

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 地球科學科

探究精神獎

030508

機不可失，有影否？

學校名稱：桃園市立觀音高級中學

作者： 國二 莊家盛 國二 卓承恩 國二 蔡翊伶	指導老師： 杜沛倫 陳合宏
---	-----------------------------

關鍵詞：飛機高度、太陽仰角、三角測高

摘要

本校距離桃園國際機場相當之近，又剛好位於飛機降落的必經之路，時常見到影子從校園中經過，在如此得天獨厚的環境之下，可用太陽的仰角再配合二年級學到的畢氏定理進行飛機高度的計算。

本研究係用兩次的畢氏定理，先將飛機影子和觀測位置做一次畢氏定理後，再配合太陽仰角與地面形成的三角形做一次畢氏定理可求得飛機的高度，並與 flightradar24 比對當時的 GPS 高度。

研究結果顯示，用此方法算出來的飛機高度，與實際 GPS 顯示的飛機高度相當吻合，甚至達到精準的程度。

壹、研究動機

本校因與飛機場相距不遠，因此時常在上課時聽到巨大的飛機引擎聲，偶爾在下課時還可以看到飛機的影子從校園的空地中閃過，遂想起在理化課的時候，老師提過光的直進性，且當太陽角度越高時，影子開始越來越短，因此當影子出現時，太陽亦不是在正中午出現，便可以利用二上數學課所學的畢氏定理來計算飛機高度，當時經常聽到老師說地面上的影子可以用來測量實際物體的高度，因此想說是否能運用得天獨厚的地理環境，來進行飛機高度的計算，以驗證課堂上所學的課程。

貳、研究目的

- 一、了解飛機的高度是否可以用三角測高法算出
- 二、飛機在不同的太陽仰角是否可以推算其高度
- 三、算出的飛機高度與 GPS 所得之高度相差多少
- 四、可發展出一套快速計算飛機高度的方法

參、研究設備及器材

一、硬體：電腦、手機、工程計算機、量角器、筆、紙

二、軟體：Google Earth、Stellarium、flightradar24、117 報時台

肆、研究過程或方法

一、研究架構圖



二、研究步驟

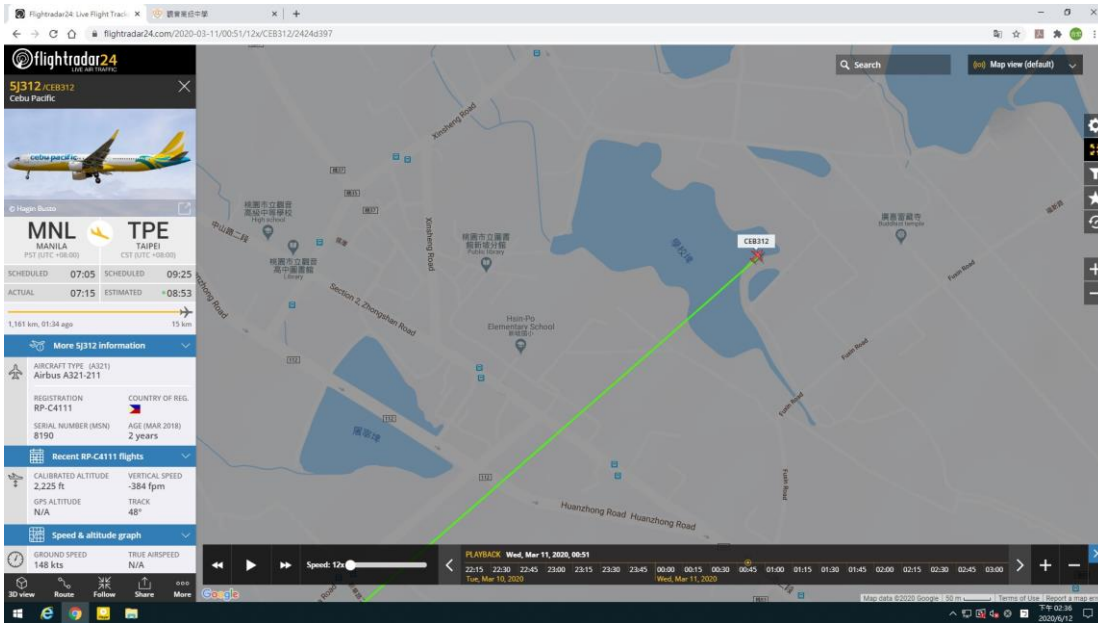
(一)、觀測事件 1

1、時間：109 年 3 月 11 日 08:50:49

2、航班：5J312

3、觀測地點：人行道警衛室右邊 20M 處(A 點)

4、觀測到飛機影子地點：人行道警衛室右邊 20M 處(A 點)



5、在 Google Earth 作圖：由飛機影子產生點作一指向太陽方位之直線，由 Stellarium 取得太陽方位角 114.34° ；仰角 35.06°



6、08 時 50 分 49 秒看到飛機影子求得飛機高度

$H=L*\tan \theta =721*\tan 35.06 = 721*0.7017 = 506M=1660ft$ (本校飛機影子觀測點之高度)，正確。

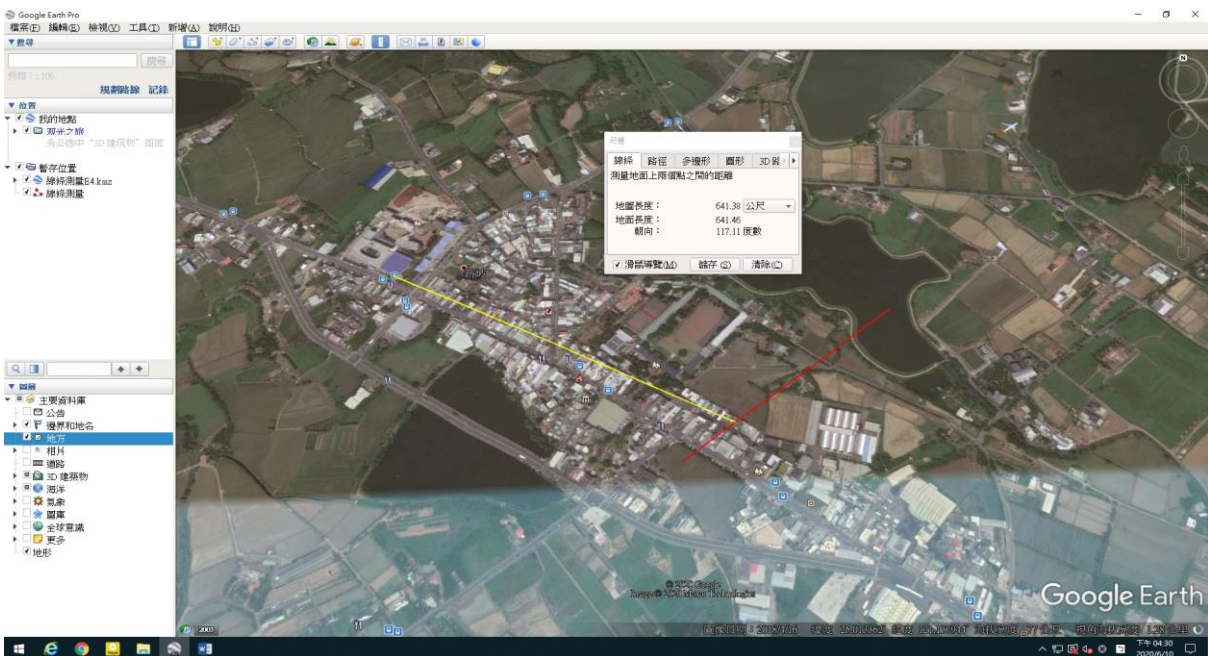
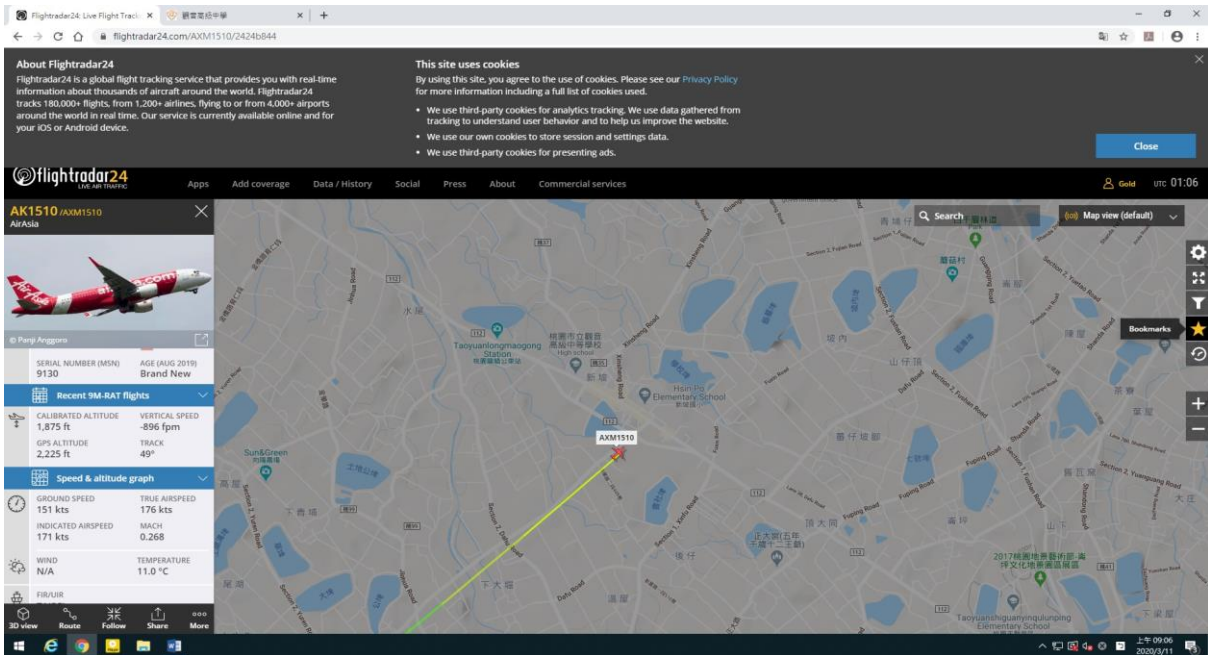
(二)、觀測事件 2

1、時間：109 年 3 月 11 日 09:06:16

2、航班：AK1510

3、觀測地點：航道西側，體育館階梯左側(B 點)

4、觀測到飛機影子地點：體育館階梯左側(B 點)



5、09 時 06 分 16 秒看到飛機影子求得飛機高度

$$H=L*\tan \theta =641*\tan 38.2^{\circ} =641*0.787 =504\text{m} =1655\text{ft}$$

與雷達觀測相符 1675ft(06 分 14 秒)~1600(06 分 20 秒)，正確。

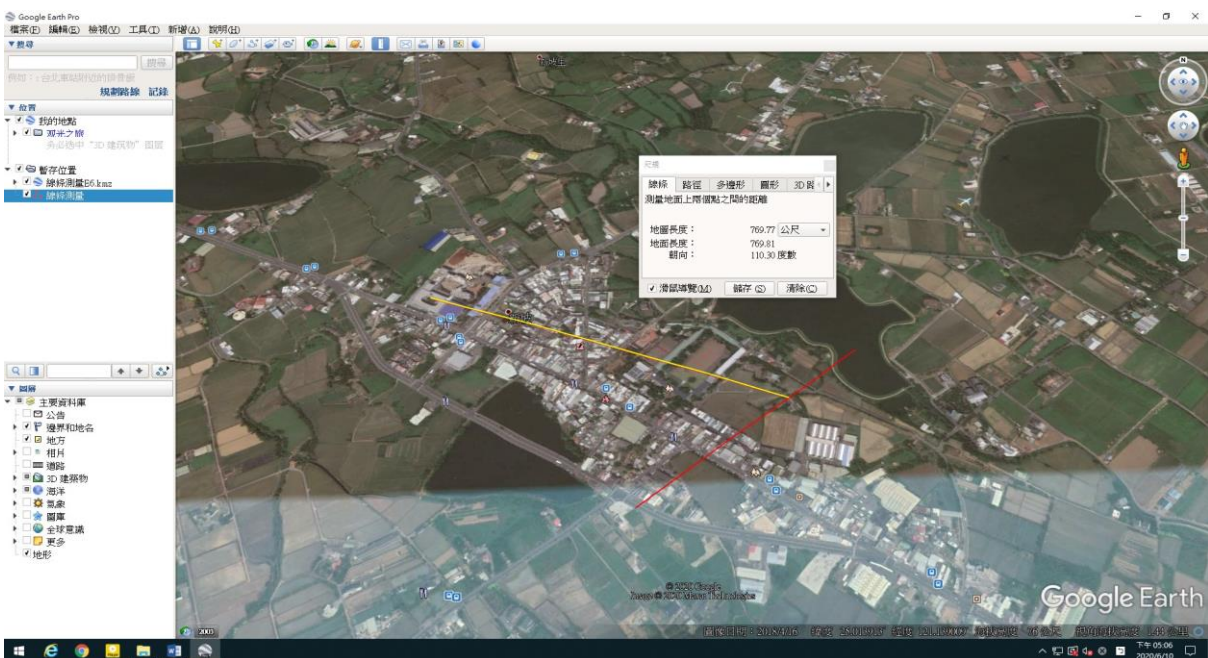
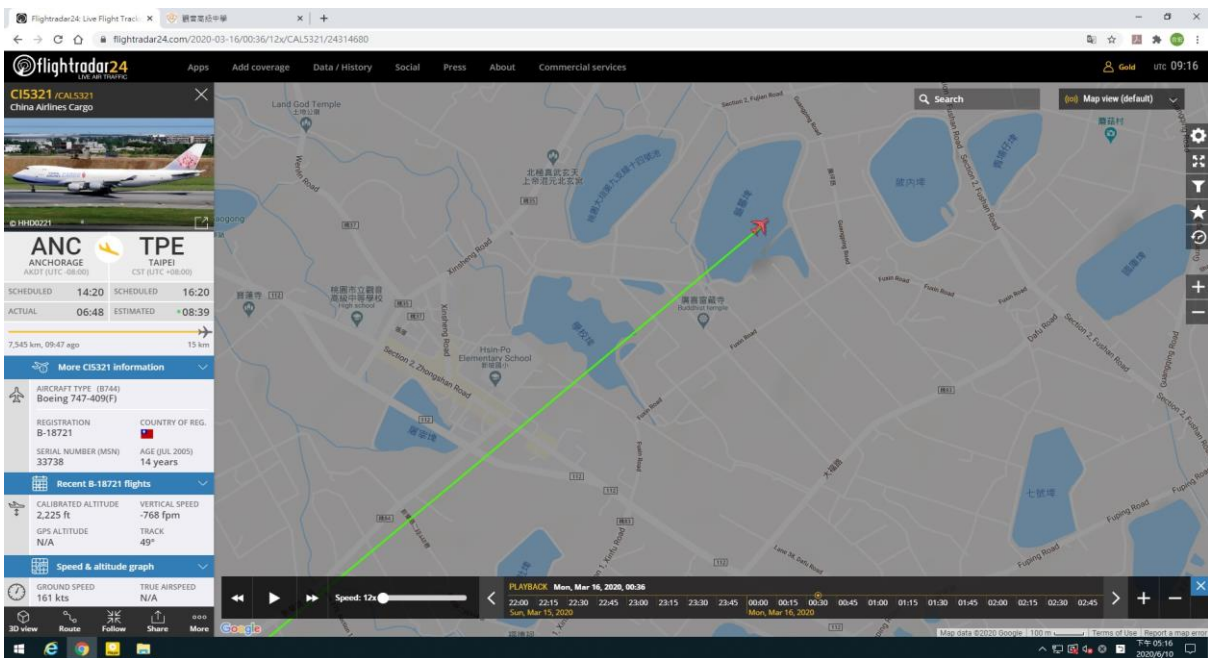
(三)、觀測事件 3

1、時間：109 年 3 月 16 日 08:36:39

2、航班：CI5321

3、觀測地點：803 教室(C 點)

4、觀測到飛機影子地點：803 教室(C 點)



5、08 時 36 分 39 秒看到飛機影子求得飛機高度

$$H = 770 * \tan 33.5^\circ = 770 * 0.662 = 509\text{m} = 1672\text{ft}$$

比較雷達觀測 1725ft(36 分 36 秒)~1625(36 分 42 秒)，精確。

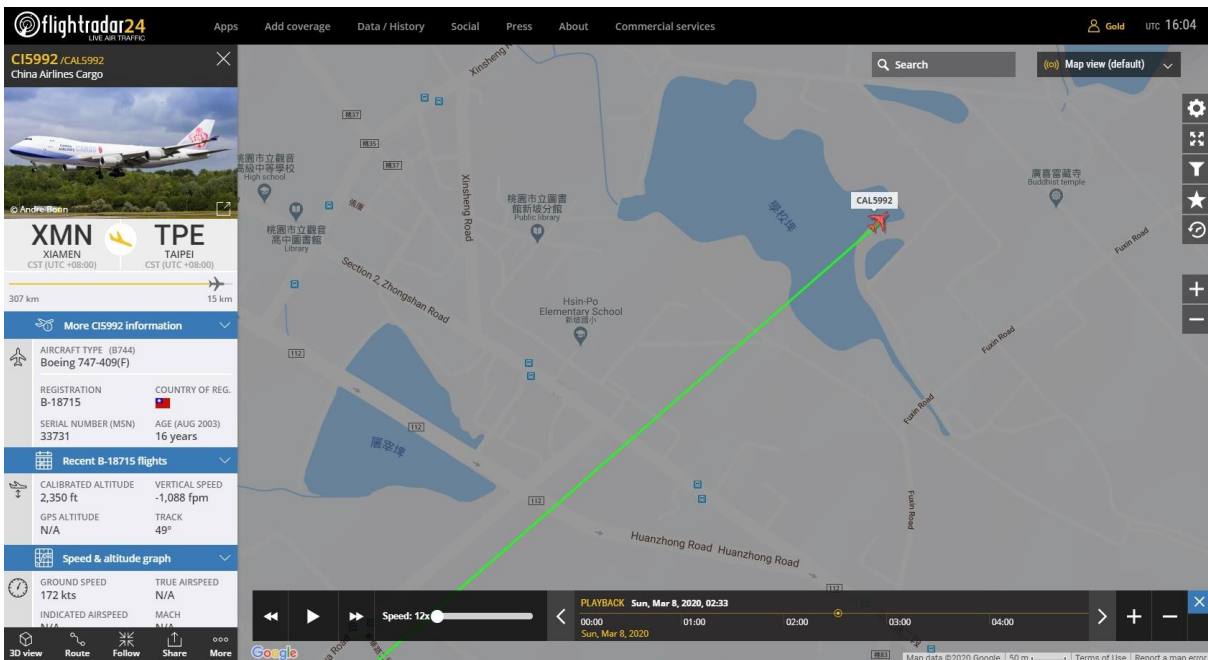
(四)、觀測事件 4

1、時間：109 年 3 月 8 日 10:33:34

2、航班：CI5992

3、觀測地點：學校高中部 6F

4、觀測到飛機影子地點：校外近埤塘的白色房子旁(E 點)



5、10 時 33 分 34 秒看到飛機影子求得飛機高度

$$H=L*\tan \theta =409*\tan 52.85^{\circ} =409*1.3198 =540\text{m}=1771\text{ft}$$

比較雷達觀測 1925ft(33 分 30 秒)~1725(33 分 42 秒)，正確。

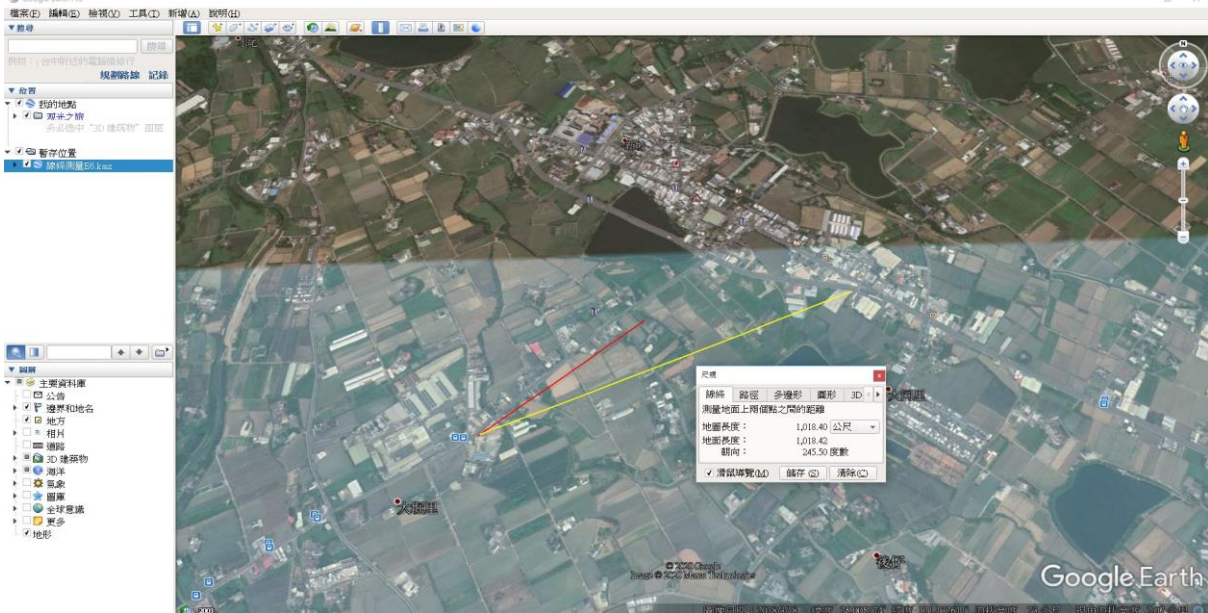
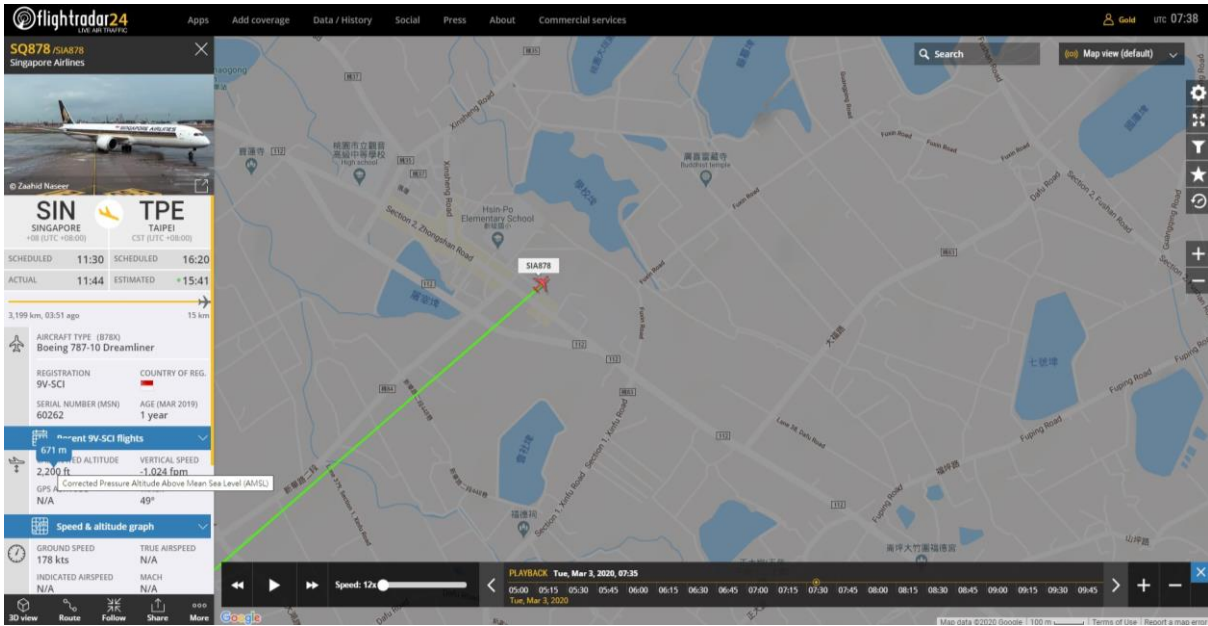
(五)、觀測事件 5

1、時間：時間:109 年 3 月 3 日 15:36:21

2、航班：SQ878

3、觀測地點：航道東側，外環道近 Y 字路口(F 點)

4、觀測到飛機影子地點：外環道近 Y 字路口(F 點)



5、15 時 36 分 21 秒看到飛機影子求得飛機高度

$$H=L*\tan \theta =1018*\tan 29.9^{\circ} =1018*0.575 =585\text{m} =1920\text{ft}$$

與雷達觀測相符 1925ft(36 分 20 秒)~1825(36 分 26 秒)，精確。

討論：因太陽方位與航道夾角太小，因此，影子位置的小偏差，會對高度產生較大影響。

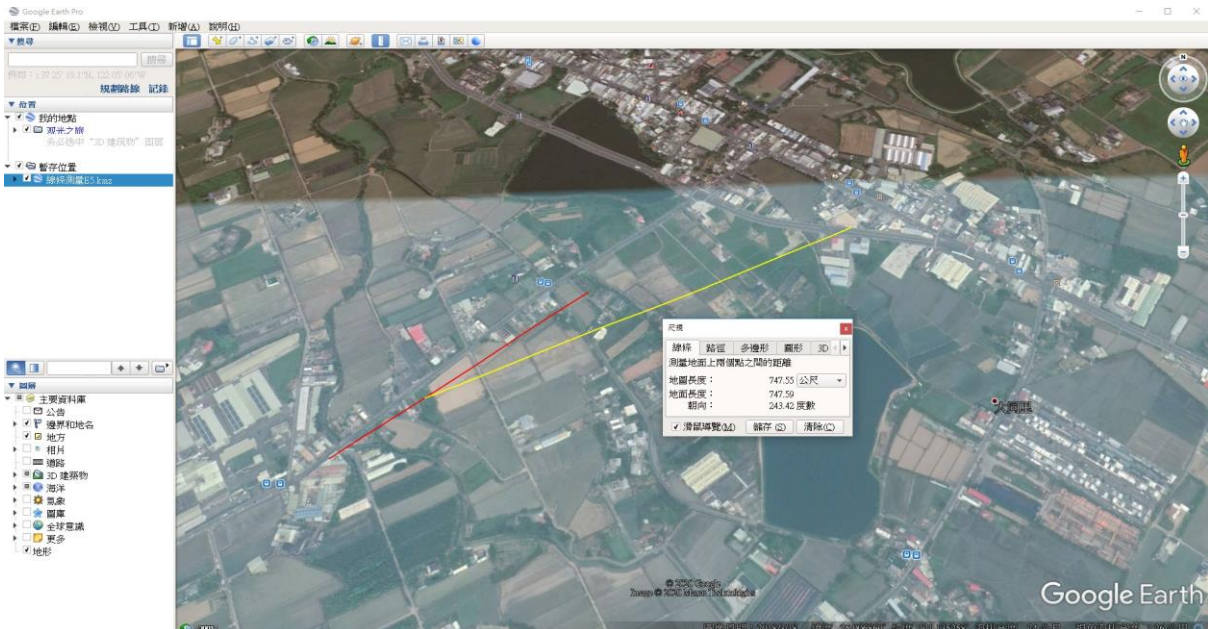
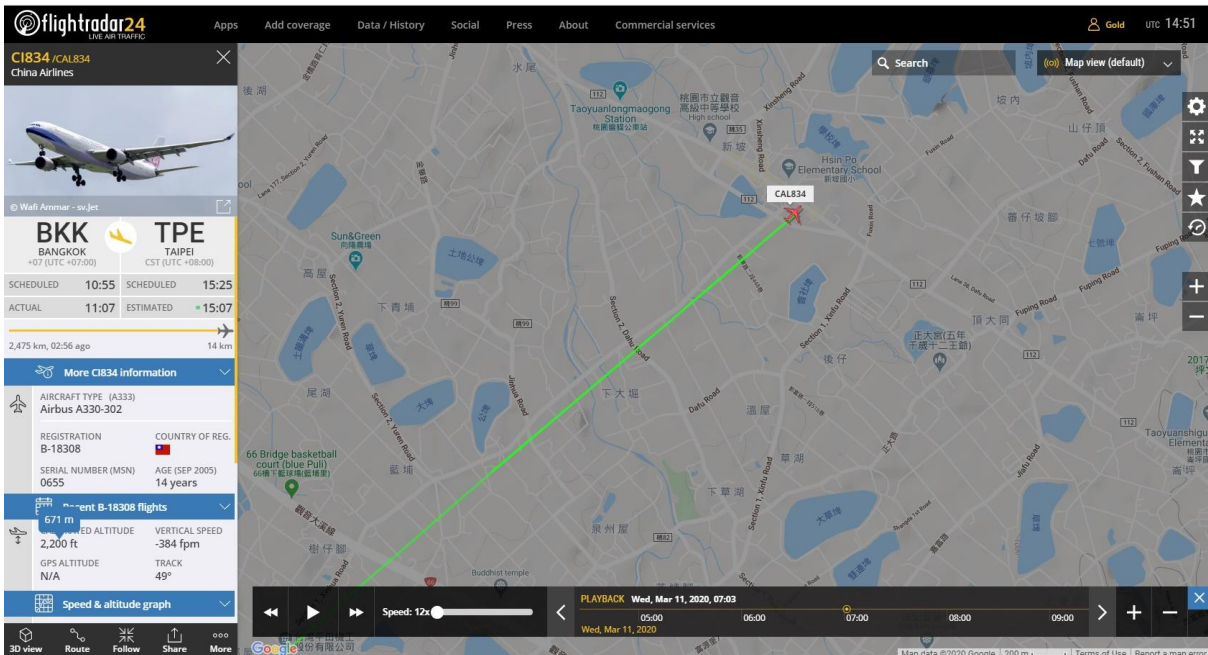
(六)、觀測事件 6

1、時間：109 年 3 月 11 日 15:04:23

2、航班：CI834/CAL834

3、觀測地點：航道東側，普利五金的左側處往東 5M(J 點)

4、觀測到飛機影子地點：普利五金的左側處往東 5M(J 點)



5、15 時 04 分 23 秒看到飛機影子求得飛機高度

$$H=L*\tan \theta =748*\tan 37.8^{\circ} =748*0.776 =580M=1903ft$$

雷達觀測 1950ft(04 分 20 秒)~1875(04 分 26 秒)。

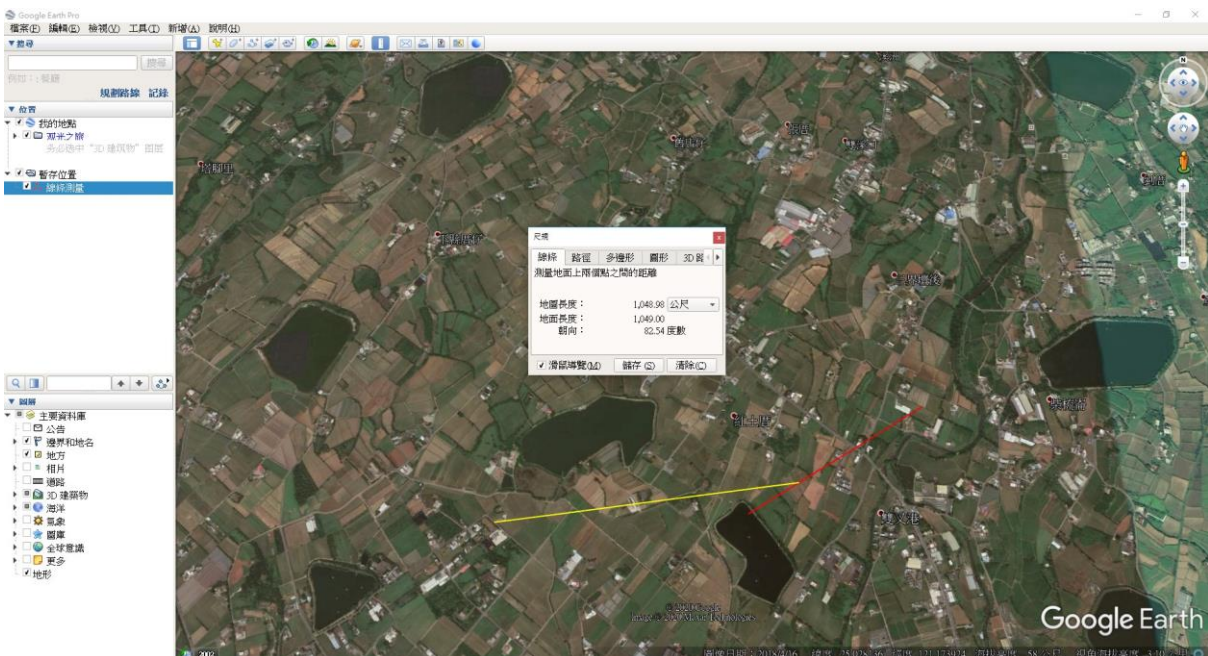
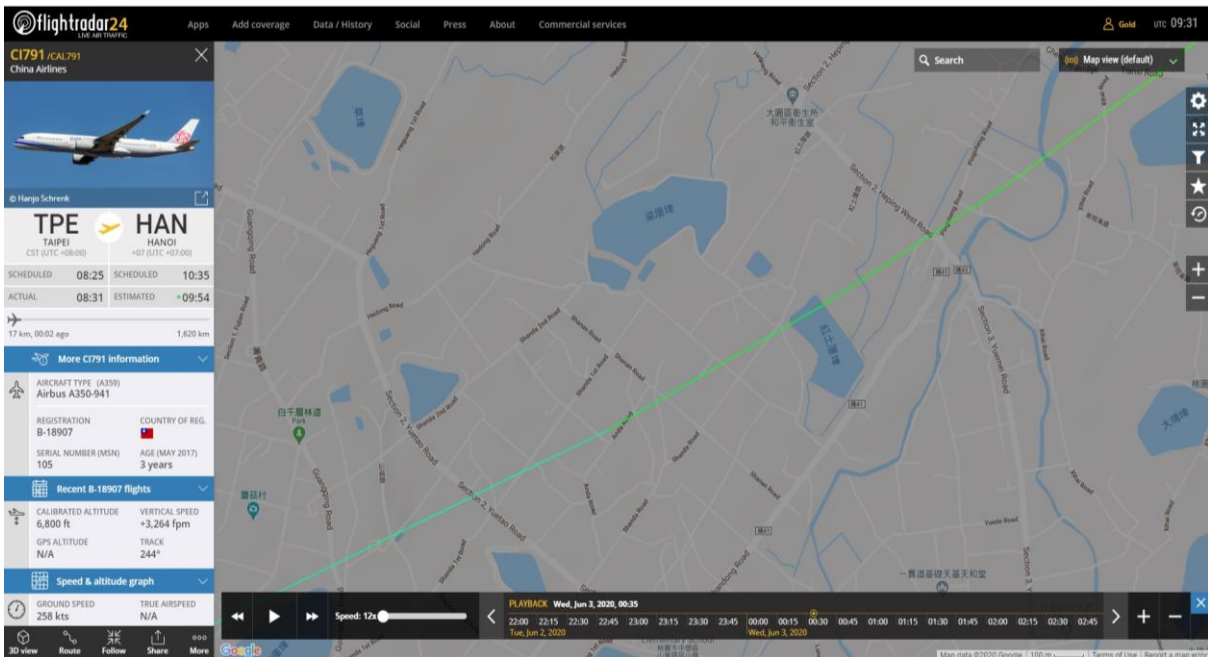
(七)、觀測事件 7

1、時間：109 年 6 月 3 日 08:32:41

2、航班：CI791

3、航向(風向)：往西南飛(吹西南風)

4、觀測到飛機影子地點：航道西側，山東別墅左側(K 點)



5、08 時 32 分 41 秒看到飛機影子求得飛機高度

$$H=L*\tan \theta =1049*\tan 44.45^{\circ} =1049*0.981 =1029\text{m} =3376\text{ft}$$

比較雷達觀測 3175ft(32 分 36 秒)~3675ft(32 分 43 秒)，正確。

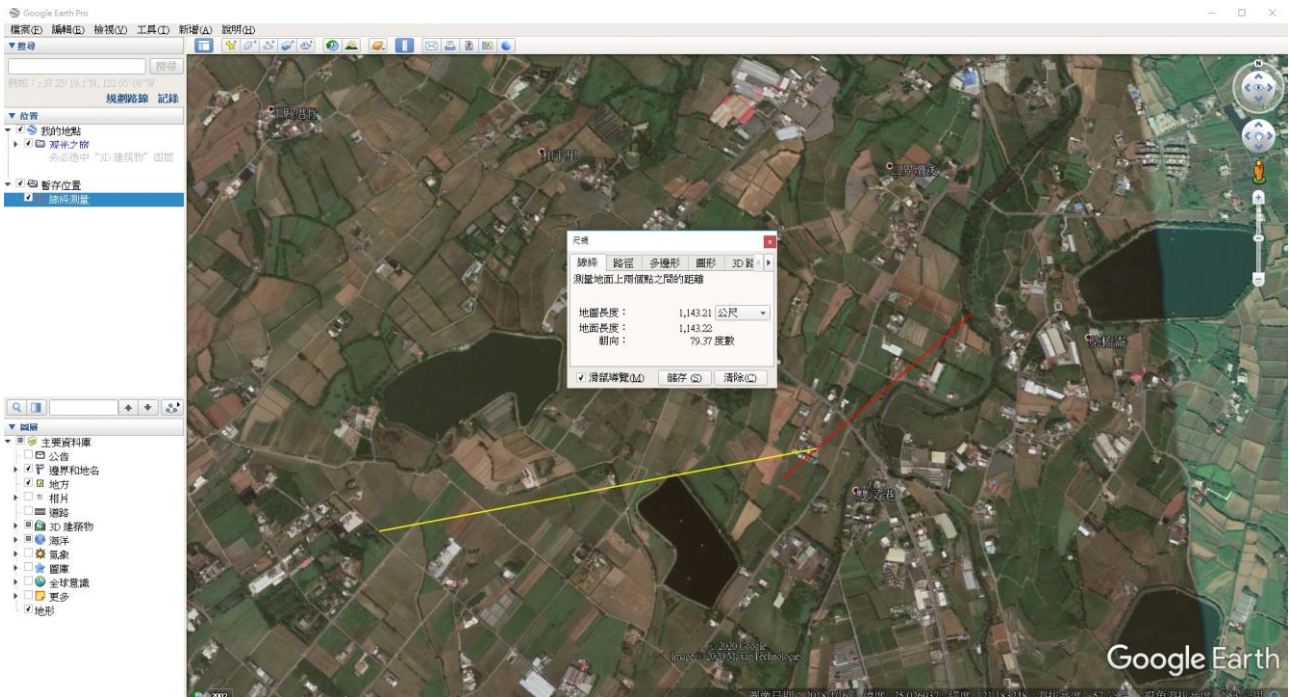
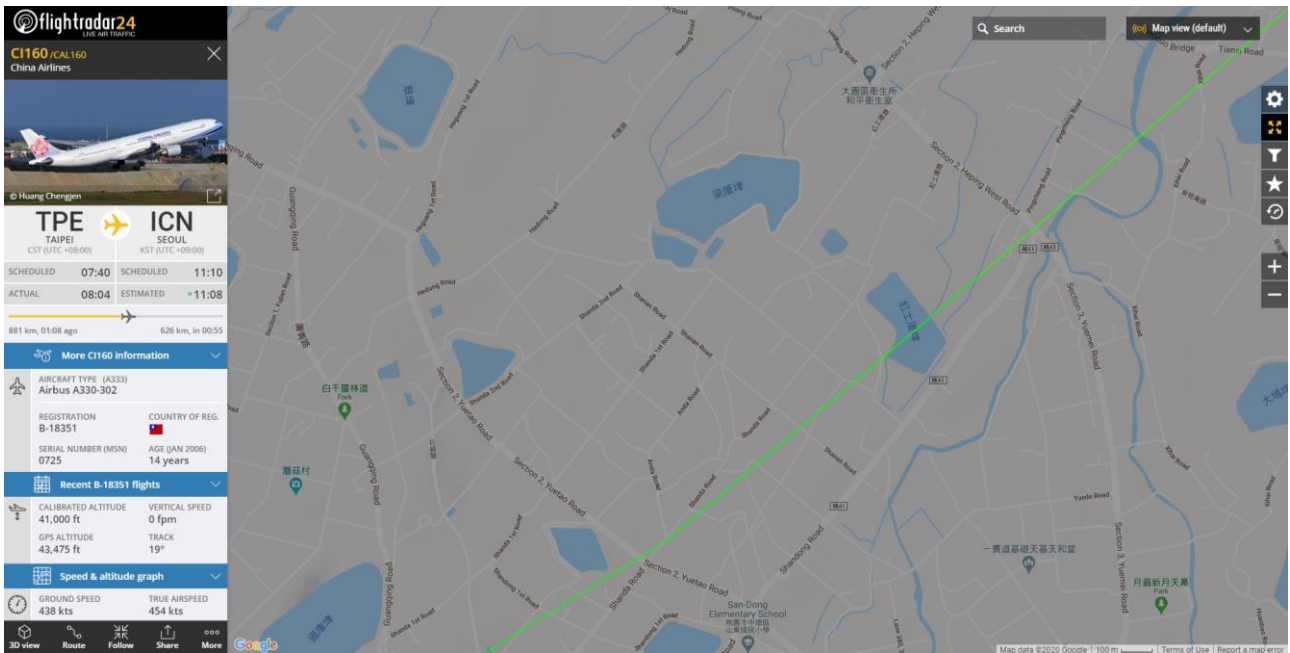
(八)、觀測事件 8

1、時間：109 年 6 月 12 日 08:06:00

2、航班：CI160

3、航向(風向)：往西南飛(吹西南風)

4、觀測到飛機影子地點：航道西側，山東別墅右側(L 點)



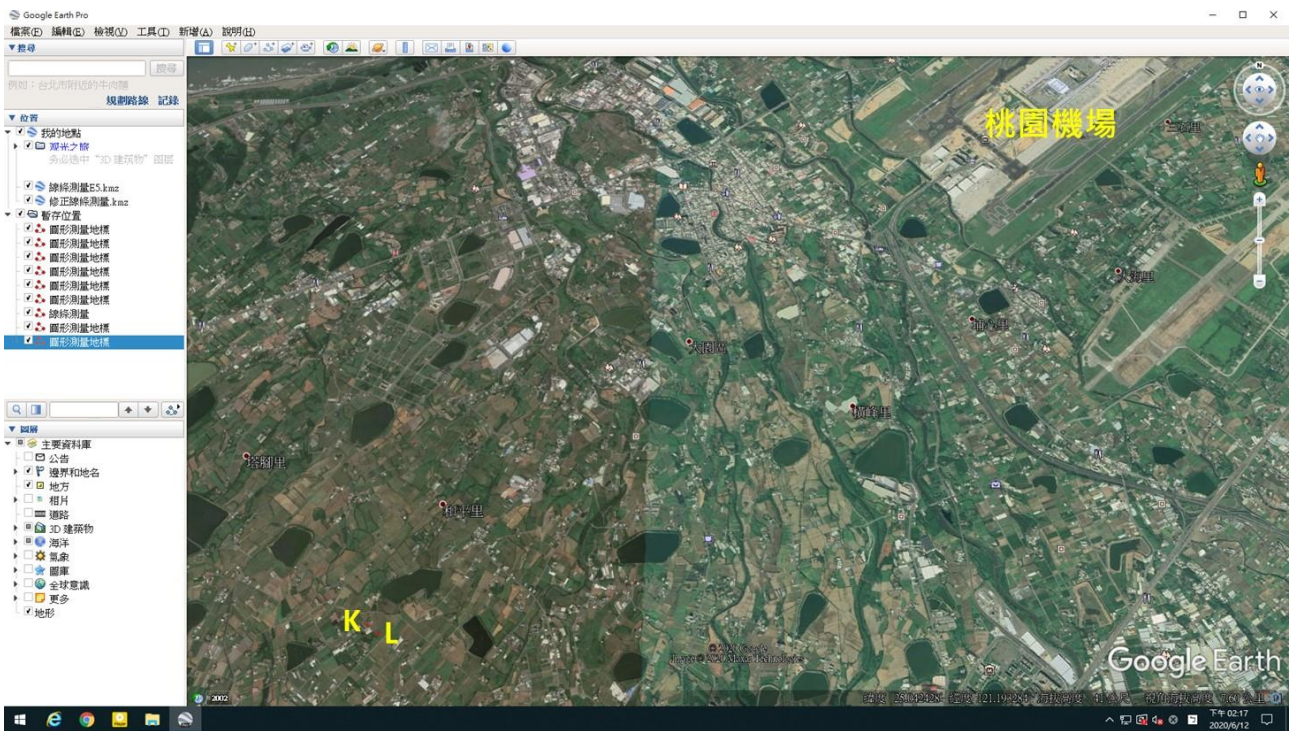
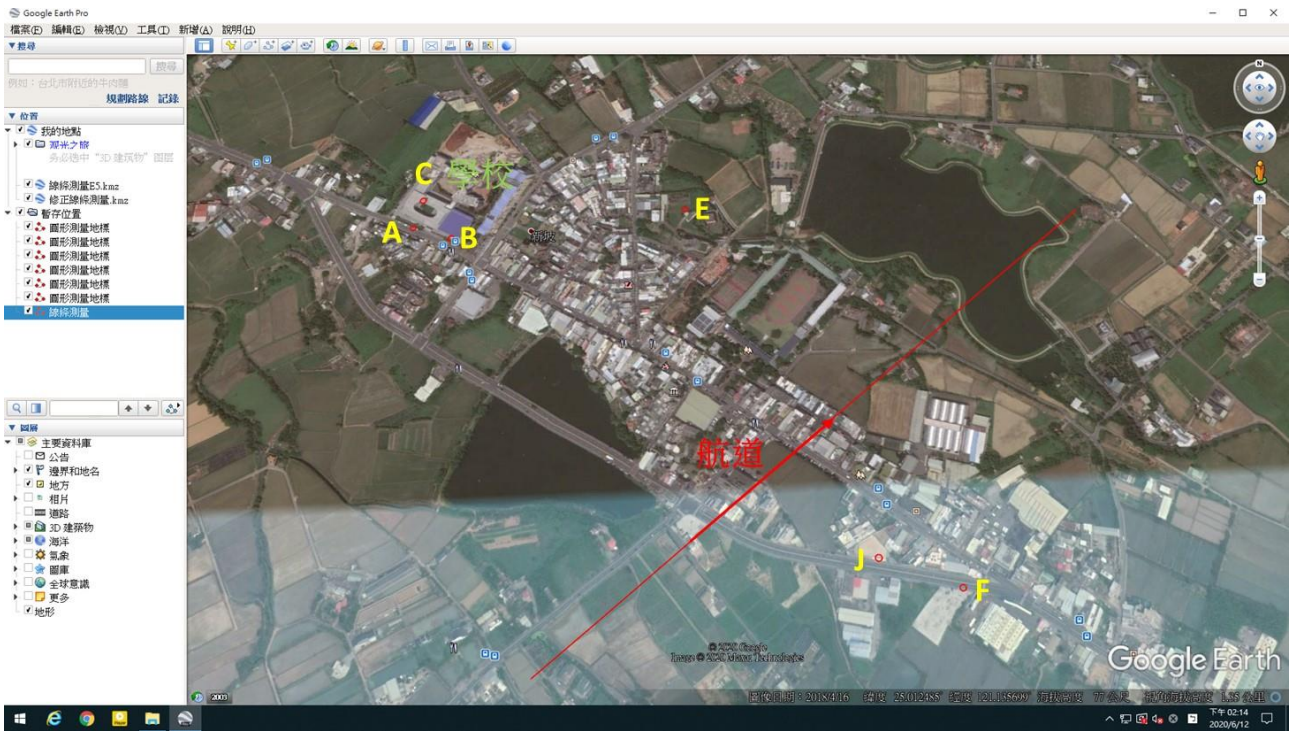
5、於 08 時 06 分 00 秒看到飛機影子求得飛機高度為

$$H=L*\tan \theta =1143*\tan 38.305^{\circ} =1143*0.7899 =902.8m =2962ft$$

比較雷達觀測 2675ft(05 分 54 秒)~2975(06 分 01 秒)，精確。

伍、研究結果

一、地點圖



二、表格數據

觀測事件	日期	時間	航班	影子位於航道之東側或西側(航向)	影子位置	太陽方位角/仰角	飛機位置與影子連線在地面之投影長度L	由飛機影子及太陽位置計算飛機之高度H(公尺;英尺)	雷達觀測之飛機高度R(ft)	備註
1	3/11	08:50:49	5J312	西 (往東北飛)	A (校內)	114.4° /35.2°	721M	506M 1660ft(50分49秒)	1675(50分46秒)~ 1600(50分52秒)	相符
2	3/11	09:06:16	AK1510	西 (往東北飛)	B (校內)	117.1° /38.2°	641M	504M 1655ft(06分16秒)	1675(06分14秒)~ 1600(06分20秒)	精確
3	3/16	08:36:39	CI5321	西 (往東北飛)	C (校內)	110.3° /33.5°	770M	509M 1672ft(36分39秒)	1725(36分36秒)~ 1625(36分42秒)	相符
4	3/8	10:33:34	CI5992	西 (往東北飛)	E	140.1° /52.9°	409M	540M 1771ft(33分34秒)	1925(33分30秒)~ 1725(33分42秒)	相符
5	3/3	15:36:21	SQ878	東 (往東北飛)	F	245.5° /29.9°	1018M	585M 1920ft(36分21秒)	1925(36分20秒)~ 1825(36分26秒)	精確
6	3/11	15:04:23	CI834	東 (往東北飛)	J	243.3° /37.8°	748M	580M 1903ft(04分23秒)	1950(04分20秒)~ 1875(04分26秒)	相符
7	6/3	08:32:41	CI791	西 (往西南飛)	K	82.5° /44.5°	1049 M	1029M 3376ft(32分41秒)	3175(32分36秒)~ 3675(32分43秒)	相符
8	6/12	08:06:00	CI160	西 (往西南飛)	L	79.4° /38.3°	1143 M	923M 2962ft(06分00秒)	2675(05分54秒)~ 2975(06分01秒)	精確

陸、討論

一、研究的結果發現其結果相當不錯，可以發現用太陽仰角算出來的飛機高度，與實際的 GPS 偵測出來的高度相差不多，甚至達到相當精準的程度。

二、飛機的影子在跑道的東西側影響不大，可以發其未有明顯的變化。

三、而當風向不同時，算出來的飛機高度也是差異不大，也就是說，本方法可以普遍利用於各航向的飛機案例。

三、而在上下午的變化中也未有太大的差距，但跑到若與太陽的夾角過小，則發現高度將非常之難推算，因此在此時此刻的數據偏差值會稍大。

四、當飛機飛越本校且看到影子時，可以發現其高度約在 500~550 公尺左右，推斷現今飛機都配有 ILS 降落系統，因此降落時的高度皆相當一致。

柒、結論

可以發現用畢氏定理所計算出之飛機高度與實際的高度相當接近，用此方法來計算相當之精確，且此方法在用的時候只要太陽的仰角不要與跑道的夾角過小，基本上可以得到還不錯的結果，而且整體並未用到太複雜之計算，計算的過程亦相當簡便且快速，且目前 GPS 的零位面未必定位的比較精確，因此用此方法所算出來的飛機高度可說是相當準確。

至於在在本校看到影子時，飛機都在 500~550 公尺左右，經查詢後發現現在的飛機都有配備 ILS 降落系統，因此在降落時，彼此間高度差異不大。

捌、參考資料及其他

一、實際觀測照片

(一)、校門口飛機影子觀測



(二)、校園鳳凰木飛機影子觀測



(三)、教室旁觀測飛機影子

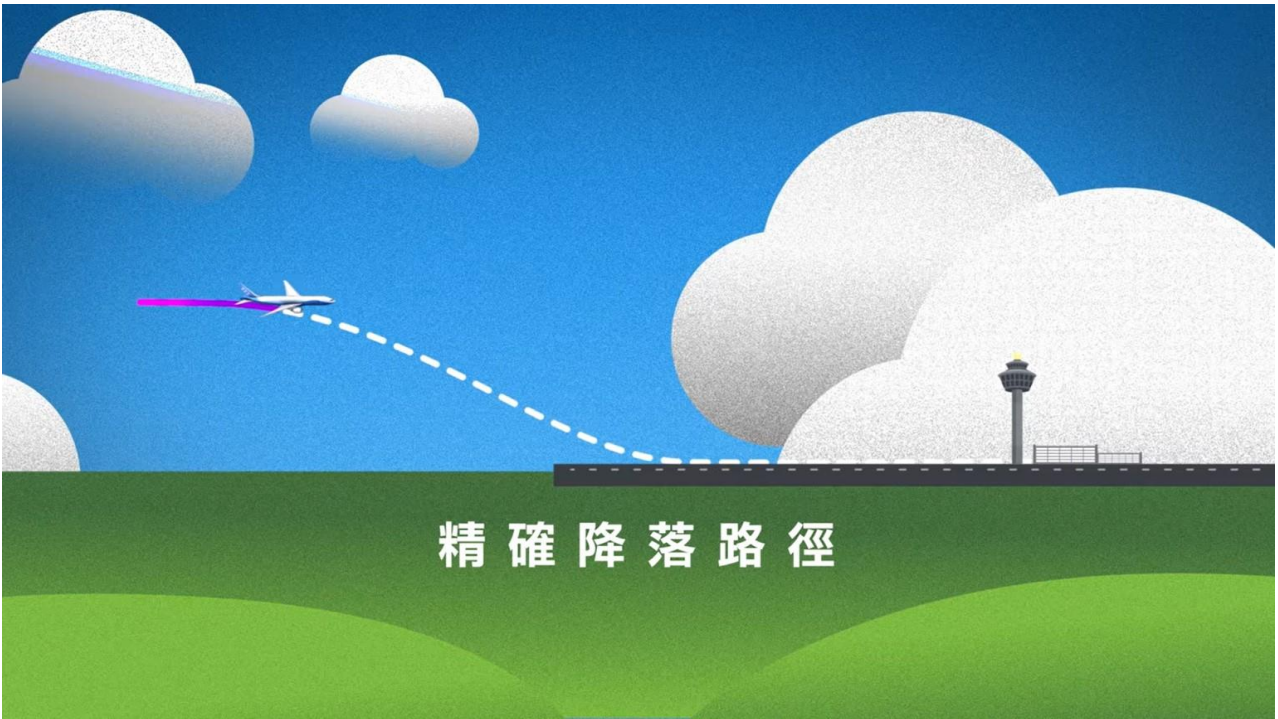


(四)、學生討論飛機影子經過的狀況



二、ISL 降落系統





參考網路資料

飛航小知識~儀器降落系統(Instrument Landing System, ILS) (2017 年 10 月 17 日)• 飛航服務總臺

Anws • 取自 <https://www.youtube.com/watch?v=sPe3Pptn4Zg>

【評語】 030508

此作品主題清楚聚焦，應用地科知識中太陽在該地區的仰角和方位角，輔以 google Earth 功能和飛機影子，來估算飛機高度，方法簡單可行，結果再現性良好。資料分析時也以雷達觀測飛機高度作為估算準確性的參考，並且進一步討論太陽方位和航道夾角對於估算誤差的可能影響。

對於選取觀測時間的規劃所依據的理由有說明，但未進一步規劃探討影響估算準確性的因素，在研究結果的資料詮釋與綜合討論稍嫌不足，實屬可惜。

1. 簡介

本校與飛機場相距不遠，因此時常在上課時聽到巨大的飛機引擎聲，偶爾在下課時還可以看到飛機的影子從校園的空地中略過，遂想起在理化課的時候，老師提過光的直進性，當有物體擋住光源時，便會形成影子。又隨著時間變化，太陽在各時間的角度不一樣，也就會在校園中各個位置形成影子，因此，當飛機影子出現，且不是在正午時，便可以利用二上數學課所學的畢氏定理來計算飛機高度，當時經常聽到老師說地面上的影子可以用來測量實際物體的高度，比如說測量房子或是推算山峰的高度，因此想說是否能運用得天獨厚的地理環境，來進行飛機高度的計算，來看看利用理化、數學及地球科學所學的知識，是否能成功的推算飛機當時的高度，並利用GPS測高系統作為真實值進行比較，來看看本實驗與真實飛機高度相差多少？

2. 目標

- 一、了解飛機的高度是否可以用三角測高法推算出來？
- 二、在不同的太陽仰角是否可以順利的推算飛機高度？
- 三、推算出的飛機高度與GPS所測得之高度相差多少？
- 四、可發展出一套快速計算飛機高度的方法

3. 研究流程圖



4. 研究方法

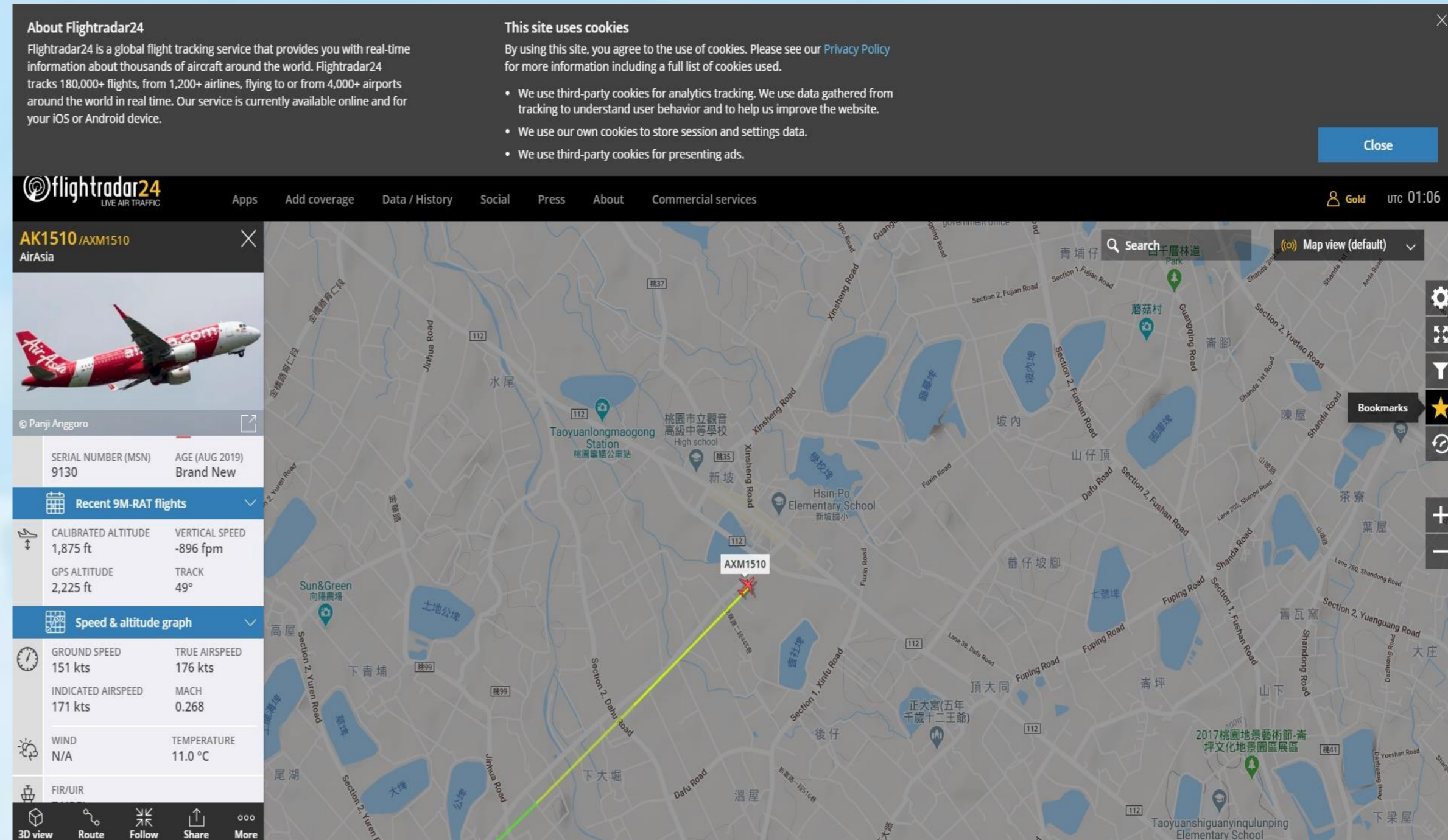
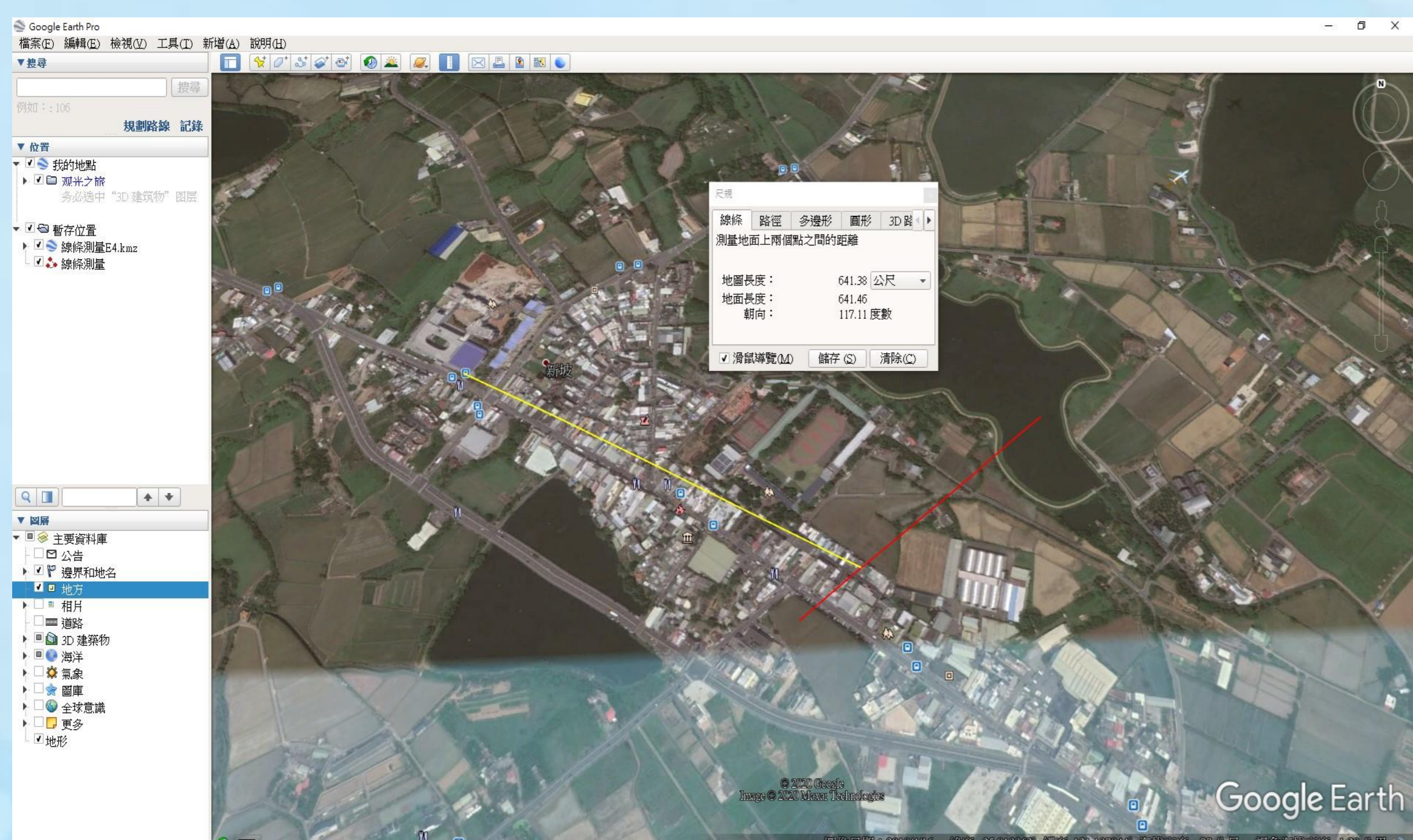
STEP1. 選定東北向觀測事件

- 1、時間：109年3月11日09:06:16
- 2、航班：AK1510
- 3、觀測地點：航道西側，體育館階梯左側(B點)
- 4、觀測到飛機影子地點：體育館階梯左側(B點)
- 5、飛機航向：往東北飛



STEP2. 在Google Earth作圖

由飛機影子產生點作一指向太陽方位之直線，由Stellarium取得太陽方位角 117.1° ；仰角 38.2°



STEP3. 計算飛機高度

09時06分16秒看到飛機影子求得飛機高度

$$H=L*\tan\theta =641*\tan38.2^\circ =641*0.787 =504m =1655ft$$

與雷達觀測相符1675ft(06分14秒)~1600(06分20秒)，正確。

5. 實驗結果

1、表格數據

觀測事件	日期	時間	航班	影子位於航道之東側或西側(航向)	影子位置	太陽方位角/仰角	L	H (公尺&英尺)	R(ft)	HR(ft)	差距百分比
1	3/11	08:50:49	5J312	西 (往東北飛)	A (校內)	114.4° / 35.2°	721M	506M 1660ft (50分49秒)	1675 (50分46秒) 1600 (50分52秒)	1638ft	1.3%
2	3/11	09:06:16	AK1510	西 (往東北飛)	B (校內)	117.1° / 38.2°	641M	504M 1655ft (06分16秒)	1675 (06分14秒) 1600 (06分20秒)	1650ft	0.3%
3	3/16	08:36:39	CI5321	西 (往東北飛)	C (校內)	110.3° / 33.5°	770M	509M 1672ft (36分39秒)	1725 (36分36秒) 1625 (36分42秒)	1675ft	0.2%
4	3/8	10:33:34	CI5992	西 (往東北飛)	E (校外)	140.1° / 52.9°	409M	540M 1771ft (33分34秒)	1925 (33分30秒) 1725 (33分42秒)	1852ft	4.4%
5	3/3	15:36:21	SQ878	東 (往東北飛)	F (校外)	245.5° / 29.9°	1018M	585M 1920ft (36分21秒)	1925 (36分20秒) 1825 (36分26秒)	1899ft	1.1%
6	3/11	15:04:23	CI834	東 (往東北飛)	J (校外)	243.3° / 37.8°	748M	580M 1903ft (04分23秒)	1950 (04分20秒) 1875 (04分26秒)	1913ft	0.5%
7	6/3	08:32:41	CI791	西 (往西南飛)	K (校外)	82.5° / 44.5°	1049M	1029M 3376ft (32分41秒)	3175 (32分36秒) 3675 (32分43秒)	3489ft	3.2%
8	6/12	08:06:00	CI160	西 (往西南飛)	L (校外)	79.4° / 38.3°	1143M	923M 2962ft (06分00秒)	2675 (05分54秒) 2975 (06分01秒)	2925ft	1.3%

L：飛機位置與影子連線在地面之投影長度。

H：由飛機影子及太陽位置計算飛機之高度。

R：雷達觀測之飛機高度。

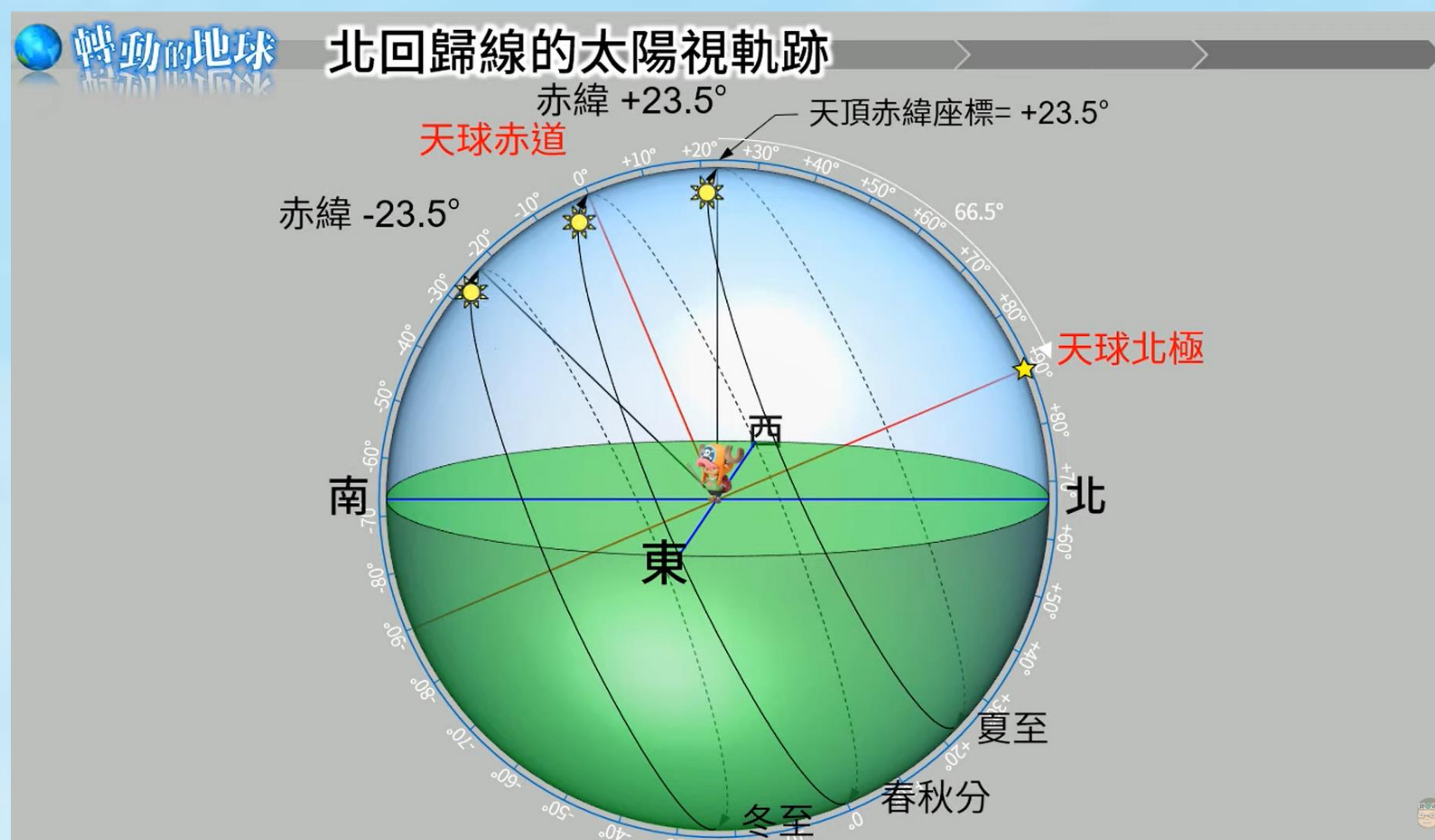
HR：由雷達觀測高度利用內插法，求得該時間飛機高度。

差距百分比： $(|H-HR|/HR)*100\%$

2、地點圖



A. 太陽的仰角



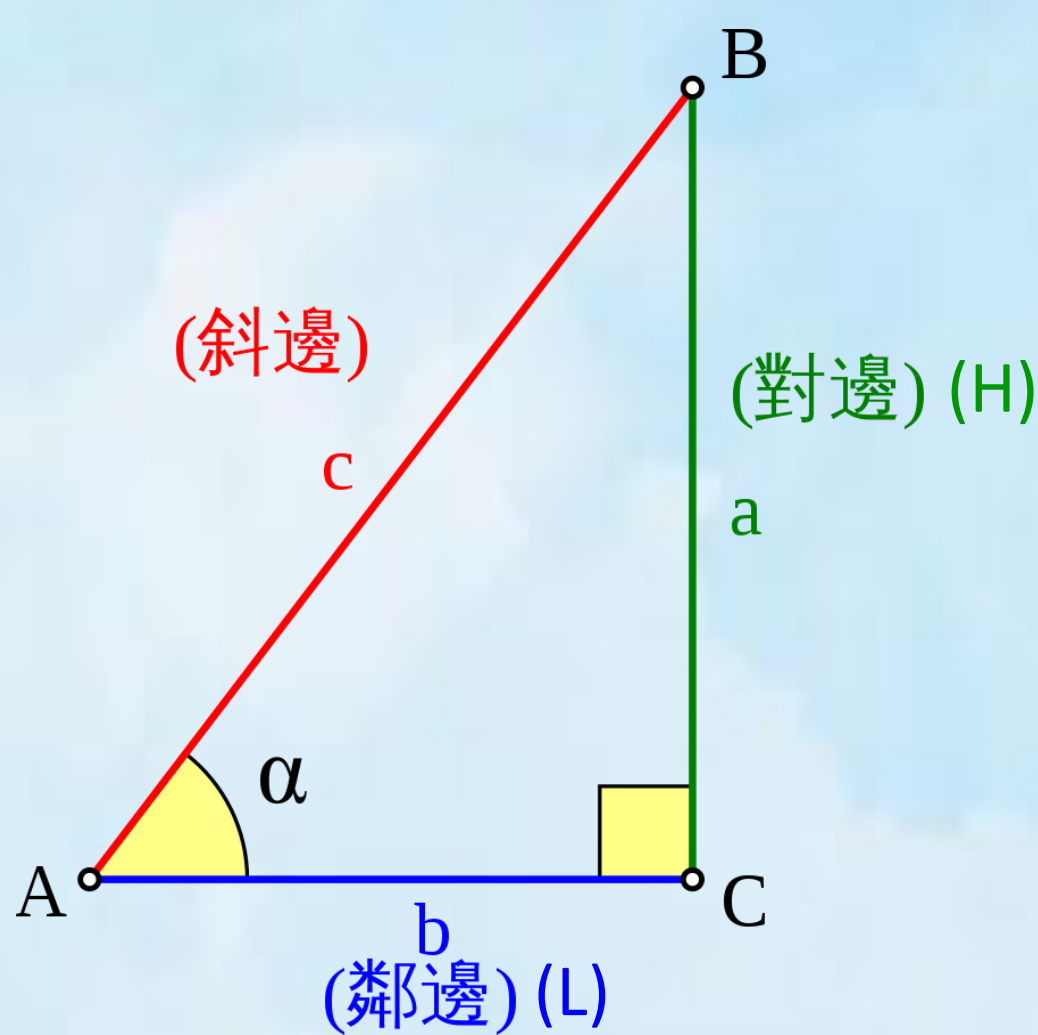
△北回歸線的太陽視軌跡示意圖。

臺北 (東經 121°31', 北緯 25°02')

季節	時	6	7	8	9	10	11	中天	12	13	14	15	16	17	18
春分	仰角		13.3	26.6	39.6	51.5	61.0	65.0	65.0	61.3	52.0	40.2	27.3	13.9	0.4
	方位		96.3	103.5	112.7	125.8	147.0	180.0	179.2	111.9	233.5	247.0	256.3	263.5	270.0
夏至	仰角	10.6	23.5	36.7	50.1	63.6	77.2	88.4	88.1	75.3	61.7	48.2	34.8	21.6	8.8
	方位	68.9	74.0	78.5	82.8	87.4	94.3	180.0	211.0	267.1	273.3	277.8	282.1	286.7	291.8
秋分	仰角	3.1	16.6	29.9	42.7	54.2	62.6	65.0	64.8	59.3	49.2	37.0	24.0	10.5	
	方位	91.3	97.8	105.4	115.3	130.0	154.0	180.0	187.9	218.2	237.3	249.4	258.0	265.0	
冬至	仰角		4.3	15.8	26.1	34.4	39.9	41.5	41.5	38.8	32.5	23.5	12.9	1.1	
	方位		118.4	126.0	135.8	148.5	164.3	180.0	182.4	200.1	215.1	227.0	236.1	243.4	

△台北地區在不同季節太陽逐時的仰角及方位角。

B. ADS-B & 三角測高



➤ 利用已知的一邊及三角形的夾角，可以用來計算對邊(高)的長度，生活上常以此方法測量高度，包括大樓、山甚至連人的眼睛都是用此方法進行距離的判斷，因此是一個相當簡便且快速的方法，而本研究亦是用鄰邊(L)與仰角(α)求得飛機高度(H)。

C. 觀測工作照片



△學生於體育館前階梯上觀測飛機之影子，此為觀測事件2之工作照片。

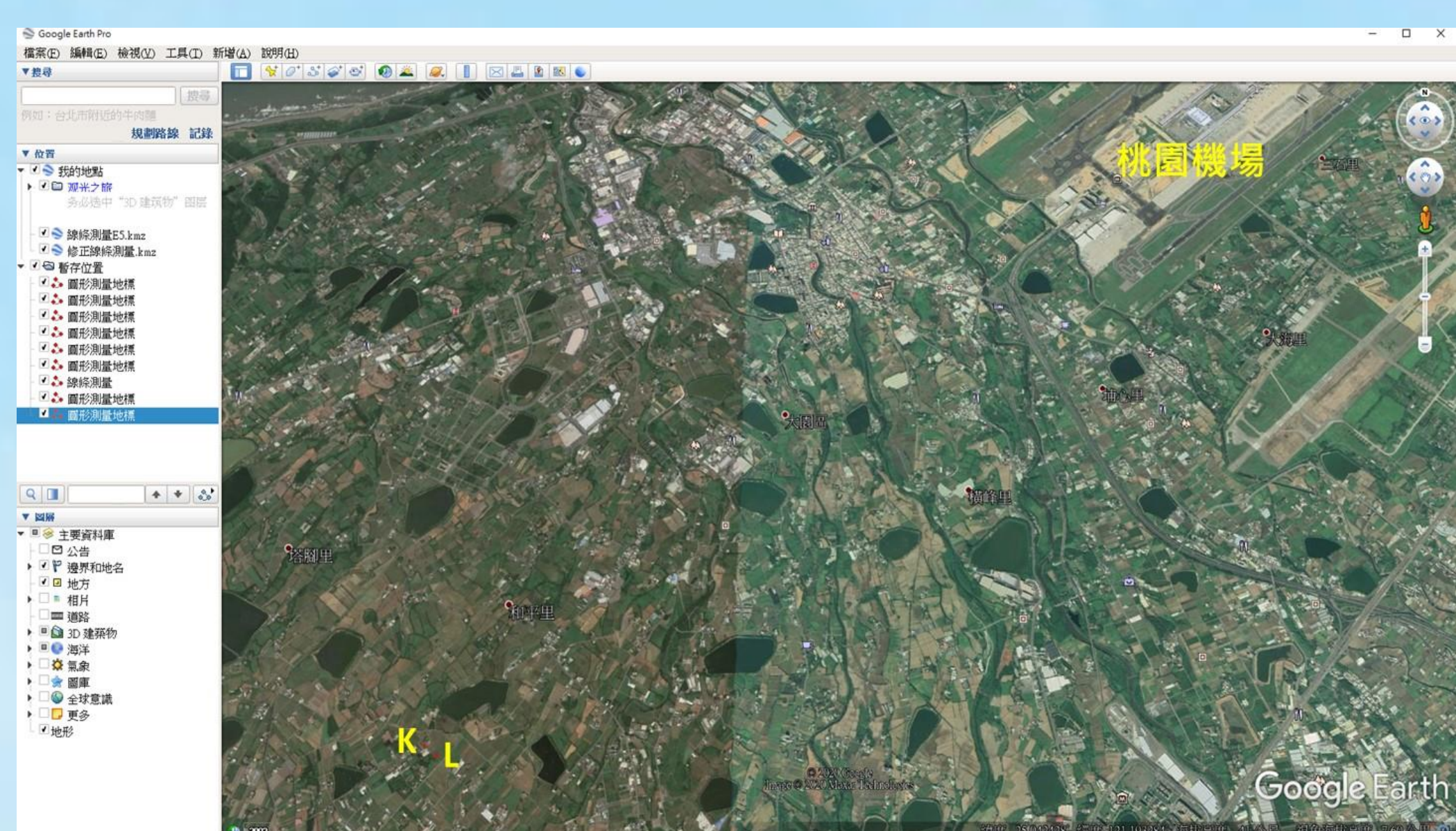


△學生於校園內之鳳凰木旁觀測飛機之影子，此為觀測事件3之工作照片。



△學生於803教室前觀測飛機之影子，此為觀測事件1之工作照片。





6. 結論

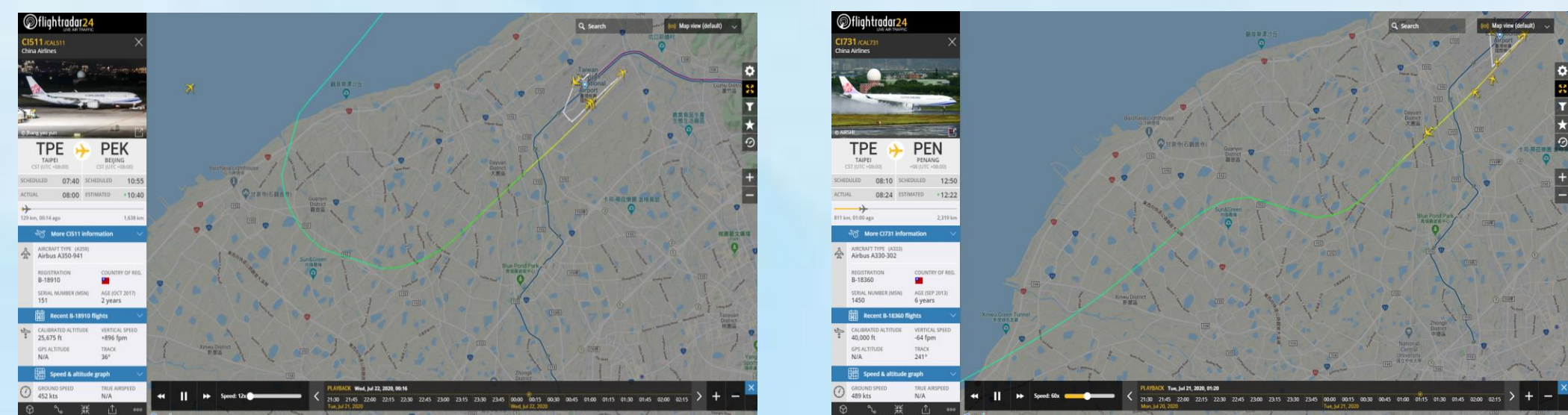
- 1、本研究可以由影子的觀測求得任意時間的飛機高度。
- 2、利用太陽仰角算出的飛機高度，再比較Flightradar24的數據(6~20秒一點)所內插出的高度，可以發現兩者差距皆在5%以內，相當準確。
- 3、觀測到飛機的高度與觀測點在航道之東西側並無影響，而且可應用於起飛與降落。
- 4、觀測事件1、2、3為飛機影子在校園內出現的案例，由下表可知，當飛機飛越本校且看到影子時，可以發現其高度約在500~510公尺左右，推斷現今飛機都配有ILS（儀器著陸系統），因此降落時的飛機高度皆相當一致。

觀測事件	日期	時間	航班	影子位於航道之東側或西側(航向)	影子位置	由飛機影子及太陽位置計算飛機之高度H(公尺&英尺)	雷達觀測之飛機高度R(ft)	HR (ft)	H與HR差距百分比(%)
1	3/11	08:50:49	5J312	西 (往東北飛)	A (校內)	506M 1660ft (50分49秒)	1675 (50分46秒) 1600 (50分52秒)	1638ft	1.3 %
2	3/11	09:06:16	AK1510	西 (往東北飛)	B (校內)	504M 1655ft (06分16秒)	1675 (06分14秒) 1600 (06分20秒)	1650ft	0.3 %
3	3/16	08:36:39	CI5321	西 (往東北飛)	C (校內)	509M 1672ft (36分39秒)	1725 (36分36秒) 1625 (36分42秒)	1675ft	0.2 %

- 5、產生誤差的原因有可能為：
 - A、飛機本身連同機翼的寬度至少60公尺，觀測到的點是在機身還是在機翼是會產生誤差。
 - B、由影子觀測到的飛機高度會受到地形起伏與建築物高度的影響。
 - C、而在接近中午的時候，太陽的仰角較大，且當航道若與太陽的夾角過小，則發現高度將非常之難推算，因此在此時此刻的數據偏差值會稍大。

7. 未來展望

- 1.本校位於飛機轉彎處(夏季)，必須先求得飛機的飛航軌跡，才能求得飛機高度。



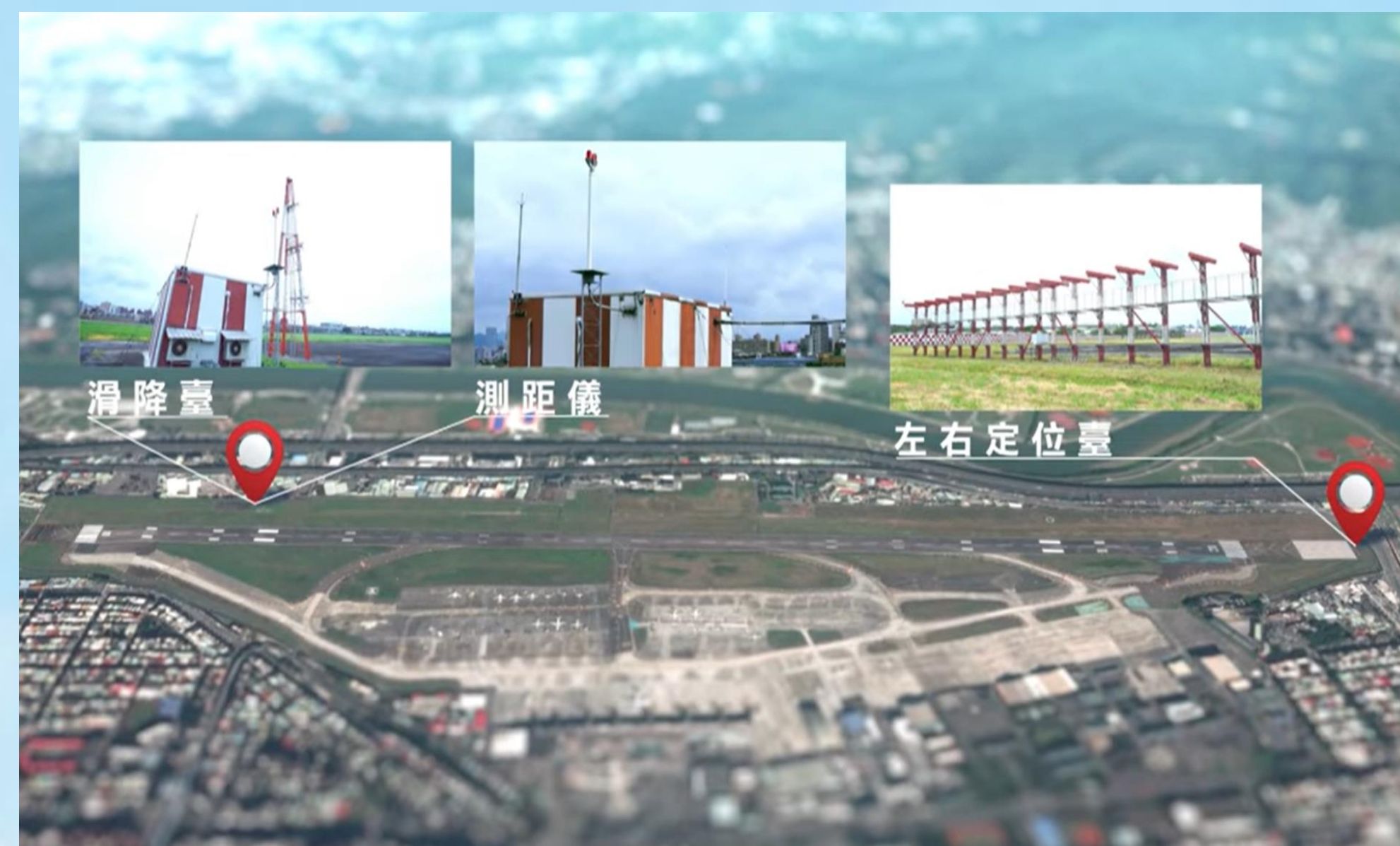
8. 附錄-ILS系統

- 1.ILS儀器降系統俗稱盲降系統，是目前應用最為廣泛的飛機精密進場和降落導引系統。

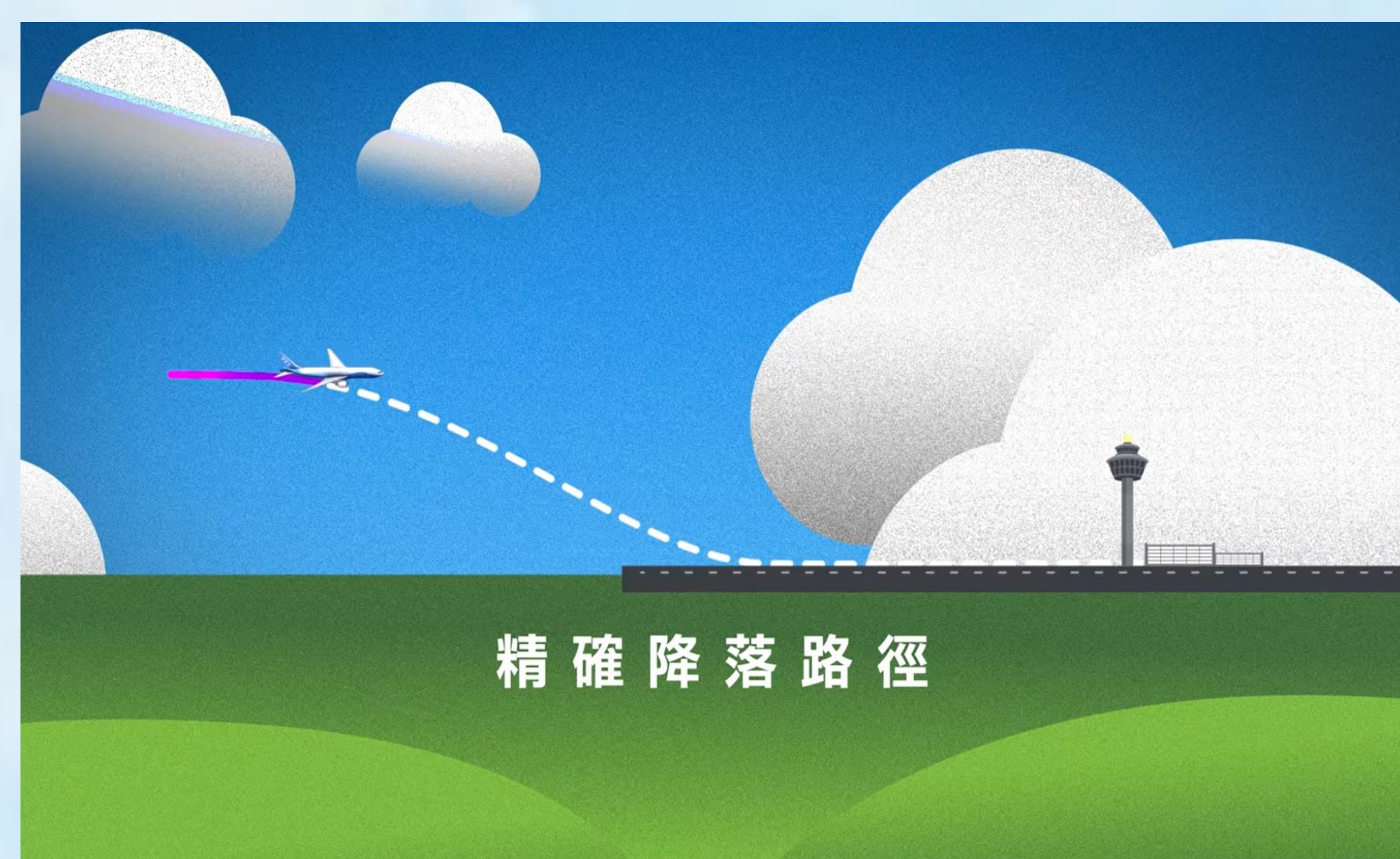


2.ILS主要由左右定位台、滑降台、測距儀三樣儀器所組成。

- (1)左右定位台：主要是控制飛機不要偏離跑道線，使飛機可以對準跑道不會偏離跑道中心。
- (2)滑降台：控制飛機下降的角度，使其可以在降落時之高度維持穩定下降的角度，避免飛機太早或是過晚才降落至跑道。
- (3)測距儀：提供跑道及飛機的距離資訊。



- 3.飛機在降落時會持續接收無線電信號，最後可以勾勒出一條完美的降落路線，因此飛機最後會準確地降落在機場跑道上，經查證後發現除特殊受到地形阻擋外的機場，其餘機場接有配置此降落系統，故桃園國際機場應當有配置此系統。



9. 參考資料

- 飛航小知識~儀器降落系統(Instrument Landing System, ILS) (2017年10月17日)•飛航服務總臺 Anws•取自 <https://www.youtube.com/watch?v=sPe3Pptn4Zg>
- 中央氣象局觀測資料查詢系統•取自 <https://eservice.cwb.gov.tw/HistoryDataQuery/index.jsp>
- 中央氣象局•臺灣四季太陽仰角與方位角•取自 <https://www.cwb.gov.tw/Data/astronomy/season.pdf>

