中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050404

擺脫佩爾方程之另解圖形數

學校名稱：臺中市私立弘文高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃聖傑 高二 江昱瑾	廖寶貴

關鍵詞：圖形數、佩爾方程

摘　　要

多重角數之間的關係，在眾多文獻中已然有了答案，但尋求答案的過程多半利用繁雜的遞迴關係式或者利用「佩爾方程式」。然而無論任何一種，皆非高中課程所能涉及，如何突破此一關卡，利用高中所學觀察多角數之間的關係，是本研究的主要目的。

意外的是，我們發現利用矩陣解決多角數關係的不定方程，除了可以擺脫文獻中使用佩爾方程式通解的方法，而且我們所需的條件更簡便容易，不需要利用多個初始條件，僅高中所學的矩陣知識，我們可以順利的利用多重角數的一組顯然解$(s,t)=(1,1)$，以及基本矩陣，找到一條簡便、且令人容易理解與計算的道路。

壹、　研究動機

在課本數列級數單元的補充教材中看到了有關「圖形數」的觀念與各種不同圖形所衍生出來的通式。然而，在簡單的觀念中，卻有一個數字『36』吸引著我。因為它不僅僅是 6 的平方，即四角數(平方數)的其中之一，它更是三角數的其中一員。因此，我希望找到一些數，一些有「多重身分」的數，且試著找尋這些數字間有著甚麼樣的規律…

貳、　研究目的

一、　尋找$3-4$角數(同時是三角數又是四角數的數)的模式？

二、　再求$4-5$角數、$4-6$角數、$3-5$角數等模式。

三、　如何利用基本解$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$與 $Ax^2-By^2=1$所產生的基本矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，更快速的求得其他組解。

四、　$3-k$角數、$4-k$角數、$5-k$角數、$p-k$角數，基本解與基本矩陣的一般化。

五、　是否依舊能利用矩陣解決遺漏解的部分。

六、　將所得結果與 matlab 程式軟體比對數據是否正確。

參、　研究設備及器材

一、筆、紙、電腦、excel、Matlab

肆、　文獻探討

一、　「數形合一」

我們透過此篇文獻，了解計算多重角數可以利用佩爾方程的通解(遞迴式)來解決問題，但是文中只用遞迴式描述通解，若想要直接找出一般式有一定的困難，且在過程中，多利用多個初始條件加上基本解來解決問題。但是在高中階段並未談到此種不定方程的解法,對於不了解這個不定方程的我們,希望可以透過高中所學來解決問題，最終我們選擇正在學習中的矩陣來看多重角數的問題，不僅在過程中，我們發現能描述成類佩爾方程形式的不定方程可以利用基本解直接生成基本矩陣，且發現，利用矩陣解決多重角數的問題，只需要基本矩陣和基本解就可以迅速的求得其他解，同時我們也利用佩爾方程的結果驗證用我們的方法可以推出 3-4 角數的所有解，而其他的多重角數我們則利用 Matleb 的演算方式輔助驗證。

二、　「初探多邊形數」、「續探多邊形數」

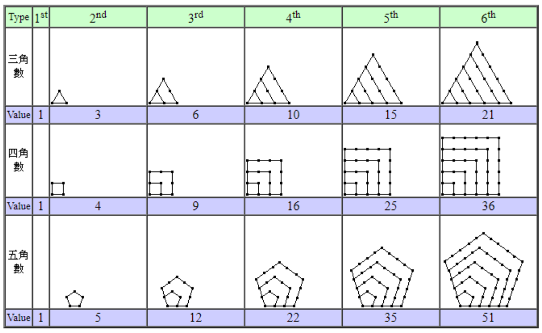
這兩篇文獻，則是利用遞迴關係所產生的矩陣解決佩爾方程的問題。與我們利用矩陣解決二次不定方程的方法不謀而合。只是，我們的解法已經不盡然侷限在佩爾方程的正整數解的條件中，且文中提到在找尋某些多角數時會需要使用兩組基本解，然而在我們的研究中，已經將多角數的求法做了一般化的整理，無論計算任何一種多角數的關係，我們都只需要求得基本解和基本矩陣即可推斷下一個的部分，且基本矩陣的部分更是利用 $Ax^2-By^2=1$的係數直接快速求出，不僅減少了條件需求，更減少了繁瑣運算。

三、　「特殊形 pell 方程式之矩陣解研究」

此篇文獻透過主方程式和附帶方程式的聯立解出$4-p$角數的解，文中也出現部分可以用矩陣表達所有解及部分無法用矩陣解的不定方程，而我們的研究則是直接整理多重角數的關係式，而且除了不再侷限在佩爾方程的形式中之外，我們也順利地利用矩陣來解決多重角數的問題，且利用我們的基本矩陣和基本解，我們可以很直接的解決此篇文章中提到$4-12$角數的漏解問題，利用矩陣，也是可以找到問題的解答，解決漏解問題。

伍、　研究方法

一、尋找多角數的通式



圖取自昌爸工作坊 圖形數

1. 定義：如上圖，邊長為 $\mathrm{n}-1$ 的正K邊形陣列數稱之為第 n 個K角數。

2. 第n個三角數 $=1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=\frac{n(n+1)}{2}$

3. 第n個四角數(平方數) $=1+3+5+\cdots+(2\mathrm{n}-1)=\frac{n(2n-0)}{2}$

4. 第n個五角數 $=1+4+7+\cdots+(3\mathrm{n}-2)=\frac{n(1+3n-2)}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$

5. 第n個K角數為一「等差級數」，公差為$(\mathrm{k}-2)$，項數共n項，所以

   第n個K角數 $=1+(\mathrm{k}-1)+\cdots+(1+(\mathrm{n}-1)(\mathrm{k}-2))=\dfrac{n(2+(\mathrm{n}-1)(\mathrm{k}-2))}{2}$

6. 佩爾方程$x^2-dy^2=1$的基本解：
   佩爾方程$x^2-dy^2=1$的正整數解一定存在且有無限多組，若最小正整數解為(x_1,y_1)，則所有正整數解(x,y)滿足$x+y\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^n$，其中$n$為正整數。最小的正整數解$(x_1,y_1)$稱為佩爾方程$x^2-dy^2=1$的「基本解」或「最小解」。(數形合一)

二、研究過程

在研究過程中，我們發現這個主題已有許多人探討，如『數形合一』許毓芳(2013)[2]、『初探多邊形數』李政豐. 洪有情. 陳昭地(2011)[3]等人。但眾多文獻中對於多角數關係的解法似乎是唯一的，也就是利用「佩爾方程式」的通解來解決 $x^2-Dy^2=1$ 這樣的題型。這是我們第一次聽到的數學名詞，顯然也是非常陌生。對於佩爾方程式我們就不多加介紹，因為這並非在高中課程內所能學到。因此，我們希望透過目前我們所學過的知識來解決這樣的一種問題。

不僅是找規律、或尋求是否存在遞迴關係⋯等等異於「佩爾方程」的方法，最後我們選擇利用矩陣來呈現它。更令人意外的是其結果比以往文獻裡所需要的條件更少、更簡單、更順利的完成我們最主要的研究目的。

三、$3-4$角數(同時是三角數又是四角數的數，又稱三角平方數)的模式

方法一

首先，在毫無頭緒的開始，我們尋求了 excel 的協助，希望透過大量的數據找到蛛絲馬跡。

遺憾的是，面對這樣龐大的數據，我們非但無法找到m、n之間的關係，也無法有規律地推判出下一個 3-4 角數的形式。因此我們更改了想法，決定

$3-4$ 角數	第 s 個三角數	第 t 個四角數
1	1	1
36	8	6
1225	49	35
41616	288	204

用多角數的通式來解決問題。

$\boxed{\text{方法二}}$

假設第 s 個三角數等於第 t 個四角數，得

$$\frac{s(s+1)}{2} = t^2$$

經過整理化簡，最後可得

$$(2s+1)^2 - 8(t)^2 = 1$$

令 $x = 2s+1$、$y = t$，故

$$x^2 - 8y^2 = 1 \qquad (\text{式 } 1)$$

上式為狹義佩爾方程式的典型式題，以往文獻在這一過程後便開始利用佩爾方程的結論進行解題。而我們採取另一種方法進行：

定理一：
若$(m、n)$為 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的一組解，則存在一矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & Dn \\ n & m \end{bmatrix}$，使得

$$\begin{bmatrix} m' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \qquad (\text{式 } 2)$$

其中$(m'，n')$為另一組 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的解。

$\boxed{\text{證明}}$：
若

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m' \\ n' \end{bmatrix}$$

可得 $m' = am + bn$、$n' = cm + dn$，代入 $x^2 - Dy^2 = 1$，得

$$(am+bn)^2 - D(cm+dn)^2 = 1$$

$$(a^2 - Dc^2)m^2 + (2ab - 2Dcd)mn + (b^2 - Dd^2)n^2 = 1$$

又因為 $m^2 - Dn^2 = 1$，故

$$\text{令} \begin{cases} a^2 - Dc^2 = 1 \\ 2ab - 2Dcd = 0 \\ b^2 - Dd^2 = -D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - Dc^2 = 1 \\ ab = Dcd \\ Dd^2 - b^2 = D \end{cases}$$

又因為 $m^2 - Dn^2 = 1$，且 $a^2 - Dc^2 = 1$，因此不妨假設 $a = m$、$c = n$，則

$$\begin{cases} mb = Dnd \\ Dd^2 - b^2 = D \end{cases}$$

解上式聯立方程式，最後得 $d = m$、$b = n$，即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & Dn \\ n & m \end{bmatrix}$$

證明結束。

因此回到(式 1)，若 $x^2-8y^2=1$，則 $(x、y)=(3、1)$ 為一組解，$D=8$，故

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

可推得下列各值：

$$A_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 99 \\ 35 \end{bmatrix} \quad 或 \quad \left(=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A_4=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 99 \\ 35 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 577 \\ 204 \end{bmatrix} \quad 或 \quad \left(=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\vdots$$

$$A_n=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

從上述的結果中發現只要乘上一組矩陣，我們就可以順利的找到下一組解。到底為什麼矩陣乘上基本解就會出現下一組解呢，說明如下：

$\boxed{\text{證明}}$：

假設基本解為 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2m+1 \\ n \end{bmatrix}$，利用(式 2)得一矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & Dy \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2m+1 & Dn \\ n & 2m+1 \end{bmatrix}$，且 $D=8$，故

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & 8n \\ n & 2m+1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2m+1 \\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2m'+1 \\ n' \end{bmatrix}$$

以上可以說明，基本解乘上基本矩陣之後，形式仍與原先的形式相同。

藉著矩陣的運算，我們順利的找到了第 n 個 $3-4$ 角數的一般式，但是 $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{n-1}$ 的運算並不容易，尚無法直接寫出第 n 個 $3-4$ 角數是多少。下一階段，我們的目標是找出更方便運算的一般式。

四、對 A_n 進行對角化再化簡

已知 $A_n=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，令 $A=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$，

$\det(A-\lambda I)=(3-\lambda)^2-8=0 \rightarrow$ 得 $\lambda=3\pm 2\sqrt{2}$

(1) $\lambda_1=(3+2\sqrt{2})$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3-(3+2\sqrt{2}) & 8 \\ 1 & 3-(3+2\sqrt{2}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 8 \\ 1 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2=(3-2\sqrt{2})$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3-(3-2\sqrt{2}) & 8 \\ 1 & 3-(3-2\sqrt{2}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 8 \\ 1 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ 得 $x_1 = 2\sqrt{2}x_2$

$\rightarrow$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t$ ，$t \neq 0$

$\rightarrow$ 得 $x_1 = -2\sqrt{2}x_2$

$\rightarrow$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot s$ ，$s \neq 0$

綜合以上(1)、(2)得 $P = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow P^{-1}A^nP = \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}^n$$

$$\rightarrow A^n = P\begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}^n P^{-1}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^{n-1} & 2\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})^{n-1} \\ (3+2\sqrt{2})^{n-1} & -(3-2\sqrt{2})^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} \\ \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

透過這個結果，我們可以很容易地寫出 $3-4$ 角數的一般式。

x	3	17	99	$\frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}$
y	1	6	35	$\frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$
第 m 個 三角數	1	8	49	$\frac{(\frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} - 1}{2}$
第 n 個 四角數	1	6	35	$\frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$
3-4 角數	1	36	1225	$(\frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}})^2$

所得到的結果與許毓芳(2013)[2]的結論相同，如右表所示。且僅僅利用了$(x、y)=(3、1)$這唯一條件就可推得 3-4 角數之所有解，大大減少繁瑣的運算部分。

數形合一　許毓芳(2013)[2] P8 資料

x=2n+1	y=2m	n	m	3-4角數
3	2	1	1	1
17	12	8	6	36
99	70	49	35	1225
577	408	288	204	41616
3363	2378	1681	1189	1413721
19601	13860	9800	6930	48024900

然而，可知$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$會隨著$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$的值而有所變動，即若

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}$，則$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 & 48 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$，而

$$\begin{bmatrix} 17 & 48 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 577 \\ 204 \end{bmatrix}$$

亦為其中一組 $3-4$ 角數。由此可見，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$的值越小，就能找到另一組更小的情況。因此，我們將最小的$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$稱為基本解，也就是說$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$為 $3-4$ 角數的基本解，最後再以基本解類推就能得到所有解。

基本解的找法：

根據上述方法，只要利用基本解$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$，與 $x^2-Dy^2=1$ 所產生的基本矩陣，即可衍生出所有其他解。然而，基本解究竟如何找呢？因為 1 是所有角數的顯然解，因此$(s、t)=(1、1)$代入，即可快速得到基本解。如下表所示：

	關係式	x、y 的限制	基本解
三角平方數	$x^2-8y^2=1$	$x=2s+1$ $y=t$	(3、1)
五角平方數	$x^2-24y^2=1$	$x=6s-1$ $y=t$	(5、1)
六角平方數	$x^2-8y^2=1$	$x=4s-1$ $y=t$	(3、1)

因此，對於後面論述 $Ax^2-By^2=1$ 的關係式，其基本解，均可利用這樣的方式快速找出。

五、$4-5$角數(同時是四角數又是五角數的數)的模式

同理，假設第 s 個四角數等於第 t 個五角數，得

$$\frac{t(3t-1)}{2}=s^2$$

經過整理化簡，最後可得

$$(6t-1)^2-24(s)^2=1$$

令 $x=6t-1$、$y=s$，故

$$x^2-24y^2=1 \qquad \text{(式 3)}$$

利用(式 3)，若 $x^2-24y^2=1$，則$(\mathrm{x}、\mathrm{y})$的基本解為$(5、1)$，$D=24$，故

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

可推得下列各值：

$$X=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(成立)}$$

$$BX=\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 49 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad \text{(不合)}$$

$$B^2X=\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 49 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 485 \\ 99 \end{bmatrix} \qquad \text{(成立)}$$

$$B^3X=\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 485 \\ 99 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4801 \\ 980 \end{bmatrix} \qquad \text{(不合)}$$

$$B^4X=\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4801 \\ 980 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 47525 \\ 9701 \end{bmatrix} \qquad \text{(成立)}$$

從上述的結果中發現奇數組才會成立，偶數組中的x值並不符合 $6m-1$ 的限制，因此不會成立。但為何偶數組會不成立、奇數組成立，如下所示：

$\boxed{\text{證明}}$：

假設基本解為$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6m-1 \\ n \end{bmatrix}$，利用(式 2)得一矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & Dy \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6m-1 & Dn \\ n & 6m-1 \end{bmatrix}$，且$D=24$，故

$$\begin{bmatrix} 6m-1 & 24n \\ n & 6m-1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6m-1 \\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6m'+1 \\ n' \end{bmatrix} \qquad \text{(偶數組情況)}$$

(不滿足$x=6m-1$的形式)

$$\begin{bmatrix} 6m-1 & 24n \\ n & 6m-1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6m'+1 \\ n' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6m''-1 \\ n'' \end{bmatrix} \qquad \text{(奇數組情況)}$$

因此，由此規則，可推得下列各值：

$$B_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 485 \\ 99 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 485 \\ 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47525 \\ 9701 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 47525 \\ 9701 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^6 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4656965 \\ 950599 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{2n-2} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

六、對B_n進行對角化再化簡

已知 $B_n = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{2n-2} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，令$B = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B - \lambda \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 24 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$，

$\det(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}) = (5-\lambda)^2 - 24 = 0 \rightarrow$ 得 $\lambda = 5 \pm 2\sqrt{6}$

(1) $\lambda_1 = (5 + 2\sqrt{6})$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 5-(5+2\sqrt{6}) & 24 \\ 1 & 5-(5+2\sqrt{6}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} & 24 \\ 1 & -2\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ 得 $x_1 = 2\sqrt{6}x_2$

$\rightarrow$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t$ ，$t \neq 0$

(2) $\lambda_2 = (5 - 2\sqrt{6})$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 5-(5-2\sqrt{6}) & 12 \\ 2 & 5-(5-2\sqrt{6}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} & 12 \\ 2 & 2\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ 得 $x_1 = -2\sqrt{6}x_2$

$\rightarrow$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot s$ ，$s \neq 0$

綜合以上(1)、(2)得 $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\rightarrow P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 5+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 5-2\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$\rightarrow P^{-1}B^nP = \begin{bmatrix} 5+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 5-2\sqrt{6} \end{bmatrix}^n$

$$B_n = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{2n-2} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 5-2\sqrt{6} \end{bmatrix}^{2n-2} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\sqrt{6}} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{6}(5+2\sqrt{6})^{2n-2} & 2\sqrt{6}(5-2\sqrt{6})^{2n-2} \\ (5+2\sqrt{6})^{2n-2} & -(5-2\sqrt{6})^{2n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(5+2\sqrt{6})^{2n-1}+(5-2\sqrt{6})^{2n-1}}{2} \\ \dfrac{(5+2\sqrt{6})^{2n-1}-(5-2\sqrt{6})^{2n-1}}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

透過這個結果，我們可以很容易地寫出 $4-5$ 角數的一般式。

x	5	485	47525	$\frac{(5+2\sqrt{6})^{2n-1}+(5-2\sqrt{6})^{2n-1}}{2}$
y	1	99	9701	$\frac{(5+2\sqrt{6})^{2n-1}-(5-2\sqrt{6})^{2n-1}}{4\sqrt{6}}$
第 s 個 四角數	1	99	9701	$\frac{(\frac{(5+2\sqrt{6})^{2n-1}+(5-2\sqrt{6})^{2n-1}}{2}}{6}$
第 t 個 五角數	1	81	7921	$\frac{(5+2\sqrt{6})^{2n-1}-(5-2\sqrt{6})^{2n-1}}{4\sqrt{6}}$
$4-5$角數	1	9801	94109401	$(\frac{(5+2\sqrt{6})^{2n-1}-(5-2\sqrt{6})^{2n-1}}{4\sqrt{6}}$

上述結果依舊與許毓芳在(2013)[2]中的資料雷同，且亦僅利用了$(x、y)=(5、1)$這唯一條件就可推得 $4-5$ 角數之所有解。

數形合一　許毓芳(2013)[2]　P13 資料

4-5 角數(2)					
	x=6m-1	y=2n	m	n	4-5 角數
	5	2	1	1	1
	485	198	81	99	9801
	47525	19402	7921	9701	94109401
	4656965	1901198	776161	950599	903638458801

七、$4-6$ 角數(同時是四角數又是六角數的數)的模式

同理，假設第 s 個四角數等於第 t 個六角數，得

$$s^2 = \frac{t(2+(t-1)(6-2))}{2}$$

經過整理化簡，最後可得

$$(4t-1)^2 - 8(s)^2 = 1$$

令 $x=4t-1$、$y=s$，故

$$x^2-8y^2=1 \qquad \text{(式 4)}$$

利用(式 4)，若 $x^2-8y^2=1$，則$(\mathrm{x}、\mathrm{y})$的基本解為$(3、1)$，$D=8$，故

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

可推得下列各值：

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(成立)}$$

$$CX=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(不合)}$$

$$C^2X=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 99 \\ 35 \end{bmatrix} \qquad \text{(成立)}$$

$$C^3X=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 99 \\ 35 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 577 \\ 204 \end{bmatrix} \qquad \text{(不合)}$$

$$C^4X=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 577 \\ 204 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3363 \\ 1189 \end{bmatrix} \qquad \text{(成立)}$$

上述的結果中發現奇數組才會成立，偶數組中的 x 值並不符合$4t-1$的限制，因此不會成立。但為何偶數組會不成立、奇數組成立，如下所示：

$\boxed{\text{證明}}$：

假設基本解為$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4t-1 \\ s \end{bmatrix}$，利用(式 2)得一矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & Dy \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4t-1 & 8s \\ s & 4t-1 \end{bmatrix}$，且 $D=8$，故

$$\begin{bmatrix} 4t-1 & 8s \\ s & 4t-1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4t-1 \\ s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4t'+1 \\ s' \end{bmatrix} \qquad \text{(偶數組情況)}$$

$$\begin{bmatrix} 4t-1 & 8s \\ s & 4t-1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4t'+1 \\ s' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4t''-1 \\ 2s'' \end{bmatrix} \qquad \text{(奇數組情況)}$$

因此，由此規則，可推得下列各值：

$$C_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 99 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$C_3=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^4\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3363 \\ 1189 \end{bmatrix}$$

$$C_4=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^6\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 114243 \\ 40391 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{2(n-1)} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

從$3-4$角數與$4-6$角數的解之中，不難發現$4-6$角數是$3-4$角數的部分解，也就是說$C_n = A_{2n-1}$。

八、$4-k$角數(同時是四角數又是 k 角數的數)的模式(k ≠ 4)

同理，假設第 s 個四角數等於第 t 個 k 角數，得

$$s^2 = \frac{t[2+(t-1)(k-2)]}{2}$$

經過整理化簡，最後可得

$$[2 \cdot \frac{2-k}{4-k}t - 1]^2 - \frac{8(k-2)}{(4-k)^2}(s)^2 = 1$$

令 $x = 2 \cdot \frac{2-k}{4-k}t - 1$、$y = s$，故

$$x^2 - \frac{8(k-2)}{(4-k)^2}y^2 = 1$$

利用上式，若$x^2 - \frac{8(k-2)}{(4-k)^2}y^2 = 1$，

則(x、y) 的基本解為 ($\frac{k}{k-4}$ 、1)，$D = \frac{8(k-2)}{(4-k)^2}$，利用定理一可得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{k-4} & \frac{8(k-2)}{(4-k)^2} \\ 1 & \frac{k}{k-4} \end{bmatrix}$$

九、$3-5$ 角數(同時是三角數又是五角數的數)的模式

同理，假設第 s 個三角數等於第 t 個五角數，得

$$\frac{s(s+1)}{2} = \frac{t(3t-1)}{2}$$

經過整理化簡，最後可得

$$6(s+\frac{1}{2})^2 - 18\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 = 1$$

令 $x = s + \frac{1}{2}$、$y = t - \frac{1}{6}$，故

$$6x^2 - 18y^2 = 1 \qquad \text{(式 5)}$$

由於(式 5)並非定理一的形式，因此得重新找出基本矩陣。

若$(m、n)$為 $6x^2-18y^2=1$ 的一組正數解，存在一矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，使得$\begin{bmatrix} m' \\ n' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$為另一組解。可得 $m'=am+bn$、$n'=cm+dn$，代入 $6x^2-18y^2=1$，得

$$6(am+bn)^2-18(cm+dn)^2=1$$

$$6(a^2-3c^2)m^2+(12ab-36cd)mn-18\left(-\frac{b^2}{3}+d^2\right)n^2=1$$

又因為 $6x^2-18y^2=1$，故

$$令\begin{cases} a^2-3c^2=1 \\ 12ab-36cd=0 \\ -\frac{b^2}{3}+d^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2-3c^2=1 \\ ab=3cd \\ b^2-3d^2=-3 \end{cases}$$

經化簡，可得關係式如下所示：

$$\begin{cases} a^2=1+3c^2 \\ b^2=9c^2 \\ c^2=c^2 \\ d^2=1+3c^2 \end{cases}$$

由上，可簡單求得一組解 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

利用(式 5)，若 $6x^2-18y^2=1$，可得$(\mathrm{x}、\mathrm{y})$的基本解為$(\frac{3}{2}、\frac{5}{6})$，故可推得下列各值：

$$X=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$ (成立)

$$DX=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix}$$ (不合)

$$D^2X=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{41}{2} \\ \frac{71}{6} \end{bmatrix}$$ (成立)

$$D^3X=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{41}{2} \\ \frac{71}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{153}{2} \\ \frac{265}{6} \end{bmatrix}$$ (不合)

$$D^4X=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{153}{2} \\ \frac{265}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{571}{2} \\ \frac{989}{6} \end{bmatrix}$$ (成立)

從結果中發現奇數組才會成立，偶數組中的 y 值不符合 $m-\frac{1}{6}$ 的限制，因此不會成立。由此規則，可實際推得下列各值：

$$D_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

$$D_2=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{41}{2}\\\frac{71}{6}\end{bmatrix}$$

$$D_3=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^4\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{571}{2}\\\frac{989}{6}\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$D_n=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^{2(n-1)}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

定理二：

若$(m、n)$為 $Ax^2-By^2=1$ 的一組解，存在一矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{B}{A}c^2}&\frac{B}{A}\cdot c\\c&\sqrt{1+\frac{B}{A}c^2}\end{bmatrix}$，

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$，使得

$$\begin{bmatrix}m'\\n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$$

為另一組 $Ax^2-By^2=1$ 的解。

證明：

若$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$為 $Ax^2-By^2=1$之一組解，存在一矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，使得$\begin{bmatrix}m'\\n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$為另一組解。可得 $m'=am+bn$、$n'=cm+dn$，代入 $Ax^2-By^2=1$，得

$$A(am+bn)^2-B(cm+dn)^2=1$$
$$(Aa^2-Bc^2)m^2+(2Aab-2Bcd)mn+(Ab^2-Bd^2)n^2=1$$

又 $Ax^2-By^2=1$，故

$$令\begin{cases}Aa^2-Bc^2=A\\2Aab-2Bcd=0\\Ab^2-Bd^2=-B\end{cases}$$

經整理，可整理成只有一個參數c，如下所示：

$$\begin{cases} a^2 = 1 + \dfrac{B}{A}c^2 \\ b^2 = \left(\dfrac{B}{A}\right)^2 \cdot c^2 \\ c^2 = c^2 \\ d^2 = 1 + \dfrac{B}{A}c^2 \end{cases}$$

即基本矩陣為 $\begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} & \frac{B}{A}\cdot c \\ c & \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} \end{bmatrix}$，故得證。

十、$3-k$角數、$4-k$角數、$5-k$角數、$p-k$角數，基本解與基本矩陣一般化：

在進行$p-k$角數一般化的過程中，我們發現從原本 $x^2 - Dy^2 = 1$的關係式，已經轉換成 $Ax^2 - By^2 = 1$的型式，且 x 、 y 、 A 、 B 不再被侷限於正整數解；如此呈現已經與佩爾方程有著完全不同的詮釋。且為了統整性與閱讀方便，我們採取單一型式呈現。

1. $3-k$角數（ 第 s 個三角數 = 第 t 個 k 角數 ）(k ≠ 3)

$$\frac{s(s+1)}{2} = \frac{t[2+(t-1)(k-2)]}{2}$$

經化簡後，可得

$$(s+\frac{1}{2})^2 - (k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2 = \frac{(k-2)-(4-k)^2}{4(k-2)}$$

$$\frac{4(k-2)}{(k-2)-(4-k)^2}\cdot\left\{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2\right\} = 1$$

$$\frac{4(k-2)}{(k-2)-(4-k)^2}\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4(k-2)^2}{(k-2)-(4-k)^2}\cdot\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2 = 1$$

令 $\frac{4(k-2)}{(k-2)-(4-k)^2} = A$，$\frac{4(k-2)^2}{(k-2)-(4-k)^2} = B$，$s+\frac{1}{2} = x$，$t+\frac{4-k}{2(k-2)} = y$，$s = t = 1$ 代入後可得

基本解($\frac{3}{2}$ 、 $\frac{k}{2(k-2)}$)，且由定理二可得知基本矩陣

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} & \frac{B}{A}\cdot c \\ c & \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+(k-2)\cdot c^2} & (k-2)\cdot c \\ c & \sqrt{1+(k-2)\cdot c^2} \end{bmatrix}，c \in N$$

檢驗如下：

k 值	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$3-4$ 角數
4	$(\frac{3}{2},1)$	$\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{17}{2}\\6\end{bmatrix}$	8	6	36
			$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{17}{2}\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{99}{2}\\35\end{bmatrix}$	49	35	1225
			$\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{99}{2}\\35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{577}{2}\\204\end{bmatrix}$	288	204	41616
			$\begin{bmatrix}x_5\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{577}{2}\\204\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3363}{2}\\1189\end{bmatrix}$	1681	1189	1413721
			$\begin{bmatrix}x_6\\y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3363}{2}\\1189\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{19601}{2}\\6930\end{bmatrix}$	9800	6930	48024900

k 值	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$3-5$ 角數
5	$(\frac{3}{2},\frac{5}{6})$	$\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{41}{2}\\\frac{71}{6}\end{bmatrix}$	20	12	210
			$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{41}{2}\\\frac{71}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{571}{2}\\\frac{989}{6}\end{bmatrix}$	285	165	40775
			$\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{571}{2}\\\frac{989}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7953}{2}\\\frac{13775}{6}\end{bmatrix}$	3976	2296	7906276
			$\begin{bmatrix}x_5\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{7953}{2}\\\frac{13775}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{110771}{2}\\\frac{191861}{6}\end{bmatrix}$	55385	31977	1533776805

問題：這樣的方法是否為所有解？

以$3-4$角數為例，根據【數形合一】(2013)[2]中提到$3-4$角數的關係式$x^2-2y^2=1$，可以利用佩爾方程的結果得到其一般解為

$$x=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}，y=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

然而，我們很好奇的是，利用矩陣的方式所得到關係式與一般式與上式佩爾方程所得到結果已不盡相同，那麼用矩陣的方式所得到解是否為所有解？說明如下：

利用$3-k$角數關係式$\frac{4(k-2)}{(k-2)-(4-k)^2}\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4(k-2)^2}{(k-2)-(4-k)^2}\cdot\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2=1$，取$k=4$可得$4\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-8\cdot[t]^2=1$，基本矩陣為$\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$

$\rightarrow P=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，s.t $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2}&0\\0&3-2\sqrt{2}\end{bmatrix}$，則

$$A_n=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2}&0\\0&3-2\sqrt{2}\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^{n-1}&\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})^{n-1}\\(3+2\sqrt{2})^{n-1}&-(3-2\sqrt{2})^{n-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{4}\\\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

又$s+\frac{1}{2}=x=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{4}$，$t=y=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$ $\rightarrow$ $s=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{4}-\frac{1}{2}$，$t=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$，即第 s 個三角數等於第 t 個四角數，檢查驗證無誤：

第 s 個三角數為

$$\frac{(1+\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{4}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{4}-\frac{1}{2})}{2}$$

$$=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2n}+2+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n}-4}{32}$$

$$=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2n}-2+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n}}{32}$$

第 t 個四角數為

$$\left(\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n}}{4\sqrt{2}}\right)^{2}$$

$$=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2n}-2+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n}}{32}$$

我們得到$3-4$角數的一般式為 $\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^{n}-(3-2\sqrt{2})^{n}}{4\sqrt{2}}\right)^{2}$ ，與利用佩爾方程的結果產生的一般式$\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^{n}-(3-2\sqrt{2})^{n}}{4\sqrt{2}}\right)^{2}$ 是相同的。因此，我們有了極大的信心認為利用基本解和基本矩陣的確可以推出多重角數的所有解。

2. $4-k$角數（ 第 s 個四角數 ＝ 第 t 個 k 角數 ）(k ≠ 4)

$$s^{2}=\frac{t[2+(t-1)(k-2)]}{2}$$

經化簡後，可得

$$(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^{2}-2(s)^{2}=\frac{(4-k)^{2}}{4(k-2)}$$

$$\frac{4(k-2)}{(4-k)^{2}}\cdot\left\{(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^{2}-2(s)^{2}\right\}=1$$

$$[2\cdot\frac{k-2}{k-4}t-1]^{2}-\frac{8(k-2)}{(4-k)^{2}}(s)^{2}=1$$

令$1=A$，$\frac{8(k-2)}{(4-k)^{2}}=B$，$2\cdot\frac{k-2}{k-4}t-1=x$，$s=y$，$s=t=1$ 代入後可得基本解($\frac{k}{k-4}$ 、1)，且由定理一可得知基本矩陣

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{k}{k-4} & \frac{8(k-2)}{(4-k)^{2}}\\ 1 & \frac{k}{k-4}\end{bmatrix}$$

檢驗如下：

k 值	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$4-5$ 角數
5	(5,1)	$\begin{bmatrix}5 & 24\\1 & 5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 24\\1 & 5\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}485\\99\end{bmatrix}$	99	81	9801
			$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 24\\1 & 5\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}485\\99\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47525\\9701\end{bmatrix}$	9701	7921	94109401
			$\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 24\\1 & 5\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}47525\\9701\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4656965\\950599\end{bmatrix}$	950599	776161	903638458801

k 值	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$4-6$ 角數
6	(3,1)	$\begin{bmatrix}3 & 8\\1 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\1 & 3\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}99\\35\end{bmatrix}$	35	25	**1225**
			$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\1 & 3\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}99\\35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3363\\1189\end{bmatrix}$	1189	841	1413721
			$\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\1 & 3\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}3363\\1189\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}114243\\40391\end{bmatrix}$	40391	28561	1631432881

遺漏的解？

在「特殊形 pell 方程式之矩陣解研究」的文章中提到，利用矩陣決佩爾方程問題，會產生遺漏解問題！是否用矩陣解類佩爾形式的不定方程也是如此呢？我們發現，確實有可能產生遺漏問題，以$4-12$角數為例，我們能得到關係式

$$\frac{25}{4}[t-\frac{2}{5}]^2-\frac{5}{4}(s)^2=1 \tag{式 6}$$

或

$$[\frac{5}{2}t-1]^2-\frac{5}{4}(s)^2=1 \tag{式 7}$$

利用(式 6)關係式得基本解 $(\frac{3}{5}$ 、1)，與利用定理二得基本矩陣

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{1}{5}c^2} & \frac{\frac{1}{5}\cdot c}{\sqrt{1+\frac{1}{5}c^2}}\\ c & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 4\\20 & 9\end{bmatrix}，c\,\epsilon N$$

得到的解如下：

k 值	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$4-12$ 角數
12	$(\frac{3}{5}、1)$	$\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{843}{5} \\ 377 \end{bmatrix}$	377	169	142129
			$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{843}{5} \\ 377 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{271443}{5} \\ 121393 \end{bmatrix}$	121393	54289	14736260449
			$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{271443}{5} \\ 121393 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{87403803}{5} \\ 39088169 \end{bmatrix}$	39088169	17480761	1527884955772561

利用(式 7)關係式得基本解 $(\frac{3}{2}、1)$，與利用定理一得基本矩陣

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & Dn \\ n & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

得到的解如下：

k 值	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$4-12$ 角數
12	$(\frac{3}{2}、1)$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$	8	4	64
			$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{123}{2} \\ 55 \end{bmatrix}$	55	25	3025
			$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{123}{2} \\ 55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{843}{2} \\ 377 \end{bmatrix}$	377	169	142129

從上述兩例，明顯可以得知若基本矩陣內的元素限定為自然數的話，依然可以找出另一組解，但可能會產生漏解的情況。因此，若欲求得所有組解，則基本矩陣的參數c不再限制為自然數，而是有理數即可。換句話說，若 $Ax^2 - By^2 = 1$，且A為完全平方數，需轉化為 $x^2 - Dy^2 = 1$進行解題，便可解決 4-12 角數的遺漏解問題。

3. $5-k$角數（第 s 個五角數 = 第 t 個 k 角數）(k ≠ 5)

$$\frac{s(3s-1)}{2} = \frac{t[2+(t-1)(k-2)]}{2}$$

經化簡後，可得

$$(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2 - 3(s-\frac{1}{6})^2 = \frac{3(4-k)^2-(k-2)}{12(k-2)}$$

$$\frac{12(k-2)}{3(4-k)^2-(k-2)} \cdot \left\{(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2 - 3(s-\frac{1}{6})^2\right\} = 1$$

$$\frac{12(k-2)^2}{3(4-k)^2-(k-2)} \cdot \left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2 - \frac{36(k-2)}{3(4-k)^2-(k-2)} \cdot (s-\frac{1}{6})^2 = 1$$

令 $\frac{12(k-2)^2}{3(4-k)^2-(k-2)} = A$，$\frac{36(k-2)}{3(4-k)^2-(k-2)} = B$，$t+\frac{4-k}{2(k-2)} = x$，$s-\frac{1}{6} = y$，$s = t = 1$ 代入後可得基本解($\frac{k}{2(k-2)}$ 、 $\frac{5}{6}$)，且由定理二可得知基本矩陣

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} & \frac{B}{A}\cdot c \\ c & \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{3c^2}{(k-2)}} & \frac{3c}{(k-2)} \\ c & \sqrt{1+\frac{3c^2}{(k-2)}} \end{bmatrix}$$

檢驗如下：

	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$5-6$ 角數
$k=6$	$(\frac{3}{4}$ 、 $\frac{5}{6})$	$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{571}{4} \\ \frac{989}{6} \end{bmatrix}$	165	143	40755
			$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{571}{4} \\ \frac{989}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{110771}{4} \\ \frac{191861}{6} \end{bmatrix}$	31977	27693	1533776805

	基本解	基本矩陣	x、y	s	t	$5-7$ 角數
$k=7$	$(\frac{7}{10}$、$\frac{5}{6})$	$\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{10}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	1	1	1
			$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 4\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{7}{10}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{417}{10}\\\frac{323}{6}\end{bmatrix}$	54	42	4347
			$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 4\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{417}{10}\\\frac{323}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{25847}{10}\\\frac{20021}{6}\end{bmatrix}$	3337	2585	16701685
			$\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 4\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}\frac{25847}{10}\\\frac{20021}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1602097}{10}\\\frac{1240979}{6}\end{bmatrix}$	206830	160210	64167869935

4. $p-k$角數（第 s 個 p 角數 ＝ 第 t 個 k 角數）(p ≠ k)

$$\frac{s[2+(s-1)(p-2)]}{2}=\frac{t[2+(t-1)(k-2)]}{2}$$

經化簡後，可得

$$(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-(p-2)\left[s+\frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2=\frac{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}{4(k-2)(p-2)}$$

$$\frac{4(k-2)(p-2)}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}\cdot\left\{(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-(p-2)\left[s+\frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2\right\}=1$$

可得$p-k$角數關係式如下：

$$\frac{4(k-2)^2(p-2)}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}\cdot\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-\frac{4(k-2)(p-2)^2}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}\cdot\left[s+\frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2=1$$

令 $\frac{4(k-2)^2(p-2)}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}=A$，$\frac{4(k-2)(p-2)^2}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}=B$，$t+\frac{4-k}{2(k-2)}=x$，$s+\frac{4-p}{2(p-2)}=y$，$s=t=1$ 代入後可得基本解$(\frac{k}{2(k-2)}$、$\frac{p}{2(p-2)})$，且由定理二可得知基本矩陣

$$\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} & \frac{B}{A}\cdot c\\ c & \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}} & \frac{(p-2)\cdot c}{(k-2)}\\ c & \sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}}\end{bmatrix}，c\,\epsilon N$$

以 $p=5$，$k=6$為例，代入後可得關係式$24(t-\frac{1}{4})^2-18\left(s-\frac{1}{6}\right)^2=1$，基本解$\left(\frac{k}{2(k-2)}\right.$、$\left.\frac{p}{2(p-2)}\right)=(\frac{3}{4}$、$\frac{5}{6})$，基本矩陣

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}} & \frac{(p-2)\cdot c}{(k-2)} \\ c & \sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{3}{4}c^2} & \frac{3}{4}\cdot c \\ c & \sqrt{1+\frac{3}{4}c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

得到的結果與 $5-k$ 角數之$k=6$情形符合，推論無誤。

十一、　解的型式：

在進行檢驗的過程中，我們發現並非每個多角數都有無限多解。從 $p-k$ 關係式即可看出端倪：

$$(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-(p-2)\left[s+\frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2=\frac{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}{4(k-2)(p-2)}$$

可整理成

$$(p-2)[2(k-2)t+(4-k)]^2-(k-2)[2(p-2)s+(4-p)]^2=\{(k-2)(p-2)-4\}\{(k-2)-(p-2)\}$$

此時，討論$(k-2)\cdot(p-2)$ 與 $\{(k-2)(p-2)-4\}$的部分，會有以下情況發生：

(1) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\}\neq 0$
$(p-2)[2(k-2)t+(4-k)]^2-(k-2)[2(p-2)s+(4-p)]^2=R$，$R\in N$,則此式必可化成$(\alpha t+\beta)\cdot(\gamma s+\delta)=R$的形式，此時只討論$R$的所有因數情況，故會有有限解。

   i. 以$3-11$為例，可得$(18t-7)^2-(6s+3)^2=40$，故只會產生 $\{(18t+7)+(6s+3)\}\cdot\{(18t+7)-(6s+3)\}=1,2,4,5,8,10,20,40$ 互乘等情況，最後再解聯立即可求解。

   ii. 以$4-10$為例，可得$2(16t-6)^2-8(4s)^2=72\ \rightarrow\ (16t-6)^2-4(4s)^2=36$ $\{(16t-6)+(8s)\}\cdot\{(16t-6)-(8s)\}=1,2,3,4,6,9,12,18,36$ 等情況，解法同上。

(2) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\}=0$，則

$(p-2)[2(k-2)t+(4-k)]^2-(k-2)[2(p-2)s+(4-p)]^2=0$，此式必可化成$(\alpha t+\beta)^2-(\gamma s+\delta)^2=0$的形式，此時，會有無限多解產生。

   i. 以$3-6$為例，可得$(s+\frac{1}{2})^2-\left(2t-\frac{1}{2}\right)^2=0$，即$\left(s+\frac{1}{2}\right)=\left(2t-\frac{1}{2}\right)$，故

   $s=2t-1, t\in N$ 為無限多解。

至於$(k-2)\cdot(p-2)$不為完全平方數，均為無限多解(在「數形合一」中已略有說明)。因此，$(k-2)\cdot(p-2)$ 與 $\{(k-2)(p-2)-4\}$ 這兩式即可作為判別式判斷其解情況。

陸、　研究結果

1. 多角數關係式 $x^2 - Dy^2 = 1$與一組正整數解$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$，可找到一矩陣$\begin{bmatrix} m & Dn \\ n & m \end{bmatrix}$，使得 $\begin{bmatrix} m' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & Dn \\ n & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$為另一組正整數解。

2. K角平方數基本矩陣一般式為$\begin{bmatrix} \frac{k}{k-4} & \frac{8(k-2)}{(4-k)^2} \\ 1 & \frac{k}{k-4} \end{bmatrix}$，基本解為$(|\frac{k}{k-4}|、1)$，可利用此快速求得其他解。

3. 若多角數關係式 $Ax^2 - By^2 = 1$與一組正整數解$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$，即可找到一矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，使得 $\begin{bmatrix} m' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$為另一組正整數解，且

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + \frac{B}{A}c^2} & \frac{B}{A} \cdot c \\ c & \sqrt{1 + \frac{B}{A}c^2} \end{bmatrix}$$

4. $4-6$角數是$3-4$ 角數的奇數組解 $\rightarrow$ $C_n = A_{2n-1}$。

5. $p-k$角數(第 s 個p角數 ＝ 第 t 個 k 角數)關係式$\frac{4(k-2)^2(p-2)}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)} \cdot \left[t + \frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2 - \frac{4(k-2)(p-2)^2}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)} \cdot \left[s + \frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2 = 1$，基本解為$(\frac{k}{2(k-2)}、\frac{p}{2(p-2)})$，基本矩陣為

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1 + \frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}} & \frac{(p-2)\cdot c}{(k-2)} \\ c & \sqrt{1 + \frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}} \end{bmatrix}$$

6. 若 $Ax^2 - By^2 = 1$，且A為完全平方數，利用基本解與定理二所得到基本矩陣進行運算，會有遺漏解的問題。因此，須將A併入x內，轉化為 $x^2 - Dy^2 = 1$進行解題，便可解決遺漏解問題

7. $p-k$角數解的型式之判別式：
   (1) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\} \neq 0$，會有有限解。
   (2) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\} = 0$，會有無限多解。
   (3) 若$(k-2)\cdot(p-2)$不為為完全平方數，會有無限多解。

柒、 參考資料及其他

一、昌爸工作坊 圖形數 http://www.mathland.idv.tw/fun/gonal.htm

二、數形合一 許毓芳(2013) 台灣國際科學展覽

三、初探多邊形數. 李政豐. 洪有情. 陳昭地 教育部高中數學學科中心電子報線上系統(2011)http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=526

四、續探多邊形數 李政豐. 洪有情. 陳昭地 教育部高中數學學科中心電子報線上系統(2011)http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=532

五、特殊型 pell 方程式之矩陣解研究 黃敏書、謝昀佐(2013) 台灣國際科學展覽

附錄 1

3 – 4角數驗證

3 角數4 角數 利用通式一一對照 程式碼	程式結果
`n=100000000`	1
`A=zeros(1,n);`	36
`B=zeros(1,n);`	1225
`for i=1:n`	41616
`A(i)=i*(i+1)/2;`	1413721
`end`	48024900
`for j=1:n`	1631432881
`    B(j)=j*j;`	55420693056
`end`	1882672131025
`c=intersect(A(:),B(:))`	63955431761796
`d=num2str(c,50)`	2172602007770041

利用基本矩陣、基本解求解之程式碼	程式結果
`n=10`	
`A = [3, 4; 2, 3];`	1
`B = [3/2; 1];`	36
`for i=0:n`	1225
`C=(A^i)*B;`	41616
`format rat;`	1413721
`E=C.;`	48024900
`[(((E(1)-1/2))*((E(1)-1/2)+1))/2;(E(2)^2`	1631432881
`)];`	55420693056
`c=intersect((((E(1)-1/2))*((E(1)-1/2)+1)`	1882672131025
`)/2,(E(2)^2));`	63955431761796
`d=num2str(c,50)`	2172602007770041
`end`	

可得知利用基本矩陣與基本解，至少在第 100000000 個三角數與第 100000000 個四角數以內，其 3 – 4 角數所得到的結果是正確無誤的。

附錄 2

3 – 5角數驗證

3 角數5 角數 利用通式一一對照 程式碼	程式結果
n=100000000 A=zeros(1,n); B=zeros(1,n); for i=1:n A(i)=i*(i+1)/2; end for j=1:n B(j)=j*(3*j-1)/2; end c=intersect(A(:),B(:)) d=num2str(c,50)	1 210 40755 7906276 1533776805 297544793910 57722156241751

利用基本矩陣、基本解求解之程式碼	程式結果
n=6 A = [2, 3; 1, 2]; B = [3/2; 5/6]; format rat; for i=0:n C=(A^(2*i))*B; E=C; [(((E(1)-1/2))*((E(1)-1/2)+1))/2;(E(2)+1/6)*(3*(E(2)+1/6)-1)/2] format rat; end	1 210 40755 7906276 1533776805 297544793910 57722156241751

可得知利用基本矩陣與基本解，至少在第 100000000 個三角數與第 100000000 個五角數以內，其 3 – 5 角數所得到的結果是正確無誤的。

附錄 3

4 – 5角數驗證

<table>
<tr><th>4 角數5 角數 利用通式一一對照 程式碼</th><th>程式結果</th></tr>
<tr><td>

```
n=100000000
A=zeros(1,n);
B=zeros(1,n);
for i=1:n
A(i)=i*i;
end
for j=1:n
    B(j)=j*(3*j-1)/2;
end
c=intersect(A(:),B(:))
d=num2str(c,50)
```

</td><td>1
9801
94109401
903638458801
8676736387298001</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>利用基本矩陣、基本解求解之程式碼</th><th>程式結果</th></tr>
<tr><td>

```
n=4
A = [5, 4; 6, 5];
B = [5/6;1];
for i=0:n
C=(A^(2*i))*B;
E=C;
format rat;
[(E(1)+1/6)*(3*(E(1)+1/6)-1)/2;(E(2)^2)]
end
```

</td><td>1
9801
94109401
903638458801
8676736387298001</td></tr>
</table>

可得知利用基本矩陣與基本解，至少在第 100000000 個四角數與第 100000000 個五角數以內，其 4 – 5 角數所得到的結果是正確無誤的。

附錄 4

4 – 6角數驗證

<table>
<tr><th>4 角數6 角數 利用通式一一對照 程式碼</th><th>程式結果</th></tr>
<tr><td><pre>n=100000000
A=zeros(1,n);
B=zeros(1,n);
for i=1:n
A(i)=i*i;
end
for j=1:n
    B(j)=j*(4*j-2)/2;
End
c=intersect(A(:),B(:))
d=num2str(c,50)</pre></td><td>1
1225
1413721
1631432881
1882672131025
2172602007770041</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>利用基本矩陣、基本解求解之程式碼</th><th>程式結果</th></tr>
<tr><td><pre>n=5
A = [3, 2; 4, 3];
B = [3/4;1];
for i=0:n
C=(A^(2*i))*B;
E=C;
[(E(1)+1/4)*(2*(E(1)+1/4)-1);(E(2)^2)];
a=(E(1)+1/4)*(2*(E(1)+1/4)-1);
b=(E(2)^2);
c=intersect(a,b);
d=num2str(c,50)
end</pre></td><td>1
1225
1413721
1631432881
1882672131025
2172602007770041</td></tr>
</table>

可得知利用基本矩陣與基本解，至少在第 100000000 個四角數與第 100000000 個六角數以內，其 4 – 6 角數所得到的結果是正確無誤的。

【評語】050404

本作品討論 p 角數同時是 k 角的問題。題材本身相當有意思，不過以往已經有相多當的探討，許多結論已記載於文獻中。

作者提出一個簡單的矩陣關係式，希望取代以往利用 Pell equation 的求解方式。在文中，定理一只說明如何由一個解，構造出一個矩陣來產生下一個解。並未說明一個更重要的關鍵：是不是所有的解均可已使用這種矩陣來產生？或者，從一個解出發，去探討「所有能構造出下一個解的矩陣？」雖然之後有討論遺漏的解，但是只有說明(並未證明)：「若欲求得所有組解則基本矩陣的參數 c 不再限制為自然數，放寬為無理數即可」。作者欲提供另一種作法用意值得鼓勵，惟數學論證嚴謹性可以再加強。

作品海報

研究動機

在課本數列級數單元的補充教材中看到了有關「圖形數」的觀念與各種不同圖形所衍生出來的通式。然而，在簡單的觀念中，卻有一個數字『36』吸引著我。因為它不僅僅是 6 的平方，即四角數(平方數)的其中之一，它更是三角數的其中一員。因此，我希望找到一些數，一些有「多重身分」的數，且試著找尋這些數字間有著甚麼樣的規律...

研究目的

一、 尋找$3-4$角數(同時是三角數又是四角數的數)的模式。

二、 再求$4-5$角數、$4-6$角數、$3-5$角數等模式。

三、 如何利用基本解$\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$與 $Ax^2-By^2=1$所產生的基本矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，更快速的求得其他組解。

四、 $3-k$角數、$4-k$角數、$5-k$角數、$p-k$角數，基本解與基本矩陣的一般化。

五、 是否依舊能利用矩陣解決遺漏解的部分。

六、 將所得結果與 matlab 程式軟體比對數據是否正確。

文獻探討

一、 「數形合一」

文中只用遞迴式描述通解，若想找出一般式有一定的困難，在過程中，利用多個初始條件加上基本解來解決問題。但在高中階段並未談到此種不定方程的解法，最終我們選擇矩陣來看多重角數的問題。在過程中，不僅發現能描述成類佩爾方程形式的不定方程可以利用基本解直接生成基本矩陣，且利用矩陣解決多重角數的問題，只需要基本矩陣和基本解就可以迅速求得其他解。

二、 「初探多邊形數」、「續探多邊形數」

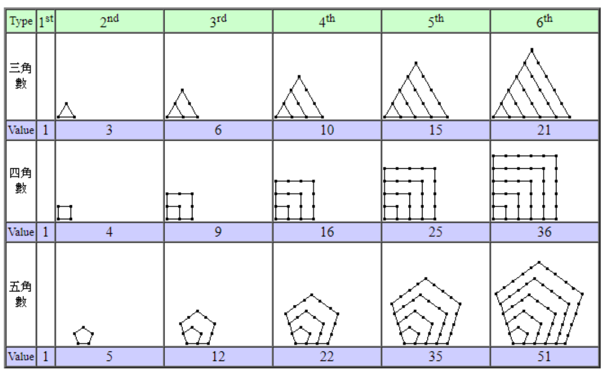
「初探多邊形數」，主要是利用了佩爾方程的解決方法來分析多角數之間的關係，而我們也利用了與筆者相同的矩陣的想法來解決問題，並在最後將多角數的關係擴大到一般形式。而在遇到矩陣解漏解問題時，我們更進一步發現某些多角數關係在解決時需要多個基本解，而影響基本解個數的原因與其遞迴關係式的樣態有關。

三、 「特殊形 pell 方程式之矩陣解研究」

文中提及可以用矩陣表達所有解及部分無法用矩陣解的不定方程，而我們的研究則是直接整理多重角數的關係式，且除了不再侷限在佩爾方程的形式中之外，我們也順利地利用矩陣來解決多重角數的問題。且利用基本矩陣和基本解，可直接解決此篇文章中提到 $4-12$ 角數的漏解問題，利用矩陣，也是可以找到問題的解答，解決漏解問題。

研究方法

一、尋找多角數的通式



1. 定義：邊長為 $\mathrm{n}-1$ 的正K邊形陣列數稱之為第 n 個K角數。

2. 第n個三角數 $=1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=\frac{n(n+1)}{2}$

3. 第n個四角數 $=1+3+5+\cdots+(2\mathrm{n}-1)=\frac{n(2n-0)}{2}$

4. 第n個五角數 $=1+4+7+\cdots+(3\mathrm{n}-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$

5. 第n個K角數 $=1+(\mathrm{k}-1)+\cdots+\big(1+(\mathrm{n}-1)(\mathrm{k}-2)\big)=$
$$\frac{n(2+(\mathrm{n}-1)(\mathrm{k}-2))}{2}$$

6. 佩爾方程$x^2-dy^2=1$的基本解：

佩爾方程$x^2-dy^2=1$的正整數解一定存在且有無限多組，若最小正整數解為(x_1,y_1)，則所有正整數解(x,y)滿足
$$x+y\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^n$$
其中n為正整數。最小的正整數解 (x_1,y_1) 稱為佩爾方程 $x^2-dy^2=1$的「基本解」或「最小解」。(數形合一)

二、$3-4$角數(同時是三角數又是四角數的數)的模式

方法一

首先，在毫無頭緒的開始，我們尋求了 excel 的協助，希望透過大量的數據找到蛛絲馬跡。

$3-4$ 角數	第 s 個三角數	第 t 個四角數
1	1	1
36	8	6
1225	49	35
41616	288	204

遺憾的是，面對這樣龐大的數據，我們非但無法找到m、n之間的關係，也無法有規律地推判出下一個 3-4 角數的形式。因此我們更改了想法，決定用多角數的通式來解決問題。

方法二

假設第 s 個三角數等於第 t 個四角數，得
$$\frac{s(s+1)}{2}=t^2$$
經過整理化簡，最後可得
$$(2s+1)^2-8(t)^2=1$$
令 $x=2s+1$、$y=t$，故
$$x^2-8y^2=1 \qquad \text{(式 1)}$$

定理一：

若$(m$、$n)$為 $x^2-Dy^2=1$ 的一組解，則存在一矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m&Dn\\n&m\end{bmatrix}$，使得
$$\begin{bmatrix}m'\\n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix} \qquad \text{(式 2)}$$
其中$(m'$，$n')$為另一組 $x^2-Dy^2=1$ 的解。

證明：

若$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m'\\n'\end{bmatrix}$，可得 $m'=am+bn$、$n'=cm+dn$，代入 $x^2-Dy^2=1$，得
$$(am+bn)^2-D(cm+dn)^2=1$$
$$(a^2-Dc^2)m^2+(2ab-2Dcd)mn+(b^2-Dd^2)n^2=1$$
又因為 $m^2-Dn^2=1$，故
$$令\begin{cases}a^2-Dc^2=1\\2ab-2Dcd=0\\b^2-Dd^2=-D\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^2-Dc^2=1\\ab=Dcd\\Dd^2-b^2=D\end{cases}$$
且 $m^2-Dn^2=1$，$a^2-Dc^2=1$，故不妨假設 $a=m$、$c=n$，則
$$\begin{cases}mb=Dnd\\Dd^2-b^2=D\end{cases}$$
解上式聯立方程式，最後得 $d=m$、$b=n$，即
$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m&Dn\\n&m\end{bmatrix}$$
證明結束。

回到(式 1)，若 $x^2-8y^2=1$，則$(\mathrm{x}$、$\mathrm{y})=(3$、$1)$為一組解，$D=8$，故 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8\\1&3\end{bmatrix}$，可推得下列各值：
$$A_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$
$$A_2=\begin{bmatrix}3&8\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\6\end{bmatrix}$$
$$A_3=\begin{bmatrix}3&8\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}17\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}99\\35\end{bmatrix} \qquad 或\ \left(=\begin{bmatrix}3&8\\1&3\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$A_4=\begin{bmatrix}3&8\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}99\\35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}577\\204\end{bmatrix} \qquad 或\ \left(=\begin{bmatrix}3&8\\1&3\end{bmatrix}^3\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$\vdots$$
$$A_n=\begin{bmatrix}3&8\\1&3\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

上述結果中發現只要乘上一組矩陣，就可以順利的找到下一組解。到底為何矩陣乘上基本解就會出現下一組解呢，說明如下：

證明：

假設基本解為$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m+1\\n\end{bmatrix}$，利用(式 2)得一矩陣
$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&Dy\\y&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m+1&Dn\\n&2m+1\end{bmatrix}，且D=8，故$$
$$\begin{bmatrix}2m+1&8n\\n&2m+1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2m+1\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m'+1\\n'\end{bmatrix}$$
從上可知，基本解乘上基本矩陣之後，形式仍與原先的形式相同。

藉著矩陣的運算，我們順利的找到了第 n 個$3-4$角數的一般式，但是 $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{n-1}$ 的運算並不容易，尚無法直接寫出第 n 個 $3-4$ 角數是多少。下一階段，我們的目標是找出更方便運算的一般式。

三、對A_n進行對角化再化簡

已知 $A_n=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$，令$A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$\det(A-\lambda I)=0\rightarrow\lambda=3\pm2\sqrt{2}$

(1) $\lambda_1=(3+2\sqrt{2})$　　　　(2) $\lambda_2=(3-2\sqrt{2})$

$\rightarrow$得 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}\cdot t$　，$t\neq0$　　　　$\rightarrow$得 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}\cdot s$　，$s\neq0$

綜合以上(1)、(2)得 $P=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 3-2\sqrt{2}\end{bmatrix}$　　$\rightarrow P^{-1}A^nP=\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 3-2\sqrt{2}\end{bmatrix}^n$

$\rightarrow A^n=P\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 3-2\sqrt{2}\end{bmatrix}^n P^{-1}$

$$A_n=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}\\ \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

透過這個結果，我們可以很容易地寫出 $3-4$ 角數的一般式。

x	3	17	99	$\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}$
y	1	6	35	$\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$
第 m 個三角數	1	8	49	$\frac{\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}-1\right)}{2}$
第 n 個四角數	1	6	35	$\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$
3-4 角數	1	36	1225	$\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\right)^2$

基本解的找法：

根據上述方法，只要利用基本解$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}$，與 $x^2-Dy^2=1$ 所產生的基本矩陣，即可衍生出所有其他解。然而，基本解究竟如何找呢？因為 1 是所有角數的顯然解，因此$(s、t)=(1、1)$代入，即可快速得到基本解。如下表所示：

	關係式	x、y 的限制	基本解
三角平方數	$x^2-8y^2=1$	$x=2s+1$ $y=t$	(3、1)
五角平方數	$x^2-24y^2=1$	$x=6s-1$ $y=t$	(5、1)

對於後面論述 $Ax^2-By^2=1$ 的關係式，其基本解，均可利用此方式找出。

四、$4-5$角數(同時是四角數又是五角數的數)的模式

假設第 s 個四角數等於第 t 個五角數，得

$$s^2=\frac{t(3t-1)}{2}$$

經整理化簡，最後可得$(6t-1)^2-24(s)^2=1$，令 $x=6t-1$，$y=s$，故

$$x^2-24y^2=1 \qquad (式 3)$$

利用(式 3)，若 $x^2-24y^2=1$，則$(x、y)$的基本解為$(5、1)$，$D=24$，故

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

可推得下列各值：

$X=\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$　(成立)　　$B^3X=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}485\\ 99\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4801\\ 980\end{bmatrix}$　(不合)

$BX=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49\\ 10\end{bmatrix}$　(不合)　　$B^4X=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4801\\ 980\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47525\\ 9701\end{bmatrix}$　(成立)

$B^2X=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}49\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}485\\ 99\end{bmatrix}$　(成立)

上述結果中發現奇數組才會成立，偶數組中的x值並不符合 $6m-1$ 的限制，因此不會成立。但為何偶數組會不成立、奇數組成立，如下所示：

證明：

假設基本解為$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6m-1\\ n\end{bmatrix}$，利用(式 2)得一矩陣$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & Dy\\ y & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6m-1 & Dn\\ n & 6m-1\end{bmatrix}$，且$D=24$，故

$$\begin{bmatrix}6m-1 & 24n\\ n & 6m-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6m-1\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6m'+1\\ n'\end{bmatrix} \qquad (偶數組情況)$$

(不滿足$x=6m-1$的形式)

$$\begin{bmatrix}6m-1 & 24n\\ n & 6m-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6m'+1\\ n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6m''-1\\ n''\end{bmatrix} \qquad (奇數組情況)$$

因此，由此規則，可推得下列各值：

$B_1=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}$

$B_2=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}485\\ 99\end{bmatrix}$

$B_3=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}485\\ 99\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}^4\cdot\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47525\\ 9701\end{bmatrix}$

$B_4=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix}47525\\ 9701\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}^6\cdot\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4656965\\ 950599\end{bmatrix}$

$\vdots$

$B_n=\begin{bmatrix}5 & 24\\ 1 & 5\end{bmatrix}^{2n-2}\cdot\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}$

五、$4-k$角數(同時是四角數又是 k 角數的數)的模式($k\neq4$)

假設第 s 個四角數等於第 t 個 k 角數，得

$$s^2=\frac{t[2+(t-1)(k-2)]}{2}$$

整理化簡得 $[2\cdot\frac{2-k}{4-k}t-1]^2-\frac{8(k-2)}{(4-k)^2}(s)^2=1$，令$x=2\cdot\frac{2-k}{4-k}t-1$、$y=s$，故

$$x^2-\frac{8(k-2)}{(4-k)^2}y^2=1$$

利用上式，若$x^2-\frac{8(k-2)}{(4-k)^2}y^2=1$，則$(x、y)$ 的基本解為 $(\frac{k}{k-4}、1)$，

$D=\frac{8(k-2)}{(4-k)^2}$，利用定理一可得

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{k}{k-4} & \dfrac{8(k-2)}{(4-k)^2}\\ 1 & \dfrac{k}{k-4}\end{bmatrix}$$

六、$3-5$ 角數(同時是三角數又是五角數的數)的模式

同理，假設第 s 個三角數等於第 t 個五角數，得

$$\frac{s(s+1)}{2}=\frac{t(3t-1)}{2}$$

經過整理化簡，最後可得

$$6(s+\frac{1}{2})^2-18\left(t-\frac{1}{6}\right)^2=1$$

令 $x=s+\frac{1}{2}$、$y=t-\frac{1}{6}$，故

$$6x^2-18y^2=1 \qquad (式 4)$$

由於(式 4)並非定理一的形式，因此得重新找出基本矩陣。

定理二：

若$(m、n)$為 $Ax^2-By^2=1$ 的一組解，存在一矩陣

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} & \frac{B}{A}\cdot c\\ c & \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2}\end{bmatrix}$$

其中$a,b,c,d\in Q$，使得 $\begin{bmatrix}m'\\ n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}$ 為另一組 $Ax^2-By^2=1$ 的解。

六、$3-k$、$5-k$、$p-k$角數，基本解與基本矩陣一般化：

1. $3-k$角數（第 s 個三角數 ＝ 第 t 個 k 角數）($k\neq3$)

$$\frac{s(s+1)}{2}=\frac{t[2+(t-1)(k-2)]}{2}$$

化簡得　$\frac{4(k-2)}{(k-2)-(4-k)^2}\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4(k-2)^2}{(k-2)-(4-k)^2}\cdot\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2=1$　　(式 5)

令 $\frac{4(k-2)}{(k-2)-(4-k)^2}=A$，$\frac{4(k-2)^2}{(k-2)-(4-k)^2}=B$，$s+\frac{1}{2}=x$，$t+\frac{4-k}{2(k-2)}=y$，$s=t=1$ 代入後可得基本解$(\frac{3}{2}、\frac{k}{2(k-2)})$，且由定理二可得知基本矩陣

$$\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{B}{A}c^2} & \frac{B}{A}\cdot c\\ c & \sqrt{1+\frac{B}{A}c^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1+(k-2)\cdot c^2} & (k-2)\cdot c\\ c & \sqrt{1+(k-2)\cdot c^2}\end{bmatrix}$$

檢驗如下：

$k=4$	基本解 $(\frac{3}{2},1)$	基本矩陣 $\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$	
x、y	s	t	$3-4$ 角數
$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$	1	1	1
$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{17}{2}\\6\end{bmatrix}$	8	6	36
$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{17}{2}\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{99}{2}\\35\end{bmatrix}$	49	35	1225
$\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{99}{2}\\35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{577}{2}\\204\end{bmatrix}$	288	204	41616
$\begin{bmatrix}x_5\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{577}{2}\\204\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3363}{2}\\1189\end{bmatrix}$	1681	1189	1413721
$\begin{bmatrix}x_6\\y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3363}{2}\\1189\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{19601}{2}\\6930\end{bmatrix}$	9800	6930	48024900

問題：這樣的方法是否為所有解？

以$3-4$角數為例，根據【數形合一】中提到$3-4$角數的關係式$x^2-2y^2=1$，可以利用佩爾方程的結果得到其一般解為

$$x=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}，y=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

但我們好奇利用矩陣方式所得到關係式與一般式與上式的結果已不相同，那麼用矩陣方式所得到解是否為所有解？說明如下：

利用$3-k$角數關係式(式 3)，取 $k=4$可得$4\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-8\cdot[t]^2=1$，

基本矩陣為$\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$。$\rightarrow P=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

s.t $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2}&0\\0&3-2\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$$A_n=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{4}\\\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

得到$3-4$角數的一般式為 $\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\right)^2$，與利用佩爾方程的結果產生的一般式$\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\right)^2$ 是相同的。因此，我們認為利用基本解和基本矩陣的確可以推出多重角數的所有解。

遺漏的解？

在「特殊形 pell 方程式之矩陣解研究」的文章中提到，利用矩陣解決佩爾方程問題，會產生遺漏解問題！是否用矩陣解類佩爾形式的不定方程也是如此呢？我們發現，確實有可能產生遺漏問題，以 $4-12$角數為例，我們能得到關係式

$\frac{25}{4}[t-\frac{2}{5}]^2-\frac{5}{4}(s)^2=1$ (式 6) 或 $[\frac{5}{2}t-1]^2-\frac{5}{4}(s)^2=1$ (式 7)

利用(式 6)，所得結果	
$k=12$	$4-12$ 角數
基本矩陣	1
$\begin{bmatrix}9&4\\20&9\end{bmatrix}$	142129
基本解	14736260449
$(\frac{3}{5}、1)$	1527884955772561

利用(式 7)，所得結果	
$k=12$	$4-12$ 角數
基本矩陣	1
$\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\\1&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$	64
基本解	3025
$(\frac{3}{2}、1)$	142129

從上得知若基本矩陣內的元素限定為自然數，依然可找出另一組解，但可能會產生漏解的情況。因此，若欲求得所有組解，則基本矩陣的參數c不再限制為自然數，而是有理數即可。換句話說，若 $Ax^2-By^2=1$，且A為完全平方數，需轉化為 $x^2-Dy^2=1$進行解題，便可解決 4-12 角數的遺漏解問題。

1. $5-k$角數（ 第 s 個五角數 ＝ 第 t 個 k 角數 ）(k ≠ 5)

$$\frac{12(k-2)^2}{3(4-k)^2-(k-2)}\cdot\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-\frac{36(k-2)}{3(4-k)^2-(k-2)}\cdot(s-\frac{1}{6})^2=1$$

基本解$(\frac{k}{2(k-2)}$ 、$\frac{5}{6})$，基本矩陣=$\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{3c^2}{(k-2)}}&\frac{3c}{(k-2)}\\c&\sqrt{1+\frac{3c^2}{(k-2)}}\end{bmatrix}$

2. $p-k$角數（ 第 s 個 p 角數 ＝ 第 t 個 k 角數 ）(p ≠ k)

$$\frac{4(k-2)^2(p-2)}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}\cdot\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-\frac{4(k-2)(p-2)^2}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}\cdot\left[s+\frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2=1$$

基本解$(\frac{k}{2(k-2)}$ 、$\frac{p}{2(p-2)})$，基本矩陣=$\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}}&\frac{(p-2)\cdot c}{(k-2)}\\c&\sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}}\end{bmatrix}$

七、解的型式：

從 $p-k$ 關係式即可看出端倪：

$$(k-2)\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-(p-2)\left[s+\frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2=\frac{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}{4(k-2)(p-2)}$$

可整理成(式 6)

$$(p-2)[2(k-2)t+(4-k)]^2-(k-2)[2(p-2)s+(4-p)]^2=\{(k-2)(p-2)-4\}\{(k-2)-(p-2)\}$$

(1) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\}\neq 0$，(式 6)必可化成$(\alpha t+\beta)\cdot(\gamma s+\delta)=R$的形式，此時只討論$R$的所有因數情況，故會有有限解。

(2) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\}=0$，(式 6)必可化成$(\alpha t+\beta)^2-(\gamma s+\delta)^2=0$的形式，此時，會有無限多解產生。

(3) $(k-2)\cdot(p-2)$不為完全平方數，均為無限多解。

研究結果

1. 多角數關係式 $x^2-Dy^2=1$與一組正整數解$\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$，可找到一矩陣$\begin{bmatrix}m&Dn\\n&m\end{bmatrix}$，使得 $\begin{bmatrix}m'\\n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m&Dn\\n&m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$為另一組正整數解。
2. K角平方數基本矩陣一般式為$\begin{bmatrix}\frac{k}{k-4}&\frac{8(k-2)}{(4-k)^2}\\1&\frac{k}{k-4}\end{bmatrix}$，基本解為 $(|\frac{k}{k-4}|、1)$，可利用此快速求得其他解。
3. 多角數關係式 $Ax^2-By^2=1$與一組正整數解$\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$，可找到一矩陣$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，使得 $\begin{bmatrix}m'\\n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$為另一組正整數解，且
$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{B}{A}c^2}&\frac{B}{A}\cdot c\\c&\sqrt{1+\frac{B}{A}c^2}\end{bmatrix}$$
4. $4-6$角數是$3-4$ 角數的奇數組解 → $C_n=A_{2n-1}$。
5. $p-k$角數(第 s 個p角數 ＝ 第 t 個 k 角數)關係式
$$\frac{4(k-2)^2(p-2)}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}\cdot\left[t+\frac{4-k}{2(k-2)}\right]^2-\frac{4(k-2)(p-2)^2}{(4-k)^2(p-2)-(4-p)^2(k-2)}\cdot\left[s+\frac{4-p}{2(p-2)}\right]^2=1$$
，基本解為$(\frac{k}{2(k-2)}$ 、$\frac{p}{2(p-2)})$，基本矩陣為
$$\begin{bmatrix}\sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}}&\frac{(p-2)\cdot c}{(k-2)}\\c&\sqrt{1+\frac{(p-2)\cdot c^2}{(k-2)}}\end{bmatrix}$$
6. 若 $Ax^2-By^2=1$，且A為完全平方數，利用基本解與定理二所得到基本矩陣進行運算，會有遺漏解的問題。因此，須將A併入x內，轉化為 $x^2-Dy^2=1$進行解題，便可解決遺漏解問題
7. $p-k$角數解的型式之判別式：
   (1) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\}\neq 0$，會有有限解。
   (2) 若$(k-2)\cdot(p-2)$為完全平方數，且$\{(k-2)(p-2)-4\}=0$，會有無限多解。
   (3) 若$(k-2)\cdot(p-2)$不為為完全平方數，會有無限多解。

參考資料及其他

一、昌爸工作坊 圖形數 http://www.mathland.idv.tw/fun/gonal.htm

二、數形合一 許毓芳(2013) 台灣國際科學展覽

三、初探多邊形數. 李政豐. 洪有情. 陳昭地 教育部高中數學學科中心電子報線上系統(2011)http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=526

四、續探多邊形數 李政豐. 洪有情. 陳昭地 教育部高中數學學科中心電子報線上系統(2011)http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=532

五、特殊型 pell 方程式之矩陣解研究 黃敏書、謝昀佐(2013) 台灣國際科學展覽