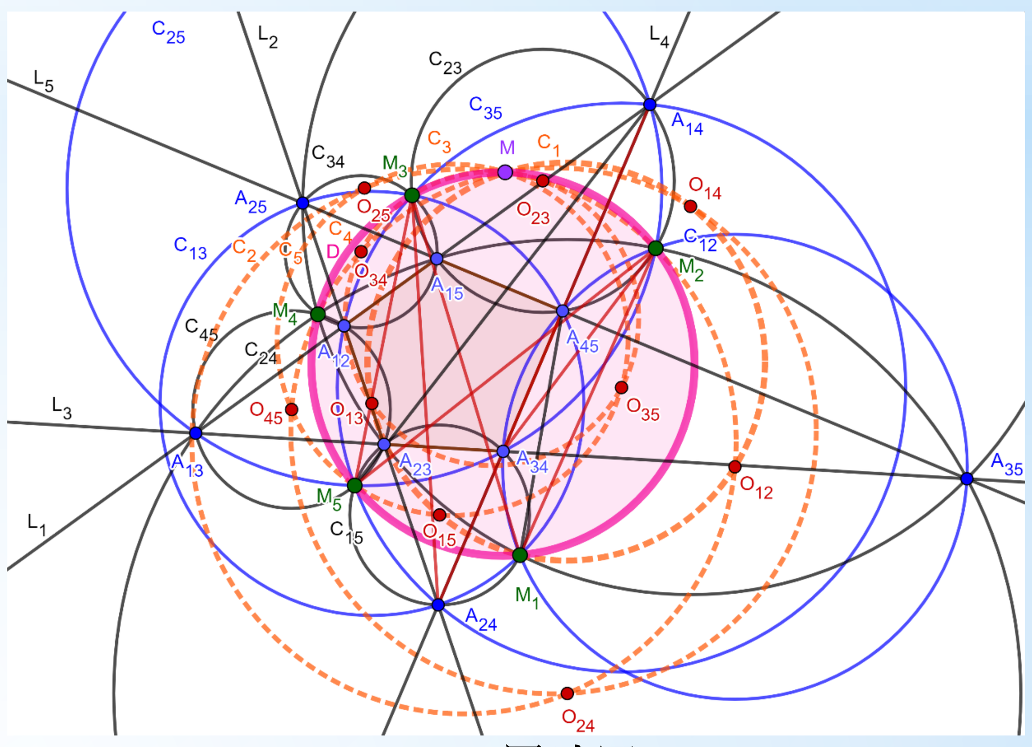
故五個圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M。



圖(十三)

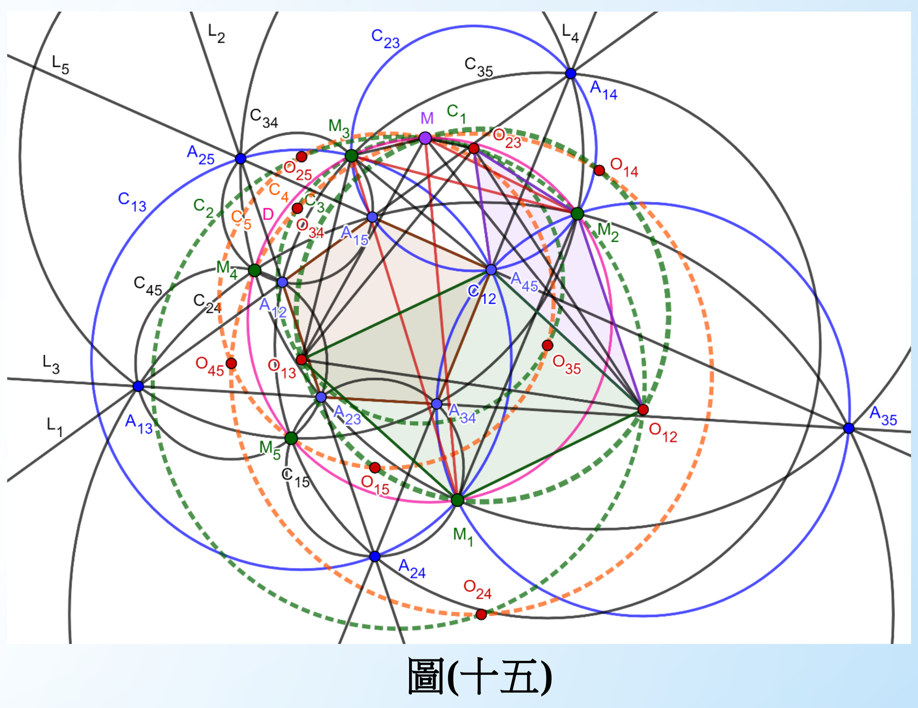
2. 現在考慮經過同一點M的三個圓C_1、C_2和C_3，O_{13}是圓C_1和C_3的第二個交點；O_{23}是圓C_2和C_3的第二個交點，因為圓C_1和C_3的公共弦為$\overline{O_{13}M}$，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_1O_3}$與$\overline{O_{13}M}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_2O_3}$與$\overline{O_{23}M}$垂直。於是，$\angle O_2O_3O_1\equiv\angle O_{13}MO_{23}\equiv\angle O_{13}O_{34}O_{23}\equiv\angle(L_2,L_1)$。同理可證，$\angle O_1O_4O_2\equiv\angle(L_2,L_1)\equiv\angle O_2O_5O_1$。

由此推得：五個圓心O_1、O_2、O_3、O_4、O_5會共一圓，此圓就是$n=5$的心圓。



圖(十四)

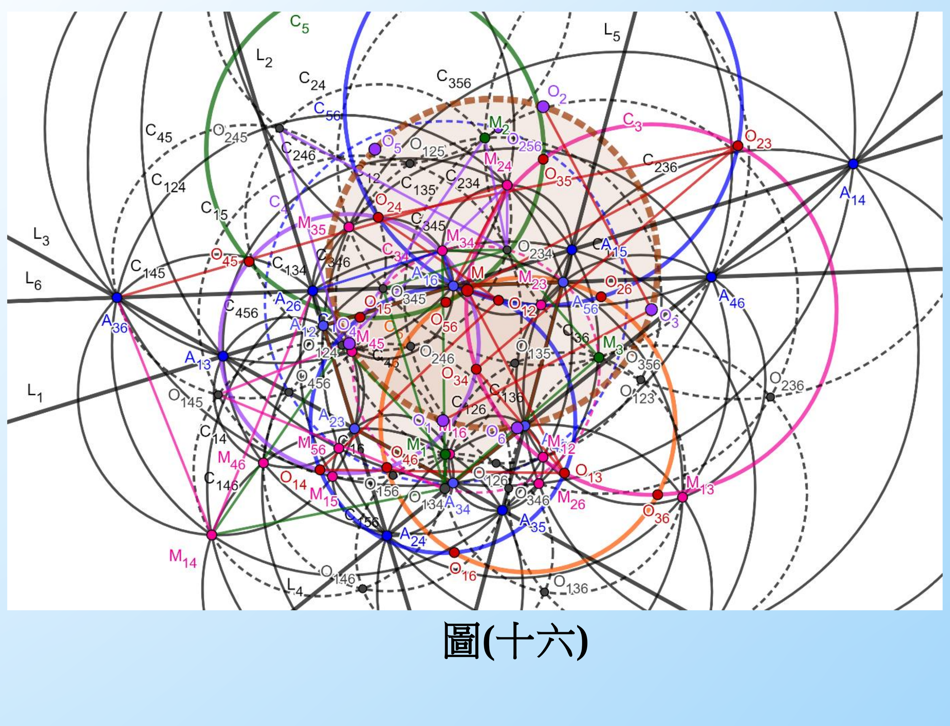
定理五 如圖(十四)，設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。M_1是直線L_2、L_3、L_4、L_5所構成的完全四邊形之密克點；M_2是直線L_1、L_3、L_4、L_5所構成的完全四邊形之密克點，其餘類推。則這五個密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5會共圓，此圓稱為$n=5$的限制圓。如圖(十五)，設O_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{45}之圓心；O_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的外接圓C_{35}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}所共圓為心圓C_1；圓心O_{12}、O_{23}、O_{24}、O_{25}所共圓為心圓C_2，其餘類推。則五個心圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M，此點M稱為$n=5$的密克點。而密克點M和這五個$n=4$的密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5也會共一圓。



圖(十五)

定理六 如圖(十六)，設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6是一般位置的六條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。O_{456}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{456}之圓心；O_{356}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的外接圓C_{356}之圓心，其餘類推。O_{56}是直線L_1、L_2、L_3、L_4的心圓C_{56}之圓心；O_{46}是直線L_1、L_2、L_3、L_5的心圓C_{46}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}、O_{16}所共圓為心圓C_1；圓心O_{12}、O_{23}、O_{24}、O_{25}、O_{26}所共圓為心圓C_2，其餘類推。則六個心圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、C_6會交於同一點M，此點M稱為$n=6$的密克點。其六個圓心O_1、O_2、O_3、O_4、O_5、O_6會共一圓C，此圓C稱為$n=6$的心圓。

定理七 $n=6$時，這六個密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5、M_6並不會共圓。但六個$n=5$的限制圓會共交點F，此點F稱為$n=6$的限制點。



圖(十六)

定理八 假設我們已經定義了k條直線的心圓，並設已經給出$k+1$條一般位置的直線L_1、L_2、⋯、L_{k+1}，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。用O_1表示k條直線L_2、L_3、⋯、L_{k+1}的心圓之圓心，用O_2表示k條直線L_1、L_3、⋯、L_{k+1}的心圓之圓心，其餘類推。則$k+1$個心圓C_1、C_2、⋯、C_{k+1}會交於同一點M，此點M稱為$n=k+1$的密克點，$k+1$個圓心O_1、O_2、⋯、O_{k+1}會共一圓C，此圓C稱為$n=k+1$的心圓。由數學歸納法可知：任意$n(n\geq4)$的自然數，都有n個心圓C_1、C_2、⋯、C_n會交於同一點M，此點M稱為$N=n$的密克點。其n個圓心O_1、O_2、⋯、O_n會共一圓C，此圓C稱為$N=n$的心圓。

[證明]

1.**假設對於k條直線我們的結論為真**，且已經證明：k條直線L_1、L_2、⋯、L_k的心圓在$k-1$條直線L_2、L_3、⋯、L_k與$k-1$條直線L_1、L_3、⋯、L_k的心圓之**圓心O_1和O_2之間的弧**等於**直線L_2和L_1之間夾角的2倍**，即$\widehat{O_1O_2} \equiv 2\angle(L_2,L_1)$，$\angle(L_2,L_1) \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_1O_2} \equiv \angle O_1O_iO_2$，其中$i=3,4,\cdots,k$，其餘類推。現在考慮$k+1$條一般位置的直線$L_1$、$L_2$、⋯、$L_{k+1}$，設$O_1$表示$k$條直線$L_2$、$L_3$、⋯、$L_{k+1}$的心圓$C_1$之圓心，其餘類推；$O_{12}$表示$k-1$條直線$L_3$、$L_4$、⋯、$L_{k+1}$的心圓$C_{12}$之圓心，其餘類推，設$M$是圓$C_1$和$C_2$異於$O_{12}$的交點，因為$M$同時在圓$C_1$和$C_2$上，所以$\angle \boldsymbol{O_{13}MO_{12}} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{13}O_{12}} \equiv \angle O_{13}O_{14}O_{12} \equiv \angle(\boldsymbol{L_2},\boldsymbol{L_3})$，$\angle \boldsymbol{O_{12}MO_{23}} \equiv \frac{1}{2}\widehat{O_{12}O_{23}} \equiv \angle O_{12}O_{24}O_{23} \equiv \angle(\boldsymbol{L_3},\boldsymbol{L_1})$。由此推出$\angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}MO_{12} + \angle O_{12}MO_{23} \equiv \angle(L_2,L_3)+\angle(L_3,L_1) \equiv \angle(L_2,L_1) \equiv \angle O_{13}O_{34}O_{23}$，即圓$C_3$經過$M$。同理可證：其餘的每一個圓$C_4$、$C_5$、⋯、$C_{k+1}$都經過$M$，故$k+1$個心圓$C_1$、$C_2$、⋯、$C_{k+1}$會交於同一點$M$。

2. 現在考慮經過同一點M的三個圓C_1、C_2和C_3，O_{13}是圓C_1和C_3的第二個交點；O_{23}是圓C_2和C_3的第二個交點，因為圓C_1和C_3的公共弦為$\overline{O_{13}M}$，所以兩圓心的連線$\overleftrightarrow{O_1O_3}$與$\overline{O_{13}M}$垂直。同理，$\overleftrightarrow{O_2O_3}$與$\overline{O_{23}M}$垂直。

於是，$\angle \boldsymbol{O_2O_3O_1} \equiv \angle O_{13}MO_{23} \equiv \angle O_{13}O_{43}O_{23} \equiv \angle(\boldsymbol{L_2},\boldsymbol{L_1})$。同理可證：對於任意的圓心$O_i(i=4,5,\cdots,k+1)$，滿足$\angle \boldsymbol{O_1O_iO_2} \equiv \angle(\boldsymbol{L_2},\boldsymbol{L_1})$。由此推得：所有的圓心$O_1$、$O_2$、⋯、$O_{k+1}$會共一圓，此圓就是$n=k+1$的心圓。

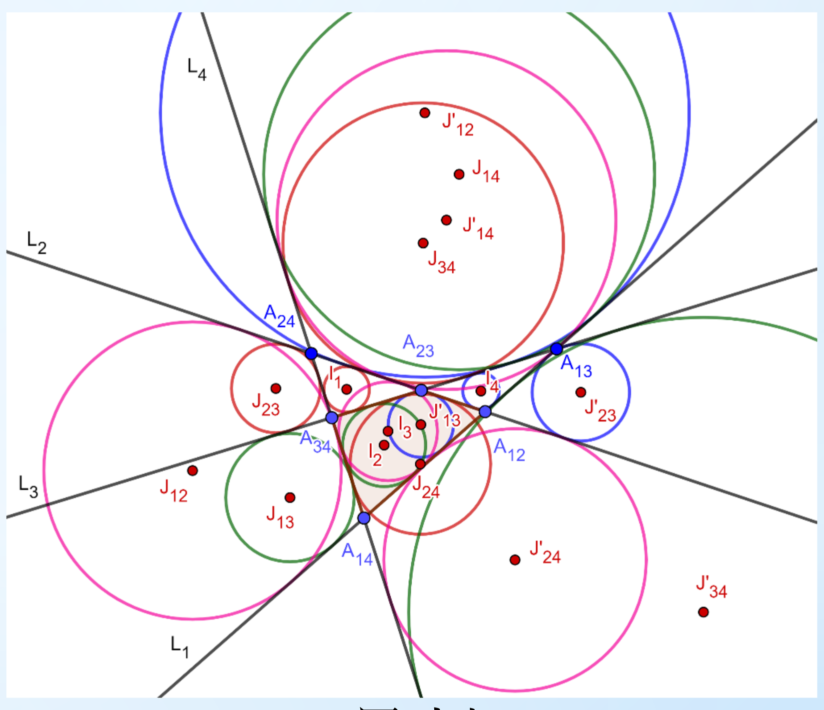
由**數學歸納法**可知：任意$n(n \geq 4)$的自然數，都有n個心圓C_1、C_2、⋯、C_n會交於同一點M，此點M稱為$N=n$的密克點，其n個圓心O_1、O_2、⋯、O_n會共一圓C，此圓C稱為$N=n$的心圓。

如果設L_1、L_2、⋯、L_n不是一般位置的n條直線，即退化的情形**(平行或共點)**，其實也會同時有**密克點和心圓**。只是我們必須作以下的定義：

1. 就以平行而論，可將平行直線組視為交於無窮遠點，則某直線L(不與此平行線組平行)交於此平行線組任意兩點，則此兩點與無窮遠點的外接圓即為L，即視直線為圓的退化情形。
2. 就以共點而論，可將共點直線組的交點視為原本兩兩直線相交的點無窮接近，則此共點線組之外接圓即為此交點。
3. 雖然知道這類的退化情形，也皆能符合上述結論，但有些情況心圓會退化成心線，因此密克點可能是一些心圓或心線的交點，因為需要龐大的討論才能確認各種情形，故本文不予討論。

在圖(二)的完全四邊形中，我們之前考慮四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的外接圓，發現這四個圓會共點。如果考慮這些三角形的內切圓或旁切圓，情況又會如何？

如圖(十七)，分別作出四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$各自的一個內切圓和三個旁切圓，但這十六個圓中並沒有四圓共點的現象。

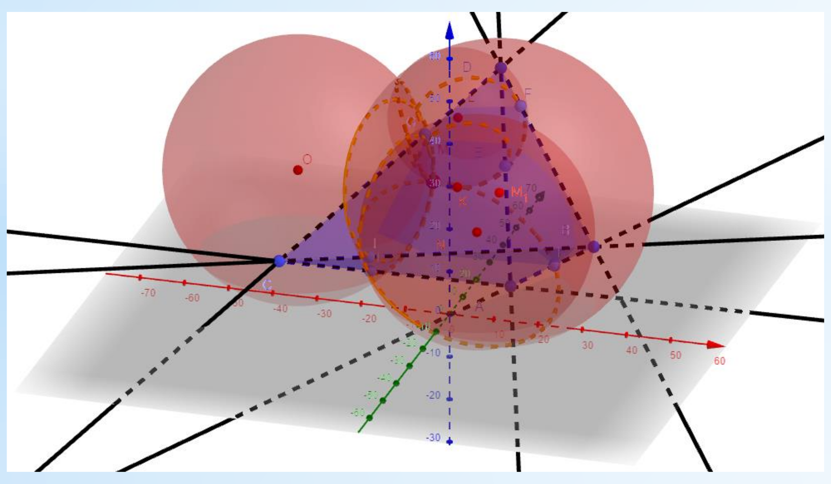

圖(十七)

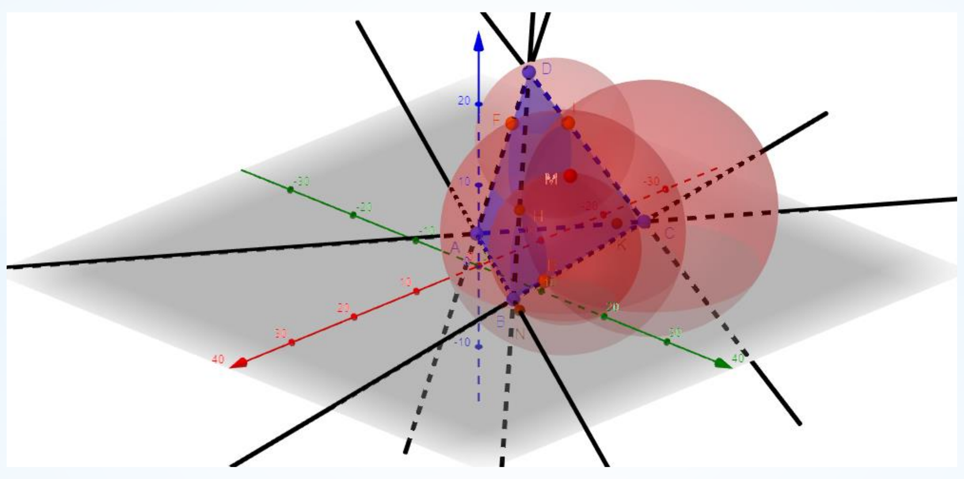
如果我們將原問題進一步推廣到三維空間，而有以下的猜想：

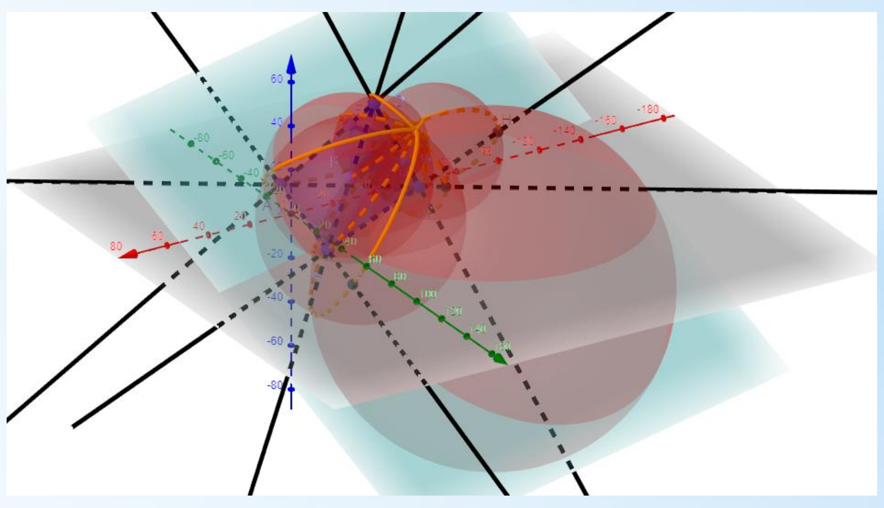
設E_1、E_2、⋯、E_n是一般位置的n個平面，即其中任意兩個平面都不平行，任意三個平面都不共線。
(1)那麼對任意$n(n \geq 5)$的自然數，是否存在n個心球S_1、S_2、⋯、S_n會交於同一點M？
(2)而n個球心O_1、O_2、⋯、O_n是否會共一球面S？

首先考慮三角形密克定理的推廣，如圖(十八)，若以角頂和角的稜線上各一點作四個球面，則其六組兩兩交圓會共點，因此四個球面會共點，同時此四個球面的球心也會共一球面，即四面體也有密克定理。

如圖(十九)，是為了說明六條稜線上各取一點，再以角頂和角的稜線上各一點所作的四個球面一定共點。但如圖(二十)，考慮第五個平面去截原來的四面體，經由Ggb作圖發現五面體並沒有球面共點、球心共球面的現象，因此六面體以上的情形就無法定義密克點和心球，故這樣的猜想不真。


圖(十八)


圖(十九)


圖(二十)

伍、研究結果與討論

一、設L_1、L_2、⋯、L_n是一般位置的n條直線，即其中任意兩條都不平行，任意三條都不共點。則任意$n(n \geq 4)$的自然數，都有n個心圓C_1、C_2、⋯、C_n會交於同一點M，此點M稱為$N=n$的密克點，n個圓心O_1、O_2、⋯、O_n會共一圓C，此圓C稱為$N=n$的心圓。且在$n=4$時，密克點正好在心圓上。但$n \geq 5$時，密克點不一定在心圓上。

二、設L_1、L_2、L_3、L_4是一般位置的四條直線，其中A_{12}是L_1和L_2的交點；A_{13}是L_1和L_3的交點，其餘類推。設四個三角形$\Delta A_{23}A_{24}A_{34}$、$\Delta A_{13}A_{14}A_{34}$、$\Delta A_{12}A_{14}A_{24}$、$\Delta A_{12}A_{13}A_{23}$的垂心分別為$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$，則$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$四點共線。

三、設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，H_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的垂心；H_{35}是直線L_1、L_2、L_4所構成三角形的垂心，其餘類推。再設垂心H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}所共直線為l_1；垂心H_{12}、H_{23}、H_{24}、H_{25}所共直線為l_2，其餘類推。則這五條直線l_1、l_2、l_3、l_4、l_5也是一般位置的五條直線。

四、設L_1、L_2、L_3、L_4、L_5是一般位置的五條直線，M_1是直線L_2、L_3、L_4、L_5所構成的完全四邊形之密克點，其餘類推。設O_{45}是直線L_1、L_2、L_3所構成三角形的外接圓C_{45}之圓心，其餘類推。再設圓心O_{12}、O_{13}、O_{14}、O_{15}所共圓為心圓C_1，其餘類推。則五個心圓C_1、C_2、C_3、C_4、C_5會交於同一點M，此點M稱為$n=5$的密克點。而密克點M和這五個$n=4$的密克點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5會共一圓，此圓也稱為$n=5$的限制圓。

五、如果設L_1、L_2、⋯、L_n不是一般位置的n條直線，即退化的情形(平行或共點)，若將直線和共點直線組的交點定義為圓的退化，則此時也會同時有密克點和心圓。

六、三角形的密克定理在三維空間的推廣中，我們發現四面體也有密克定理，即四面體的六條稜線上各取一點，再以角頂和相鄰三點所作的四個球面會共點，且此四個球面的球心也會共球面，但五面體以上就沒有類似的性質。

陸、結論

一、設有一般位置的n條直線，則任意$n(n \geq 4)$的自然數，都有n個心圓會交於同一點，此點稱為密克點，此n個心圓的圓心會共一圓，此圓稱為心圓。

二、特別地，在一般位置的四條直線時，密克點正好在心圓上。若此時將三角形的外接圓圓心改成垂心，則四個垂心也正好共線。而一般位置的五條直線時，密克點和五個四條直線的密克點會共一圓。

三、如果n條直線不是一般位置的直線，即有共點或平行的情形時，也會同時有密克點和心圓。

四、三角形的密克定理可以在三維空間中推廣，得到四面體的密克定理。

柒、參考資料及其他

1. 李冬梅，白世忠譯。幾何學中的歸納法。九章出版社，開明(大陸)出版社，P113~117。
2. 陳凱傑。共點圓、共圓點。2008年台灣國際科展。
3. 劉安家。從三個交於一點的圓形想起—Miquel's Theorem 之推廣
4. 張勛絜，林郁傑，黃偉特。循「密」尋謎，「克」不容緩—密克定理系列圖形幾何推論與證明
5. 趙文敏。Miquel定理及其應用。科學教育月刊第234期(2000年11月)。P2~10。
6. 趙文敏。Miquel定理及其應用(續)。科學教育月刊第237期(2001年3月)。P22~33。
7. 馮志剛著。數學歸納法的證明方法與技巧。華東師範大學出版社。