中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

(鄉土)教材獎

050402

十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

學校名稱：國立台南高級商業職業學校

作者：	指導老師：
職二 葉家熙 職二 王文祥 職二 石晉豪	胡照南

關鍵詞：九點圓圓心、費馬點、布洛卡兒點

摘要

本文以不等邊的銳角三角形出發，運用中學時代已論及的三角形外心、重心、內心、垂心為基礎，進而探討其他銳角三角形內的特殊點:九點圓圓心$(Ninepo\text{int})$，布洛卡兒點($Brocard$)，費馬點($Femat$)，熱爾崗點($Gergonne$)，奈格爾點($Nagel$)，斯俾克點($Spie\text{ker}$)，等連接三頂點分割三角形的面積比。

壹、　研究動機

一天數學老師在上三角函數中的正弦定理:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$(外接圓直徑)時，有重新複習三角形的外心性質，進而考我們一題 2020 年亞太數學奧林匹亞競賽初選考試試題第二部分的非選擇題二: 將三角形 XYZ 的面積記為$[XYZ]$，已知三角形 ABC 的三邊長分別為

$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，$\overline{AB}=8$，試回答下列問題:

(1)(3 分)設 ΔABC 的外心 O ，試求面積比$[OBC]:[OCA]:[OAB]$

(2)(4 分)設 ΔABC 的垂心 H ，試求面積比$[HBC]:[HCA]:[HAB]$

我們從未想過這類的問題，因此我們開始著手進行這一系列的研究。

貳、　研究目的

我們針對銳角三角形的三角形外心、重心、內心、垂心，還有其他六個特殊點:九點圓圓心$(Ninepo\text{int})$，布洛卡兒點($Brocard$)，費馬點($Femat$)，熱爾崗點($Gergonne$)，奈格爾點($Nagel$)，斯俾克點($Spie\text{ker}$)，等連接三頂點分割三角形的面積比作統整與歸納。

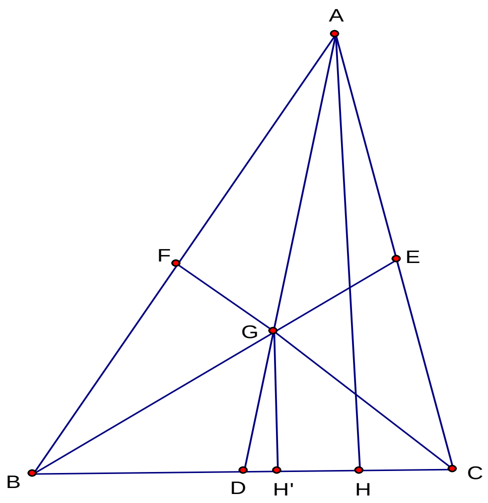
參、　研究設備及器材

一、筆記型電腦

二、印表機

肆、　研究過程或方法

一、重心G:三角形三條中線的交點，面積比$[GBC]:[GCA]:[GAB]$=1:1:1。



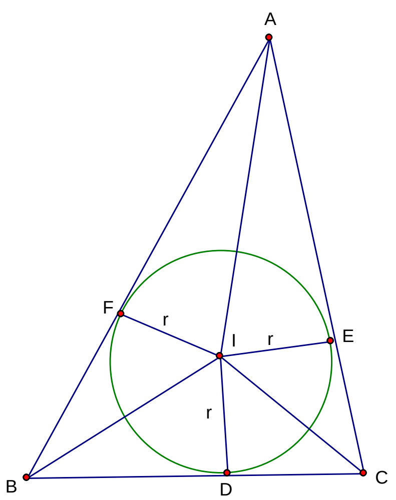
[證明]:過 G 、 A 分別作 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{GH'}$ ， $\overline{AH}$ 根據重心性質知 $\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}$

可知 $\overline{GH'}=\frac{1}{3}\overline{AH}$ ， $a\Delta GBC=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{GH'}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\frac{1}{3}\overline{AH}=\frac{1}{3}a\Delta ABC$ 同理可證

$a\Delta GCA=\frac{1}{3}a\Delta ABC$ ， $a\Delta GAB=\frac{1}{3}a\Delta ABC$ ，因此面積比 $[GBC]:[GCA]:[GAB]=1:1:1$ 。

二、內心 I :三角形三個內角平分線的交點，也是三角形內切圓的圓心，

面積比 $[IBC]:[ICA]:[IAB]=a:b:c$



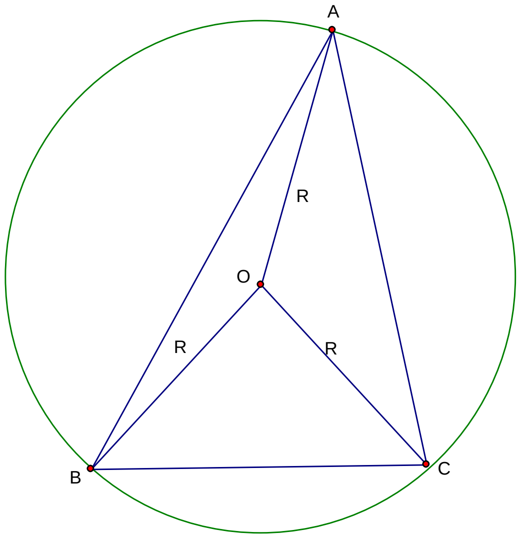
[證明]: $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$ (內切圓半徑)，

$$a\Delta IBC:a\Delta ICA:a\Delta IAB=\frac{1}{2}ar:\frac{1}{2}br:\frac{1}{2}cr=a:b:c$$

因此面積比 $[IBC]:[ICA]:[IAB]=a:b:c$

三、外心 O :三角形三邊中垂線的交點，也是三角形外接圓的圓心，

$$\text{面積比}[OBC]:[OCA]:[OAB]\begin{array}{l}=a\cos A:b\cos B:c\cos C\\=a^2\left(b^2+c^2-a^2\right):b^2\left(c^2+a^2-b^2\right):c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\end{array}$$



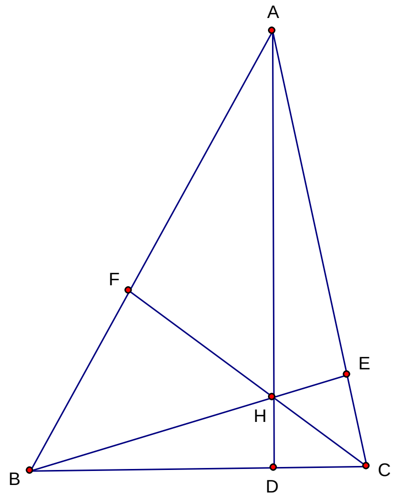
[證明]: $\angle BOC = 2\angle A$，$\angle COA = 2\angle B$，$\angle AOB = 2\angle C$

$$
\begin{aligned}
& a\Delta OBC : a\Delta OCA : a\Delta OAB \\
&= \frac{1}{2}R^2 \sin 2A : \frac{1}{2}R^2 \sin 2B : \frac{1}{2}R^2 \sin 2C \\
&= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \\
&= 2\sin A \cos A : 2\sin B \cos B : 2\sin C \cos C \\
&= \frac{a}{2R}\cos A : \frac{b}{2R}\cos B : \frac{c}{2R}\cos C \\
&= a\cos A : b\cos B : c\cos C \\
&= a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} : b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} : c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\
&= a^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} : b^2\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2abc} : c^2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc} \\
&= a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) : b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) : c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)
\end{aligned}
$$

因此面積比 $[OBC]:[OCA]:[OAB]$ $\begin{aligned} &= a\cos A : b\cos B : c\cos C \\ &= a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) : b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) : c^2\left(a^2+b^2-c^2\right) \end{aligned}$

四、垂心 H :三角形三條高的交點，

面積比 $[HBC]:[HCA]:[HAB]$ $\begin{aligned} &= a\sec A : b\sec B : c\sec C \\ &= \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \end{aligned}$



[證明]: $a\Delta HAB : a\Delta HCA = \overline{BD} : \overline{CD}$ ， $a\Delta HAB : a\Delta HBC = \overline{AE} : \overline{EC}$ ，

$\overline{CD} = b\cos C$ ， $\overline{BD} = c\cos B$ ， $\overline{EC} = a\cos C$ ， $\overline{AE} = c\cos A$ ，

得 $a\Delta HAB : a\Delta HCA = c\cos B : b\cos C$ ， $a\Delta HAB : a\Delta HBC = c\cos A : a\cos C$

$$\begin{aligned}
&a\Delta HBC : a\Delta HCA : a\Delta HAB \\
&= a\cos B\cos C : b\cos C\cos A : c\cos A\cos B \\
&= \frac{a\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C} : \frac{b\cos C\cos A}{\cos A\cos B\cos C} : \frac{c\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C} \\
&= \frac{a}{\cos A} : \frac{b}{\cos B} : \frac{c}{\cos C} \\
&= a\sec A : b\sec B : c\sec C \\
&= a\cdot\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} : b\cdot\frac{2ca}{c^2+a^2-b^2} : c\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2} \\
&= \frac{2abc}{b^2+c^2-a^2} : \frac{2abc}{c^2+a^2-b^2} : \frac{2abc}{a^2+b^2-c^2} \\
&= \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}
\end{aligned}$$

$$= a\sec A : b\sec B : c\sec C$$

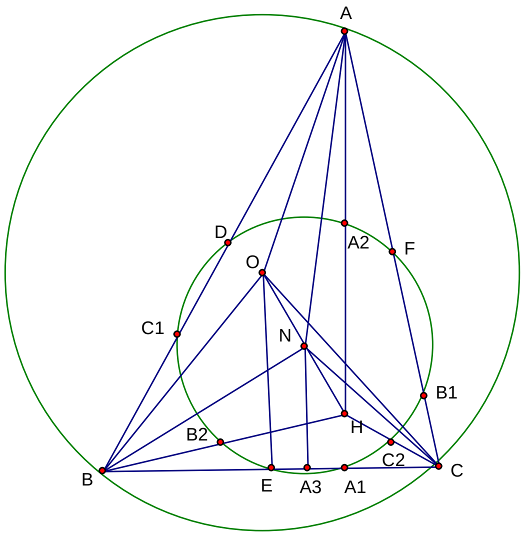
因此面積比 $[HBC]:[HCA]:[HAB] = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$

五、九點圓圓心 N :通過三角形三邊中點 D,E,F ，三高的垂足 A_1,B_1,C_1 ，頂點到垂心的三條線段的中點 A_2,B_2,C_2 ，此九點的圓圓心 N 。

面積比 $[NBC]:[NCA]:[NAB]=[OBC]+[HBC]:[OCA]+[HCA]:[OAB]+[HBC]$

性質:(1)三角形的外接圓半徑是九點圓半徑的 2 倍

(2)三角形的九點圓圓心在外心和垂心連線段的中點



[證明]: $a\Delta NBC=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{NA_3}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\left(\frac{\overline{OE}+\overline{HA_1}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\overline{BC}\cdot\overline{OE}}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\overline{BC}\cdot\overline{HA_1}}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(a\Delta OBC+a\Delta HBC\right)$

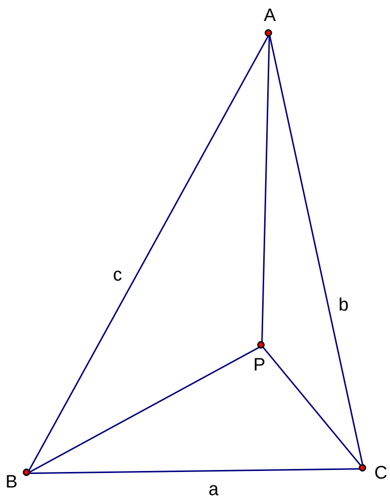
同理 $a\Delta NCA=\frac{1}{2}\left(a\Delta OCA+a\Delta HCA\right)$，$a\Delta NAB=\frac{1}{2}\left(a\Delta OAB+a\Delta HAB\right)$

因此面積比[NBC]:[NCA]:[NAB]=[OBC]+[HBC]:[OCA]+[HCA]:[OAB]+[HBC]

六、布洛卡兒點($Brocard$) P: 三角形內部一點 P 具有 $\angle PBC=\angle PCA=\angle PAB=\alpha$

面積比[PBC]:[PCA]:[PAB]= $\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$

性質: $\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$



[證明]:令 $\overline{BC}=a$ ， $\overline{CA}=b$ ， $\overline{AB}=c$ ， $\angle CPA=\pi-A$ ， $\angle BPA=\pi-B$ ， $\angle CPB=\pi-C$

$$\frac{\overline{PA}}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin(\pi-A)}\Rightarrow\overline{PA}=\frac{b\sin\alpha}{\sin A}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin(\pi-B)}\Rightarrow\overline{PB}=\frac{c\sin\alpha}{\sin B}$$

$$\frac{\overline{PC}}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(\pi-C)}\Rightarrow\overline{PC}=\frac{a\sin\alpha}{\sin C}$$

$$a\Delta PBC:a\Delta PCA:a\Delta PAB=\frac{1}{2}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\sin C:\frac{1}{2}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PA}\cdot\sin A:\frac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PB}\sin B$$

$$=\frac{c\sin\alpha}{\sin B}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sin C}\cdot\sin C:\frac{a\sin\alpha}{\sin C}\cdot\frac{b\sin\alpha}{\sin A}\cdot\sin A:\frac{b\sin\alpha}{\sin A}\cdot\frac{c\sin\alpha}{\sin B}\cdot\sin B$$

$$=\frac{ca}{\sin B}:\frac{ab}{\sin C}:\frac{bc}{\sin A}=\frac{ca}{\frac{b}{2R}}:\frac{ab}{\frac{c}{2R}}:\frac{bc}{\frac{a}{2R}}$$

$$=\frac{ca}{b}:\frac{ab}{c}:\frac{bc}{a}$$

$$=\frac{abc}{b^2}:\frac{abc}{c^2}:\frac{abc}{a^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$$

因此面積比[PBC]:[PCA]:[PAB] $=\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$

七、費馬點($Femat$) Q: 三角形內部一點 Q 到三角形三頂點的距離和最小

面積比[QBC]:[QCA]:[QAB]

$$=\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

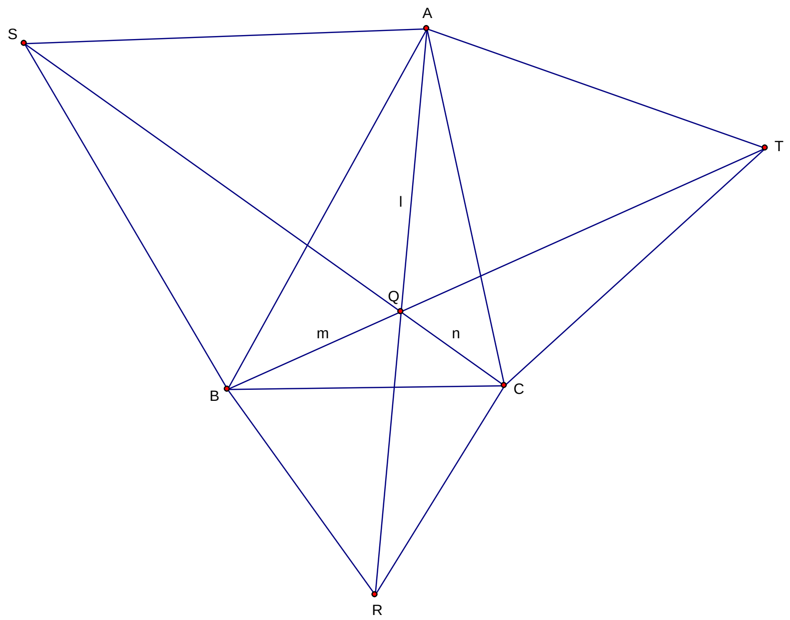
$$\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

$$\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]$$

$$=a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$$

性質:(1) $\angle BQC=\angle CQA=\angle AQB=120^0$

(2) $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=\overline{AR}=\overline{BT}=\overline{CS}$ 最小



[證明]:令 $\overline{QA}=l$ ，$\overline{QB}=m$ ，$\overline{QC}=n$　$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=l+m+n=\overline{BT}$

$(l+m+n)^2=b^2+c^2-2bc\cos(60^0+A)=b^2+c^2-2bc\left(\cos 60^0\cos A-\sin 60^0\sin A\right)$

$=b^2+c^2-bc\cos A+\sqrt{3}bc\sin A$

$=b^2+c^2-bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}\Delta$

其中 $\Delta=a\Delta ABC$ ，得 $l+m+n=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}\Delta}\cdots(1)$

在 ΔQAB 中，$l^2+m^2-2lm\cos 120^0=c^2\Rightarrow l^2+m^2+lm=c^2\cdots(2)$

在 ΔQBC 中，$m^2+n^2-2mn\cos 120^0=a^2\Rightarrow m^2+n^2+mn=a^2\cdots(3)$

在 ΔQCA 中，$n^2+l^2-2nl\cos 120^0=b^2\Rightarrow n^2+l^2+nl=b^2\cdots(4)$

(2)-(3)

$l^2-n^2+lm-mn=c^2-a^2\Rightarrow(l+n)(l-m)+m(l+n)=c^2-a^2$

$\Rightarrow(l-n)(l+m+n)=c^2-a^2\Rightarrow l-n=\dfrac{c^2-a^2}{l+m+n}\ldots(5)$

(3)-(4)

$$m^2-l^2+mn-nl=a^2-b^2 \Rightarrow (m+l)(m-l)+n(m-l)=(m-l)(m+n+l)=a^2-b^2$$

$$\Rightarrow (m-l)(l+m+n)=a^2-b^2 \Rightarrow m-l=\frac{a^2-b^2}{l+m+n} \Rightarrow m=l+\frac{a^2-b^2}{l+m+n}=n+\frac{c^2-b^2}{l+m+n} \ldots(6)$$

$$l+m+n=3n+\frac{2c^2-a^2-b^2}{l+m+n} \Rightarrow n=\frac{(l+m+n)^2-(2c^2-a^2-b^2)}{3(l+m+n)}$$

將 $n+(5)+(6)=\dfrac{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\Delta-(2c^2-a^2-b^2)}{3(l+m+n)}=\dfrac{\frac{3}{2}(a^2+b^2-c^2)+2\sqrt{3}\Delta}{3(l+m+n)}$

$$=\frac{(a^2+b^2-c^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}$$

$$\therefore l=\frac{(b^2+c^2-a^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}\text{，}m=\frac{(c^2+a^2-b^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}\text{，}n=\frac{(a^2+b^2-c^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}$$

$$a\Delta QBC : a\Delta QCA : a\Delta QAB=\frac{1}{2}\cdot mn\cdot\sin 120^0 : \frac{1}{2}\cdot nl\cdot\sin 120^0 : \frac{1}{2}\cdot lm\sin 120^0$$

$$=mn : nl : lm$$

$$=\left[(c^2+a^2-b^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[(a^2+b^2-c^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

$$\left[(a^2+b^2-c^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[(b^2+c^2-a^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

$$\left[(b^2+c^2-a^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[(c^2+a^2-b^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]$$

$$=\frac{1}{b^2+c^2-a^2+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}:\frac{1}{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}$$

$$=\frac{1}{2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A}:\frac{1}{2ca\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}ca\sin B}:$$

$$\frac{1}{2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C}$$

$$=\frac{1}{2bc\left(\cos A+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin A\right)}:\frac{1}{2ca\left(\cos B+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos B\right)}:\frac{1}{2ab\left(\cos C+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin C\right)}$$

$$=\frac{a}{\frac{4}{\sqrt{3}}abc\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)}:\frac{b}{\frac{4}{\sqrt{3}}abc\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)}:\frac{c}{\frac{4}{\sqrt{3}}abc\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C\right)}$$

$$=\frac{a}{\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}:\frac{b}{\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}:\frac{c}{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$$

因此面積比$[QBC]:[QCA]:[QAB]=\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$

$$\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

$$\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]$$

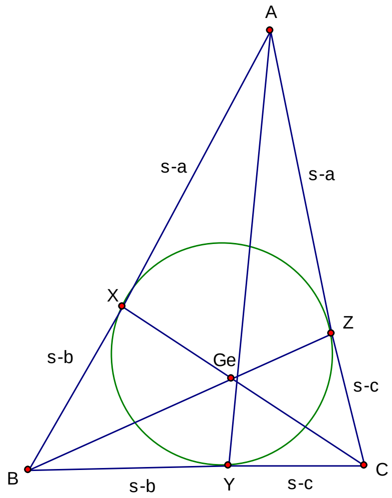
$$=a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$$

八、熱爾崗點$(Gergonne)\,Ge$：ΔABC 的內切圓與三邊 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 切於 X,Y,Z 三直線

$\overleftrightarrow{AY}$，$\overleftrightarrow{BZ}$，$\overleftrightarrow{CX}$ 交於一點Ge，因為$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}\cdot\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}\cdot\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}}=\frac{s-a}{s-b}\cdot\frac{s-b}{s-c}\cdot\frac{s-c}{s-a}=1$，由塞瓦定理知

$\overleftrightarrow{AY}$，$\overleftrightarrow{BZ}$，$\overleftrightarrow{CX}$ 必交於一點Ge。

面積比$[GeBC]:[GeCA]:[GeAB]=\frac{1}{s-a}:\frac{1}{s-b}:\frac{1}{s-c}$，$s=\frac{a+b+c}{2}$(半周長)



[證明]:由切線段性質: $\overline{AX}=\overline{AZ}=s-a$ ，$\overline{BX}=\overline{BY}=s-b$ ，$\overline{CY}=\overline{CZ}=s-c$

利用孟氏定理: $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}}\cdot\dfrac{\overline{BGe}}{\overline{GeZ}}\cdot\dfrac{\overline{ZC}}{\overline{CA}}=1\Rightarrow\dfrac{s-a}{s-b}\cdot\dfrac{\overline{BGe}}{\overline{GeZ}}\cdot\dfrac{s-c}{b}=1\Rightarrow\dfrac{\overline{BGe}}{\overline{GeZ}}=\dfrac{b(s-b)}{(s-a)(s-c)}$

得 $\dfrac{\overline{BGe}}{\overline{BZ}}=\dfrac{b(s-b)}{(s-a)(s-c)+b(s-b)}$ ，$a\Delta GeAB=\dfrac{\overline{BGe}}{\overline{BZ}}\cdot\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{AC}}\cdot a\Delta ABC$

$$a\Delta GeAB=\frac{b(s-b)}{(s-a)(s-c)+b(s-b)}\cdot\frac{s-a}{b}a\Delta ABC=\frac{(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-c)+b(s-b)}\cdot a\Delta ABC$$

同理 $a\Delta GeBC=\dfrac{(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-c)+b(s-b)}\cdot a\Delta ABC$

$$a\Delta GeCA=\frac{(s-c)(s-a)}{(s-b)(s-c)+a(s-a)}\cdot a\Delta ABC$$

而 $(s-a)(s-c)+b(s-b)-[(s-b)(s-c)+a(s-a)]=(s-c)(b-a)+s(b-a)-(b^2-a^2)$
$=(b-a)(s-c+s-a-b)=(b-a)(2s-a-b-c)=(b-a)\cdot 0=0$

即 $(s-a)(s-c)+b(s-b)=(s-b)(s-c)+a(s-a)$

$$a\Delta GeBC:a\Delta GeCA:a\Delta GeAB=(s-b)(s-c):(s-c)(s-a):(s-a)(s-b)$$
$$=\frac{1}{s-a}:\frac{1}{s-b}:\frac{1}{s-c}$$

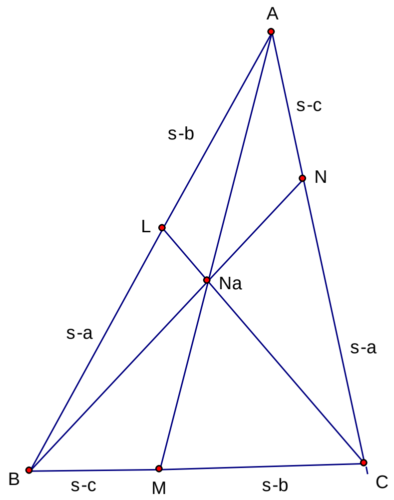
因此面積比$[GeBC]:[GeCA]:[GeAB]=\dfrac{1}{s-a}:\dfrac{1}{s-b}:\dfrac{1}{s-c}$ ，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$(半周長)

九、奈格爾點($Nagel$) $Na:\Delta ABC$的三個傍切圓與三邊 $\overline{AB}$ ，$\overline{BC}$ ，$\overline{CA}$ 切於L,M,N三直線

$\overleftrightarrow{AM}$ ，$\overleftrightarrow{BN}$ ，$\overleftrightarrow{CL}$交於一點Na ，因為$\dfrac{\overline{AL}}{\overline{LB}}\cdot\dfrac{\overline{BM}}{\overline{MC}}\cdot\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NA}}=\dfrac{s-b}{s-a}\cdot\dfrac{s-c}{s-b}\cdot\dfrac{s-a}{s-c}=1$，由塞瓦定理

知 $\overleftrightarrow{AM}$ ，$\overleftrightarrow{BN}$ ，$\overleftrightarrow{CL}$ 必交於一點 Na 。

面積比$[NaBC]:[NaCA]:[NaAB]=(s-a):(s-b):(s-c)$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$(半周長)



[證明]:由傍切圓切線段性質，我們有 $\overline{BL}=\overline{CN}=s-a$ ，$\overline{AL}=\overline{CM}=s-b$ ，

$\overline{AN}=\overline{BM}=s-c$ ，利用孟氏定理:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LB}}\cdot\frac{\overline{BNa}}{\overline{NaN}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{CA}}=1\Rightarrow\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{\overline{BNa}}{\overline{NaN}}\cdot\frac{s-a}{b}=1\Rightarrow\frac{\overline{BNa}}{\overline{NaN}}=\frac{b}{s-b}$$

得 $\dfrac{\overline{BNa}}{\overline{BN}}=\dfrac{b}{s}$ ，$a\Delta NaAB=\dfrac{\overline{BNa}}{\overline{BN}}\cdot\dfrac{\overline{AN}}{\overline{NC}}\cdot a\Delta ABC$

$$a\Delta NaAB=\frac{b}{s}\cdot\frac{s-c}{b}a\Delta ABC=\frac{s-c}{s}\cdot a\Delta ABC$$

同理 $a\Delta NaBC==\dfrac{s-a}{s}\cdot a\Delta ABC$ ， $a\Delta NaCA==\dfrac{s-b}{s}\cdot a\Delta ABC$

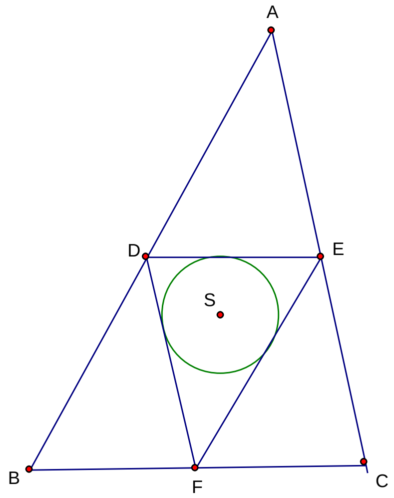
$$a\Delta NaBC:a\Delta NaCA:a\Delta NaAB=\frac{s-a}{s}:\frac{s-b}{s}:\frac{s-c}{s}=(s-a):(s-b):(s-c)$$

因此面積比$[NaBC]:[NaCA]:[NaAB]=(s-a):(s-b):(s-c)$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$(半周長)

十、斯俾克點($Spieker$) S:三角形三邊中點所連成的中點三角形ΔDEF 的內切圓圓心S ，

面積比$[SBC]:[SCA]:[SAB]=(b+c):(c+a):(a+b)$

性質: 斯俾克點($Spieker$)是三角形的內心 I 與奈格爾點($Nagel$) Na 的中點



[證明]:利用性質可知:

$$a\Delta SBC=\frac{a\Delta IBC+a\Delta NaBC}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{s-a}{(s-a)+(s-b)+(s-c)}\right)\cdot a\Delta ABC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2s}+\frac{s-a}{s}\right)\cdot a\Delta ABC=\frac{2s-a}{4s}\cdot a\Delta ABC=\frac{b+c}{4s}\cdot a\Delta ABC$$

同理 $a\Delta SCA=\frac{c+a}{4s}\cdot a\Delta ABC$ ， $a\Delta SAB=\frac{a+b}{4s}\cdot a\Delta ABC$

$$a\Delta SBC:a\Delta SCA:a\Delta SAB=\frac{b+c}{4s}:\frac{c+a}{4s}:\frac{a+b}{4s}=(b+c):(c+a):(a+b)$$

因此面積比 $[SBC]:[SCA]:[SAB]=(b+c):(c+a):(a+b)$

伍、 研究結果

我們將這十個銳角三角形內的特殊點分割三角形的面積比作個總表以方便我們運用

Z	$a\Delta ZBC:a\Delta ZCA:a\Delta ZAB$
重心 G	$1:1:1$
內心 I	$a:b:c$
外心 O	$a\cos A:b\cos B:c\cos C$
垂心 H	$a\sec A:b\sec B:c\sec C$
九點圓圓心 N	外心+垂心
布洛卡兒點 P	$\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$
費馬點 Q	$a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$

熱爾崗點 Ge	$\frac{1}{s-a}:\frac{1}{s-b}:\frac{1}{s-c}$
奈格爾點 Na	$(s-a):(s-b):(s-c)$
斯俾克點 S	$(b+c):(c+a):(a+b)$

我們回到2020年亞太數學奧林匹亞競賽初選考試試題第二部分的非選擇題二: 將三角形 XYZ 的面積記為[XYZ]，已知三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，$\overline{AB}=8$，試回答下列問題:

(1)(3 分)設 ΔABC 的外心 O ，試求面積比[OBC]:[OCA]:[OAB]

(2)(4 分)設 ΔABC 的垂心 H ，試求面積比[HBC]:[HCA]:[HAB]

解: $a=\overline{BC}=6$，$b=\overline{CA}=7$，$c=\overline{AB}=8$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{49+64-36}{112}=\frac{11}{16}$

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{64+36-49}{96}=\frac{17}{32}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{36+49-64}{84}=\frac{1}{4}$

$\sec A=\frac{16}{11},\sec B=\frac{32}{17},\sec C=4$

面積比[OBC]:[OCA]:[OAB] $=a\cos A:b\cos B:c\cos C=6\times\frac{11}{16}:7\times\frac{17}{32}:8\times\frac{1}{4}=132:119:64$

面積比[HBC]:[HCA]:[HAB] $=51:77:187$

同理我們也可以求出其他的面積比。

九點圓圓心 N :

面積比[OBC]:[OCA]:[OAB] $=132:119:64$

面積比[HBC]:[HCA]:[HAB] $=51:77:187$

$132+119+64=51+77+187=315$

面積比[NBC]:[NCA]:[NAB]=[OBC]+[HBC]:[OCA]+[HCA]:[OAB]+[HBC]

=(132+51):(119+77):(64+187)=183:196:251

布洛卡兒點 P :

面積比[PBC]:[PCA]:[PAB]= $\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}=\frac{1}{49}:\frac{1}{64}:\frac{1}{36}=2304:1764:3136=576:441:784$

費馬點 Q :

$\Delta=\dfrac{21\sqrt{15}}{4}$ ， $a^2+b^2-c^2=21$ ， $b^2+c^2-a^2=77$ ， $c^2+a^2-b^2=51$

面積比$[QBC]:[QCA]:[QAB]$ $=\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$

$\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$

$\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]$

$=\left(51+21\sqrt{5}\right)\left(21+21\sqrt{5}\right):\left(21+21\sqrt{5}\right)\left(77+21\sqrt{5}\right):\left(77+21\sqrt{5}\right)\left(51+21\sqrt{5}\right)$

$=\left(78+36\sqrt{5}\right):\left(91+49\sqrt{5}\right):\left(146+64\sqrt{5}\right)$

熱爾崗點Ge:

$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{6+7+8}{2}=\dfrac{21}{2}$

面積比$[GeBC]:[GeCA]:[GeAB]=\dfrac{1}{s-a}:\dfrac{1}{s-b}:\dfrac{1}{s-c}=\dfrac{1}{\frac{9}{2}}:\dfrac{1}{\frac{7}{2}}:\dfrac{1}{\frac{5}{2}}=35:45:63$

奈格爾點Na:

$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{6+7+8}{2}=\dfrac{21}{2}$

面積比$[NaBC]:[NaCA]:[NaAB]=(s-a):(s-b):(s-c)=\dfrac{9}{2}:\dfrac{7}{2}:\dfrac{5}{2}=9:7:5$

斯俾克點S:

面積比$[SBC]:[SCA]:[SAB]=(b+c):(c+a):(a+b)=15:14:13$

所有銳角三角形內部的十個特殊點連接三頂點分割三角形的面積比如下表:

Z	$a\Delta ZBC:a\Delta ZCA:a\Delta ZAB$
重心G	$1:1:1$
內心I	$6:7:8$
外心O	$132:119:64$

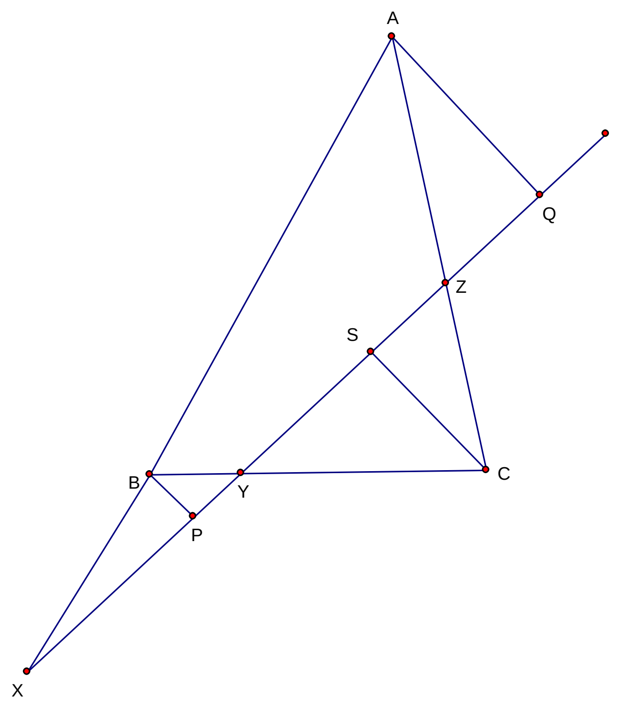
垂心 H	$51:77:187$
九點圓圓心 N	$183:196:251$
布洛卡兒點 P	$576:441:784$
費馬點 Q	$(78+36\sqrt{5}):(91+49\sqrt{5}):(146+64\sqrt{5})$
熱爾崗點 Ge	$35:45:63$
奈格爾點 Na	$9:7:5$
斯俾克點 S	$15:14:13$

陸、 討論

我們在前面的研究過程中有用到許多幾何性質我們要一一予以證明:

一、孟氏定理:一直線與 ΔABC 的三邊 $\overline{AB}$ ， $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ 或它們的延長線分別交於 X,Y,Z ，則

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}\cdot\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}\cdot\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}}=1$$

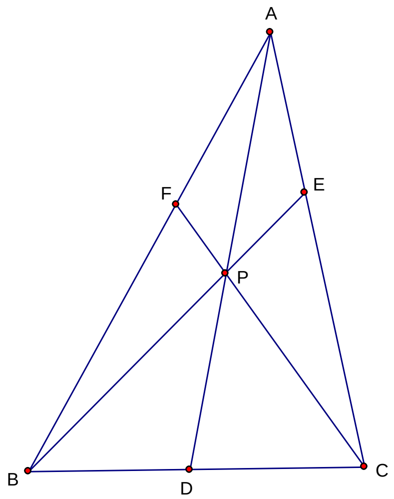


證明:如圖所示，過 A, B, C 分別作直線 XYZ 的垂線，設垂足分別為 Q, P, S 由三角形相似

有關知識有: $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{BP}}, \dfrac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{CS}}, \dfrac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \dfrac{\overline{CS}}{\overline{AQ}}$ ，三式相乘即得。

二、塞瓦定理: D, E, F 分別是 ΔABC 的三邊 $\overline{BC}$ ，$\overline{CA}$ ，$\overline{AB}$ 上的點，且 $\overline{AD}$ ，$\overline{BE}$ ，$\overline{CF}$ 交於

點 P ，則 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$

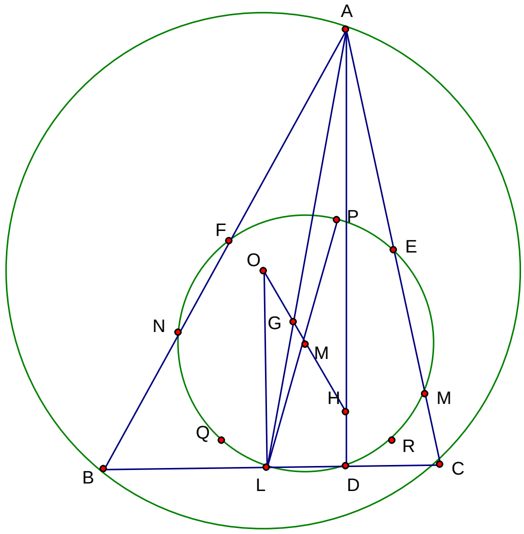


證明: $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \dfrac{a\Delta BPD}{a\Delta CPD} = \dfrac{a\Delta ABD}{a\Delta ACD} = \dfrac{a\Delta ABP}{a\Delta ACP}$ (用到分比定理)

同理 $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \dfrac{a\Delta BPC}{a\Delta ABP}, \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \dfrac{a\Delta ACP}{a\Delta BPC}$ ，三式相乘即得。

三、(一)尤拉線:三角形的外心 O 、重心 G 、垂心 H 三點共線且 $\overline{GH} = 2\,\overline{GO}$

(二)三角形的九點圓圓心在外心和垂心連線段的中點



證明:設是ΔABC的外心O，G是重心，$\overline{AL}$是中線，由重心性質得:$\overline{AG}:\overline{GL}=2:1$，

延長$\overline{OG}$至H，使$\overline{GH}=2\overline{GO}$，則有$\overline{GH}:\overline{GO}=\overline{AG}:\overline{GL}$，$\therefore \overline{OL}//\overline{AH}$，$\because \overline{OL}\perp\overline{BC}$，

$\therefore \overline{AH}\perp\overline{BC}$，延長$\overline{AH}$交$\overline{BC}$於$D$，則$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，同理$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，故$H$為$\Delta ABC$的垂心，所以$O,G,H$三點共線。

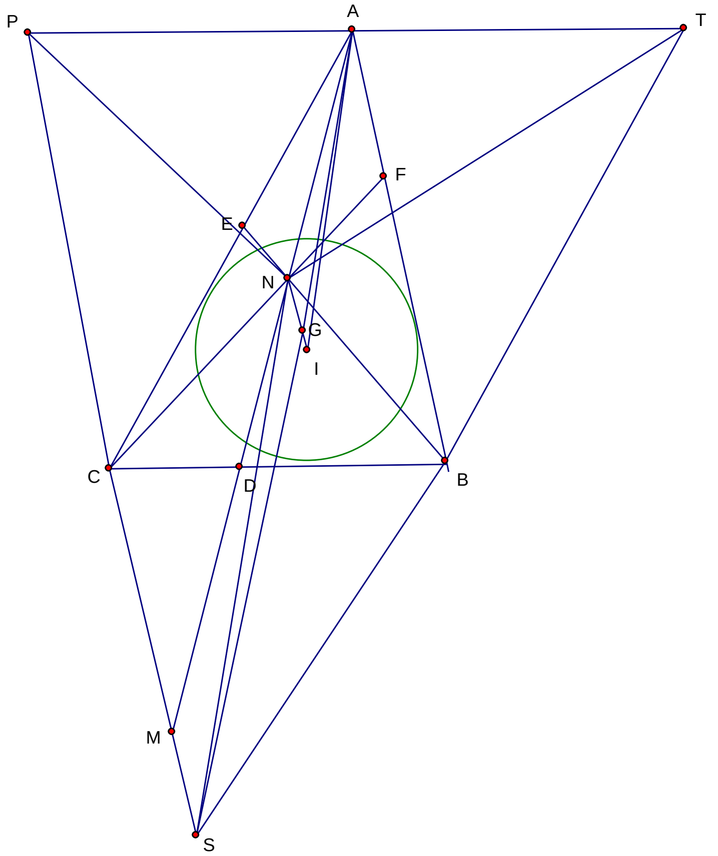
設九點圓的圓心為M，因為P,D,L在圓M上且$\angle PDL=90^0$，$\therefore \overline{PL}$為圓M的直徑，M為$\overline{PL}$的中點。$\because \overline{OL}//\overline{AD}$，$\therefore \overline{AH}:\overline{LO}=\overline{AG}:\overline{GL}=2:1$，又$\because \overline{AH}=2\overline{PH}$，

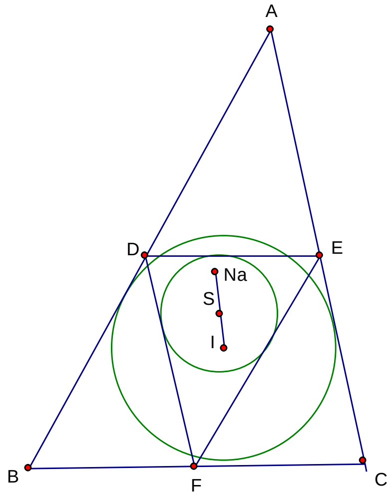
$\therefore \overline{OL}=\overline{PH}$，

$\because \overline{OL}//\overline{PH}$，$\therefore$四邊形$POLH$為平行四邊形，如圖所示，$\therefore M$為$\overline{OH}$的中點，$\therefore M$點在$\overline{OH}$上，故$O,G,M,H$四點共線。

四 、(一)奈格爾線:三角形的奈格爾點N、重心G、內心I三點共線且$\overline{NG}=2\overline{GI}$

(二) 斯俾克點(Spieker)是三角形的內心I與奈格爾點N(Nagel)的中點





證明:設在ΔABC中N,G,I分別為奈格爾點、重心、內心，分別過A,B,C三點作其對邊的平行線，兩兩相交於S,P,T三點，連接$\overline{NS},\overline{NP},\overline{NG},\overline{IG},\overline{AI}$延長$\overline{AD}$交$\overline{PS}$於$M$，$\Delta ABC \approx \Delta SPT$且相似比為 1:2，由於$G$既是$\Delta ABC$的重心又是$\Delta SPT$的重心$\therefore S,G,A$三點共線，$\because \Delta ANF \approx \Delta MNC$，$\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NM}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{MC}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{MC}}=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PM}}$ 由角平分線性質之逆定理知$\overline{NP}$平分$\angle SPT$，同理可證$\overline{NS}$平分$\angle PST$，$\overline{NT}$平分$\angle STP$，$\therefore N$為ΔSPT的內心。

又I是ΔABC的內心，G既是ΔABC的重心又是ΔSPT的重心，S,A分別是兩個相似三角形ΔABC,ΔSPT的對應頂點，故它們對應線段構成的三角形相似，從而$\Delta AGI \approx \Delta SGN$且相似比為 2:1，$\therefore \overline{NG}=2\overline{GI}$,$\angle AGI=\angle SGN$，而$S,G,A$三點共線，故$N,G,I$三點共線。

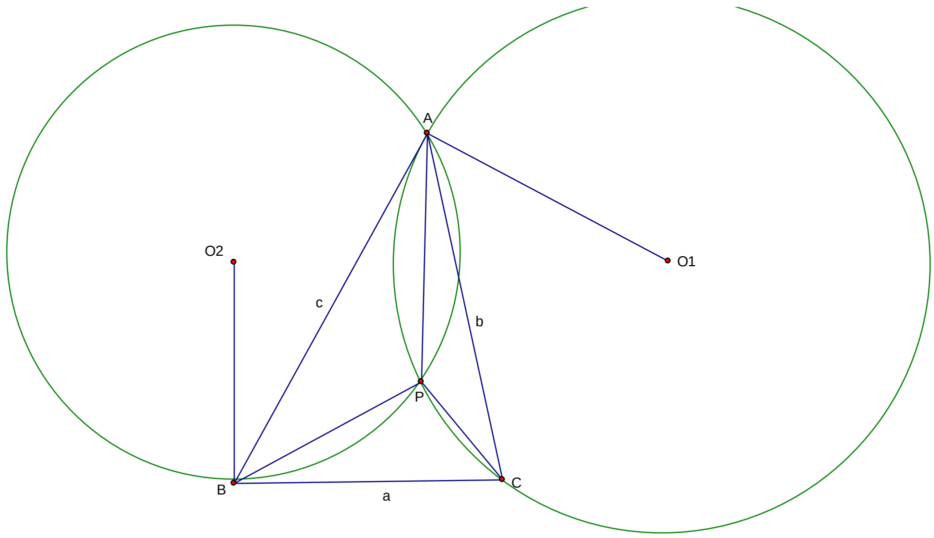
九點圓是中點三角形的外接圓，那麼類似的，我們想到了中點三角形的內切圓，由位似關係可知，ΔABC的內心I成為ΔDEF的奈格爾點，中點三角形ΔDEF的內心S在奈格爾線

上，且 $\overline{IG}=2\overline{GS}$ ，$\overline{NG}=2\overline{GI}$ ，

$$\overline{IN}=\overline{IG}+\overline{NG}=3\overline{GI}=6\overline{GS},\ \overline{IS}=\overline{IG}+\overline{GS}=3\overline{GS}\Rightarrow\overline{IN}=2\overline{IS}$$

因此 S 是 $\overline{IN}$ 的中點， 我們把這個點稱為斯俾克點。

五、布洛卡兒點(*Brocard*) P 的存在性及性質 $\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$



(一)作圖:1.過 A 作 $\overline{AB}$ 之垂線交 $\overline{AC}$ 之中垂線於 O_1 ，以 O_1 為圓心，$\overline{O_1A}$ 為半徑作圓 C_1

2. 過 B 作 $\overline{BC}$ 之垂線交 $\overline{AB}$ 之中垂線於 O_2 ，以 O_2 為圓心，$\overline{O_2B}$ 為半徑作圓 C_2

3. 圓 C_1 與圓 C_2 之交點 P ，即為布洛卡兒點(*Brocard*)。

(二)證明:$\because$ $\overline{AB}$ 為圓 C_1 之切線，: $\overline{BC}$ 為圓 C_2 之切線 $\therefore\angle PBC=\angle PCA=\angle PAB=\alpha$

令 $\overline{BC}=a$ ，$\overline{CA}=b$ ，$\overline{AB}=c$ ，$\angle CPA=\pi-A$ ，$\angle BPA=\pi-B$ ，$\angle CPB=\pi-C$

$$\frac{\overline{PA}}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin(\pi-A)}\Rightarrow\overline{PA}=\frac{b\sin\alpha}{\sin A}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin(\pi-B)}\Rightarrow\overline{PB}=\frac{c\sin\alpha}{\sin B}$$

$$\frac{\overline{PC}}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(\pi-C)}\Rightarrow\overline{PC}=\frac{a\sin\alpha}{\sin C}$$

$$a\Delta PAB + a\Delta PBC + a\Delta PCA = a\Delta ABC$$

$$\frac{1}{2}\cdot \overline{PA}\cdot \overline{PB}\cdot \sin B + \frac{1}{2}\cdot \overline{PB}\cdot \overline{PC}\cdot \sin C + \frac{1}{2}\cdot \overline{PC}\cdot \overline{PA}\sin A = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$\frac{b\sin\alpha}{\sin A}\cdot\frac{c\sin\alpha}{\sin B}\cdot\sin B + \frac{c\sin\alpha}{\sin B}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sin C}\cdot\sin C + \frac{a\sin\alpha}{\sin C}\cdot\frac{b\sin\alpha}{\sin A}\cdot\sin A = bc\sin A$$

$$\frac{4R^2\sin B\sin C\sin^2\alpha}{\sin A} + \frac{4R^2\sin C\sin A\sin^2\alpha}{\sin B} + \frac{4R^2\sin A\sin B\sin^2\alpha}{\sin C} = 4R^2\sin B\sin C\sin A$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 C\sin^2 A + \sin^2 A\sin^2 B}{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$$

即 $\csc^2\alpha = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C$

$$1+\cot^2\alpha = 1+\cot^2 A + 1+\cot^2 B + 1+\cot^2 C$$

$$\cot^2\alpha = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2 = \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A)$$
$$= (\cot A + \cot B + \cot C)^2$$

故 $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$

$\because \Delta ABC$ 中，$\angle A + \angle B + \angle C = \pi$，

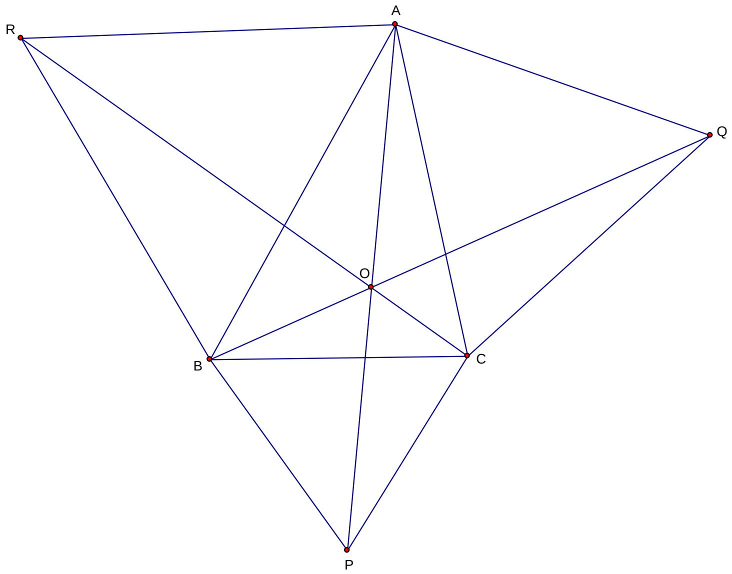
$$0 = \tan\pi = \tan[A + (B+C)] = \frac{\tan A + \tan(B+C)}{1-\tan A\cdot\tan(B+C)} \Rightarrow \tan A + \tan(B+C) = 0$$

$$\Rightarrow \tan A + \frac{\tan B + \tan C}{1-\tan B\cdot\tan C} = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C} = 0$$
$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B} + \frac{1}{\cot C} = \frac{1}{\cot A}\cdot\frac{1}{\cot B}\cdot\frac{1}{\cot C}$$

$$\Rightarrow \cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$$

六、費馬點($Femat$) O 的存在性與性質(1) $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB = 120^0$

(2) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ 最小



證明:(1)以$\because \Delta ABC$之三邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$為邊向外作正ΔBCP，正ΔCAQ，正ΔABR

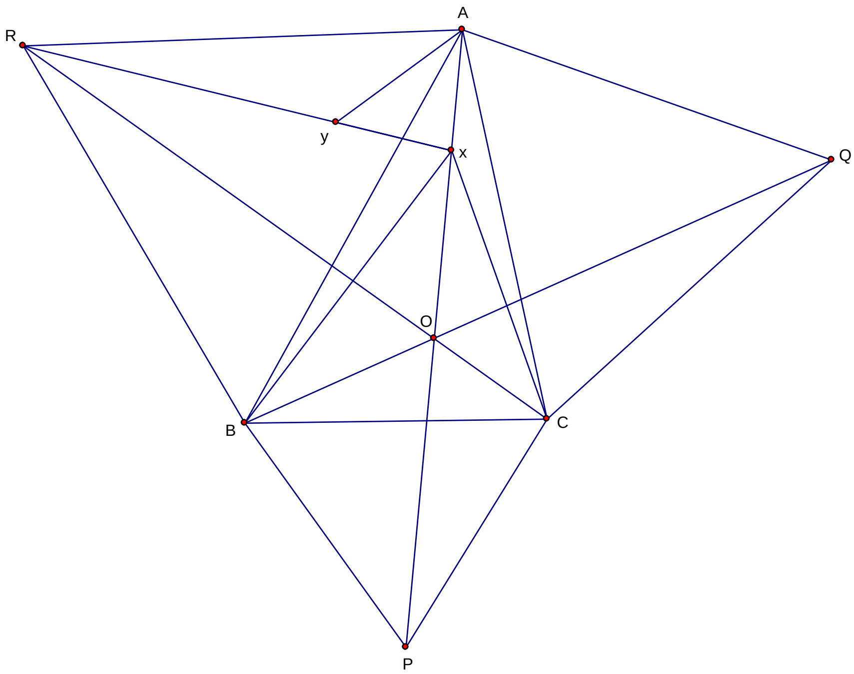
則$\overleftrightarrow{AP}$，$\overleftrightarrow{BQ}$，$\overleftrightarrow{CR}$交於一點O設$\overline{BQ}$與$\overline{CR}$交於O，連$\overline{AO},\overline{OP}$，$\because \Delta ABQ \cong \Delta ARC$

$\therefore \angle AQB=\angle ACR, \angle ABQ=\angle ARC, \overline{BQ}=\overline{CR} \Rightarrow A,Q,C,O$四點共圓，$A,R,B,O$四點共

圓，$\therefore \angle COQ=\angle CAQ=60^0, \angle QOA=\angle QCA=60^0, \angle BOR=\angle BAR=60^0,$
$\angle AOR=\angle ABR=60^0 \Rightarrow \angle COB=360^0-120^0-120^0=120^0$

又$\angle BPC=60^0$，$\therefore B,O,C,P$四點共圓，$\therefore \angle POC=\angle PBC=\angle AOR=60^0$

$\therefore A,O,P$共線，$\overleftrightarrow{AP}$，$\overleftrightarrow{BQ}$，$\overleftrightarrow{CR}$交於一點O。且$\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=120^0$



(2)當 $\angle BAC < 120^0$ 時如圖

將 x 點繞 A 轉 60^0 到 y ，則 ΔAxy 為正 Δ 且 $\Delta AyR \cong \Delta AxB$ ，$\therefore\ \overline{yR} = \overline{xB}$

$\therefore\ \overline{Ax} + \overline{Bx} + \overline{Cx} = \overline{yx} + \overline{yR} + \overline{xC} \geq \overline{CR}$ ，$\therefore\ \overline{Ax} + \overline{Bx} + \overline{Cx}$ 之最小值 $= \overline{CR}$

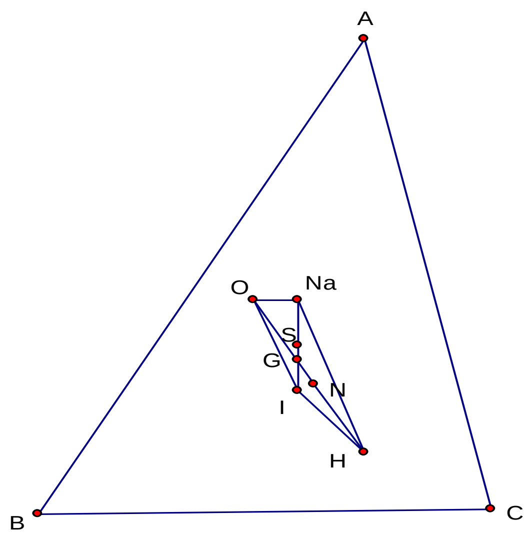
且此時 $x \equiv O$ 點，又當 $\angle BAC \geq 120^0$ 時，$O \equiv A$ $\therefore\ \overline{Ax} + \overline{Bx} + \overline{Cx}$ 之最小值 $= \overline{AB} + \overline{AC}$

此時 $x \equiv O \equiv A$ 點。

柒、 結論

我們對這十個銳角三角形的特殊點描繪至三角形中發現一個很奇特的圖形，如圖所示:
其中外心 O 、重心 G 、垂心 H 的尤拉線，內心 I 、重心 G 、奈格爾點 Na 的奈格爾線與九點圓圓心 N 、斯俾克點 S，它們剛好組成一個梯形 $IONaH$，$\because\ \overline{HG} : \overline{GO} = \overline{NaG} : \overline{GI} = 2:1$

$\therefore\ \overline{IO} // \overline{HNa}$， 底邊 $\overline{NaH}$ 是頂邊 $\overline{IO}$ 的兩倍，兩對角線的交點是重心 G ，兩對角線的中點是九點圓圓心 N 及斯俾克點 S ，這是我們研究面積比之外的另一個收穫。



捌、 參考資料及其他

一 、范瑞喜・數學標準教程・北京出版社

二、 黃呈明・高中數學精粹・博凱出版社

三、蘇柏奇＊游淑媛・三角形五心相關比例的探討・科學月刊・第 356 期

【評語】050402

1. 本研究主題主要從 2020 年 APMO 一題考題解三角形之外心、垂心求連接三頂點分割三角形的面積比，推廣至重心、內心、為基礎，進而探討其他銳角三角形內的特殊點如：九點圓圓心、費馬點等，用意良好，但須做文獻探討。
2. 本研究分別探討傳統三角形的心如重心、垂心、內心、外心外，再探討其他 6 個特殊心，但作品內容絕大公式與證明皆為已知結果，因此本作品所獲得成果相對有限。
3. 研究過程雖完整，但結果缺乏統整。
4. 本研究過程與參考資料有何相關性？須說明參考那些部分。
5. 關於直角三角形及鈍角三角形的情形尚可加以說明。
6. 討論的部份為已知，建議避免放在正文中。

作品海報

研究動機

一天數學老師在上三角函數中的正弦定理: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$(外接圓直徑)時，有重新複習三角形的外心性質，進而考我們一題 2020 年亞太數學奧林匹亞競賽初選考試試題第二部分的非選擇題二: 將三角形 XYZ 的面積記為$[XYZ]$，已知三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，$\overline{AB}=8$，試回答下列問題:

(1)(3 分)設 ΔABC 的外心 O，試求面積比$[OBC]:[OCA]:[OAB]$

(2)(4 分)設 ΔABC 的垂心 H，試求面積比$[HBC]:[HCA]:[HAB]$

我們從未想過這類的問題，因此我們開始著手進行這一系列的研究。

研究目的

我們針對銳角三角形的三角形外心、重心、內心、垂心，還有其他六個特殊點:九點圓圓心($Ninepo$ int)，布洛卡兒點($Brocard$)，費馬點($Femat$)，熱爾崗點($Gergonne$)，奈格爾點($Nagel$)，斯俾克點($Spie$ ker)，等連接三頂點分割三角形的面積比作統整與歸納。

研究設備及器材

一、筆記型電腦

二、印表機

參考資料及其他

一 、范瑞喜．數學標準教程．北京出版社

二、 黃呈明．高中數學精粹．博凱出版社

三、蘇柏奇⁎游淑媛．三角形五心相關比例的探討．科學月刊．第 356 期

研究過程或方法

六、布洛卡兒點($Brocard$) P：三角形內部一點 P 具有 $\angle PBC=\angle PCA=\angle PAB=\alpha$

面積比[PBC]:[PCA]:[PAB]$=\dfrac{1}{b^2}:\dfrac{1}{c^2}:\dfrac{1}{a^2}$

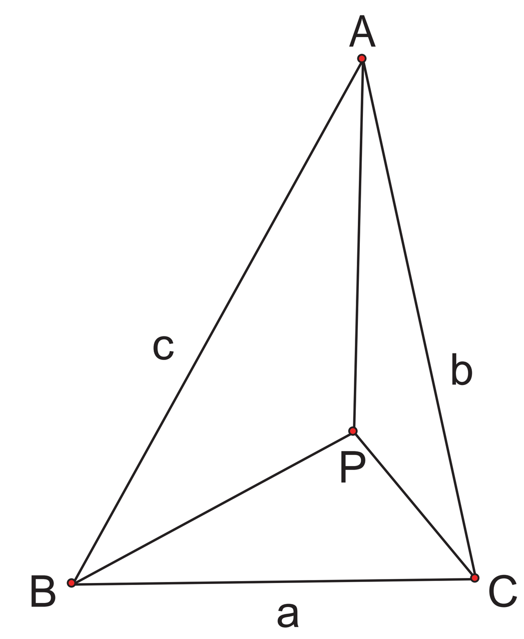
性質：$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$

[證明]:令 $\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，$\angle CPA=\pi-A$，$\angle BPA=\pi-B$，$\angle CPB=\pi-C$

$$\frac{\overline{PA}}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin(\pi-A)}\Rightarrow\overline{PA}=\frac{b\sin\alpha}{\sin A}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin(\pi-B)}\Rightarrow\overline{PB}=\frac{c\sin\alpha}{\sin B}$$

$$\frac{\overline{PC}}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(\pi-C)}\Rightarrow\overline{PC}=\frac{a\sin\alpha}{\sin C}$$



$$a\Delta PBC:a\Delta PCA:a\Delta PAB=\frac{1}{2}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\sin C:\frac{1}{2}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PA}\cdot\sin A:\frac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PB}\sin B$$

$$=\frac{c\sin\alpha}{\sin B}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sin C}\cdot\sin C:\frac{a\sin\alpha}{\sin C}\cdot\frac{b\sin\alpha}{\sin A}\cdot\sin A:\frac{b\sin\alpha}{\sin A}\cdot\frac{c\sin\alpha}{\sin B}\cdot\sin B$$

$$=\frac{ca}{\sin B}:\frac{ab}{\sin C}:\frac{bc}{\sin A}=\frac{ca}{\frac{b}{2R}}:\frac{ab}{\frac{c}{2R}}:\frac{bc}{\frac{a}{2R}}$$

$$=\frac{ca}{b}:\frac{ab}{c}:\frac{bc}{a}$$

$$=\frac{abc}{b^2}:\frac{abc}{c^2}:\frac{abc}{a^2}$$

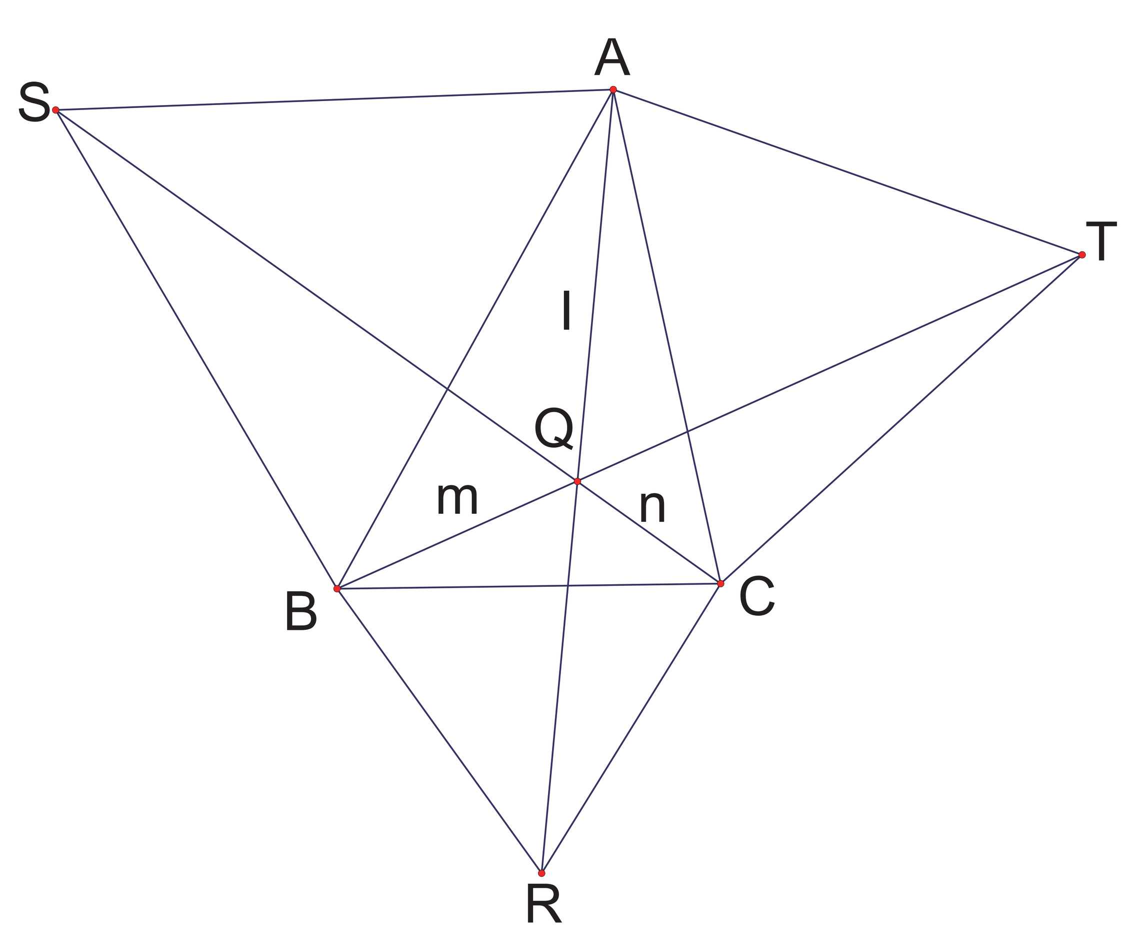
$$=\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$$

因此面積比[PBC]:[PCA]:[PAB]$=\dfrac{1}{b^2}:\dfrac{1}{c^2}:\dfrac{1}{a^2}$

七、費馬點($Femat$) Q：三角形內部一點 Q 到三角形三頂點的距離和最小

面積比[QBC]:[QCA]:[QAB] $=\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$

$$\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$



$$\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]$$

$$=a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$$

性質:(1) $\angle BQC=\angle CQA=\angle AQB=120^0$

(2) $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=\overline{AR}=\overline{BT}=\overline{CS}$ 最小

[證明]:令 $\overline{QA}=l$，$\overline{QB}=m$，$\overline{QC}=n$　$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=l+m+n=\overline{BT}$

$$(l+m+n)^2=b^2+c^2-2bc\cos(60^0+A)=b^2+c^2-2bc\left(\cos 60^0\cos A-\sin 60^0\sin A\right)$$

$$=b^2+c^2-bc\cos A+\sqrt{3}bc\sin A$$

$$=b^2+c^2-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}\Delta$$

其中 $\Delta=a\Delta ABC$，得 $l+m+n=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}\Delta}\cdots(1)$

在 ΔQAB 中，$l^2+m^2-2lm\cos 120^0=c^2\Rightarrow l^2+m^2+lm=c^2\cdots(2)$

在 ΔQBC 中，$m^2+n^2-2mn\cos 120^0=a^2\Rightarrow m^2+n^2+mn=a^2\cdots(3)$

在 ΔQCA 中，$n^2+l^2-2nl\cos 120^0=b^2\Rightarrow n^2+l^2+nl=b^2\cdots(4)$

(2)-(3)

$$l^2-n^2+lm-mn=c^2-a^2\Rightarrow(l+n)(l-m)+m(l+n)=c^2-a^2$$

$$\Rightarrow(l-n)(l+m+n)=c^2-a^2\Rightarrow l-n=\frac{c^2-a^2}{l+m+n}\ldots(5)$$

(3)-(4)

$$m^2-l^2+mn-nl=a^2-b^2\Rightarrow(m+l)(m-l)+n(m-l)=(m-l)(m+n+l)=a^2-b^2$$

$$\Rightarrow(m-l)(l+m+n)=a^2-b^2\Rightarrow m-l=\frac{a^2-b^2}{l+m+n}\Rightarrow m=l+\frac{a^2-b^2}{l+m+n}=n+\frac{c^2-b^2}{l+m+n}\ldots(6)$$

$$l+m+n=3n+\frac{2c^2-a^2-b^2}{l+m+n}\Rightarrow n=\frac{(l+m+n)^2-\left(2c^2-a^2-b^2\right)}{3(l+m+n)}$$

將 $n+(5)+(6)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\sqrt{3}\Delta-\left(2c^2-a^2-b^2\right)}{3(l+m+n)}=\dfrac{\frac{3}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)+2\sqrt{3}\Delta}{3(l+m+n)}$

$$=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}$$

$$\therefore l=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}，m=\frac{\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}，n=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}{2(l+m+n)}$$

$$a\Delta QBC:a\Delta QCA:a\Delta QAB=\frac{1}{2}\cdot mn\cdot\sin 120^0:\frac{1}{2}\cdot nl\cdot\sin 120^0:\frac{1}{2}\cdot lm\sin 120^0$$

$$=mn:nl:lm$$

$$=\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

$$\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

$$\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]$$

$$=\frac{1}{b^2+c^2-a^2+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}:\frac{1}{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta}$$

$$=\frac{1}{2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A}:\frac{1}{2ca\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}ca\sin B}:$$

$$\frac{1}{2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C}$$

$$=\frac{1}{2bc\left(\cos A+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin A\right)}:\frac{1}{2ca\left(\cos B+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos B\right)}:\frac{1}{2ab\left(\cos C+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin C\right)}$$

$$=\frac{a}{\frac{4}{\sqrt{3}}abc\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)}:\frac{b}{\frac{4}{\sqrt{3}}abc\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)}:\frac{c}{\frac{4}{\sqrt{3}}abc\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C\right)}$$

$$=\frac{a}{\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}:\frac{b}{\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}:\frac{c}{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$$

因此面積比[QBC]:[QCA]:[QAB]$=\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$

$$\left[\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]:$$

$$\left[\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]\cdot\left[\left(c^2+a^2-b^2\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right]$$

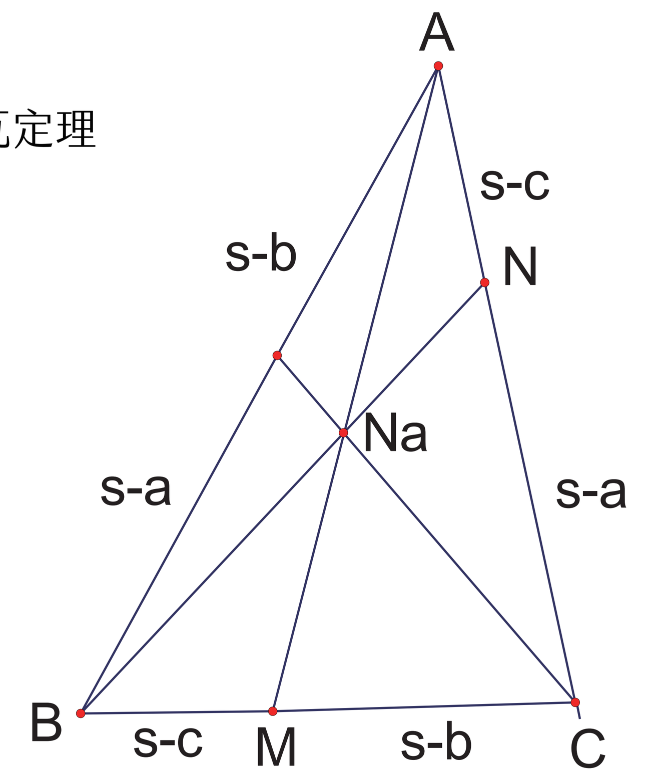
$$=a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$$

九丶奈格爾點($Nagel$) Na : ΔABC 的三個傍切圓與三邊 $\overline{AB}$ ， $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ 切於 L, M, N 三直線

$\overleftrightarrow{AM}$ ， $\overleftrightarrow{BN}$ ， $\overleftrightarrow{CL}$ 交於一點 Na ，因為 $\frac{\overline{AL}}{\overline{LB}}\cdot\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}=\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-a}{s-c}=1$ ，由塞瓦定理

知 $\overleftrightarrow{AM}$ ， $\overleftrightarrow{BN}$ ， $\overleftrightarrow{CL}$ 必交於一點 Na 。

面積比 $[NaBC]:[NaCA]:[NaAB]=(s-a):(s-b):(s-c)$ ， $s=\frac{a+b+c}{2}$ (半周長)



[證明]:

由傍切圓切線段性質，我們有 $\overline{BL}=\overline{CN}=s-a$ ， $\overline{AL}=\overline{CM}=s-b$ ，

$\overline{AN}=\overline{BM}=s-c$ ，利用孟氏定理:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LB}}\cdot\frac{\overline{BNa}}{\overline{NaN}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{CA}}=1\Rightarrow\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{\overline{BNa}}{\overline{NaN}}\cdot\frac{s-a}{b}=1\Rightarrow\frac{\overline{BNa}}{\overline{NaN}}=\frac{b}{s-b}$$

得 $\frac{\overline{BNa}}{\overline{BN}}=\frac{b}{s}$ ， $a\Delta NaAB=\frac{\overline{BNa}}{\overline{BN}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}\cdot a\Delta ABC$

$a\Delta NaAB=\frac{b}{s}\cdot\frac{s-c}{b}a\Delta ABC=\frac{s-c}{s}\cdot a\Delta ABC$

同理 $a\Delta NaBC==\frac{s-a}{s}\cdot a\Delta ABC$ ， $a\Delta NaCA==\frac{s-b}{s}\cdot a\Delta ABC$

$a\Delta NaBC:a\Delta NaCA:a\Delta NaAB=\frac{s-a}{s}:\frac{s-b}{s}:\frac{s-c}{s}=(s-a):(s-b):(s-c)$

因此面積比 $[NaBC]:[NaCA]:[NaAB]=(s-a):(s-b):(s-c)$ ， $s=\frac{a+b+c}{2}$ (半周長)

研究結果

我們將這十個銳角三角形內的特殊點分割三角形的面積比作個總表以方便我們運用

Z	$a\Delta ZBC:a\Delta ZCA:a\Delta ZAB$
重心 G	$1:1:1$
內心 I	$a:b:c$
外心 O	$a\cos A:b\cos B:c\cos C$
垂心 H	$a\sec A:b\sec B:c\sec C$
九點圓圓心 N	外心+垂心
布洛卡兒點 P	$\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$
費馬點 Q	$a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$
熱爾崗點 Ge	$\frac{1}{s-a}:\frac{1}{s-b}:\frac{1}{s-c}$
奈格爾點 Na	$(s-a):(s-b):(s-c)$
斯俾克點 S	$(b+c):(c+a):(a+b)$

結論

我們對這十個銳角三角形的特殊點描繪至三角形中發現一個很奇特的圖形，如圖所示:

其中外心 O 、重心 G 、垂心 H 的尤拉線，內心 I 、重心 G 、奈格爾點 Na 的奈格爾線與

九點圓圓心 N 、斯俾克點 S ，它們剛好組成一個梯形 $IONaH$ ，

$\because \overline{HG}:\overline{GO}=\overline{NaG}:\overline{GI}=2:1 \therefore \overline{IO}//\overline{HNa}$ ， 底邊 $\overline{NaH}$ 是頂邊 $\overline{IO}$ 的兩倍，兩對角線的

交點是重心 G ，兩對角線的中點是九點圓圓心 N 及斯俾克點 S ，這是我們研究面積比之

外的另一個收穫。