中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050406

「圓」中註「定」- 圓內接多邊形圓上一點到多邊形頂點、過頂點的切線與對角線距離的關係

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 姜硯凱 高二 李婕安 高二 張瑄倫	林群軒

關鍵詞：積化和差、托勒密定理、垂線

摘要

本研究將從圓內接多邊形出發，分成四部分研究，第一部分試探討圓上任一點至最近兩點和最遠一點的關係，第二部分試探討圖上任一點至圓內接正多邊形每一點的關係，第三部分試探討圓上任一點至頂點切線、對角線的垂線的關係，第四部分試探討圓上任一點在頂點切線、邊長的投影長度的關係。經研究後發現，第一部分的圓上任一點至鄰近兩點距離之和與至最遠點的距離成比例，第二部分的圓上任一點至正多邊形每一頂點依照順時針編號時奇數點的距離和與偶數點的距離和有一定的關係，第三部分的圓上任一點至頂點切線的垂線乘積與圓上任一點至對角線的垂線乘積有次方的關係，第四部分的圓上任一點在頂點切線的投影長度乘積等於圓上任一點在邊長的投影長度。

壹、研究動機

我們在閱讀科學研習月刊時，看到了森棚教官的數學題，當中的一個題目為：畫正三角形與外接圓，然後在圓上任取一點P，則此點到較遠頂點的距離會等於到較近的兩點距離和(如圖 0)。因此我們在想如果是圓內接正方形或圓內接正五邊形時，會不會有一樣的結果呢？又或者如果不是與最近點與最遠點距離之間的關係，而是P點與多邊形頂點連線的各線段又有甚麼關係？另外，還有P點至與過此圓內接多邊形各頂點之切線各距離又有甚麼關係呢？

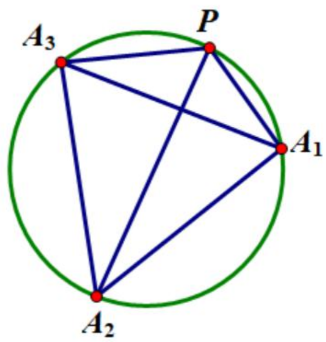


圖 0 正三角形與其外接圓 ($\overline{PA_1}+\overline{PA_3}=\overline{PA_2}$)

貳、研究目的

一、探討圓上一點P至與P點兩個最近的圓內接正多邊形頂點與一個最遠頂點距離的關係。

二、探討圓上一點P至圓內接正多邊形各頂點距離的關係。

三、探討圓上一點P至圓內接多邊形對角線的垂線及與過圓內接多邊形頂點的切線垂線距離的關係。

四、探討圓上一點P在圓內接多邊形邊長的投影長度與過圓內接多邊形頂點切線上的投影長度的關係。

參、研究設備及器材

GSP、mathtype、紙、筆、電腦

肆、研究過程或方法

一、圓上一點P至與P點兩個最近的圓內接正多邊形頂點與一個最遠頂點距離的關係

(一) 正三角形的情形

設圓內接正三角形$A_1A_2A_3$，令點P為弧A_1A_3上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_3}=y$，$\overline{PA_2}=z$，如(圖 1-1-1)。

1. 利用托勒密定理，我們得到

$$\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_3}+\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}\times\overline{A_1A_3}\Rightarrow x\times\overline{A_2A_3}+y\times\overline{A_1A_2}=z\times\overline{A_1A_3}$$

2. 因為$\Delta A_1A_2A_3$為圓內接正三角形，所以$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_1}\Rightarrow x+y=z$

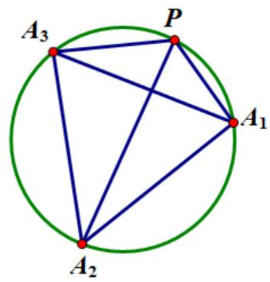


圖 1-1-1 圓內接正三角形

(二) 正方形的情形

設圓內接正方形$A_1A_2A_3A_4$，令點P為弧A_1A_4上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_4}=y$，$\overline{PA_2}=z$，且$x>y$，如(圖 1-1-2)。

1. 利用托勒密定理，我們得到$\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_4}+\overline{PA_4}\times\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}\times\overline{A_1A_4}$

2. 再將$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_4}\times\cos\angle A_1A_2A_4$，與$\overline{A_1A_4}=\overline{A_2A_4}\times\sin\angle A_1A_2A_4$代入，

我們得到$\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_4}+\overline{PA_4}\times\left(\overline{A_2A_4}\times\cos\angle A_1A_2A_4\right)=\overline{PA_2}\times\left(\overline{A_2A_4}\times\sin\angle A_1A_2A_4\right)$，

所以$x+y\times\cos\angle A_1A_2A_4=z\times\sin\angle A_1A_2A_4$

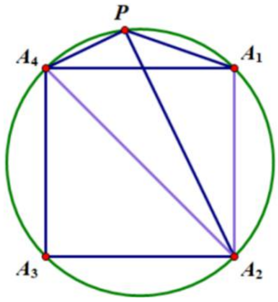


圖 1-2-1 圓內接正方形

(三) 正五邊形的情形

設圓內接正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的邊長為l，令點P為弧A_1A_5上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_5}=y$，$\overline{PA_3}=z$，$\overline{A_1A_3}=s$，如(圖 1-1-3)。

1. 利用托勒密定理，我們得到 $\overline{PA_1}\times\overline{A_3A_5}+\overline{PA_5}\times\overline{A_1A_3}=\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_5}$

2. 因為$\overline{A_1A_3}=\overline{A_3A_5}=s$，所以$x\cdot s+y\cdot s=z\cdot l$，再將式子整理後得到$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{l}{s}$

3. 由餘弦定理我們得到

$$\overline{A_1A_5}^2=\overline{A_1A_3}^2+\overline{A_3A_5}^2-2\times\overline{A_1A_3}\times\overline{A_3A_5}\times\cos\angle A_1A_3A_5\quad\Rightarrow l^2=2s^2-2s^2\cos\angle A_1A_3A_5$$

$$\Rightarrow l^2=2s^2\left(1-\cos\angle A_1A_3A_5\right)\quad\Rightarrow\frac{l}{s}=\sqrt{2\left(1-\cos\angle A_1A_3A_5\right)}\quad\Rightarrow\frac{l}{s}=\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\angle A_1A_3A_5}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{l}{s}=2\sin\left(\frac{\angle A_1A_3A_5}{2}\right)=2\sin 18^\circ=\frac{x+y}{z}$$

4. 由 2 與 3，我們得到$x+y=z\times 2\sin 18^\circ=z\times 2\sin\dfrac{\pi}{10}$

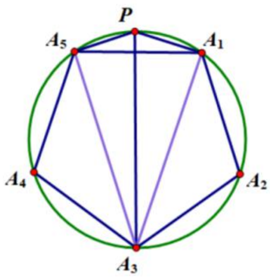


圖 1-1-3 圓內接正五邊形

(四) 正六邊形的情形

設圓內接正六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的邊長為 l，令點 P 為弧 A_1A_6 上任一點，若 $\overline{PA_1}=x$ ，$\overline{PA_6}=y$ ，$\overline{PA_3}=z$ ，$\overline{A_3A_6}=s$ ，且 $x>y$ ，如(圖 1-1-4)所示。

1. 利用托勒密定理，我們得到 $\overline{PA_1}\times\overline{A_3A_6}+\overline{PA_6}\times\overline{A_1A_3}=\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_6}$

2. 再將 $\overline{A_1A_3}=\overline{A_3A_6}\times\cos\angle A_1A_3A_6$ ，與 $\overline{A_1A_6}=\overline{A_3A_6}\times\sin\angle A_1A_3A_6$ 代入，

   我們得到 $\overline{PA_1}\times\overline{A_3A_6}+\overline{PA_6}\times\left(\overline{A_3A_6}\times\cos\angle A_1A_3A_6\right)=\overline{PA_2}\times\left(\overline{A_3A_6}\times\sin\angle A_1A_3A_6\right)$ ，

   所以 $x+y\times\cos\angle A_1A_3A_6=z\times\sin\angle A_1A_3A_6$

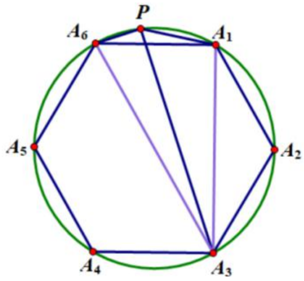


圖 1-1-4 圓內接正六邊形

我們由上述的討論發現，正奇數多邊形的結果呈現出一個等腰三角形，其距離關係為 $x+y=z\times2\sin\left(\dfrac{180^\circ}{2n}\right)$，而正偶數多邊形的結果呈現出一個直角三角形，其距離關係為 $x+y\times\cos\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)=z\times\sin\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)$，我們將兩者的結果寫成**引理 1-1** 及**引理 1-2**。

[引理 1-1]

> 設圓內接等腰三角形 $A_1A_2A_3$ ，且 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$ ，令點 P 為弧 A_1A_3 上任一點，若 $\overline{PA_1}=x$ ，$\overline{PA_3}=y$ ，$\overline{PA_2}=z$ ，則 $x+y=z\times\left(2\sin\dfrac{\angle A_1A_2A_3}{2}\right)$

<證明>

設 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=s$ ，$\overline{A_1A_3}=l$

1. 根據托勒密定理，我們得到 $\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_3}+\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}\times\overline{A_1A_3}$

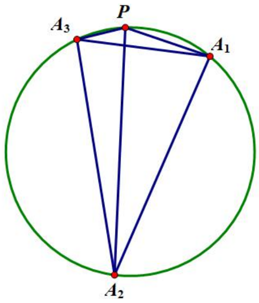
2. 將各邊以符號表示，可寫成 $x\cdot s+y\cdot s=z\cdot l$ ，兩邊同除 s 得 $x+y=z\cdot\dfrac{l}{s}$

3. 利用餘弦定理，定義s與l的關係，得到$l^2=2s^2-2s^2\cos\angle A_1A_2A_3$化簡後得

$l^2=2s^2\left(1-\cos\angle A_1A_2A_3\right)$兩邊同除$s^2$並開根號得$\dfrac{l}{s}=\sqrt{2\left(1-\cos\angle A_1A_2A_3\right)}$，

4. 再利用半角公式化簡成$\dfrac{l}{s}=\sqrt{4\sin^2\left(\dfrac{\angle A_1A_2A_3}{2}\right)}\Rightarrow\dfrac{l}{s}=2\sin\left(\dfrac{\angle A_1A_3A_5}{2}\right)$

5. 得證$x+y=z\times\left(2\sin\dfrac{\angle A_1A_2A_3}{2}\right)$。



圖(1)

[引理 1-2]

設圓內接直角三角形$A_1A_2A_3$，且$\angle A_2A_1A_3=90^o$，令點P為弧A_1A_3上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_3}=y$，$\overline{PA_2}=z$，則$x+y\times\cos\angle A_1A_2A_3=z\times\sin\angle A_1A_2A_3$

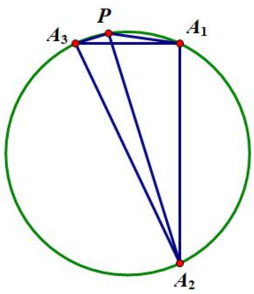
<證明>

設$\overline{A_2A_3}=s$

1. 根據托勒密定理，得到$\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_3}+\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}\times\overline{A_1A_3}$

2. 以符號及三角函數表示上式$x\cdot s+y\cdot s\times\cos\angle A_1A_2A_3=z\cdot s\times\sin\angle A_1A_2A_3$

3. 同除以s，得到$x+y\times\cos\angle A_1A_2A_3=z\times\sin\angle A_1A_2A_3$，故得證



圖(2)

[定理 1-1] 圓內接正奇數多邊形

設圓內接正奇數多邊形 $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ 的邊長為 l，令點 P 為弧 A_1A_n 上任一點，若 $\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_n}=y$，$\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}=z$，$\overline{A_1A_{\frac{n+1}{2}}}=s$，則 $x+y=z\times\left(2\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)$

<證明>

1. 因為 $\Delta A_1A_{\frac{n+1}{2}}A_n$ 為等腰三角形，所以由引理 1-1 我們得到 $x+y=z\times\left(2\sin\dfrac{\angle A_1A_{\frac{n+1}{2}}A_n}{2}\right)$

2. 再將 $\angle A_1A_{\frac{n+1}{2}}A_n=\dfrac{\pi}{n}$ 代入 1.的式子中，我們得到 $x+y=z\times\left(2\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)$

[定理 1-2] 圓內接正偶數多邊形

設圓內接正偶數多邊形 $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ 的邊長為 l，令點 P 為弧 A_1A_n 上任一點，若 $\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_n}=y$，$\overline{PA_{\frac{n}{2}}}=z$，$\overline{A_1A_{\frac{n}{2}}}=s$，$\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n=\theta$，且 $x>y$，則 $x+y\times\cos\theta=z\times\sin\theta$

<證明>

1. 因為 $\Delta A_1A_{\frac{n}{2}}A_n$ 為直角三角形，所以由引理 1-2 我們得到 $x+y\times\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n=z\times\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n$

2. 再將 $\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n=\theta$ 代入 1.的式子中，我們得到 $x+y\times\cos\theta=z\times\sin\theta$

從**定理 1-1** 與**定理 1-2** 中，我們深入探討了圓上一點 P 至與 P 點兩個最近的圓內接正多邊形頂點與一個最遠頂點距離的關係，因此我們在想如果圓上一點 P 至圓內接正多邊形各頂點距離之間是否有某種關係存在呢？

二、圓上一點 P 至圓內接正多邊形各頂點距離的關係

(一) 正三角形的情形

設圓內接正三角形 $A_1A_2A_3$，令點 P 為弧 A_1A_3 上任一點，如(圖 2-1-1)所示。

1. 利用托勒密定理我們得到 $\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_2}+\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_3}=\overline{PA_2}\times\overline{A_1A_3}$

2. 因為 $\Delta A_1A_2A_3$ 為圓內接正三角形，所以 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_1}\Rightarrow\overline{PA_1}+\overline{PA_3}=\overline{PA_2}$

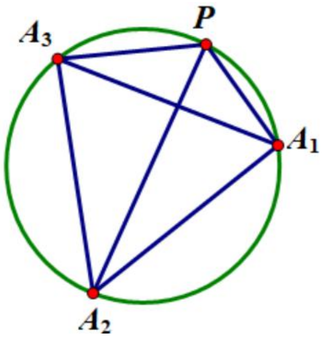


圖 2-1-1 圓內接正三角形

(二) 正五邊形的情形

設圓內接正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ ，令點 P 為弧 A_1A_5 上任一點，且 $\frac{\angle A_1A_3A_5}{2}=\theta$ ，如(圖 2-1-2)

1. 利用 **引理 1-1**，我們得到 $\overline{PA_1}+\overline{PA_5}=\overline{PA_3}\times\left(2\sin\theta\right)$ 與 $\overline{PA_2}+\overline{PA_4}=\overline{PA_3}\times\left(2\sin3\theta\right)$

2. $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}-\overline{PA_2}-\overline{PA_4}=\overline{PA_3}+\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_5}\right)-\left(\overline{PA_2}+\overline{PA_4}\right)=\overline{PA_3}+\overline{PA_3}\times2\sin\theta-\overline{PA_3}\times2\sin3\theta$

$=\overline{PA_3}\left(1+2\sin\theta-2\sin3\theta\right)=\overline{PA_3}\left[1+2\left(\sin\theta-\sin3\theta\right)\right]$ ……..(*)

3. 令 $U=\sin\theta-\sin3\theta$ ，並將左右兩式乘上

$2\sin2\theta\Rightarrow2\sin2\theta\times U=2\sin2\theta\times\sin\theta-2\sin2\theta\times\sin3\theta==\cos\theta-\cos3\theta+\cos5\theta-\cos\theta$

4. 令 $\theta=18^o$ ，我們得到 $U=\frac{-\cos54^\circ}{2\sin36^\circ}=\frac{-\sin36^\circ}{2\sin36^\circ}=-\frac{1}{2}$

5. 將 $U=-\frac{1}{2}$ 代入(*)中，我們有 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}-\overline{PA_2}-\overline{PA_4}=0$ ，

即 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}=\overline{PA_2}+\overline{PA_4}$

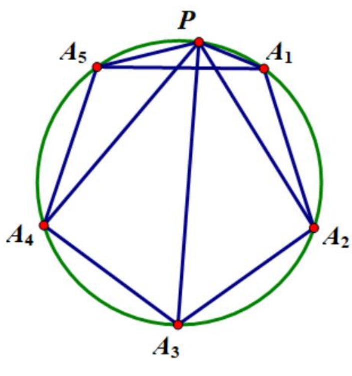


圖 2-1-2 圓內接正五邊形

(三) 正七邊形的情形

設圓內接正七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，令點 P 為弧 A_1A_7 上任一點，且 $\dfrac{\angle A_1A_4A_7}{2}=\theta$，如(圖 2-1-3)

1. 利用 **引理 1-1**，我們得到 $\overline{PA_1}+\overline{PA_7}=\overline{PA_4}\times(2\sin\theta)$，$\overline{PA_2}+\overline{PA_6}=\overline{PA_4}\times(2\sin 3\theta)$，

   $\overline{PA_3}+\overline{PA_5}=\overline{PA_4}\times(2\sin 5\theta)$。

2. $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+\overline{PA_7}-\overline{PA_2}-\overline{PA_4}-\overline{PA_6}=\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_7}\right)-\left(\overline{PA_2}+\overline{PA_6}\right)+\left(\overline{PA_3}+\overline{PA_5}\right)-\overline{PA_4}$

   $=\overline{PA_4}\times 2\sin\theta-\overline{PA_4}\times 2\sin 3\theta+\overline{PA_4}\times 2\sin 5\theta-\overline{PA_4}=\overline{PA_4}\left(2\sin\theta-2\sin 3\theta+2\sin 5\theta-1\right)$

   $=\overline{PA_4}\left[2\left(\sin\theta-\sin 3\theta+\sin 5\theta\right)-1\right]$ ……..(*)

3. 令 $U=\sin\theta-\sin 3\theta+\sin 5\theta$，並將左右兩式乘上

   $2\sin 2\theta \Rightarrow 2\sin 2\theta\times U=2\sin 2\theta\times\sin\theta-2\sin 2\theta\times\sin 3\theta+2\sin 2\theta\times\sin 5\theta$

4. 利用三角函數積化和差的特性將右式改為 $\cos\theta-\cos 3\theta+\cos 5\theta-\cos\theta+\cos 3\theta-\cos 7\theta$

5. 令 $\theta=\dfrac{90^o}{7}$，我們得到 $U=\dfrac{\cos\frac{450}{7}^{\circ}}{2\sin\frac{180}{7}^{\circ}}=\dfrac{\sin\frac{180}{7}^{\circ}}{2\sin\frac{180}{7}^{\circ}}=\dfrac{1}{2}$

6. 將 $U=\dfrac{1}{2}$ 代入(*)中，我們有 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+\overline{PA_7}-\overline{PA_2}-\overline{PA_4}-\overline{PA_6}=0$，

   即 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+\overline{PA_7}=\overline{PA_2}+\overline{PA_4}+\overline{PA_6}$。

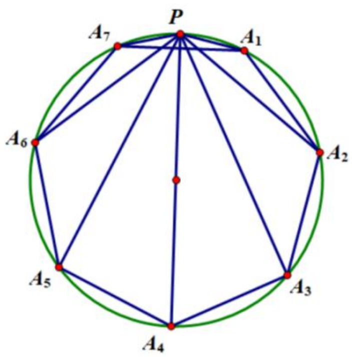


圖 2-1-3 圓內接正七邊形

(四) n為 2 的次方數

1. 四邊形、八邊形、十六邊形...

此類型不符合上述條件，故沒有固定值。

(五) 六邊形

1. 6 可分解出 3 這個奇質因數，因此將 A_1、A_2、...、A_6，依序分成 3 組，$\overline{PA_1}+\overline{PA_2}=B_1$，

$\overline{PA_3}+\overline{PA_4}=B_2$，$\overline{PA_5}+\overline{PA_6}=B_3$，發現 $B_1+B_3=B_2$。

2. 證明

(1) 在**定理 2-1** 中已知正三角形有一性質為，$\overline{PA_1}+\overline{PA_5}=\overline{PA_3}$、$\overline{PA_2}+\overline{PA_6}=\overline{PA_4}$

(2) 兩式相加可得$\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_2}\right)+\left(\overline{PA_5}+\overline{PA_6}\right)=\left(\overline{PA_3}+\overline{PA_4}\right)$，發現 $B_1+B_3=B_2$。

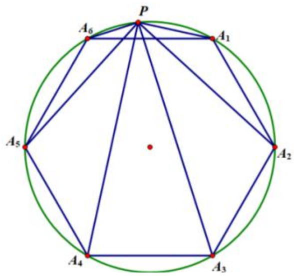


圖 2-2-1 圓內接正六邊形

(六) 十邊形

1. 10 可分解出 5 這個奇質因數，因此將 A_1、A_2、...、A_{10}，依序分成 5 組，$\overline{PA_1}+\overline{PA_2}=B_1$、

$\overline{PA_3}+\overline{PA_4}=B_2$、$\overline{PA_5}+\overline{PA_6}=B_3$、$\overline{PA_7}+\overline{PA_8}=B_4$、$\overline{PA_9}+\overline{PA_{10}}=B_5$，

發現 $B_1+B_3+B_5=B_2+B_4$。

2. 證明

(1) 在 **定理 2-1** 中已知正五邊形有一性質為，$\overline{PA_1}+\overline{PA_5}+\overline{PA_9}=\overline{PA_3}+\overline{PA_7}$、

$\overline{PA_2}+\overline{PA_6}+\overline{PA_{10}}=\overline{PA_4}+\overline{PA_8}$

(2) 兩式相加可得$\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_2}\right)+\left(\overline{PA_5}+\overline{PA_6}\right)+\left(\overline{PA_9}+\overline{PA_{10}}\right)=\left(\overline{PA_3}+\overline{PA_4}\right)+\left(\overline{PA_7}+\overline{PA_8}\right)$

$\Rightarrow B_1+B_3+B_5=B_2+B_4$

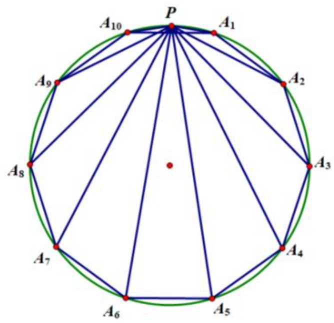


圖 2-2-2 圓內接正十邊形

[定理 2-1] 圓內接正奇數多邊形

設圓內接正奇數多邊形 $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ ，若點 P 為弧上任一點， 則 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+...+\overline{PA_n}=\overline{PA_2}+\overline{PA_4}+...+\overline{PA_{n-1}}$

<證明>

設圓內接正 n 邊形 $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ ，令點 P 為弧 A_1A_n 上任一點，且 $\dfrac{\angle A_1A_{\frac{n+1}{2}}A_n}{2}=\theta$

1. 利用**引理 1-1**，我們得到 $\overline{PA_1}+\overline{PA_n}=\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\times(2\sin\theta)$ ， $\overline{PA_2}+\overline{PA_{n-1}}=\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\times(2\sin 3\theta)$ ，

$\overline{PA_3}+\overline{PA_{n-2}}=\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\times(2\sin 5\theta)\ldots\overline{PA_{\frac{n-1}{2}}}+\overline{PA_{\frac{n+3}{2}}}=\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\times\left(2\sin\left((n-2)\theta\right)\right)$

2. $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+...+\overline{PA_n}-\overline{PA_2}-...-\overline{PA_{n-1}}=\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_n}\right)-\left(\overline{PA_2}+\overline{PA_{n-1}}\right)+\left(\overline{PA_3}+\overline{PA_{n-2}}\right)-...\pm\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}$

$=\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\times 2\sin\theta-\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\times 2\sin 3\theta+\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\times 2\sin 5\theta-...\pm\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}$

$=\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\left(2\sin\theta-2\sin 3\theta+2\sin 5\theta-...\pm 1\right)$

$=\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}\left[2\left(\sin\theta-\sin 3\theta+\sin 5\theta-...\pm\sin\left(n-2\right)\theta\right)\pm 1\right]$ ……..(*)

3. 令 $U=\sin\theta-\sin 3\theta+\sin 5\theta-...\pm\sin\left(n-2\right)\theta$，並將左右兩式同乘 $2\sin 2\theta$

4. 利用積化和差將右式改為

$\cos\theta-\cos 3\theta+\cos 5\theta-\cos\theta+\cos 3\theta-\cos 7\theta+...\pm\cos\left(n-4\right)\theta\mp\cos n\theta$

5. 令 $\theta=\dfrac{90^o}{n}$ ，我們得到 $U=\dfrac{\cos\dfrac{(n-2)\times 180°}{n}}{2\sin\dfrac{180°}{n}}=\dfrac{\mp\sin\dfrac{180°}{n}}{2\sin\dfrac{180°}{n}}=\mp\dfrac{1}{2}$

6. 將$U=\mp\frac{1}{2}$代入(*)中，我們得到$\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+...+\overline{PA_n}-\overline{PA_2}-...-\overline{PA_{n-1}}=0$，

即$\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+...+\overline{PA_n}=\overline{PA_2}+...+\overline{PA_{n-1}}$。

[定理 2-2] 圓內接正偶數多邊形

設圓內接正偶數多邊形$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$，若點P為弧上任一點，B_i為依序且個數相同的多個線段之和，則$B_1+B_3+...+B_k=B_2+B_4+...B_{k-1}$

<證明>

1. 若n無法分解出奇質因數，則無法達成理想的狀況。
2. 設n可分解出k這個奇質因數，可將各頂點分成k組。
3. 令$B_1=\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+...+\overline{PA_{\frac{n}{k}}}$，$B_2=\overline{PA_{\frac{n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{2n}{k}}}$，$B_3=\overline{PA_{\frac{2n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{2n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{3n}{k}}}$，

   …，$B_k=\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}+2}}+...+\overline{PA_n}$。
4. 已知正k邊形有一特性，$\overline{PA_1}+\overline{PA_{\frac{2n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{4n}{k}+1}}+...+\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}+1}}=\overline{PA_{\frac{n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{3n}{k}+1}}+...+\overline{PA_{\frac{(k-2)n}{k}+1}}$，

   $\overline{PA_2}+\overline{PA_{\frac{2n}{k}+2}}+\overline{PA_{\frac{4n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}+2}}=\overline{PA_{\frac{n}{k}+2}}+\overline{PA_{\frac{3n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{(k-2)n}{k}+2}}$，…，

   $\overline{PA_{\frac{n}{k}}}+\overline{PA_{\frac{3n}{k}}}+\overline{PA_{\frac{5n}{k}}}+...+\overline{PA_n}=\overline{PA_{\frac{2n}{k}}}+\overline{PA_{\frac{4n}{k}}}+...+\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}}}$。
5. 將此$\frac{n}{k}$個式子相加，我們得到

$$\left(\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+...+\overline{PA_{\frac{n}{k}}}\right)+\left(\overline{PA_{\frac{2n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{2n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{3n}{k}}}\right)+...+\left(\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}+2}}+...+\overline{PA_n}\right)$$

$$=\left(\overline{PA_{\frac{n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{2n}{k}}}\right)+\left(\overline{PA_{\frac{3n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{3n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{4n}{k}}}\right)+...+\left(\overline{PA_{\frac{(k-2)n}{k}+1}}+\overline{PA_{\frac{(k-2)n}{k}+2}}+...+\overline{PA_{\frac{(k-1)n}{k}}}\right)$$

6. 上式可寫成$B_1+B_3+...+B_k=B_2+B_4+...B_{k-1}$，故得證

因為若n無法分解出奇質因數時，我們無法得到**定理 2-2** 的結果，因此，我們試著將各邊高次方再相加後，得到與**定理 2-2** 類似的結果。

[引理 2](陳姿妤與蕭妤真[3])

設圓內接正多邊形 $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ ，建構於複數平面圓心為(0,0)的單位圓上，不失一般性，將P點落在 A_1A_n 上，則$\overline{PA_k}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(k-1)}{n}\pi\right),k=0,1,2,...,n-1$

1. 正六邊形的情形

(1) 利用引理 2，我們得到$\overline{PA_k}^4=2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(k-1)}{6}\pi\right),k=0,1,2,3,4,5$ 。

(2) $\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4=2^4\left(\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{6}\pi\right)+\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{6}\pi\right)\right)$

$$=2^4\left(\frac{3-4\cos\theta+\cos 2\theta}{8}+\frac{3-4\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}{8}+\frac{3-4\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{8}{3}\pi\right)}{8}\right)$$

$$=2\left(9-4\left(\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)\right)+\left(\cos 2\theta+\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{8}{3}\pi\right)\right)\right)$$

$$=18-8\frac{\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+2\pi\right)-\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$+2\frac{\sin\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(2\theta-\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(2\theta+\frac{8\pi}{3}\right)-\sin 2\theta+\sin\left(2\theta+4\pi\right)-\sin\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}{2\sin\frac{4\pi}{3}}=18$$

(3) $\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4+\overline{PA_6}^4=2^4\left(\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\pi\right)+\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{6}\pi\right)+\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{6}\pi\right)\right)$

$$=2^4\left(\frac{3-4\cos\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}{8}+\frac{3-4\cos(\theta+\pi)+\cos(2\theta+2\pi)}{8}+\frac{3-4\cos\left(\theta+\frac{5}{3}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{10}{3}\pi\right)}{8}\right)$$

$$=2\left(9-4\left(\cos\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)+\cos(\theta+\pi)+\cos\left(\theta+\frac{5}{3}\pi\right)\right)+\left(\cos\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos(2\theta+2\pi)+\cos\left(2\theta+\frac{10}{3}\pi\right)\right)\right)$$

$$=18-8\frac{\sin(\theta+\pi)-\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)+\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{3}\right)-\sin\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)+\sin\left(\theta+\frac{7}{3}\pi\right)-\sin(\theta+\pi)}{2\sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$+2\frac{\sin(2\theta+2\pi)-\sin\left(2\theta-\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\left(2\theta+\frac{10}{3}\pi\right)-\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\left(2\theta+\frac{14}{3}\pi\right)-\sin(2\theta+2\pi)}{2\sin\frac{4\pi}{3}}=18$$

(4) 由(2)與(3)，得到$\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4=\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4+\overline{PA_6}^4$。

2. 正八邊形的情形

(1) 利用引理 2，我們得到$\overline{PA_k}^6=2\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(k-1)}{8}\pi\right),k=0,1,2,3,4,5,6,7$。

(2) $\overline{PA_1}^6+\overline{PA_3}^6+\overline{PA_5}^6+\overline{PA_7}^6=2^6\left(\sin^6\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{8}\pi\right)+\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{8}\pi\right)+\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6}{8}\pi\right)\right)$

$$=2^6\left(\frac{10-15\cos\theta+6\cos2\theta-\cos3\theta}{32}+\frac{10-15\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+6\cos(2\theta+\pi)-\cos\left(3\theta+\frac{3}{2}\pi\right)}{32}\right.$$

$$\left.+\frac{10-15\cos(\theta+\pi)+6\cos(2\theta+2\pi)-\cos(3\theta+3\pi)}{32}+\frac{10-15\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+6\cos(2\theta+3\pi)-\cos\left(3\theta+\frac{9}{2}\pi\right)}{32}\right)$$

$$=80-30\left(\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta+\pi)+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)\right)+$$

$$12\left(\cos2\theta+\cos(2\theta+\pi)+\cos(2\theta+2\pi)+\cos(2\theta+3\pi)\right)-2\left(\cos3\theta+\cos\left(3\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(3\theta+3\pi)+\cos\left(3\theta+\frac{9}{2}\pi\right)\right)$$

$$=80-30\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+2\pi)-\sin(\theta+\pi)}{2\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$+12\frac{\sin(2\theta+\pi)-\sin(2\theta-\pi)+\sin(2\theta+2\pi)-\sin2\theta+\sin(2\theta+3\pi)-\sin(2\theta+\pi)+\sin(2\theta+4\pi)-\sin(2\theta+2\pi)}{2\sin\pi}$$

$$-2\frac{\sin\left(3\theta+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(3\theta-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin(3\theta+3\pi)-\sin3\theta+\sin\left(3\theta+\frac{9\pi}{2}\right)-\sin\left(3\theta+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin(3\theta+6\pi)-\sin(3\theta+3\pi)}{2\sin\frac{3\pi}{2}}$$

$=80$

(3) $\overline{PA_2}^6+\overline{PA_4}^6+\overline{PA_6}^6+\overline{PA_8}^6=2^6\left(\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{8}\pi\right)+\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{8}\pi\right)+\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{8}\pi\right)+\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{7}{8}\pi\right)\right)$

$$=2^6\left(\frac{10-15\cos\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)+6\cos\left(2\theta+\frac{1}{2}\pi\right)-\cos\left(3\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}{32}+\frac{10-15\cos\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+6\cos\left(2\theta+\frac{3}{2}\pi\right)-\cos\left(3\theta+\frac{9}{4}\pi\right)}{32}\right.$$

$$\left.+\frac{10-15\cos\left(\theta+\frac{5}{4}\pi\right)+6\cos\left(2\theta+\frac{5}{2}\pi\right)-\cos\left(3\theta+\frac{15}{4}\pi\right)}{32}+\frac{10-15\cos\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)+6\cos\left(2\theta+\frac{7}{2}\pi\right)-\cos\left(3\theta+\frac{21}{4}\pi\right)}{32}\right)$$

$$=80-30\left(\cos\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{5}{4}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)\right)+12\left(\cos\left(2\theta+\frac{1}{2}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{3}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\cos\left(2\theta+\frac{5}{2}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{7}{2}\pi\right)\right)-2\left(\cos\left(3\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+\cos\left(3\theta+\frac{9}{4}\pi\right)+\cos\left(3\theta+\frac{15}{4}\pi\right)+\cos\left(3\theta+\frac{21}{4}\pi\right)\right)$$

$$=80-30\frac{\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)-\sin\left(\theta-\frac{1}{4}\pi\right)+\sin\left(\theta+\frac{5}{4}\pi\right)-\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)+\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)-\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+\sin\left(\theta+\frac{9}{4}\pi\right)-\sin\left(\theta+\frac{5}{4}\pi\right)}{2\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$+12\frac{\sin\left(2\theta+\frac{3}{2}\pi\right)-\sin\left(2\theta-\frac{1}{2}\pi\right)+\sin\left(2\theta+\frac{5}{2}\pi\right)-\sin\left(2\theta+\frac{1}{2}\right)+\sin\left(2\theta+\frac{7}{2}\pi\right)-\sin\left(2\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(2\theta+\frac{9}{2}\pi\right)-\sin\left(2\theta+\frac{5}{2}\pi\right)}{2\sin\pi}$$

$$-2\frac{\sin\left(3\theta+\frac{9}{4}\pi\right)-\sin\left(3\theta-\frac{3}{4}\pi\right)+\sin\left(3\theta+\frac{15}{4}\pi\right)-\sin\left(3\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+\sin\left(3\theta+\frac{21}{4}\pi\right)-\sin\left(3\theta+\frac{9}{4}\pi\right)+\sin\left(3\theta+\frac{27}{4}\pi\right)-\sin\left(3\theta+\frac{15}{4}\pi\right)}{2\sin\frac{3\pi}{2}}$$

$=80$

(4) 由(2)與(3)，得到$\overline{PA_1}^6+\overline{PA_3}^6+\overline{PA_5}^6+\overline{PA_7}^6=\overline{PA_2}^6+\overline{PA_4}^6+\overline{PA_6}^6+\overline{PA_8}^6$ 。

[定理 2-3]

設圓內接正偶數多邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}A_{n+2}$，若點 P 為弧上任一點

，則$\overline{PA_1}^n+\overline{PA_3}^n+\ldots+\overline{PA_{n+1}}^n=\overline{PA_2}^n+\overline{PA_4}^n+\ldots+\overline{PA_{n+2}}^n$

<證明>

設圓內接正 n 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}A_{n+2}$，令點 P 為 $\overset{\frown}{A_1A_{n+2}}$ 上任一點，

1. 利用引理 2，我們得到$\overline{PA_k}^n = 2\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(k-1)}{n+2}\pi\right), k=0,1,2,...,n+1$。

2. $\overline{PA_1}^n + \overline{PA_3}^n + ... + \overline{PA_{n+1}}^n$

$$= 2^n\left(\sin^n\frac{\theta}{2}+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n+2}\pi\right)+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{n+2}\pi\right)+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{6}{n+2}\pi\right)+...+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n}{n+2}\pi\right)\right)$$

$$= \frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}} + 2(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i \cos(n-2i)\frac{\theta}{2} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i \cos(n-2i)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n+2}\pi\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i \cos(n-2i)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{n+2}\pi\right)+...+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i \cos(n-2i)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n}{n+2}\pi\right)\right)$$

$$= \frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}} + 2(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\left(\cos n\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{n+2}\right)+\cos n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{n+2}\right)+\ldots+\cos n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n\pi}{n+2}\right)\right)\right)$$

$$-C^n_1\left(\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n+2}\pi\right)+\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{n+2}\pi\right)+\ldots+\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n}{n+2}\pi\right)\right)+...$$

$$+C^n_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\cos\left(\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n+2}\pi\right)+\cos\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{n+2}\pi\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+\cos\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n}{n+2}\pi\right)\right)$$

$$=\frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}}+\frac{\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2}{n+2}\pi\right)+\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}\right)+\ldots+\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n-2}{n+2}\pi\right)}{2\sin n\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}$$

$$-C^n_1\left(\frac{\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2}{n+2}\pi\right)+\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin(n-2)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n-2}{n+2}\pi\right)}{2\sin(n-2)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}\right)+\ldots$$

$$+C^n_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n+2}\pi\right)-\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2}{n+2}\pi\right)+\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{n+2}\pi\right)}{2\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)+\ldots+\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)-\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n-2}{n+2}\pi\right)}{2\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}\right)$$

$$=\frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}}+\frac{\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n}{n+2}\pi\right)+\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin n\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}$$

$$-C^n_1\frac{\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n}{n+2}\pi\right)+\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin(n-2)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}+\ldots$$

$$+C^n_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n}{n+2}\pi\right)+\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)-\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{2}{n+2}\pi\right)-\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}$$

$$=\frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}}$$

3. $\overline{PA_2}^n+\overline{PA_4}^n+\ldots+\overline{PA_{n+2}}^n$

$$=2^n\left(\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{7}{n+2}\pi\right)+\ldots+\sin^n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)\right)$$

$$=\frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}}+2(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i\cos(n-2i)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i\cos(n-2i)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i\cos(n-2i)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)+\ldots+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^i C^n_i\cos(n-2i)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)\right)$$

$$=\frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}}+2(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\left(\cos n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)+\cos n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)+\cos n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)+\ldots+\cos n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)\right)\right.$$

$$-C_1^n\left(\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)+\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)+\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)+\ldots+\cos(n-1)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)\right)+\ldots$$

$$+C^n_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\cos\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)+\cos\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)+\cos\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+\cos\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)\right)\Bigg)$$

$$=\frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}}+\frac{\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{n+2}\pi\right)+\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)}{2\sin n\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}+\ldots$$

$$+\frac{\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+3}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n-1}{n+2}\pi\right)}{2\sin n\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}$$

$$-C_1^n\left(\frac{\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{n+2}\pi\right)+\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)}{2\sin(n-2)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+3}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n-1}{n+2}\pi\right)}{2\sin(n-2)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}\right)+\ldots$$

$$+C^n_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{n+2}\pi\right)-\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{n+2}\pi\right)+\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{n+2}\pi\right)}{2\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)+\ldots+\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+3}{n+2}\pi\right)-\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n-1}{n+2}\pi\right)}{2\sin\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}\right)$$

$$=\frac{n+2}{2}C^n_{\frac{n}{2}}+\frac{\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)+\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+3}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{n+2}\pi\right)-\sin n\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)}{2\sin n\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}$$

$$-C_1^n\frac{\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)+\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+3}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{n+2}\pi\right)-\sin(n-2)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)}{2\sin(n-2)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)}+\ldots$$

$$
+C^{n}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{\sin\left(\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+1}{n+2}\pi\right)\right)+\sin\left(\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n+3}{n+2}\pi\right)\right)}{2\sin\left(\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)\right)}\right.
$$

$$
\left.-\frac{\sin\left(\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{n+2}\pi\right)\right)-\sin\left(\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n+2}\pi\right)\right)}{2\sin\left(\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left(\frac{2}{n+2}\pi\right)\right)}\right)=\frac{n+2}{2}C^{n}_{\frac{n}{2}}
$$

4. 由 2.與 3.的結果，得到 $\overline{PA_1}^n+\overline{PA_3}^n+\ldots+\overline{PA_{n+1}}^n=\overline{PA_2}^n+\overline{PA_4}^n+\ldots+\overline{PA_{n+2}}^n$ 。

三、圓上一點 P 至圓內接多邊形對角線的垂線及與圓內接多邊形頂點切線的垂線距離的關係

方法一：

設圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ ，若點 P 為弧上任一點，過 A_i 做切線 L_i ， P 投影於 L_i 的點稱為 B_i ，及 P 投影於對角線的點稱為 $C_{A_iA_j}$ ($C_{A_jA_i}$)，其中 $i,j=1,2,3,\ldots,n$ ，$|i-j|\neq 0,1,(n-1)$ ，且 $i\neq j$ ，如(圖 3-1-1)所示。

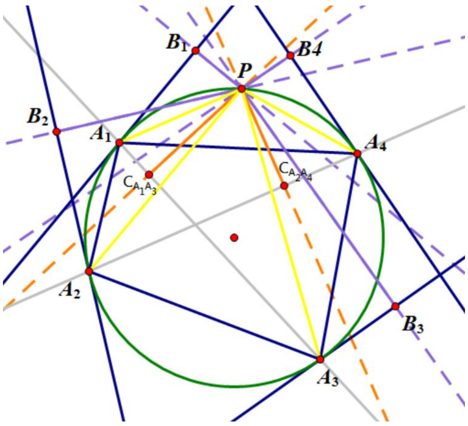


圖 3-1-1 圓內接四邊形

方法二：

設圓內接多邊形各頂點為 $A_1,A_2,A_3\ldots A_n$ ，圓上任一點 P 至各頂點切線的距離分別為 $t_1,t_2,t_3\ldots t_n$ ，圓上任一點 P 到圓內接多邊形各對角線的距離分別為 $h_1,h_2,h_3\ldots h_{\frac{n(n-3)}{2}}$ ，且圓上任一點 P 到圓內接多邊形各頂點的距離分別為 $l_1,l_2,l_3\ldots l_n$ ，如(圖 3-1-2)所示。

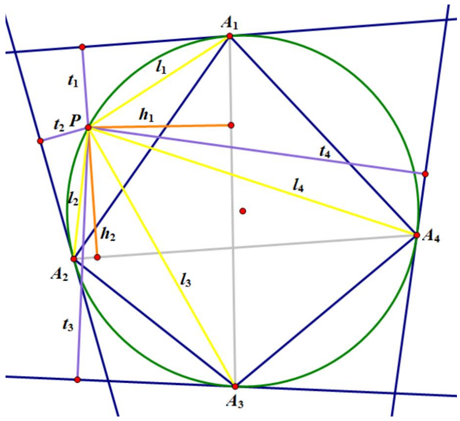


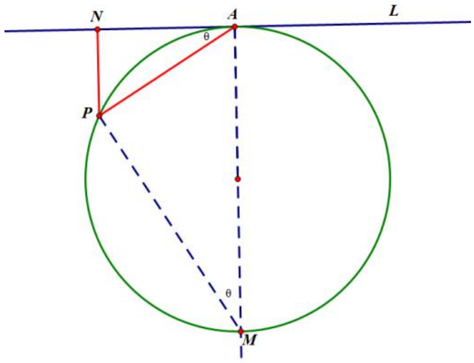
圖 3-1-2 圓內接四邊形

[引理 3-1]

在半徑為 R 的圓上取一點 A，過 A 點做切線 L，若 P 為圓上任一點，且 $d(P,L)$ 表示 P 到 L 的距離，而 $d(P,A)$ 表示 P 點到 A 點的距離，則 $d(P,L)=\dfrac{d(P,A)^2}{2R}$

<證明>

因為 $\Delta APM \sim \Delta PNA$ (如圖(3))，所以 $\dfrac{2R}{d(P,A)}=\dfrac{d(P,A)}{d(P,L)} \Rightarrow d(P,L)=\dfrac{d(P,A)^2}{2R}$



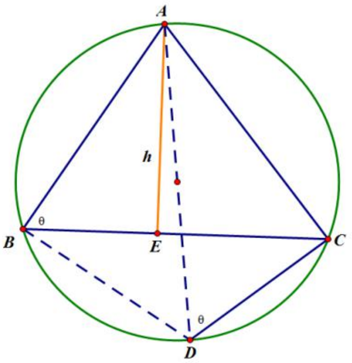
圖(3)

[引理 3-2]

三角形一邊上的高與外接圓直徑的乘積等於另兩邊的乘積

<證明>

取一半徑為 R 的圓與圓內接三角形 ABC (如圖(4))，令 $\overline{BC}$ 上的高為 h，垂足點為 E，再取圓上一點 D 過 A 與圓心，因為 $\Delta ACD \sim \Delta AEB$，所以 $\dfrac{\overline{AC}}{h}=\dfrac{2R}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB}\times\overline{AC}=2Rh$



圖(4)

(一) 四邊形的情形

方法一：

1. $\because \angle PA_1B_1 = \angle PA_3C_{A_1A_3}$（弦切角及圓周角對同弧$\overset{\frown}{PA_1}$），又$\angle PB_1A_1 = 90° = \angle PC_{A_1A_3}A_3$，

   $\therefore \Delta PA_1B_1 \sim \Delta PA_3C_{A_1A_3}$（AA 相似），

2. 同理可證$\Delta PA_2B_2 \sim \Delta PA_4C_{A_2A_4}$ 、$\Delta PA_3B_3 \sim \Delta PA_1C_{A_3A_1}$ 、$\Delta PA_4B_4 \sim \Delta PA_2C_{A_4A_2}$ ，

3. 由 1 與 2，我們得到$\dfrac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_3}}} = \dfrac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_4}}} = \dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_4}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_1}}} = \dfrac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_4}}{\overline{PC_{A_4A_2}}} = \dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{PA_2}}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_3}}} \times \frac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_4}}} \times \frac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_1}}} \times \frac{\overline{PB_4}}{\overline{PC_{A_2A_4}}} = \frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}} \times \frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_4}} \times \frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}} \times \frac{\overline{PA_4}}{\overline{PA_2}}$$

$$\Rightarrow \left(\overline{PB_1} \times \overline{PB_2} \times \overline{PB_3} \times \overline{PB_4}\right)^{\frac{1}{2}} = \overline{PC_{A_1A_3}} \times \overline{PC_{A_2A_4}}$$

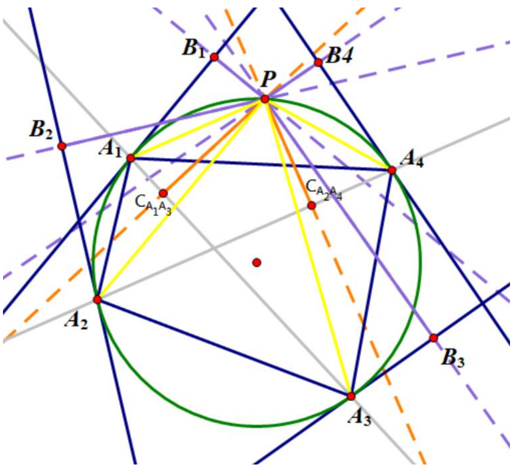


圖 3-1-1 圓內接四邊形

方法二：

1. 根據 **引理 3-1**，我們得到 $t_1=\dfrac{l_1^{\,2}}{2R}$ ，$t_2=\dfrac{l_2^{\,2}}{2R}$ ，$t_3=\dfrac{l_3^{\,2}}{2R}$ ，$t_4=\dfrac{l_4^{\,2}}{2R}$

2. 根據 **引理 3-2**，我們得到 $l_1l_3=h_1 2R$ ，$l_2l_4=h_2 2R$

3. 由 1 與 2，我們得到 $h_1h_2=(\dfrac{l_1l_3}{2R})(\dfrac{l_2l_4}{2R})=\left(t_1t_2t_3t_4\right)^{\frac{1}{2}}$

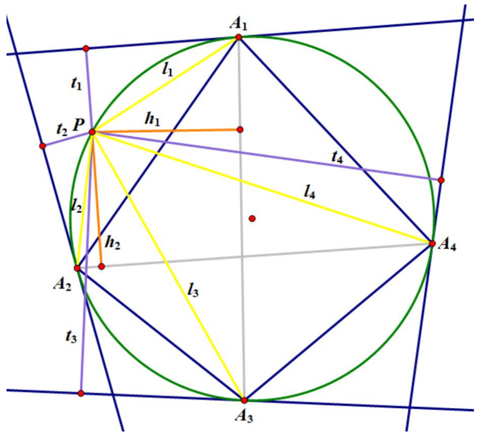


圖 3-1-2 圓內接四邊形

(二) 五邊形的情形

方法一：

1. $\because\ \angle PA_1B_1=\angle PA_3C_{A_1A_3}=\angle PA_4C_{A_1A_4}$ （弦切角及圓周角對同弧 $\overset{\frown}{PA_1}$ ）

又 $\angle PB_1A_1=90^\circ=\angle PC_{A_1A_3}A_3=\angle PC_{A_1A_4}A_4$

$\therefore\ \Delta PA_1B_1\sim\Delta PA_3C_{A_1A_3}\sim\Delta PA_4C_{A_1A_4}$ （AA 相似）

2. 同理可證 $\Delta PA_2B_2\sim\Delta PA_4C_{A_2A_4}\sim\Delta PA_5C_{A_2A_5}$ 、$\Delta PA_3B_3\sim\Delta PA_5C_{A_3A_5}\sim\Delta PA_1C_{A_3A_1}$ 、

$\Delta PA_4B_4\sim\Delta PA_1C_{A_4A_1}\sim\Delta PA_2C_{A_4A_2}$ 、$\Delta PA_5B_5\sim\Delta PA_2C_{A_5A_2}\sim\Delta PA_3C_{A_5A_3}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_3}}}=\dfrac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_4}}}=\dfrac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_4}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_4}}}=\dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_4}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_5}}}=\dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_5}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_5}}}=\dfrac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_5}}$ ，

$\dfrac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_1}}}=\dfrac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_4}}{\overline{PC_{A_4A_1}}}=\dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{PA_1}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_4}}{\overline{PC_{A_4A_2}}}=\dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{PA_2}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_5}}{\overline{PC_{A_5A_2}}}=\dfrac{\overline{PA_5}}{\overline{PA_2}}$ ，$\dfrac{\overline{PB_5}}{\overline{PC_{A_5A_3}}}=\dfrac{\overline{PA_5}}{\overline{PA_3}}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_3}}}\times\frac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_4}}}\times\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_4}}}\times\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_5}}}\times\frac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_5}}}\times\frac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_1}}}\times\frac{\overline{PB_4}}{\overline{PC_{A_4A_1}}}\times\frac{\overline{PB_4}}{\overline{PC_{A_4A_2}}}\times\frac{\overline{PB_5}}{\overline{PC_{A_5A_2}}}\times\frac{\overline{PB_5}}{\overline{PC_{A_5A_3}}}$$

$$=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}\times\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_4}}\times\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_4}}\times\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_5}}\times\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_5}}\times\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}}\times\frac{\overline{PA_4}}{\overline{PA_1}}\times\frac{\overline{PA_4}}{\overline{PA_2}}\times\frac{\overline{PA_5}}{\overline{PA_2}}\times\frac{\overline{PA_5}}{\overline{PA_3}}$$

$$\therefore \overline{PB_1}\times\overline{PB_2}\times\overline{PB_3}\times\overline{PB_4}\times\overline{PB_5}=\overline{PC_{A_1A_3}}\times\overline{PC_{A_1A_4}}\times\overline{PC_{A_2A_4}}\times\overline{PC_{A_2A_5}}\times\overline{PC_{A_3A_5}}$$

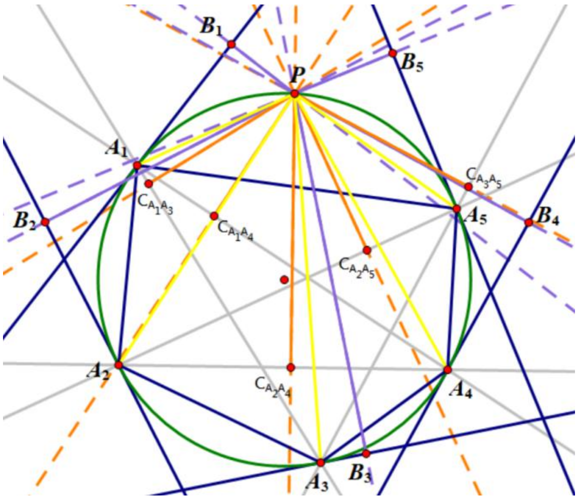


圖 3-2-1 圓內接五邊形

方法二：

1. 根據 **引理 3-1**，我們得到 $t_1=\dfrac{l_1^{\,2}}{2R}$ ，$t_2=\dfrac{l_2^{\,2}}{2R}$ ，$t_3=\dfrac{l_3^{\,2}}{2R}$ ，$t_4=\dfrac{l_4^{\,2}}{2R}$ ，$t_5=\dfrac{l_5^{\,2}}{2R}$

2. 根據 **引理 3-2**，我們得到 $l_1l_3=h_1 2R$ ，$l_1l_4=h_2 2R$ ，$l_2l_4=h_3 2R$ ，$l_2l_5=h_4 2R$ ，$l_3l_5=h_5 2R$

3. 由 1 與 2，我們得到 $h_1h_2h_3h_4h_5=(\dfrac{l_1l_3}{2R})(\dfrac{l_1l_4}{2R})(\dfrac{l_2l_4}{2R})(\dfrac{l_2l_5}{2R})(\dfrac{l_3l_5}{2R})=t_1t_2t_3t_4t_5$

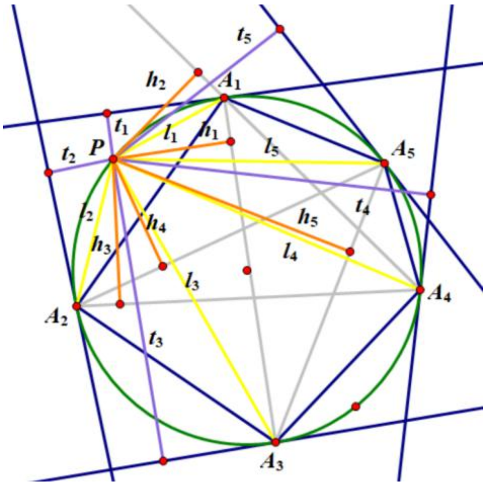


圖 3-2-2 圓內接五邊形

[定理 3-1]

設圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$，若點 P 為弧上任一點，過 A_i 做切線 L_i，P 投影於 L_i 的點稱為 B_i，及 P 投影於對角線的點稱為 $C_{A_iA_j}$ ($C_{A_jA_i}$)，其中 $i,j=1,2,3,...,n$，$|i-j|\neq 0,1,(n-1)$，$i\neq j$，則 $\left(\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}\right)^{\frac{n-3}{2}}=\overline{PC_{A_1A_3}}\times\overline{PC_{A_1A_4}}\times\overline{PC_{A_1A_5}}\times...\times\overline{PC_{A_{n-2}A_n}}$

<證明>

1. $\because \angle PA_1B_1=\angle PA_3C_{A_1A_3}=...=\angle PA_iC_{A_1A_i}\ \left(i=3,4,5...(n-1)\right)$，

   又 $\angle PB_1A_1=90^\circ=\angle PC_{A_1A_3}A_3=...=\angle PC_{A_1A_i}A_i$，

   $\therefore \Delta PA_1B_1\sim\Delta PA_3C_{A_1A_3}\sim...\sim\Delta PA_iC_{A_1A_i}$（AA 相似）

2. 同理可證

   $\Delta PA_2B_2\sim\Delta PA_4C_{A_2A_4}\sim...\sim\Delta PA_jC_{A_2A_j}\ \left(j=4,5,6...n\right)$

   $\Delta PA_3B_3\sim\Delta PA_5C_{A_3A_5}\sim...\sim\Delta PA_kC_{A_3A_k}\ \left(k=5,6,7...n,1\right)$

   ...

   $\Delta PA_nB_n\sim\Delta PA_2C_{A_nA_2}\sim...\sim\Delta PA_lC_{A_nA_l}\ \left(l=2,3,4...(n-2)\right)$

   $\Rightarrow \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_3}}}=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}}$、$\frac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_4}}}=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_4}}$、$\frac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_5}}}=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_5}}$、...、$\frac{\overline{PB_1}}{\overline{PC_{A_1A_i}}}=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_i}}$、

   $\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_4}}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_4}}$、$\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_5}}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_5}}$、$\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_6}}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_6}}$、...、$\frac{\overline{PB_2}}{\overline{PC_{A_2A_j}}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_j}}$、

   $\frac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_5}}}=\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_5}}$、$\frac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_6}}}=\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_6}}$、...、$\frac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_k}}}=\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_k}}$、$\frac{\overline{PB_3}}{\overline{PC_{A_3A_1}}}=\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}}$、...、

   $\frac{\overline{PB_n}}{\overline{PC_{A_nA_2}}}=\frac{\overline{PA_n}}{\overline{PA_2}}$、$\frac{\overline{PB_n}}{\overline{PC_{A_nA_3}}}=\frac{\overline{PA_n}}{\overline{PA_3}}$、$\frac{\overline{PB_n}}{\overline{PC_{A_nA_4}}}=\frac{\overline{PA_n}}{\overline{PA_4}}$、...、$\frac{\overline{PB_n}}{\overline{PC_{A_nA_{n-2}}}}=\frac{\overline{PA_n}}{\overline{PA_{n-2}}}$

   $\therefore\left(\overline{PB_1}\times\overline{PB_2}\times\overline{PB_3}\times...\times\overline{PB_n}\right)^{\frac{n-3}{2}}=\overline{PC_{A_1A_3}}\times\overline{PC_{A_1A_4}}\times\overline{PC_{A_1A_5}}\times...\times\overline{PC_{A_{n-2}A_n}}$

[定理 3-2]

設圓內接多邊形各頂點為 $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$，圓上任一點 P 至各頂點切線的距離分別為 $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$，圓上任一點 P 到圓內接多邊形各對角線的距離分別為 $h_1, h_2, h_3 \ldots h_{\frac{n(n-3)}{2}}$，且圓上任一點 P 到圓內接多邊形各頂點的距離分別為為 $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$，則 $\prod_{i=1}^{\frac{n(n-3)}{2}} h_i = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{\frac{n-3}{2}}$

<證明>

1. 由 **引理 3-1**，我們得到 $t_1 = \dfrac{l_1^2}{2R}$、$t_2 = \dfrac{l_2^2}{2R}$、$t_3 = \dfrac{l_3^2}{2R}$、…、$t_n = \dfrac{l_n^2}{2R}$

2. 由 **引理 3-2**，我們得到 $l_1 l_3 = 2h_1 R$、$l_1 l_4 = 2h_2 R$、$l_1 l_5 = 2h_3 R$、…、$l_1 l_{n-1} = 2h_{n-3} R$、

   $l_2 l_4 = 2h_{n-2} R$、$l_2 l_5 = 2h_{n-1} R$、$l_2 l_6 = 2h_n R$、…、$l_2 l_n = 2h_{2n-6} R$、

   $l_3 l_5 = 2h_{2n-5} R$、$l_3 l_6 = 2h_{2n-4} R$、$l_3 l_7 = 2h_{2n-3} R$、…、$l_3 l_n = 2h_{3n-10} R$、…、$l_{n-2} l_n = 2h_{\frac{n(n-3)}{2}} R$

3. 由 1 與 2，我們得到 $\prod_{i=1}^{\frac{n(n-3)}{2}} h_i = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{\frac{n-3}{2}}$

四、圓上一點 P 在圓內接多邊形邊長的投影長度與過圓內接多邊形頂點切線上的投影長度的關係

(一)三角形的情形

設圓內接三角形 $A_1A_2A_3$，令點 P 為 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上任一點，過 $A_1A_2A_3$ 分別作切線 L_1，L_2，L_3，P 到 L_1，L_2，L_3 的投影長度分別為 $\overline{A_1E_1}$，$\overline{A_2E_2}$，$\overline{A_3E_3}$，P 到 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_1A_3}$ 的投影長度分別為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，且 $\overset{\frown}{PA_1} = 2\theta$，$\overset{\frown}{PA_2} = 2\theta_1$，$\overset{\frown}{A_1A_3} = 2\theta_2$，如(圖 4-1)所示。

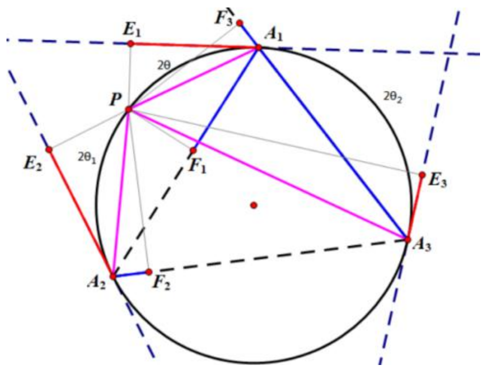


圖 4-1 圓內接三角形

1. 因為 P 到 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_1A_3}$ 的投影長度為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，所以 $\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$，

$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta+\theta_2)$，$\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos\theta$

2. 因為 P 到 L_1，L_2，L_3 的投影長度為 $\overline{A_1E_1}$，$\overline{A_2E_2}$，$\overline{A_3E_3}$，所以 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$，

$\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$，$\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta+\theta_2)$

3. 由 1 與 2，我們得到 $\dfrac{\overline{A_1F_1}\times\overline{A_2F_2}\times\overline{A_3F_3}}{\overline{A_1E_1}\times\overline{A_2E_2}\times\overline{A_3E_3}}=1$

(二)四邊形的情形

設圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令點 P 為 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上任一點，過 $A_1A_2A_3A_4$ 分別作切線 L_1，L_2，L_3，L_4，P 到 L_1，L_2，L_3，L_4 的投影長度分別為 $\overline{A_1E_1}$，$\overline{A_2E_2}$，$\overline{A_3E_3}$，$\overline{A_4E_4}$，P 到 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_1A_4}$ 的投影長度分別為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，$\overline{A_4F_4}$，且 $\overset{\frown}{PA_1}=2\theta$，$\overset{\frown}{PA_2}=2\theta_1$，$\overset{\frown}{A_2A_3}=2\theta_3$，$\overset{\frown}{A_1A_4}=2\theta_2$，如(圖 4-2)所示。

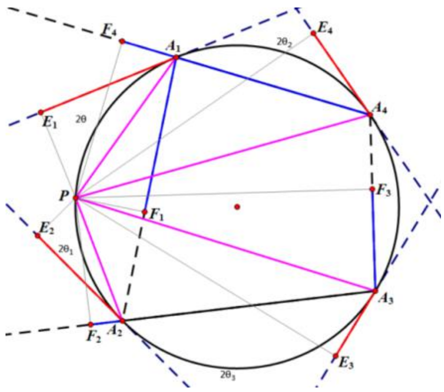


圖 4-2 圓內接四邊形

1. 因為 P 到 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_1A_4}$ 的投影長度分別為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，$\overline{A_4F_4}$，所以

$\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$，$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta_1+\theta_3)$，$\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta+\theta_2)$，$\overline{A_4F_4}=\overline{A_4P}\cos\theta$

2. 因為 P 到 L_1，L_2，L_3，L_4 的投影長度分別為 $\overline{A_1E_1}$，$\overline{A_2E_2}$，$\overline{A_3E_3}$，$\overline{A_4E_4}$，所以 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$，

$\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$，$\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3)$，$\overline{A_4E_4}=\overline{A_4P}\cos(\theta+\theta_2)$

3. 由 1 與 2，我們得到 $\dfrac{\overline{A_1F_1}\times\overline{A_2F_2}\times\overline{A_3F_3}\times\overline{A_4F_4}}{\overline{A_1E_1}\times\overline{A_2E_2}\times\overline{A_3E_3}\times\overline{A_4E_4}}=1$

(三)五邊形的情形

設圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，令點 P 為 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上任一點，過 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 分別作切線 L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5，P 到 L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 的投影長度分別為 $\overline{A_1E_1}$, $\overline{A_2E_2}$, $\overline{A_3E_3}$, $\overline{A_4E_4}$, $\overline{A_5E_5}$，P 到 $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_1A_5}$ 的投影長度分別為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，$\overline{A_4F_4}$，$\overline{A_5F_5}$，且 $\overset{\frown}{PA_1}=2\theta$，$\overset{\frown}{PA_2}=2\theta_1$，$\overset{\frown}{A_2A_3}=2\theta_3$，$\overset{\frown}{A_4A_5}=2\theta_4$，$\overset{\frown}{A_1A_5}=2\theta_2$，如(圖 4-3)所示。

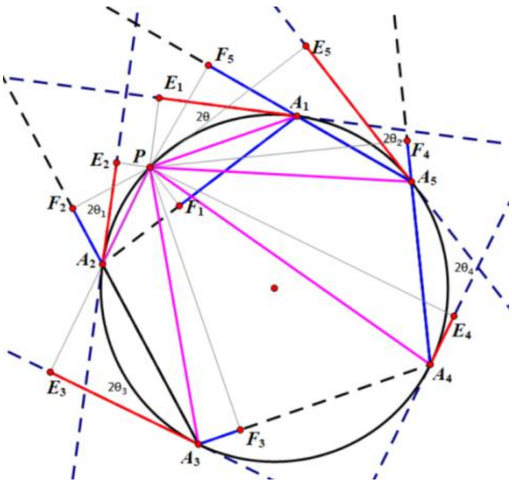


圖 4-3 圓內接五邊形

1. 因為 P 到 $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_1A_5}$ 的投影長度分別為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，$\overline{A_4F_4}$，$\overline{A_5F_5}$，所以 $\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$，$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta_1+\theta_3)$，$\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$，
$\overline{A_4F_4}=\overline{A_4P}\cos(\theta+\theta_2)$，$\overline{A_5F_5}=\overline{A_5P}\cos\theta$

2. 因為 P 到 L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 的投影長度分別為 $\overline{A_1E_1}$, $\overline{A_2E_2}$, $\overline{A_3E_3}$, $\overline{A_4E_4}$, $\overline{A_5E_5}$，所以 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$，$\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3)$，
$\overline{A_4E_4}=\overline{A_4P}\cos\left(\theta+\theta_2+\theta_4\right)$，$\overline{A_5E_5}=\overline{A_5P}\cos(\theta+\theta_2)$

3. 由 1 與 2，我們得到 $\dfrac{\overline{A_1F_1}\times\overline{A_2F_2}\times\overline{A_3F_3}\times\overline{A_4F_4}\times\overline{A_5F_5}}{\overline{A_1E_1}\times\overline{A_2E_2}\times\overline{A_3E_3}\times\overline{A_4E_4}\times\overline{A_5E_5}}=1$

(四)六邊形的情形

設圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，令點 P 為 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上任一點，過 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 分別作切線 L_1，L_2，L_3，L_4，L_5，L_6，P 到 L_1，L_2，L_3，L_4，L_5，L_6 的投影長度分別為 $\overline{A_1E_1}$，$\overline{A_2E_2}$，$\overline{A_3E_3}$，$\overline{A_4E_4}$，$\overline{A_5E_5}$，$\overline{A_6E_6}$，P 到 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_4A_5}$，$\overline{A_5A_6}$，$\overline{A_1A_6}$ 的投影長度分別為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，$\overline{A_4F_4}$，$\overline{A_5F_5}$，$\overline{A_6F_6}$，且 $\overset{\frown}{PA_1}=2\theta$，$\overset{\frown}{PA_2}=2\theta_1$，$\overset{\frown}{A_2A_3}=2\theta_3$，$\overset{\frown}{A_3A_4}=2\theta_5$，$\overset{\frown}{A_5A_6}=2\theta_4$，$\overset{\frown}{A_1A_6}=2\theta_2$，如(圖 4-4)所示。

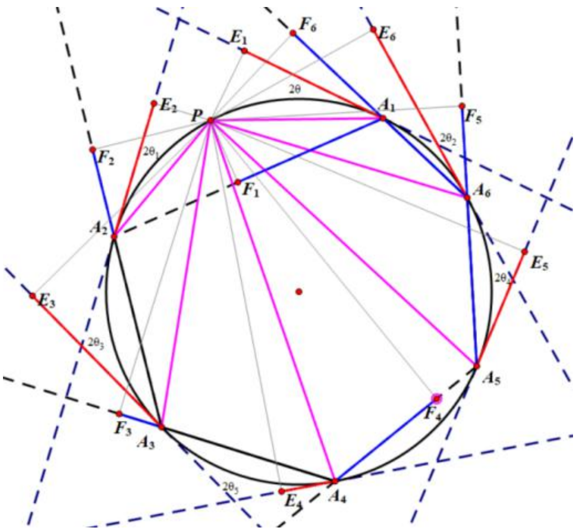


圖 4-4 圓內接六邊形

1. 因為 P 到 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_4A_5}$，$\overline{A_5A_6}$，$\overline{A_1A_6}$ 的投影長度分別為 $\overline{A_1F_1}$，$\overline{A_2F_2}$，$\overline{A_3F_3}$，$\overline{A_4F_4}$，$\overline{A_5F_5}$，$\overline{A_6F_6}$，所以 $\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$，$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta_1+\theta_3)$，

   $\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos\left(\theta_1+\theta_3+\theta_5\right)$，$\overline{A_4F_4}=\overline{A_4P}\cos\left(\theta+\theta_2+\theta_4\right)$，$\overline{A_5F_5}=\overline{A_5P}\cos\left(\theta+\theta_2\right)$，

   $\overline{A_6F_6}=\overline{A_6P}\cos\theta$

2. 因為 P 到 L_1，L_2，L_3，L_4，L_5，L_6 的投影長度分別為 $\overline{A_1E_1}$，$\overline{A_2E_2}$，$\overline{A_3E_3}$，$\overline{A_4E_4}$，$\overline{A_5E_5}$，$\overline{A_6E_6}$，所以 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$，$\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3)$，

   $\overline{A_4E_4}=\overline{A_4P}\cos\left(\theta_1+\theta_3+\theta_5\right)$，$\overline{A_5E_5}=\overline{A_5P}\cos\left(\theta+\theta_2+\theta_4\right)$，$\overline{A_6E_6}=\overline{A_6P}\cos\left(\theta+\theta_2\right)$

3. 由 1 與 2，我們得到 $\dfrac{\overline{A_1F_1}\times\overline{A_2F_2}\times\overline{A_3F_3}\times\overline{A_4F_4}\times\overline{A_5F_5}\times\overline{A_6F_6}}{\overline{A_1E_1}\times\overline{A_2E_2}\times\overline{A_3E_3}\times\overline{A_4E_4}\times\overline{A_5E_5}\times\overline{A_6E_6}}=1$

[定理 4]

> 設圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3...A_n$ ，令點 P 為 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上任一點，過 $A_1A_2A_3...A_n$ 做切線 L_1 ， L_2 ， $L_3 ... L_n$ ，若 P 到 L_1 ，L_2 ，$L_3 ... L_n$ 的投影長度為 $\overline{A_1E_1}$ ，$\overline{A_2E_2}$ ，$\overline{A_3E_3}$ ... $\overline{A_nE_n}$ ，P 到 $\overline{A_1A_2}$ ，$\overline{A_2A_3}$ ，$\overline{A_3A_4}$ ... $\overline{A_{n-1}A_n}$ ，$\overline{A_1A_n}$ 的投影長度為 $\overline{A_1F_1}$ ，$\overline{A_2F_2}$ ，$\overline{A_3F_3}$ ... $\overline{A_nF_n}$ ，則 $\prod_{i=1}^{n}\overline{A_iF_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{A_iE_i}$

<證明>

情形一：若 n 為奇數時

依序設 $\overset{\frown}{PA_1}=2\theta$ ，$\overset{\frown}{A_1A_n}=2\theta_2$ ，$\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}=2\theta_4$ ，$\overset{\frown}{A_{n-2}A_{n-1}}=2\theta_6$ ，......，$\overset{\frown}{A_{\frac{n+3}{2}}A_{\frac{n+5}{2}}}=2\theta_{n-1}$

$\overset{\frown}{PA_2}=2\theta_1$ ，$\overset{\frown}{A_2A_3}=2\theta_3$ ，$\overset{\frown}{A_3A_4}=2\theta_5$ ，$\overset{\frown}{A_4A_5}=2\theta_7$ ，.....，$\overset{\frown}{A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+1}{2}}}=2\theta_{n-2}$

$\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$, $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$

$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta_1+\theta_3)$, $\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$

$\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3+\theta_5)$, $\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3)$

...

$\overline{A_{\frac{n+1}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}}=\overline{A_{\frac{n+1}{2}}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4+...+\theta_{n-1})$

$\overline{A_{\frac{n+3}{2}}E_{\frac{n+3}{2}}}=\overline{A_{\frac{n+3}{2}}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4+...+\theta_{n-1})$

...

$\overline{A_{n-2}F_{n-2}}=\overline{A_{n-2}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$ ，$\overline{A_{n-2}E_{n-2}}=\overline{A_{n-2}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4+\theta_6)$

$\overline{A_{n-1}F_{n-1}}=\overline{A_{n-1}P}\cos(\theta+\theta_2)$ ，$\overline{A_{n-1}E_{n-1}}=\overline{A_{n-1}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$

$\overline{A_nF_n}=\overline{A_nP}\cos\theta$ ，$\overline{A_nE_n}=\overline{A_nP}\cos(\theta+\theta_2)$

情形二：若 n 為偶數時

依序設 $\overparen{PA_1}=2\theta$，$\overparen{A_1A_n}=2\theta_2$，$\overparen{A_{n-1}A_n}=2\theta_4$，$\overparen{A_{n-2}A_{n-1}}=2\theta_6$，......，$\overparen{A_{\frac{n+4}{2}}A_{\frac{n+6}{2}}}=2\theta_{n-2}$

$\overparen{PA_2}=2\theta_1$，$\overparen{A_2A_3}=2\theta_3$，$\overparen{A_3A_4}=2\theta_5$，$\overparen{A_4A_5}=2\theta_7$，.....，$\overparen{A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n+2}{2}}}=2\theta_{n-1}$

$\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$, $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$

$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta_1+\theta_3)$, $\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$

$\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3+\theta_5)$, $\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3)$

...

$\overline{A_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n}{2}}}=\overline{A_{\frac{n}{2}}P}\cos(\theta_1+\theta_3+\theta_5+...+\theta_{n-1})$

$\overline{A_{\frac{n+2}{2}}E_{\frac{n+2}{2}}}=\overline{A_{\frac{n+2}{2}}P}\cos(\theta_1+\theta_3+\theta_5+...+\theta_{n-1})$

...

$\overline{A_{n-2}F_{n-2}}=\overline{A_{n-2}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$，$\overline{A_{n-2}E_{n-2}}=\overline{A_{n-2}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4+\theta_6)$

$\overline{A_{n-1}F_{n-1}}=\overline{A_{n-1}P}\cos(\theta+\theta_2)$，$\overline{A_{n-1}E_{n-1}}=\overline{A_{n-1}P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$

$\overline{A_nF_n}=\overline{A_nP}\cos\theta$，$\overline{A_nE_n}=\overline{A_nP}\cos(\theta+\theta_2)$

伍、結論

一、圓上一點 P 至與 P 點兩個最近的圓內接正多邊形頂點與一個最遠頂點距離的關係

(一)圓內接正奇數多邊形

圓上一點 P 點至鄰近兩點線段和與點 P 至最遠點線段乘以 $2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ 相等

(二)圓內接正偶數多邊形

圓上一點 P 點至最近一點的距離加上次近一點的距離乘以 $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 等於最遠點的距離乘以 $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

二、圓上一點P至圓內接正多邊形各頂點距離的關係

(一)圓內接正奇數多邊形

1.奇數點對應的長度和等於偶數點對應的長度和

(二)圓內接正偶數邊形

1. 若$n \in 2^k$，則無法產生與奇數邊相加相等的組合。

2. 其餘的可利用n的質因數，將與點對應到的邊長分成奇質因數組B，再將B_n依照奇偶數，將奇數組與偶數組相加，發現相等。

3. P點至各奇數點長度的$n-2$次方總和與P點至各偶數點長度的$n-2$次方總和相等。

三、P點至多邊形對角線的垂線及與圓內接多邊形頂點的切線垂線的關係

圓內接多邊形的切線垂線乘積$\frac{n-3}{2}$次方等於對角線垂線乘積

四、圓上一點P在圓內接多邊形邊長的投影長度與過圓內接多邊形頂點切線上的投影長度的關係

圓上任一點P在圓內接多邊形邊長的投影長度與過圓內接多邊形頂點切線上的投影長度相等

陸、參考資料及其他

一、森棚教官的數學題之正三角形的線段定和，科學研習月刊，第 56 卷第 10 期

二、許志農(編)，高中數學第 3 冊第一章三角，龍騰文化

三、陳姿妤與蕭妤真，方「圓」百里,必「定」無敵，嘉義市 58 屆中小學科學展覽，高級中學組

四、黃家禮，幾何明珠，九章出版

【評語】050406

本作品由三部分組成。第一部分是探討圓上一點 P 至圓內接正多邊形各頂點距離的關係。第二部分探討圓上一點 P 至圓內接多邊形對角線的垂線及與過圓內接多邊形頂點的切線垂線距離的關係。第三部分是探討圓上一點 P 在圓內接多邊形邊長的投影長度與過圓內接多邊形頂點切線上的投影長度的關係。第一部分主要是利用托勒密定理；第二部分主要是利用文獻[3](第 58 屆作品)的結果去加以化簡。第二部分主要工具「引理 3-1」「引理 3-2」為兩個基本性質。整份作品，研究動機不足，文獻探討需要加強，數學深度也略嫌不夠。

作品海報

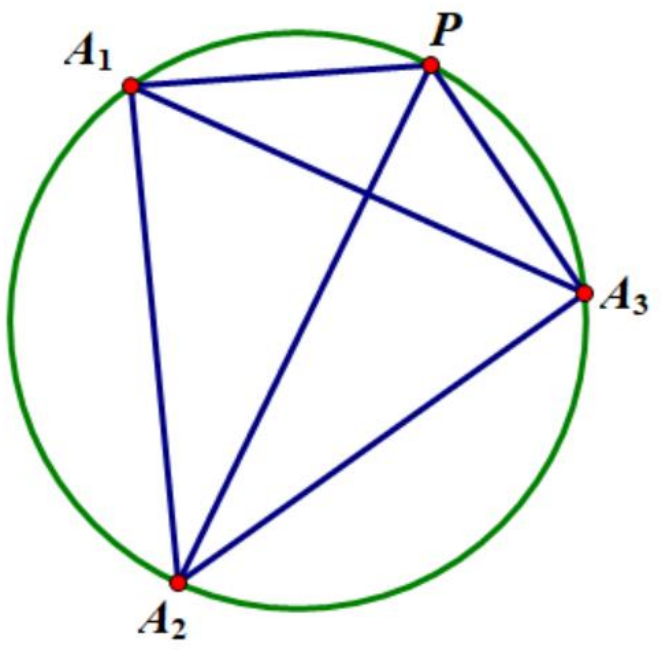
摘要

本研究將從圓內接多邊形出發，分成四部分研究，第一部分試探討圓上任一點至最近兩點和最遠點的關係，第二部分試探討圓上任一點至每一點的關係，第三部分試探討圓上任一點至頂點切線、對角線垂線的關係，第四部分試探討圓上任一點在頂點切線、邊長投影長度的關係。經研究後發現，第一部分的結果成比例，第二部分的結果依照順時針編號時，奇數點的距離和與偶數點的距離和有關係，第三部分的結果有次方的關係，第四部分的結果有相等的關係。

研究動機

我們在閱讀科學演習月刊時，看到了森棚教官的數學題，當中的一個題目為：畫正三角形與外接圓，然後在圓上任取一點，則此點到較遠頂點的距離會等於到較近兩點的距離和。因此我們想研究是否在圓內接正方形，五邊形......會不會有一樣的結果，又或者去探討任一點到圓內接多邊形各頂點的關係，以及延伸到頂點的切線、多邊形對角線，或者是任一點在頂點切線的投影長度和在邊長的投影長度的關係。

研究目的



一、探討圓上一點P至與P點兩個最近的頂點與一個最遠頂點距離的關係。
二、探討圓上一點P至各頂點距離的關係。
三、探討圓上一點P至對角線的垂線及與過頂點的切線垂線距離的關係。
四、探討圓上一點P在邊長的投影長度與過頂點切線上的投影長度的關係。

研究過程或方法

一、圓上一點P至與P點兩個最近的頂點與一個最遠頂點距離的關係

[引理1-1]等腰三角形的情形

設圓內接等腰三角形$A_1A_2A_3$，其中$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=s$，且$\overline{A_1A_3}=l$

令點P為A_1A_3上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_3}=y$，$\overline{PA_2}=z$，

則 $x+y=z\times\left(2\sin\frac{\angle A_1A_2A_3}{2}\right)$ (如圖一)

<證明>

1. 根據托勒密定理，可得$\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_3}+\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}\times\overline{A_1A_3}$
2. 並表示成$x\cdot s+y\cdot s=z\cdot l$，兩邊同除$s$得$x+y=z\cdot\frac{l}{s}$
3. 利用餘弦定理，定義s與l的關係$l^2=2s^2-2s^2\cos\angle A_1A_2A_3$

   化簡後兩邊同除s^2並開根號得$\frac{l}{s}=\sqrt{2(1-\cos\angle A_1A_2A_3)}$
4. 再化簡成$\frac{l}{s}=\sqrt{4\sin^2\frac{\angle A_1A_2A_3}{2}}=2\sin\frac{\angle A_1A_2A_3}{2}$
5. 得證$x+y=z\times\left(2\sin\frac{\angle A_1A_2A_3}{2}\right)$

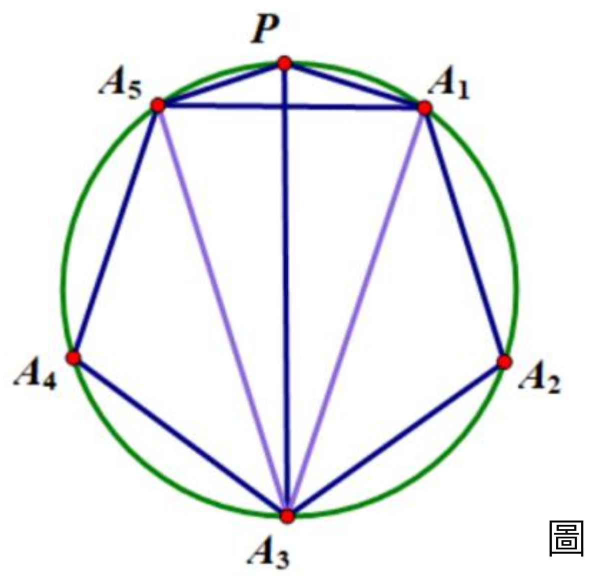
[引理1-2]直角三角形的情形

設圓內接直角三角形$A_1A_2A_3$，且$\angle A_2A_1A_3=90°$，令點P為A_1A_3上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_3}=y$，$\overline{PA_2}=z$，$\overline{A_2A_3}=s$，

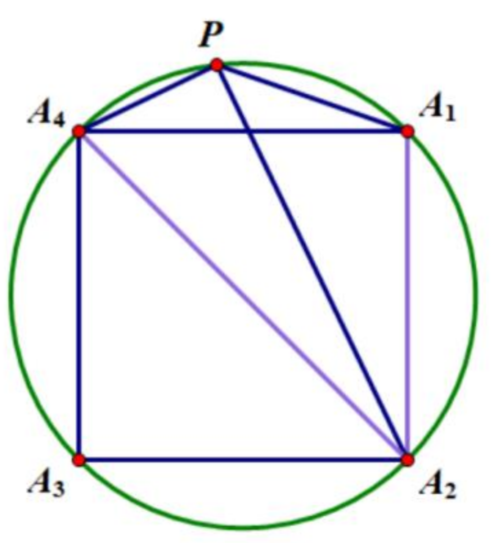
則$x+y\times\cos\angle A_1A_2A_3=z\times\sin\angle A_1A_2A_3$ (如圖二)

<證明>

1. 根據托勒密定理，可得$\overline{PA_1}\times\overline{A_2A_3}+\overline{PA_3}\times\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}\times\overline{A_1A_3}$
2. 並表示成$x\cdot s+y\cdot s\times\cos\angle A_1A_2A_3=z\cdot s\times\sin\angle A_1A_2A_3$
3. 化簡後得到$x+y\times\cos\angle A_1A_2A_3=z\times\sin\angle A_1A_2A_3$



圖一



圖二

[定理1-1] 圓內接正奇數多邊形

設圓內接正奇數多邊形$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$的邊長為l，令點P為A_1A_n上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_n}=y$，$\overline{PA_{\frac{n+1}{2}}}=z$，$\overline{A_1A_{\frac{n+1}{2}}}=s$，則$x+y=z\times(2\sin\frac{\pi}{2n})$。

<證明>

1. 因為$\Delta A_1A_{\frac{n+1}{2}}A_n$為等腰，由引理1-1得$x+y=z\times\left(2\sin\frac{\angle A_1A_{\frac{n+1}{2}}A_n}{2}\right)$
2. 將$\angle A_1A_{\frac{n+1}{2}}A_n=\frac{\pi}{n}$代入1.，我們得到$x+y=z\times(2\sin\frac{\pi}{2n})$

[定理1-2] 圓內接正偶數多邊形

設圓內接正偶數多邊形$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$的邊長為l，令點P為A_1A_n上任一點，若$\overline{PA_1}=x$，$\overline{PA_n}=y$，$\overline{PA_{\frac{n}{2}}}=z$，$\overline{A_1A_{\frac{n}{2}}}=s$，$\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n=\theta$且$x>y$，則$x+y\times\cos\theta=z\times\sin\theta$。

<證明>

1. 因為$\Delta A_1A_{\frac{n}{2}}A_n$為直角三角形，由引理1-2得$x+y\times\cos\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n=z\times\sin\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n$
2. 再將$\angle A_1A_{\frac{n}{2}}A_n=\theta$代入，我們得到$x+y\times\cos\theta=z\times\sin\theta$

二、圓上一點P至各頂點距離的關係

[引理2-1](陳姿妤與蕭妤真[3])

設圓內接正奇數多邊形$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$，建構於複數平面圓心為(0,0)的單位圓上，不失一般性，將P點落在A_1A_n上，

則 $\overline{PA_k}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(k-1)}{n}\pi\right),k=0,1,2,...,n-1$

[定理2-1] 圓內接正奇數多邊形

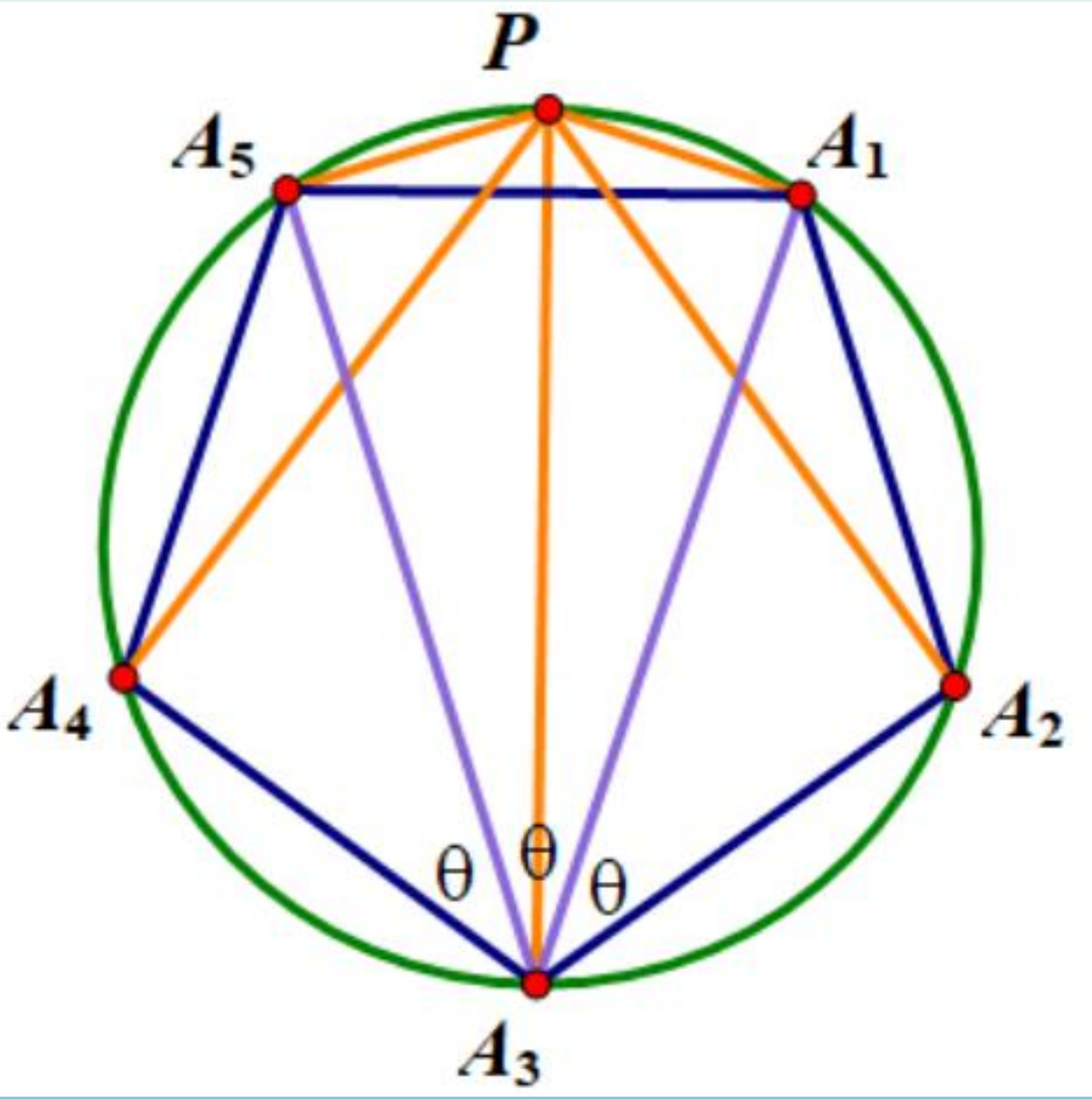
設圓內接正奇數多邊形$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$，若點P為A_1A_n上任一點，則$\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}+...+\overline{PA_n}=\overline{PA_2}+\overline{PA_4}+...+\overline{PA_{n-1}}$。

1. 以五邊形為例
2. 利用引理1-1可得$\overline{PA_1}+\overline{PA_5}=\overline{PA_3}\times(2\sin\theta)$，

   $\overline{PA_2}+\overline{PA_4}=\overline{PA_3}\times(2\sin3\theta)$
3. $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}-\overline{PA_2}-\overline{PA_4}$

   $=\overline{PA_3}+\overline{PA_3}\times2\sin\theta-\overline{PA_3}\times2\sin3\theta$

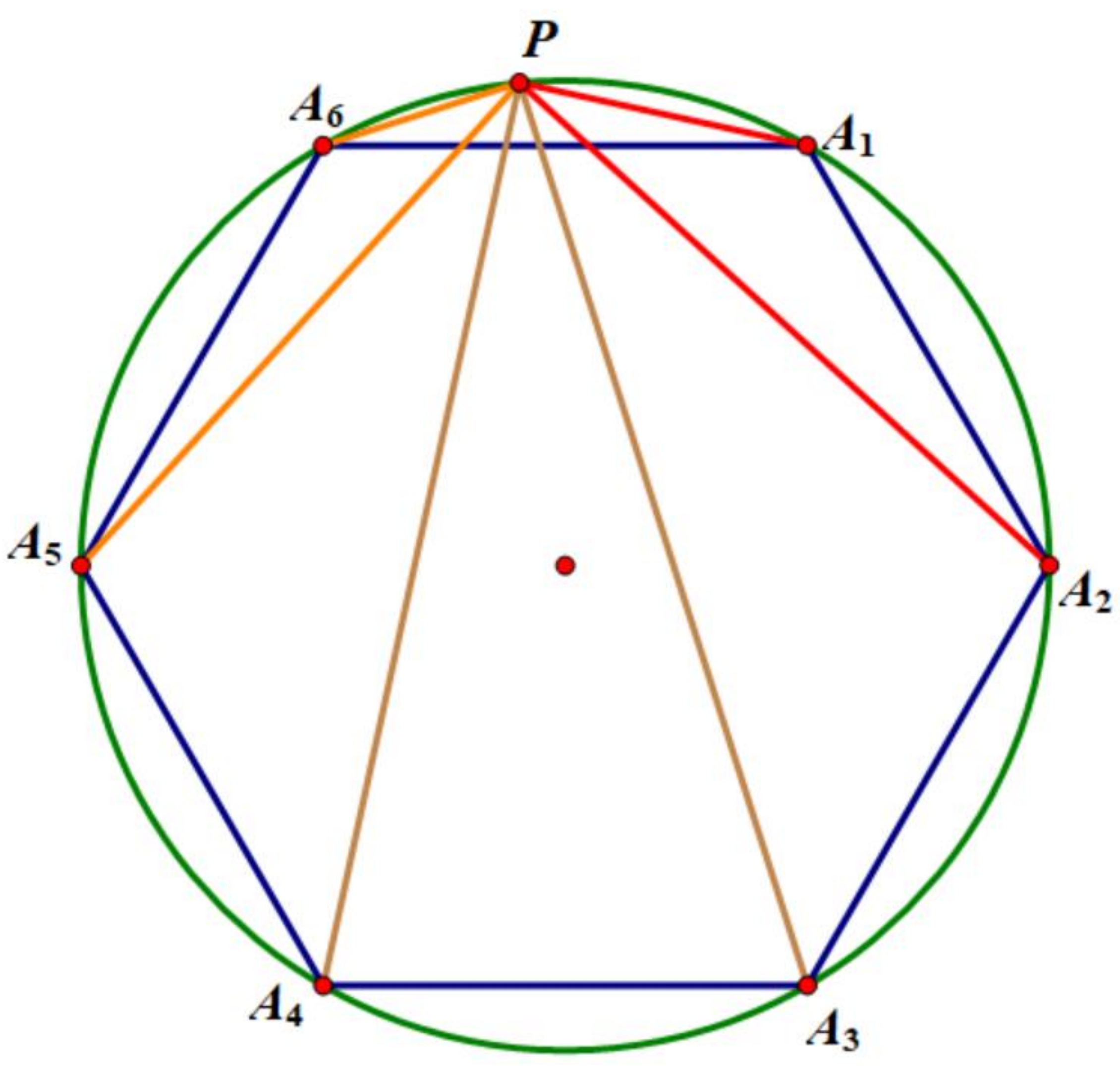
   $=\overline{PA_3}\left[1+2(\sin\theta-\sin3\theta)\right]$
4. $\sin\theta-\sin3\theta=-\frac{1}{2}$代入可得$\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}-\overline{PA_2}-\overline{PA_4}=0$
5. 即$\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\overline{PA_5}=\overline{PA_2}+\overline{PA_4}$



[定理2-2] 圓內接正偶數多邊形

設圓內接正偶數多邊形 $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$，若點P為A_1A_n上任一點，B_i為依序且個數相同的多個線段之和，則 $B_1+B_3+...+B_k=B_2+B_4+...B_{k-1}$

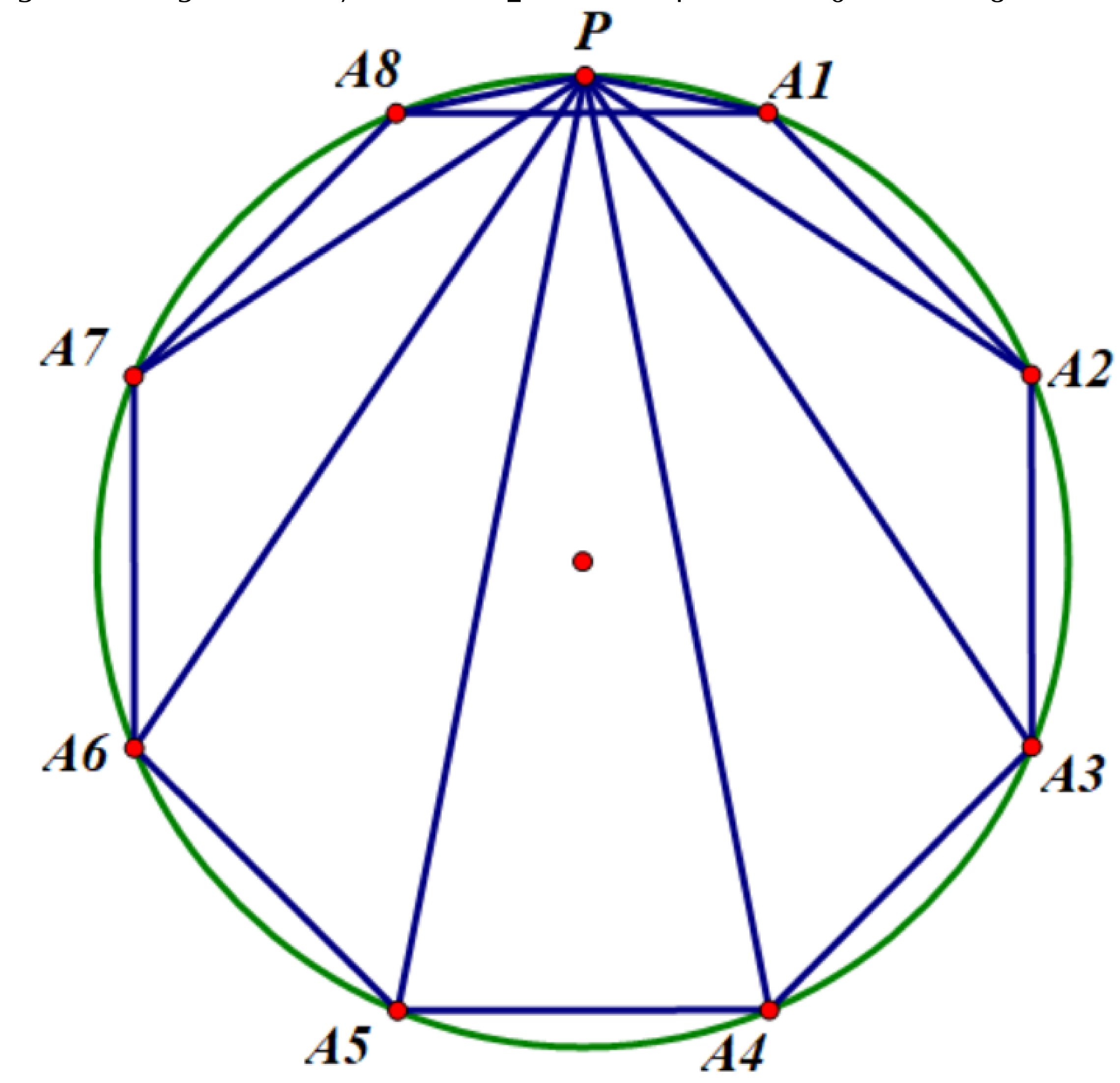
1. 以六邊形為例
2. 將六個線段做分組可得$B_1=\overline{PA_1}+\overline{PA_2}$，$B_2=\overline{PA_3}+\overline{PA_4}$，$B_3=\overline{PA_5}+\overline{PA_6}$
3. 正三角形有一特性，$\overline{PA_1}+\overline{PA_5}=\overline{PA_3}$，$\overline{PA_2}+\overline{PA_6}=\overline{PA_4}$
4. 將兩個式子相加可得$\overline{PA_1}+\overline{PA_2}+\overline{PA_5}+\overline{PA_6}=\overline{PA_3}+\overline{PA_4}$
5. 即 $B_1+B_3=B_2$，故得證



[定理2-3] 圓內接正偶數多邊形

設圓內接正偶數多邊形$A_1A_2A_3...A_{n+1}A_{n+2}$，若點$P$為$A_1A_{n+2}$上任一點
則$\overline{PA_1}^n+\overline{PA_3}^n+...+\overline{PA_{n+1}}^n=\overline{PA_2}^n+\overline{PA_4}^n+...+\overline{PA_{n+2}}^n$

1. 以八邊形為例
2. 利用引理2-1可得$\overline{PA_k}^6=2\sin^6\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(k-1)}{8}\pi\right), k=0,1,2,3,4,5,6,7$
3. $\overline{PA_1}^6+\overline{PA_3}^6+\overline{PA_5}^6+\overline{PA_7}^6=80$
4. $\overline{PA_2}^6+\overline{PA_4}^6+\overline{PA_6}^6+\overline{PA_8}^6=80$
5. 即$\overline{PA_1}^6+\overline{PA_3}^6+\overline{PA_5}^6+\overline{PA_7}^6=\overline{PA_2}^6+\overline{PA_4}^6+\overline{PA_6}^6+\overline{PA_8}^6$



三、圓上一點P至圓內接多邊形對角線的垂線及與過圓內接多邊形頂點的切線垂線距離的關係

方法一：

(一) 四邊形的情形

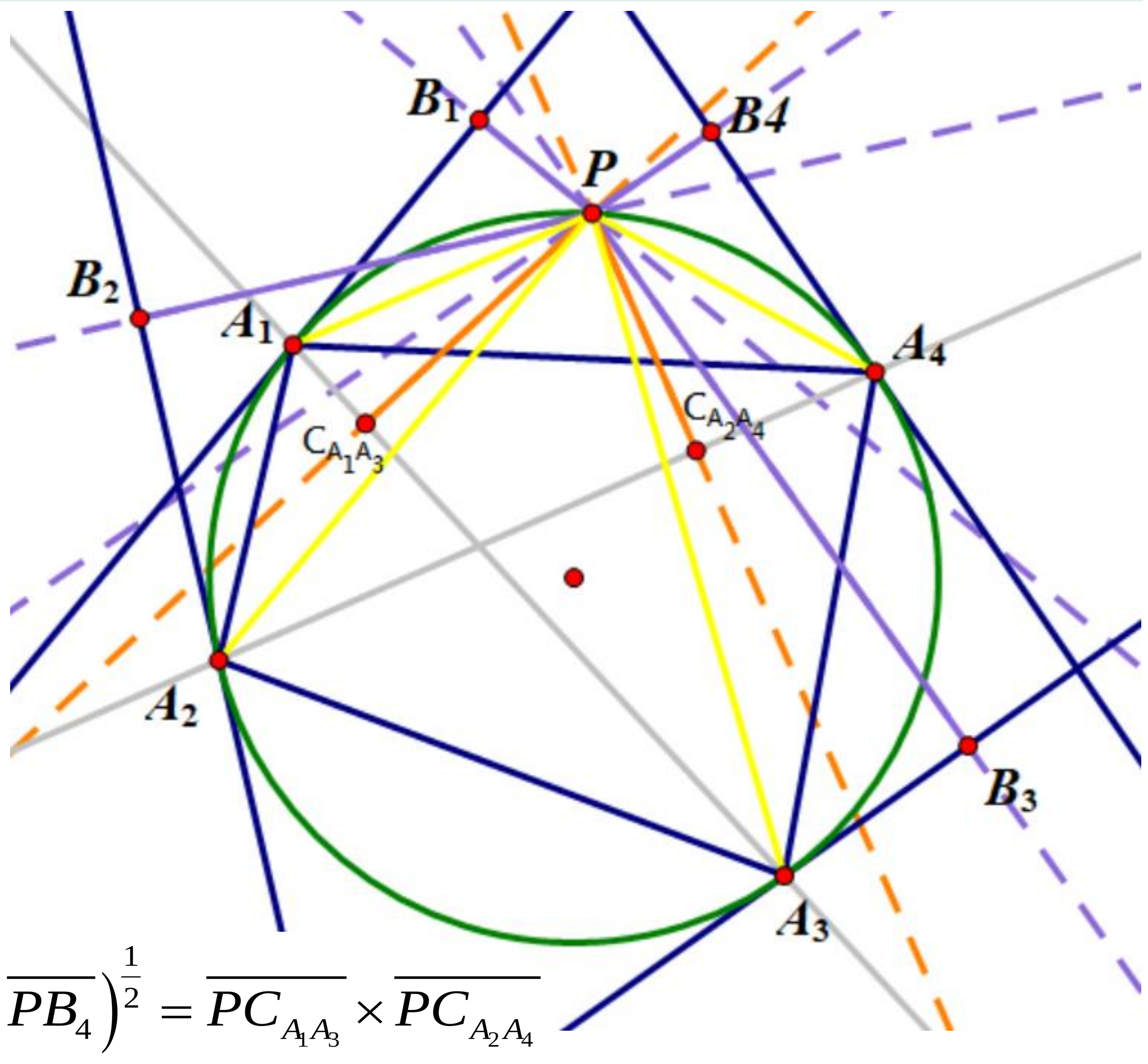
設圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$，若點 P為弧上任一點，過$A_1A_2A_3A_4$做切線$L_1L_2L_3L_4$，P投影於 $L_1L_2L_3L_4$的點稱為$B_1B_2B_3B_4$，及P投影於對角線的點稱為$C_{A_1A_3}(C_{A_3A_1}), C_{A_2A_4}(C_{A_4A_2})$

$\Delta PA_1B_1 \sim \Delta PA_3C_{A_1A_3}$

$\Delta PA_2B_2 \sim \Delta PA_4C_{A_2A_4}$

$\Delta PA_3B_3 \sim \Delta PA_1C_{A_3A_1}$

$\Delta PA_4B_4 \sim \Delta PA_2C_{A_4A_2}$



$$\Rightarrow\left(\overline{PB_1}\times\overline{PB_2}\times\overline{PB_3}\times\overline{PB_4}\right)^{\frac{1}{2}}=\overline{PC_{A_1A_3}}\times\overline{PC_{A_2A_4}}$$

(二) 五邊形的情形

設圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，若點P 為弧上任一點，過$A_1A_2A_3A_4A_5$做切線 $L_1L_2L_3L_4L_5$，P投影於$L_1L_2L_3L_4L_5$的點稱為$B_1B_2B_3B_4B_5$，及P投影於對角線的點稱為$C_{A_1A_3}(C_{A_3A_1}), C_{A_1A_4}(C_{A_4A_1}), C_{A_2A_4}(C_{A_4A_2}), C_{A_2A_5}(C_{A_5A_2}), C_{A_3A_5}(C_{A_5A_3})$

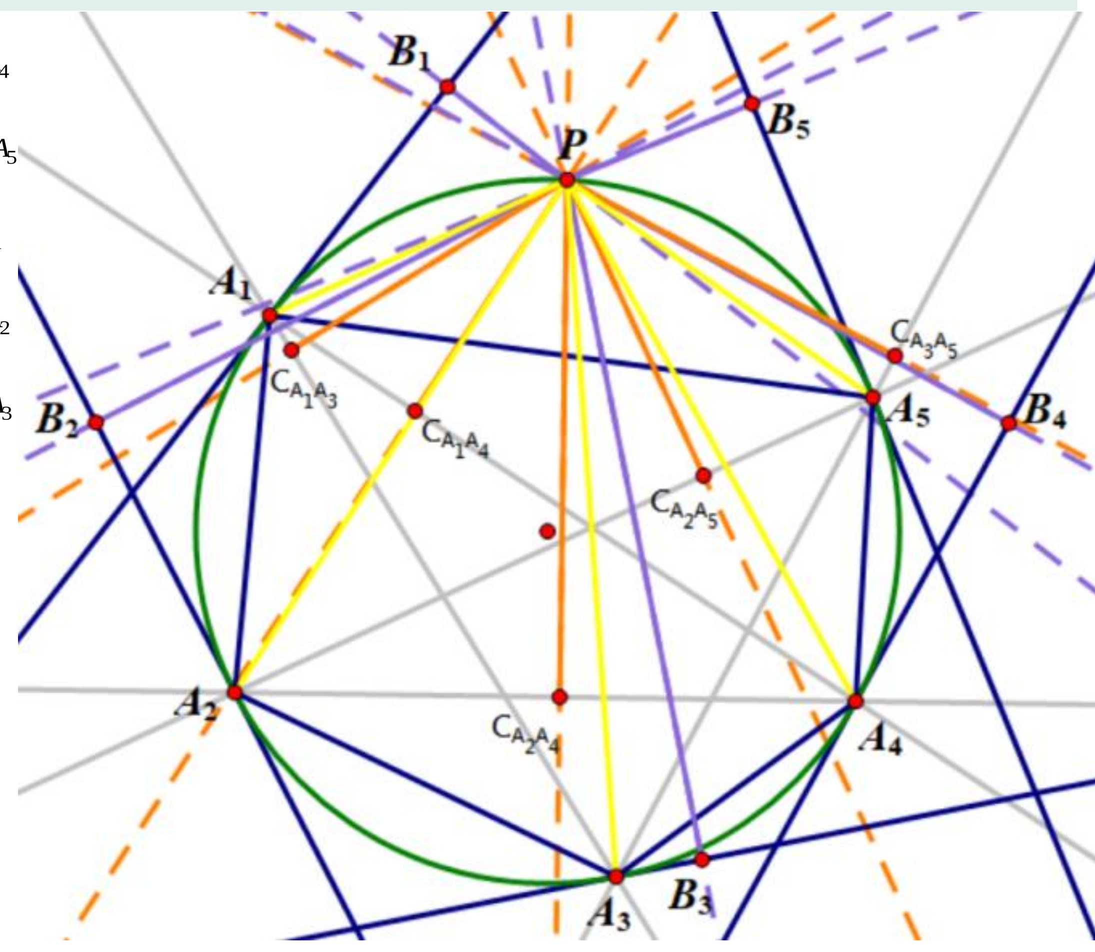
$\Delta PA_1B_1 \sim \Delta PA_3C_{A_1A_3} \sim \Delta PA_4C_{A_1A_4}$

$\Delta PA_2B_2 \sim \Delta PA_4C_{A_2A_4} \sim \Delta PA_5C_{A_2A_5}$

$\Delta PA_3B_3 \sim \Delta PA_5C_{A_3A_5} \sim \Delta PA_1C_{A_3A_1}$

$\Delta PA_4B_4 \sim \Delta PA_1C_{A_4A_1} \sim \Delta PA_2C_{A_4A_2}$

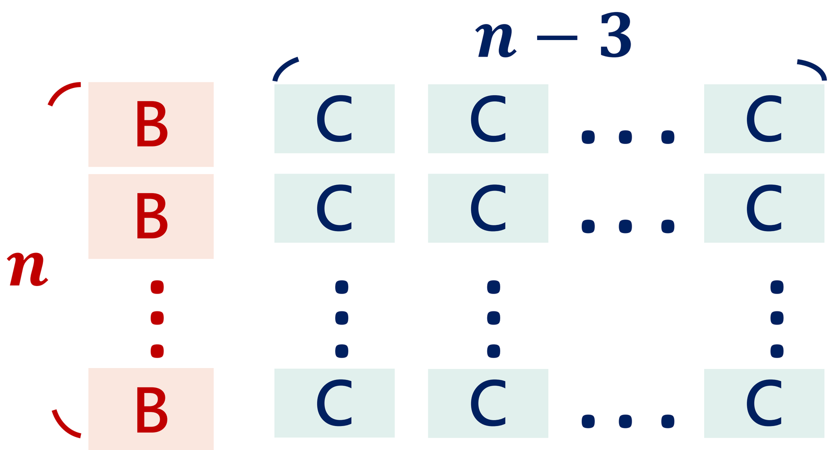
$\Delta PA_5B_5 \sim \Delta PA_2C_{A_5A_2} \sim \Delta PA_3C_{A_5A_3}$



$$\Rightarrow\overline{PB_1}\times\overline{PB_2}\times\overline{PB_3}\times\overline{PB_4}\times\overline{PB_5}=\overline{PC_{A_1A_3}}\times\overline{PC_{A_1A_4}}\times\overline{PC_{A_2A_4}}\times\overline{PC_{A_2A_5}}\times\overline{PC_{A_3A_5}}$$

[定理3-1]

設圓內接n邊形$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$，若點P為弧上任一點，過A_i做切線L_i，P投影於L_i的點稱為B_i，及P投影於對角線的點稱為$C_{A_iA_j}\left(C_{A_jA_i}\right)$，其中$i,j=1,2,3,...,n$，$|i-j|\neq 0,1,(n-1)$，$i\neq j$，則$\left(\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}\right)^{\frac{n-3}{2}}=\overline{PC_{A_1A_3}}\times\overline{PC_{A_1A_4}}\times\overline{PC_{A_1A_5}}\times...\times\overline{PC_{A_{n-2}A_n}}$



※$n-3$是因為每點能連接的對角線為$n-3$條

$$\Delta PA_iB_i \sim \Delta PA_jC_{A_iA_j} \sim ... \sim \Delta PA_kC_{A_iA_k}$$

規則：

$|i-j|\neq 0,1,(n-1),\ |i-k|\neq 0,1,(n-1),\ k\neq j$

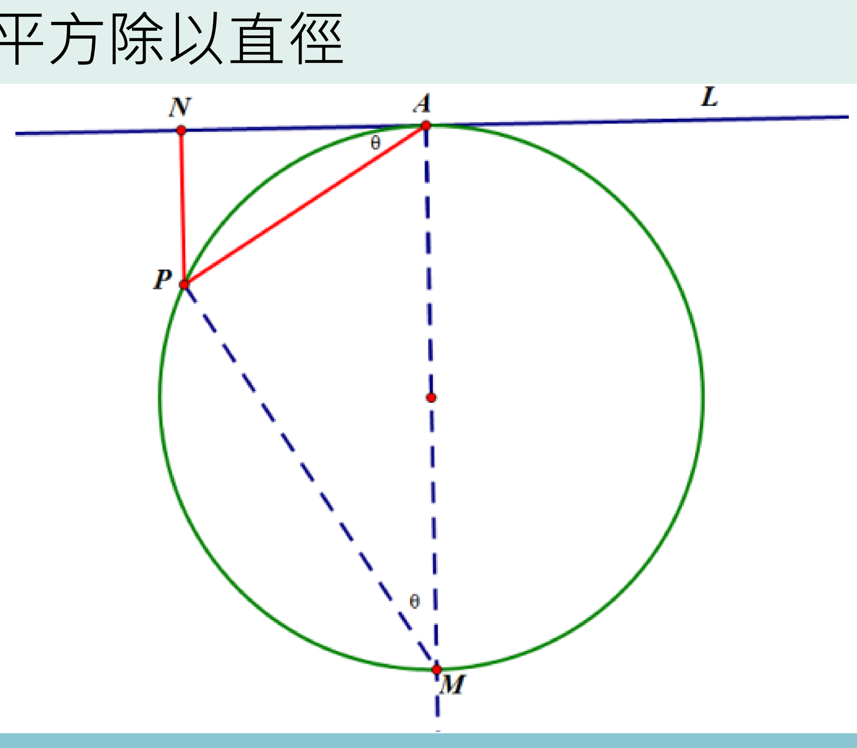
$$\therefore\left(\prod_{i=1}^{n}\overline{PB_i}\right)^{\frac{n-3}{2}}=\overline{PC_{A_1A_3}}\times\overline{PC_{A_1A_4}}\times\overline{PC_{A_1A_5}}\times...\times\overline{PC_{A_{n-2}A_n}}$$

方法二：

[引理3-1]

在半徑為R的圓上取一點 A，過 A點做切線L，若 P 為圓上任一點
則P到L的距離等於P到A的距離平方除以直徑

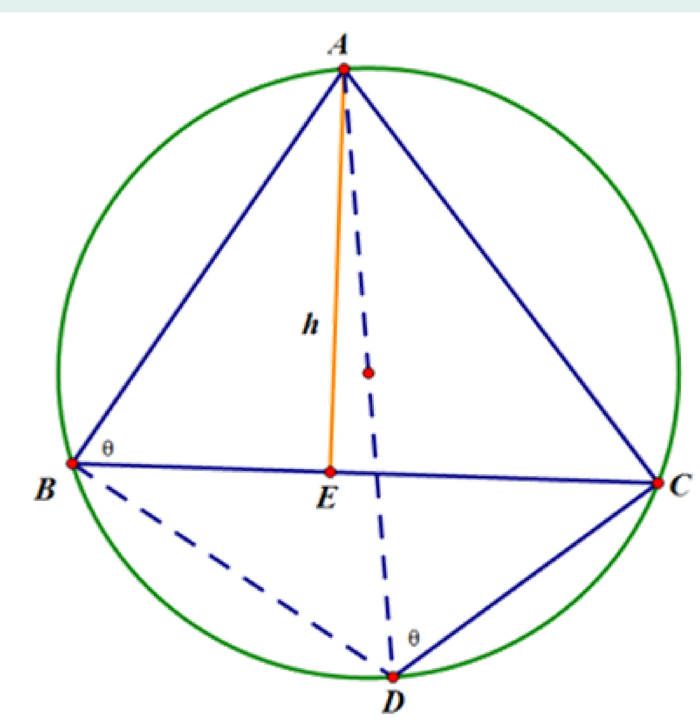
$$d(P,L)=\frac{d(P,A)^2}{2R}$$



[引理3-2]

三角形一邊上的高與外接圓直徑的乘積等於另兩邊的乘積

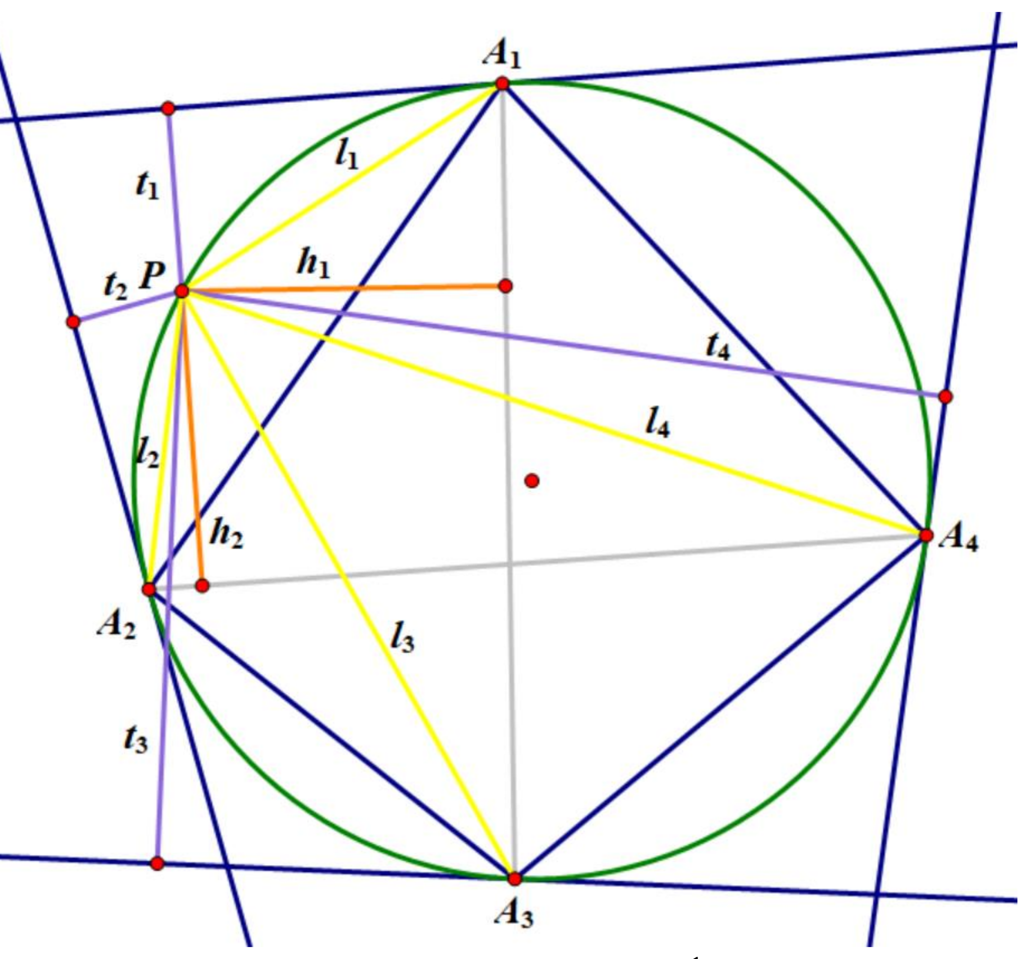
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=2Rh$$



[定理3-2]

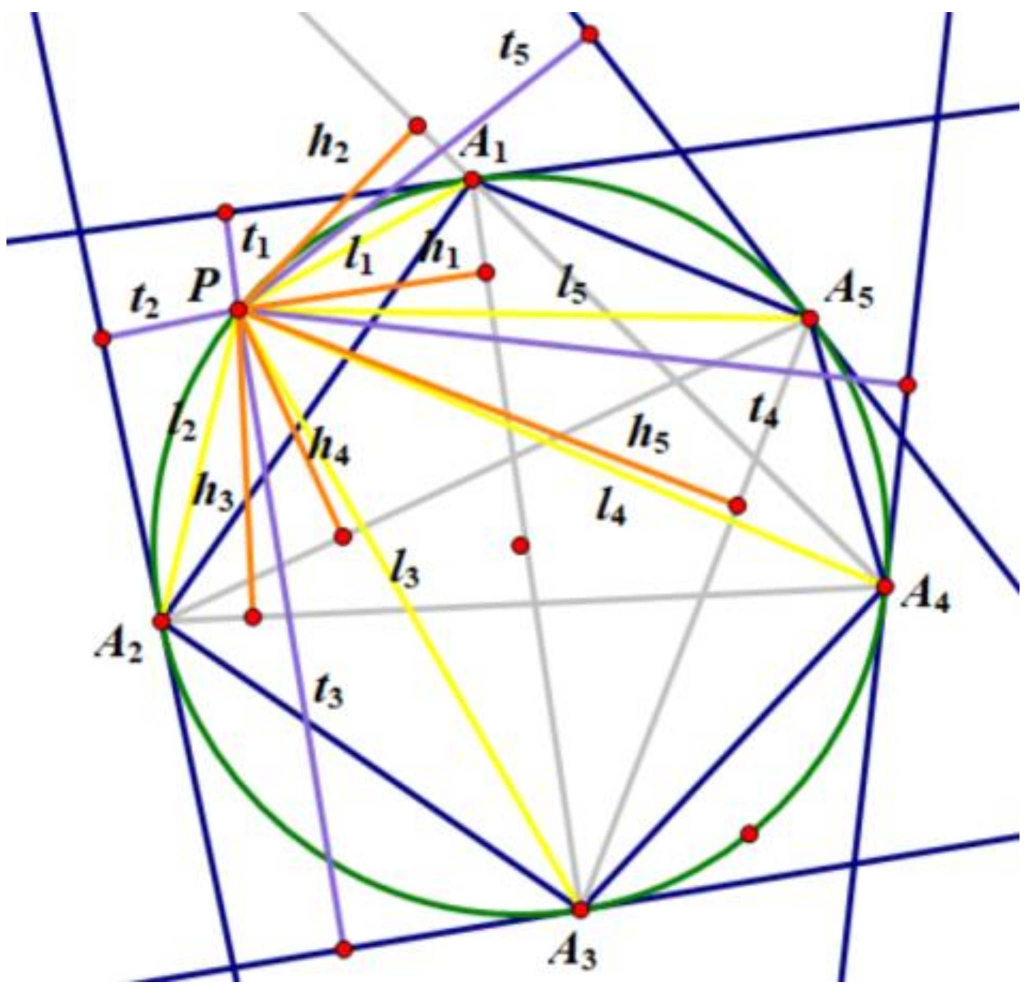
設圓內接多邊形各頂點為 $A_1A_2A_3\ldots A_n$，P 點至各頂點切線的距離為 $t_1,t_2,t_3\ldots t_n$，P 點至各對角線的距離為 $h_1,h_2,h_3\ldots h_{\frac{n(n-3)}{2}}$，且 P 點到各頂點的距離為 $l_1,l_2,l_3\ldots l_n$，則 $\prod_{i=1}^{\frac{n(n-3)}{2}} h_i=\left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{\frac{n-3}{2}}$

(一) 四邊形的情形



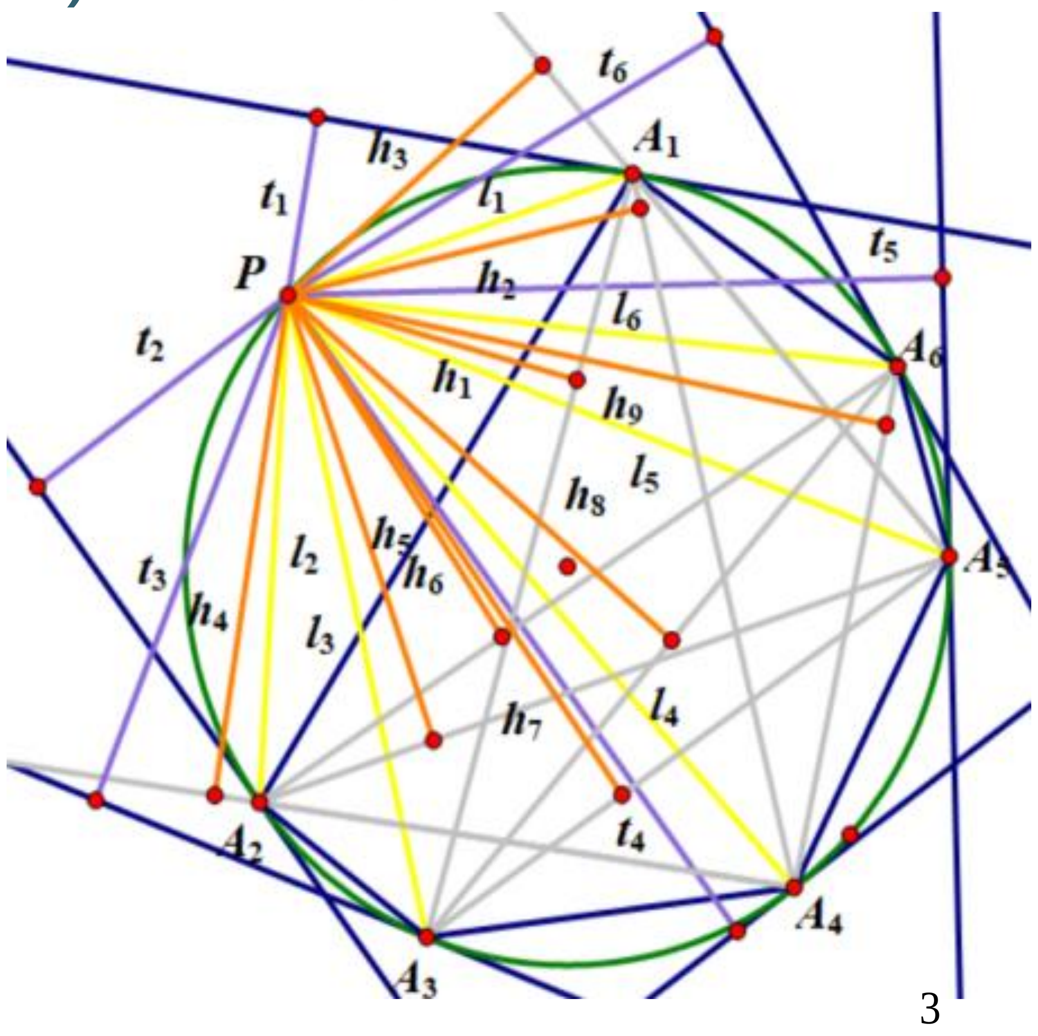
$$h_1h_2=(t_1t_2t_3t_4)^{\frac{1}{2}}$$

(二) 五邊形的情形



$$h_1h_2h_3h_4h_5=t_1t_2t_3t_4t_5$$

(三) 六邊形的情形



$$h_1h_2h_3h_4h_5h_6h_7h_8h_9=(t_1t_2t_3t_4t_5t_6)^{\frac{3}{2}}$$

四 、圓上一點P在圓內接多邊形邊長的投影長度與過圓內接多邊形頂點切線上的投影長度的關係

[定理4]

設圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_n$，令點 P 為 A_1A_2 上任一點，過 $A_1,A_2,A_3\ldots A_n$ 作切線 $L_1,L_2,L_3\ldots L_n$，若 P 到 $L_1,L_2,L_3\ldots L_n$ 的投影長度為 $\overline{A_1E_1},\overline{A_2E_2}\ldots\overline{A_nE_n}$，$P$ 到 $\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3}\ldots\overline{A_{n-1}A_n},\overline{A_1A_n}$ 的投影長度為 $\overline{A_1F_1},\overline{A_2F_2}\ldots\overline{A_nF_n}$，則 $\prod_{i=1}^{n}\overline{A_iF_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{A_iE_i}$

(一) 五邊形的情形

依序設 $PA_1=2\theta$，$A_1A_5=2\theta_2$，$A_4A_5=2\theta_4$，$PA_2=2\theta_1$，$A_2A_3=2\theta_3$

$\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$ $\quad$ $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$

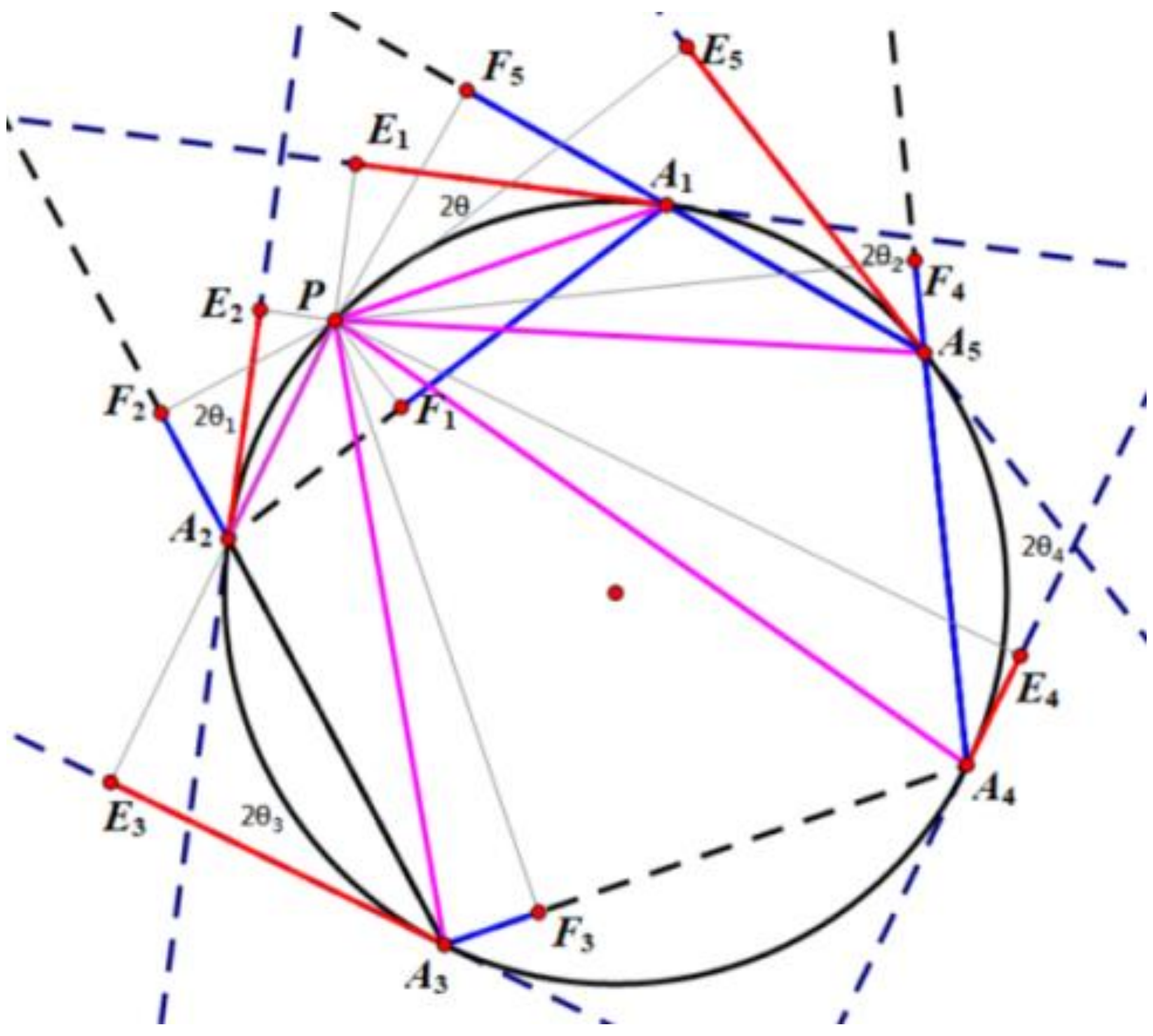
$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta_1+\theta_3)$ $\quad$ $\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$

$\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$ $\quad$ $\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3)$

$\overline{A_4F_4}=\overline{A_4P}\cos(\theta+\theta_2)$ $\quad$ $\overline{A_4E_4}=\overline{A_4P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$

$\overline{A_5F_5}=\overline{A_5P}\cos\theta$ $\quad$ $\overline{A_5E_5}=\overline{A_5P}\cos(\theta+\theta_2)$

$\Rightarrow \overline{A_1F_1}\times\overline{A_2F_2}\times\ldots\times\overline{A_5F_5}=\overline{A_1E_1}\times\overline{A_2E_2}\times\ldots\times\overline{A_5E_5}$



(二) 六邊形的情形

依序設 $PA_1=2\theta$，$A_1A_6=2\theta_2$，$A_4A_5=2\theta_4$，$PA_2=2\theta_1$，$A_2A_3=2\theta_3$，$A_3A_4=2\theta_5$

$\overline{A_1F_1}=\overline{A_1P}\cos\theta_1$ $\quad$ $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1P}\cos\theta$

$\overline{A_2F_2}=\overline{A_2P}\cos(\theta_1+\theta_3)$ $\quad$ $\overline{A_2E_2}=\overline{A_2P}\cos\theta_1$

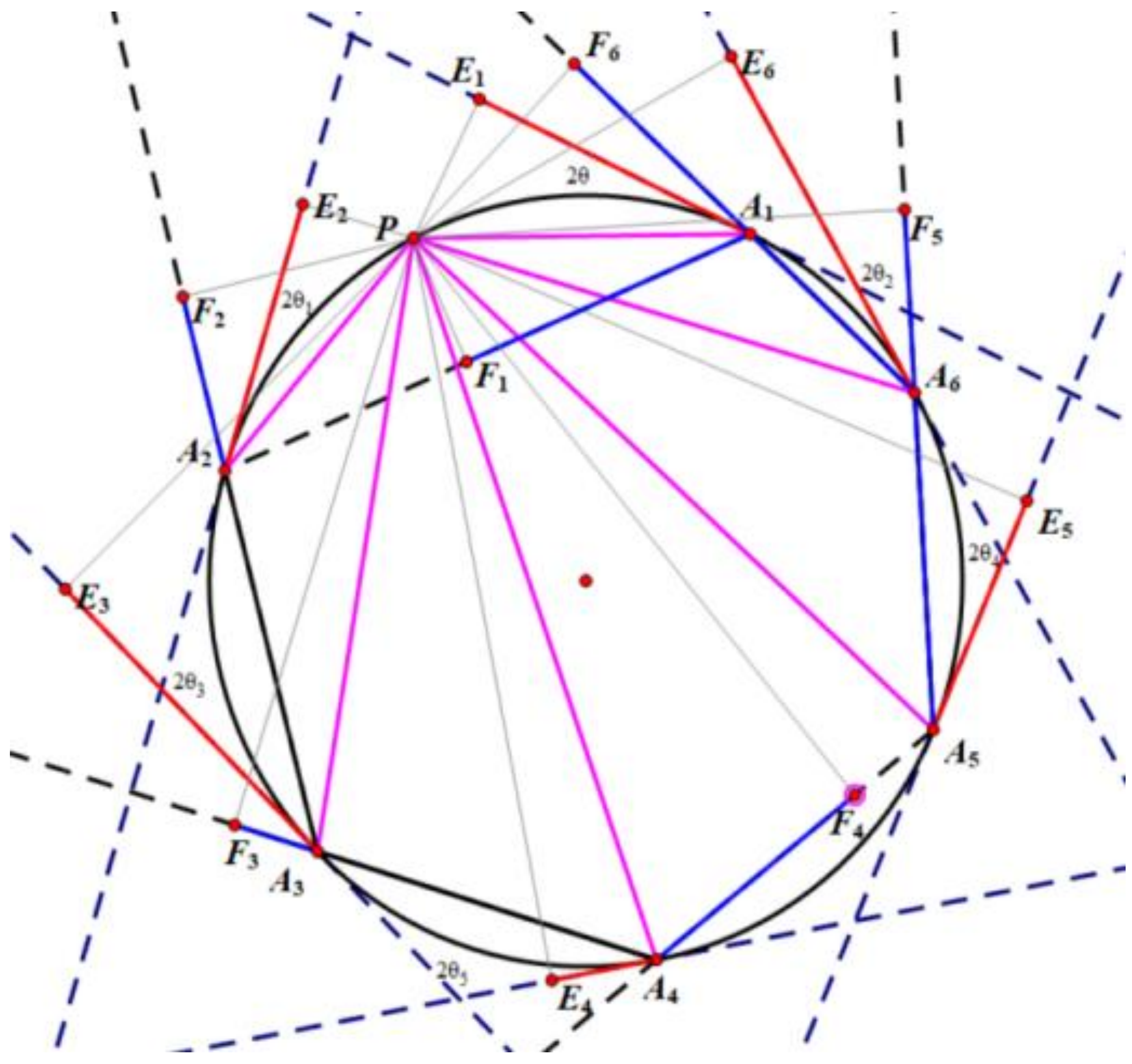
$\overline{A_3F_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3+\theta_5)$ $\quad$ $\overline{A_3E_3}=\overline{A_3P}\cos(\theta_1+\theta_3)$

$\overline{A_4F_4}=\overline{A_4P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$ $\quad$ $\overline{A_4E_4}=\overline{A_4P}\cos(\theta_1+\theta_3+\theta_5)$

$\overline{A_5F_5}=\overline{A_5P}\cos(\theta+\theta_2)$ $\quad$ $\overline{A_5E_5}=\overline{A_5P}\cos(\theta+\theta_2+\theta_4)$

$\overline{A_6F_6}=\overline{A_6P}\cos\theta$ $\quad$ $\overline{A_6E_6}=\overline{A_6P}\cos(\theta+\theta_2)$

$\Rightarrow \overline{A_1F_1}\times\overline{A_2F_2}\times\ldots\times\overline{A_6F_6}=\overline{A_1E_1}\times\overline{A_2E_2}\times\ldots\times\overline{A_6E_6}$



結論

一、圓上一點P至與點P兩個最近的頂點與一個最遠頂點距離的關係

1. 圓內接正奇數多邊形：鄰近兩點線段和與最遠點線段乘以 $2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ 相等
2. 圓內接正偶數多邊形：次近一點的距離加最近點的距離乘以 $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 等於最遠點的距離乘以 $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

二、圓上一點P至各頂點距離的關係

(一)圓內接正奇數多邊形

1. 奇數點對應的長度和等於偶數點對應的長度和

(二)圓內接正偶數多邊形

1. 除了 $n\in 2^k$ 以外，其餘的可利用 n 的質因數，將與點對應到的邊長分成奇質因數組 B，再將 B_i 依照奇偶數排列，發現奇數組的和與偶數組的和相等。
2. P 點至各奇數點長度的 $n-2$ 次方總和與 P 點至各偶數點長度的 $n-2$ 次方總和相等

三、圓上一點P至切線垂線乘積的 $\frac{n-3}{2}$ 次方等於對角線垂線乘積

四、圓上一點P在邊長的投影長度乘積等於在頂點切線上的投影長度乘積

參考資料

一、森棚教官的數學題之正三角形的線段定和，科學研習月刊，第56卷第10期

二、許志農(編)，高中數學第3冊第一章三角，龍騰文化

三、陳姿妤與蕭妤真，方「圓」百里,必「定」無敵，嘉義市58屆中小學科學展覽，高級中學組

四、黃家禮，幾何明珠，九章出版