中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030422

排隊站好

學校名稱：高雄市立國昌國民中學

作者：	指導老師：
國一 李家睿	姚文仁

關鍵詞：mod、領導係數、階差數列

摘要

本篇科展主要從一道古老的數學題目開始，"正整數中，被4整除或被4除餘1的數刪去，新數列$\{a_n\} = \{2,3,6,7,10,11, \dots\dots\}$, 求$[\sqrt{S_1}] + [\sqrt{S_2}] + [\sqrt{S_3}] + \cdots + [\sqrt{S_{2014}}]$ =?([ ]為高斯符號)"，直接延伸原題探討"當$A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv 2\ or\ 3 (mod\ 4)\}$, S_m^1為 A 中的第 m 個元素，$S_m^2 = \sum_{i=1}^{m} S_i^1$，為何$[\sqrt{S_m^2}] = m$? "，進而加以推廣探討 " 當 $A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv k_1\ or\ k_2\ or\ \dots \dots or\ k_p (mod\ x)\}$，$S_m^1$為 A 中的第 m 個元素，$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} S_i^n$ 時，則 A 應滿足什麼條件，才能對所有的 n 和 m，都有$[\sqrt[n]{S_m^n}] = m$的結果?"

壹、研究動機

在學習數學的過程中，數列一直是我相當感興趣的部份，從幼稚園時數數，到小學的等差數列等等，都讓我感到非常有趣，小時候，我就對於一些級數的求和有高度的好奇心，但礙於當時工具不足，無法成功推導出平方和公式，立方和公式…，幸而小學五年級時，我考入中山大學高中數學資優班，經過兩年扎實的訓練，養成我熱愛思考數學問題的習慣和能力，接著連續兩年獲推薦參加中央大學舉辦的資優數學營，並晉級亞太數奧研習營，今年更如願參加亞太數奧競賽，這一連串的研習、晉級以及競賽，讓我有機會和各方數學好手討論數學問題，也累積許多競賽數學的解題經驗，現在我終於有信心可以處理數列方面的進階問題了!
因緣巧合下，在某次的數學課中，老師與我討論到一題古老的數學題目，"正整數中，被4整除或被4除餘1的數刪去，剩下的數列$\{a_n\} = \{2,3,6,7,10,11, \dots\dots\}$, 求$[\sqrt{S_1}] + [\sqrt{S_2}] + [\sqrt{S_3}] + \cdots + [\sqrt{S_{2014}}]$ =?([ ]為高斯符號)"，也由於這道有趣的數列題目，讓我開始了這次的研究，觀察前幾項後，我發現雖然不總是剛剛好$S_m = m^2$，但卻總是滿足取完高斯函數後正好等於m，這也讓我產生了很大的興趣，希望能找到在2次時讓等式成立的條件與 n 次時讓等式成立的條件又是如何?

貳、研究目的

(1) 證明 " S_m^1為 $A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv 2\ or\ 3 (mod\ 4)\}$中的第 m 個元素，$S_m^2 = \sum_{i=1}^{m} S_i^1$ ，則$[\sqrt{S_m^2}] = m$，[ ]為高斯符號"。
(2) 找出"當 $A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv k_1\ or\ k_2 \dots or\ k_p (mod\ x)\}$，$S_m^1$為 A 中的第 m 個元素，$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} S_i^n$ 時，則 A 應滿足什麼必要條件，才能對所有 n 和 m 都有$[\sqrt[n]{S_m^n}] = m$?"
(3) 承(2)，證明在任意 n 的情形下，都有無限多組 A 數列滿足條件，並給出該數列的形式。
(4) 找出 n=2時，滿足$[\sqrt{S_m^2}] = m$的充分條件。

參、研究器材與設備

(1) 手算:筆&紙&黑板
(2) 電腦輔助:excel 2010, python 3.7,wolfram alpha

肆、研究過程或方法

(一) 符號定義

定義$A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv k_1\ or\ k_2 \ldots or\ k_p (mod\ x)\}$

S_m^1 為 A 中的第 m 個元素　　　　$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} S_i^n$

輔助數列: $H\_S_m^1 = x * \frac{m}{p}$　　　　$H\_S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} H\_S_i^n$

[a]=不超過 a 的最大整數

(二) 延伸原題題目"正整數中，被4整除或被4除餘1的數刪去，剩下的數列$\{a_n\} = \{2,3,6,7,10,11,\ldots\ldots\}$,求$[\sqrt{S_1}] + [\sqrt{S_2}] + [\sqrt{S_3}] + \cdots + [\sqrt{S_{2014}}]$ =?([ ]為高斯符號)"至任一項，並探討其規律

定理1:$A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv 2\ or\ 3 (mod\ 4)\}$,試證$[\sqrt{S_m^2}] = m$

【證明】

觀察得知:

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9
S_m^1	2	3	6	7	10	11	14	15	18
S_m^2	2	5	11	18	28	39	53	68	86
$[\sqrt{S_m^2}]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

因此，猜測$[\sqrt{S_m^2}]$ =m

先構造一個輔助數列:

$$H\_S_m^1=2m$$

因此

$$H\_S_m^2=\sum_{i=1}^{m} 2i$$

$$H\_S_m^2 =m(m+1)$$

易於得知，輔助數列與原式在 m≡ 0(mod 2)時，原式比輔助數列($H\_S_m^1$)小1，其餘情況相同
因為如果想要$H_S_m^2$"排隊站好"，只須滿足$m^2 \le m^2 + m \le (m+1)^2 - 1$
易於確認$H_S_m^2$成立
又，因為

$$m^2 < S_m^2 + \left[\frac{m}{2}\right] = m^2 + m < (m+1)^2 - 1$$

因此
S_m^2滿足題設

(三)承(二)，繼續討論S_m^3的情形

(1)開始討論之前，先簡單舉例說明，為何 $\left[\sqrt[3]{S_m^2}\right] = m$ 不可能成立，因而才需要討論S_m^3。

若只使用S_m^2(只使用一項$k_1 = 1$):

	S_{10}^2	S_{20}^2	S_{30}^2	S_{50}^2	S_{100}^2
x=10	460	1920	4380	12300	49600
開三次方	7.71	12.42	16.36	23.08	36.74
正確與否	x	x	x	x	x
x=20	910	3820	8730	24550	99100
開三次方	9.96	15.63	20.59	29.06	46.27
正確與否	x	x	x	x	x
x=30	1360	5720	13080	36800	148600
開三次方	11.07	17.88	23.56	33.26	52.96
正確與否	x(大)	x	x	x	x
x=50	2260	9520	21780	61300	247600
開三次方	13.12	21.19	27.92	39.42	62.79
正確與否	x(大)	x(大)	x	x	x
x=100	4510	19020	45030	12250	495100
開三次方	16.52	26.69	35.17	49.67	79.109
正確與否	x(大)	x(大)	x(大)	x	x

由此處可以知道，因為二次方的增長太慢，因此無法追上三次方的增長，即便 mod 數提高，還是無法追上，此處也可由之後的討論可以知道，二次方的多項式為二次，因此無法追上三次的速度，也因此，才會決定採用S_m^3，而不是增長較慢的S_m^2

(2)接著，觀察不同 x 時，如何才會使原式排隊站好(一開始先討論只有單一項$k_1 = 1$)

	S_1^3	S_2^3	S_3^3	S_{50}^3	S_{100}^3
x=4	1	7	22	84575	671650
開三次方	1	1.91	2.80	43.89	87.57
正確與否	**OK**	x	x	x	x
x=5	1	8	26	105400	838300
開三次方	1	2	2.9	47.2	94.2
正確與否	**OK**	**OK**	x	x	x
x=6	1	9	30	126225	1004950
開三次方	1	2.08	3.10	50.16	100.16
正確與否	**OK**	**OK**	**OK**	**OK**	**OK**
x=7	1	10	34	147050	1171600
開三次方	1	2.15	3.23	52.78	105.42
正確與否	**OK**	**OK**	**OK**	x	x
x=8	1	11	38	167875	1338250
開三次方	1	2.22	3.36	55.16	110.19
正確與否	**OK**	**OK**	**OK**	x	x

從此處可以發現，x=6比較有可能正確

之後討論有兩項$k_1 = 1, k_2 = 6$

	S_1^3	S_2^3	S_3^3	S_{50}^3	S_{100}^3
x=8	1	8	24	85200	674150
開三次方	1	2	2.88	44	87.68
正確與否	**OK**	**OK**	x	x	x
x=10	1	8	26	105400	838300
開三次方	1	2	2.9	47.2	94.2
正確與否	**OK**	**OK**	x	x	x
x=12	1	8	28	125600	1002450
開三次方	1	2	3.03	50.07	100.0816
正確與否	**OK**	**OK**	**OK**	**OK**	**OK**
x=14	1	8	30	145800	1166600
開三次方	1	2	3.10	52.63	105.27
正確與否	**OK**	**OK**	**OK**	x	x
x=16	1	8	32	166000	1330750
開三次方	1	2	3.17	54.95	109.99
正確與否	**OK**	**OK**	**OK**	x	x

從此處可以發現，x=12比較有可能正確，因而猜測有可能 x=6p，故有定理2的證明。

(3)

定理2:設$A = \{a, a \in \mathbb{N} \,\&\, a \equiv k_1 \text{ or } k_2 \dots \text{or } k_p (\text{mod } x)\}$

若$\left\lceil \sqrt[3]{S_m^3} \right\rceil = m$ 對所有 m 皆成立，則必有 x=6p

【證明】

①

先討論當 p=2時

先觀察S_m^1的數值可以知道:

(以$\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}$和 x 表示出$S_m^1$)

S_1^1	S_2^1	S_3^1	S_4^1	S_5^1	S_6^1	S_7^1	S_8^1	S_9^1	S_{10}^1
$\boldsymbol{k_1}$	k_2	$k_1 +$ x	$k_2 +$ x	$k_1 +$ 2x	$k_2 +$ 2x	$k_1 +$ 3x	$k_2 +$ 3x	$k_1 +$ 4x	$k_2 +$ 4x

而定理等同欲證x=12

使用反證法:

case1:

如果$x < 12$ (x 為定值)

將前兩項令最大值(忽略前兩項的條件，並假設可以重複的值):

$$k_1 = x, k_2 = x$$

一樣先觀察不同 x 時，S_m^3的變化

	S_{10}^3	S_{20}^3	S_{30}^3	S_{50}^3	S_{100}^3
x=7	875	5775	18200	79625	609875
開三次方	9.56	17.94	26.3	43.02	84.8
正確與否	x	x	x	x	x
x=8	1000	6600	20800	91000	697000
開三次方	10	8.75	27.50	44.97	88.66
正確與否	**OK**	x	x	x	x
x=9	1125	7425	23400	102375	784125
開三次方	10.4	19.5	28.6	46.78	92.21
正確與否	**OK**	x	x	x	x
x=10	1250	8250	26000	113750	871250
開三次方	10.77	20.20	29.62	48.45	95.50
正確與否	**OK**	**OK**	**x**	x	x
x=11	1375	9075	28600	125125	958375
開三次方	11.11	20.85	30.58	50.01	98.59
正確與否	x	**OK**	**OK**	OK	x

從此表即可知道，即便 x=11(最大可能)，在 m 較大時，也會小過m^3
於是有以下之證明:
此處欲證當 m 較大時，有$S_m^3 < m^3$

此時$S_m^1 = [\frac{m+1}{2}] * x$

而

$$S_m^2 = \sum_{i=1}^{m} [\frac{i+1}{2}] * x$$

將常數 x 提出

$$= \mathrm{x} * \sum_{i=1}^{m} [\frac{i+1}{2}]$$

觀察前面幾項的 m 可知:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sum_{i=1}^{m} [\frac{i+1}{2}]$	1	2	4	6	9	12	16	20	25

因此有

$$S_m^2 = \mathrm{x} * \left(\frac{\mathrm{m}+1}{2}\right)^2 \; if \; m \equiv 1(mod2)$$

$$S_m^2 = \mathrm{x} * (\frac{\mathrm{m}^2}{4} + \frac{\mathrm{m}}{2}) \; if \; m \equiv 0(mod2)$$

又

$$S_m^3 = \sum_{i=1}^{m} S_i^2$$

所以分成$m \equiv 1(mod2)$ 和 $m \equiv 0(mod2)$來討論

先討論$m \equiv 0(mod2)$:
令 m=2k:

$$S_{2k}^3 = \sum_{i=1}^{k} S_{2i-1}^2 + \sum_{i=1}^{k} S_{2i}^2$$

$$= \mathrm{x}(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{i}^2 + \sum_{i=1}^{k} i(i+1))$$

$$= \mathrm{x}(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)(k+2)}{3})$$

$$= x(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)(2k+4)}{6})$$

$$= x(\frac{k(k+1)(4k+5)}{6})$$

$$= x(\frac{4k^3+9k^2+5k}{6})$$

因此

$$S_{2k}^3 = x(\frac{4k^3+9k^2+5k}{6})$$

原式必須$\geq (2k)^3 = 8 * k^3$，但是由題設$x < 12$，因此領導係數必定小於8，由此可知，在 k 較大時，領導係數的影響大於其他項次，必定在某個較大的 k 之後，都小於$(2k)^3$

結論:$x \geq 12$

case2:

如果$x > 12$ (x 為定值)

將前兩項令最小值(忽略前兩項的條件，並假設可以重複的值):

$$k_1 = 0, k_2 = 0$$

一樣先觀察S_m^3

	S_{10}^3	S_{20}^3	S_{30}^3	S_{50}^3	S_{100}^3
x=13	910	7995	27755	131300	1066975
開三次方	9.69	19.99	30.27	50.82	102.18
正確與否	x	x	**OK**	**OK**	x
x=14	980	8610	29890	141400	1149050
開三次方	9.93	20.49	31.03	52.09	104.74
正確與否	**OK**	**OK**	x	x	x
x=15	1050	9225	32025	151500	1231125
開三次方	10.16	20.97	31.75	53.30	107.1
正確與否	**OK**	**OK**	x	x	x
x=16	1120	9840	34160	161600	1313200
開三次方	10.38	21.42	32.44	54.46	109.50
正確與否	**OK**	x	x	x	x

觀察得知，在 m 較大時，會大過$(m+1)^3$

所以此處欲證明

當 m 較大時，有$S_m^3 > (m+1)^3$

此處為了證明，構造一個輔助數列:

定義$H_S_m^1 = x * \frac{m}{2}$

仿造 Case1的思考方式，易於得知

$$H\_S_m^2 = \sum_{i=1}^{m} H\_S_m^1$$

$$= x * \sum_{i=1}^{m} \frac{i}{2}$$

$$= x * \frac{m * (m+1)}{4}$$

因此

$$H\_S_m^3 = \sum_{i=1}^{m} x * \frac{i * (i+1)}{4}$$

$$= x \sum_{i=1}^{m} \frac{i * (i+1)}{4}$$

$$= x * \frac{m * (m+1) * (m+2)}{12}$$

$$= \frac{x}{12} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$$

比較

$H_S_m^1$和S_m^1即可知道有$H_S_{2m-1}^1 - S_{2m-1}^1 = \frac{x}{2}$；$H\_S_{2m}^1 - S_{2m}^1 = x$

明顯可知道$H_S_m^1 - S_m^1$為 m 的多項式，次數為0次

$$H\_S_m^1 - S_m^1 = \{\frac{x}{2}, x, \frac{x}{2}, x \dots\}$$

將其變大使對所有 m，都有$H_S_m^1 - S_m^1 = x$
則利用階差數列的定義，可知$H_S_m^2 - S_m^2$為 m 的多項式，次數為1次
$H_S_m^3 - S_m^3$為 m 的多項式，次數為2次
因此

$$H\_S_m^3 = \frac{x}{12} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$$

中的m^3係數就是S_m^3的m^3係數，當$x > 12$時，$\frac{x}{12} > 1$

因$(m+1)^3$的係數=1，因此必有當m很大時，S_m^3>$(m+1)^3$
由此可證，$x \leq 12$
由上可知，**x = 12**

②

再討論當 p=l 時的情況:
先壓上界:
假設 x>6l:
則仿造 p=2時的證法，令:

$$k_i = 0\ for\ 1 \le i \le l$$

並定義

$$H\_S_m^1 = x * \frac{m}{l}$$

則

$$H\_S_m^2 = \sum_{i=1}^{m} H\_S_i^1$$

$$= \mathrm{x} * \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{i}}{l}$$

$$= \mathrm{x} * \frac{m*(m+1)}{2*l}$$

因此

$$\mathrm{H\_S}_m^3 = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{x} * \frac{i*(i+1)}{2*l}$$

$$= \mathrm{x} \sum_{i=1}^{m} \frac{i*(i+1)}{2*l}$$

$$= \mathrm{x} * \frac{m*(m+1)*(m+2)}{6*l}$$

$$= \frac{\mathrm{x}}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$$

將$H_\mathrm{S}_m^1 - \mathrm{S}_m^1$的值變大，使對所有 m 都有$H_\mathrm{S}_m^1 - \mathrm{S}_m^1 = x$
則利用階差數列的定義，可知$H_S_m^2 - \mathrm{S}_m^2$為 m 的多項式，次數為1次
$\mathrm{H_S}_m^3 - S_m^3$為 m 的多項式，次數為2次
因此

$$\mathrm{H\_S}_m^3 = \frac{\mathrm{x}}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$$

中的m^3係數就是S_m^3的m^3係數，當$\mathrm{x} > 6l$時，$\frac{\mathrm{x}}{6l} > 1$

於是"在$\mathrm{x} > 6l$時，m^3的係數必大於1"

即當 m 很大時，$S_m^3 > (m+1)^3$，故矛盾
因此上界為$\leq 6l$

接著求下界:
假設 x<6*l*:
則仿造上述證法，令:

$$k_i = x\ for\ 1 \leq i \leq l$$

並定義

$$H\_S_m^1 = x * \frac{m}{l}$$

同理，

$$H\_S_m^3 = \frac{\mathrm{x}}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$$

將$H_S_m^1 - \mathrm{S}_m^1$的值變小，使對所有 m 都有$H_S_m^1 - \mathrm{S}_m^1 = -x$
則利用階差數列的定義，可知$H_S_m^2 - \mathrm{S}_m^2$為 m 的多項式，次數為1次
$\mathrm{H_S}_m^3 - S_m^3$為 m 的多項式，次數為2次
因此

$$\mathrm{H\_S}_m^3 = \frac{\mathrm{x}}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$$

中的m^3係數就是S_m^3的m^3係數，當$\mathrm{x} < 6l$時，$\frac{\mathrm{x}}{6l} < 1$

於是"在$\mathrm{x} < 6l$時，m^3的係數必小於1"
即當 m 很大時，$S_m^3 < m^3$，故矛盾
於是下界$\geq 6l$

綜合上述，$\mathbf{x} = \boldsymbol{6l}$
證畢!

(四)

定理3:設$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathbb{N}\ \&\ \mathbf{a} \equiv \boldsymbol{k_1}\ \boldsymbol{or}\ \boldsymbol{k_2} \ldots \boldsymbol{or}\ \boldsymbol{k_p} (\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{x})\}$

$\boldsymbol{S_m^1}$為A中的第m個元素，$\boldsymbol{S_m^{n+1}} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{S_i^n}$

若$[\sqrt[n]{\boldsymbol{S_m^n}}]$=m，則 x與p的關係滿足$\mathbf{x} = \mathbf{p} * (\mathbf{n})$!

先證明一個引理:
設$f_n(m) = \sum_{i=1}^{m} i^n$，則滿足下列兩條件:
(a) $\deg(f_n) = n + 1$

(b)$f_n(\mathrm{m})$中的$n+1$項(即m^{n+1})係數為$\dfrac{1}{n+1}$

【證明】

計算$\sum_{i=1}^{m} i^n$可以利用以下方法:

$(\mathrm{m}+1)^{n+1}-(\mathrm{m})^{n+1}=C_1^{n+1}\mathrm{m}^n+\cdots+C_k^{n+1}\mathrm{m}^{n+1-k}+\cdots+1$

$(\mathrm{m})^{n+1}-(\mathrm{m}-1)^{n+1}=C_1^{n+1}(\mathrm{m}-1)^n+\cdots+C_k^{n+1}(\mathrm{m}-1)^{n+1-k}+\cdots+1$

$(\mathrm{m}-1)^{n+1}-(\mathrm{m}-2)^{n+1}=C_1^{n+1}(\mathrm{m}-2)^n+\cdots+C_k^{n+1}(\mathrm{m}-2)^{n+1-k}+\cdots+1$

…

$(1)^{n+1}-(0)^{n+1}=C_1^{n+1}(0)^m+\cdots+C_k^{n+1}(0)^{n+1-k}+\cdots+1$

對左右兩邊求和:

左式=

$$(\mathrm{m}+1)^{n+1}$$

右式=

$$C_1^{n+1}\sum_{i=1}^{m} i^n+C_2^{n+1}\sum_{i=1}^{m} i^{n-1}+\cdots+m$$

然後使用數學歸納法:

先證引理在 m=1時成立:

$$\sum_{i=1}^{m} i=\frac{m^2}{2}+\frac{m}{2}$$

由此可知，m=1時是正確的

之後並假設 m=k 時皆正確

欲證 m=k+1時正確，則由假設:"m=k 時正確"，有$\deg(f_k)=k+1$

且之前的值也正確，於是對所有$\mathrm{m}\le \mathrm{k}$ 皆有 $\deg(f_m)=m+1$

再比較當 m=k+1時上面左右兩式，顯然有左式的次方數=k+2

而右式由上述歸納假設可知

$$C_1^{k+2}f_{k+1}+\sum_{m=1}^{k} f_m$$

但是又因為

$$\sum_{m=1}^{k} f_m$$

的最大 degree 只有$k+1$，因此必有

$$\deg(f_{k+1})=k+2$$

之後，展開右式可以知道m^{k+2}的係數為1

而左式的其他項 degree 只有$k+1$，故可以知道f_{k+1}的m^{k+2}係數為$\frac{1}{C_1^{k+2}}=\frac{1}{k+2}$

至此，引理證明完畢

利用引理來證明定理3:
【證明】
n=2的時候在之前的"三次方的解"中證明過
若有p個數，則欲證$\mathrm{x}=\mathrm{p}*(\mathrm{n})!$
此處同 n=2時，先定義

$$\mathrm{H\_}S_m^1=\mathrm{x}*\frac{\mathrm{m}}{p}$$

因為 H_S_m^{n+1}的最高次的係數，只跟 H_S_m^n的最高次係數有關

(*說明:由引理(a)可以知道，H_S_m^{n+1}的最高次的係數就是 H_S_m^n的最高次係數乘上常數倍關係，因為 deg(H_S_m^n)=n，deg(H_S_m^{n+1})=n+1，且使得 deg(H_S_m^{n+1})=n+1的必定是 H_S_m^n的最高次)

又$\sum_{i=1}^{m} i^n$中的m^{n+1}係數為$\frac{1}{n+1}$

於是，觀察規律即得

$H_S_m^2$的最高次為2，而且係數為$\frac{\mathrm{x}}{p}*\frac{1}{2}$

$H_S_m^3$的最高次為3，而且係數為$\frac{\mathrm{x}}{p}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}$

$H_S_m^4$的最高次為4，而且係數為$\frac{\mathrm{x}}{p}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}$

…

經過簡單地歸納，可以知道$H_S_m^n$的最高次為 n，而且係數為$\frac{\mathrm{x}}{p}*\frac{1}{n!}$

之後，討論$H_S_m^1-S_m^1$，並與之前一樣，將其放大至每項皆為x
於是$H_S_m^1-S_m^1$的次數為0次(常數)
因此$H_S_m^n-S_m^n$的次數為$\mathrm{n}-1$次
於是可以知道S_m^n的最高次係數與$H_S_m^n$相同

因此$\frac{\mathrm{x}}{p}*\frac{1}{n!}$必須=1，否則領導系數會增長太快(或太慢)，最後由$\frac{\mathrm{x}}{p}*\frac{1}{n!}=1$可得$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}*(\boldsymbol{n})!$

證明結束

(五)

利用上述的定理，可以快速排除掉不合理的數列，但是對於是否有解仍然無法證明，
接著在特例的情況下討論是否有無限多組滿足題意的 p

使用附錄2的程式所得到的數列，帶入附錄1的程式，則前面幾項(如100000項)，都沒有問題，因此猜測此為可能之答案，並有以下之定理與證明

定理4:設$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathbb{N} \ \& \ \mathbf{a} \equiv \boldsymbol{k_1} \ \boldsymbol{or} \ \boldsymbol{k_2} \ldots \boldsymbol{or} \ \boldsymbol{k_p} (\boldsymbol{mod} \ \mathbf{p} * (\mathbf{n})!)\}$
其中$\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \ldots, \boldsymbol{k_p}$滿足$\left[\sqrt[n]{\boldsymbol{S_i^n}}\right] = \boldsymbol{i}$，其中$\mathbf{0} < \mathbf{i} < \mathbf{p} + \mathbf{1}$
則必存在 p，且有無限多個 p 滿足對所有 m，都有$\left[\sqrt[n]{\boldsymbol{S_m^n}}\right] = \boldsymbol{m}$

【證明】

構造一個輔助數列$G^n_S_m^1$，滿足對所有 m，都有$\sqrt[n]{G^n_S_m^n} = m$，其中

$$G^n\_S_m^{j+1} = \sum_{i=1}^{m} G^n\_S_i^j$$

此處給出$G^n_S_m^1$較小時的幾個值(可使用附錄2的程式計算)

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
n=2	1	3	5	7	9	11
n=3	1	6	12	18	24	30
n=4	1	13	36	60	84	108
n=5	1	28	121	240	360	480
n=6	1	59	419	1081	1800	2520

根據題設可以知道，輔助數列$G^n_S^1$ 的前 p 項與S^1 的前 p 項相同
而根據階差數列(高中數學競賽教程中42章 p.394)，可以知道，n 次階差後，前 n-1項相鄰項的差<n!，而從第 n-1項開始之後每一相鄰項的差均為 n!
因此$S^1 - G^n_S^1$ 會依照上述的討論，滿足從第 p+1項開始，每 p 項循環一次
例如 n=4 的時候，

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S^1	1	13	36	60	97	109	132	156	193	205	228	252
$G^n\_S^1$	1	13	36	60	84	108	132	156	180	204	228	252
$S^1 - G^n\_S^1$	0	0	0	0	13	1	0	0	13	1	0	0

因此對所有 p 及 n，$S^1 - G^n\_S^1$ 均為
$\{0,0,\ldots,0,a_1,a_2,a_3 \ldots, a_{n-2}, 0,0,\ldots,0,a_1,a_2,a_3 \ldots, a_{n-2}, 0,0,\ldots,0,\ldots\}$
(其中 $a_1,a_2,a_3 \ldots, a_{n-2}, 0,0,\ldots,0$ 會一直循環，且有 p-n+2個0)
故當 p 越大時，所得的差越小
又$S_m^n - G^n_S_m^n$為 m 的多項式，且係數為 n-1次

若想要滿足$\mathrm{m}^n \le S_m^n < (m+1)^n$，只需$S_m^n - G^n_S_m^n$的係數(每一項)小於或等於
$(\mathrm{m}+1)^n - m^n = C_1^n m^{n-1} + \cdots + 1$的係數(每一項)即可。……條件甲
再加上 p 越大時，$S_m^n - G^n_S_m^n$多項式的每一項係數必定漸小，因此必定存在較大的 p，對所有 m，皆滿足條件甲，且當有一個 p 滿足條件甲後，自然其他更大的 p 也會滿足條件甲。

(六)

Lemma1:
設 m,k 是一正整數，則有以下公式:

$$\sum_{i=1}^{m} i(i+1)\ldots(i+k) = \frac{1}{k+2}(m)(m+1)(m+2)\ldots(k+m+1)$$

Lemma2:
設$\mathrm{f(m)} = (m)(m+1)(m+2)\ldots(m+k) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i\, m^i$
則對所有$a_i, 1 \le i \le k+1$，有$a_i < (k+1)!$

【證明】
在f(m)中帶入$\mathrm{m}=1$，可知$\sum_{i=0}^{k+1} a_i = (\mathrm{k}+1)!$，又易知對所有$a_i, 1 \le i \le k+1$，
有$a_i > 0$，命題得證

Lemma3:
設一數列(仿階差數列)
$\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{a} \in \mathbb{N}\ \&\ \mathrm{a} \equiv 0 (mod\ x)\}$

$S_m^1 = \mathrm{mx}$，則$S_m^n = \frac{1}{n!}\mathrm{m(m+1)(m+2)\ldots(n+m-1)} * \mathrm{x}$

【證明】
反覆使用引理，可以知道如下的式子

$$S_m^1 = \frac{1}{1}\mathrm{m} * \mathrm{x}$$

$$S_m^2 = \frac{1}{1*2}\mathrm{m(m+1)} * \mathrm{x}$$

$$S_m^3 = \frac{1}{1*2*3}\mathrm{m(m+1)(m+2)} * \mathrm{x}$$

使用數學歸納法即可得到

$$S_m^n = \frac{1}{n!}\mathrm{m(m+1)(m+2)\ldots(n+m-1)} * \mathrm{x}$$

證畢!

Lemma4:
若$\mathrm{S}^0 = \{0, \ldots, 0, (\mathrm{n}-2)\mathrm{n}!, \ldots, (\mathrm{n}-2)\mathrm{n}!, 0, \ldots, 0, (\mathrm{n}-2)\mathrm{n}!, \ldots, (\mathrm{n}-2)\mathrm{n}!, \ldots\ldots\}$，

從第一個$(\mathrm{n}-2)\mathrm{n}!$開始，循環出現n-2個(n-2)n!和(p-n+2)個0

則$H_S^0=\{\frac{(n-2)^2n!}{p},\frac{(n-2)^2n!}{p},\dots,\frac{(n-2)^2n!}{p}\}$，在 n 次時對所有 m，都有$H_S_m^n \geq S_m^n$，$(\mathrm{n}\geq 2)$

【證明】

因為

$$S^1=\{0,\dots,0,(\mathrm{n}-2)\mathrm{n}!,2*(\mathrm{n}-2)\mathrm{n}!,\dots,(\mathrm{n}-2)^2*\mathrm{n}!,(\mathrm{n}-2)^2*\mathrm{n}!,\\ \dots,(\mathrm{n}-2)(\mathrm{n}-1)\mathrm{n}!,..,(\mathrm{n}-2)(2\mathrm{n}-4)*\mathrm{n}!\dots\dots\}$$

的第 p 項為$(\mathrm{n}-2)^2*\mathrm{n}!$，第$\mathrm{p}q$項為 $\mathrm{q}*(\mathrm{n}-2)^2*\mathrm{n}!$(其中 q 是正整數)，此與$H_S^1$的第 pq 項是相同的!而$S^1$的其他項(由餘式定理可令為 pq-i)易於知道與 pq 項的差為 $\mathrm{i}*\mathrm{n}!*(\mathrm{n}-2)$，$H_S^1$的其他項(由餘式定理可令為 pq-i)易於知道與 pq 項的差為

$\mathrm{i}*(\frac{(n-2)^2n!}{p})$，在$\frac{n-2}{p}\leq 1$時，$H_S^1$的每一項均$\geq S^1$，如此可知必有在 n 次時對所有 m 有$H_S_m^n \geq S_m^n$，$(\mathrm{n}\geq 2)$

又因$\mathrm{n}-2\leq \mathrm{p}$必成立，所以此引理必成立，得證!

利用前面的引理來進行如下公式的證明:

定理5:
對於任一 n，n 為定值，存在一個$\mathbf{p}=\mathbf{n}!*(\mathbf{n}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$的解，此解的形式滿足定理四所給出的特例

【證明】

仿造定理4，可以知道S^1 與輔助數列($\mathrm{G}^n\_S^1$)的差為

$\{\underbrace{0,0\dots,0}_{n!*(n-2)^2個},a_1,a_2\dots,a_{n-2},\underbrace{0,0,\dots,0}_{n!*(n-2)^2-(n-2)個},a_1,a_2\dots,a_{n-2},\underbrace{0,0,\dots,0}_{n!*(n-2)^2-(n-2)個}\dots\}$

省略一開始的0中的前$n-2$項(因此數列會變大，不會影響結論之證明)，即可應用 Lemma4中的放大方法，因為

$$a_i\leq n!*(n-2)，1\leq \mathrm{i}\leq \mathrm{n}-2$$

(設$\mathrm{G}^n_S^1$的1到 n-1項為$\{a_1,a_2\dots,a_{n-2},a_{n-1}\}$=$\{1,a_2\dots,a_{n-2},(\mathrm{n}!-1)\}$，設$a_2\dots,a_{n-2}$皆 = 0即可證得}

所以可以先放大為$a_i=n!*(n-2)$，並利用 Lemma4，知道可以放大為

$H\_S^0=\{\frac{(n-2)^2n!}{p},\frac{(n-2)^2n!}{p}\dots,\frac{(n-2)^2n!}{p}\}$

使用 Lemma3，可以知道$H_S_m^{n-1}$為

$$\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+2)\dots(\mathrm{n}+\mathrm{m}-2)*\mathrm{x}$$

其中 x=$\frac{(n-2)^2n!}{p}$

再使用 lemma2，就可以知道只要當$x \le 1$，就有原式每項的係數都小於1，又知$(m+1)^n-(m)^n$的每項係數皆≥ 1，因此可知成立!

最後，只要$\frac{(n-2)^2 n!}{p} \le 1$時，就會存在解，因此$(n-2)^2 n! \le p$時，定理5成立。 **證畢！**

(七)

定理6:如果$\mathbf{A}=\{\mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathbb{N}\ \&\ \mathbf{a} \equiv \boldsymbol{k_1}\ \boldsymbol{or}\ \boldsymbol{k_2} \ldots \boldsymbol{or}\ \boldsymbol{k_p} (\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{x})\}$

且希望$\left[\sqrt{\boldsymbol{S_m^2}}\right]=\boldsymbol{m}$，

(a)則必須要有 x=2p
(b)驗證是否成立，則只需確認前 p 項就可以

【證明】
(a)由定理三的結論即得
(b)以下說明，若前面 p 項成立，之後的項數必定成立
從 p+1項開始:
易於得知，$S_{p+1}^1=k_1+2\mathrm{p}$，而$S_{p+1}^2=S_p^2+k_1+2\mathrm{p}$
且已知$\mathrm{p}^2 \le S_p^2 < (p+1)^2$
想要驗證S_{p+1}^2 成立，只需滿足

$$(\mathrm{p}+1)^2 \le S_{p+1}^2=S_p^2+k_1+2\mathrm{p}<(p+2)^2$$

因此，只需k_1滿足$1 \le k_1<4$，而此由題設易於得知
利用數學歸納法，即可得知：
設需要驗證的項為$S_{pq+t}^1(1 \le \mathrm{t} \le \mathrm{p})$
易於得知，$S_{pq+t}^1=k_t+2\mathrm{pq}$，而$S_{pq+t}^2=S_{pq}^2+(S_t^2=k_1+k_2+k_3 \ldots+k_t)+\mathrm{t} * (2\mathrm{pq})$
且已知$(\mathrm{pq})^2 \le S_{pq}^2<(\mathrm{pq}+1)^2$
$(\mathrm{t})^2 \le S_t^2<(t+1)^2$
故

$$(\mathrm{pq})^2+\mathrm{t}^2+2\mathrm{pqt} \le S_{\mathrm{pq}+t}^2=S_{\mathrm{pq}}^2+S_t^2+2\mathrm{tpq} \le (\mathrm{pq}+1)^2-1+(t+1)^2-1+2pqt$$

因此

$$(\mathrm{pq}+\mathrm{t})^2 \le S_{\mathrm{pq}+t}^2 \le (pq)^2+2pq+t^2+2t+2pqt$$

因此

$$(\mathrm{pq}+\mathrm{t})^2 \le S_{\mathrm{pq}+t}^2<(pq)^2+t^2+1^2+2pqt+2pq+2t$$

此式等同

$$(\mathrm{pq}+\mathrm{t})^2 \le S_{\mathrm{pq}+t}^2<(pq+t+1)^2$$

因此得證!

以下以**定理6**為基礎，列舉出 n=2,p=4前四個值的所有可能，以作為應用(參考附錄3程式):

	k_1	k_2	k_3	k_4
第1組	1	3	5	7
第2組	1	3	5	8
第3組	1	3	6	7
第4組	1	3	6	8
第5組	1	3	6	8
第6組	1	3	7	8
第7組	1	4	5	6
第8組	1	4	5	7
第9組	1	4	5	8
第10組	1	4	6	7
第11組	1	4	6	8
第12組	1	4	7	8
第13組	1	5	6	7
第14組	1	5	6	8
第15組	1	6	7	8
第16組	2	3	4	7
第17組	2	3	4	8
第18組	2	3	5	6
第19組	2	3	5	7
第20組	2	3	5	8
第21組	2	3	6	7
第22組	2	3	6	8
第23組	2	3	7	8
第24組	2	4	5	6
第25組	2	4	5	7
第26組	2	4	5	8
第27組	2	4	6	7
第28組	2	4	6	8
第29組	2	4	7	8
第30組	2	5	6	7
第31組	2	5	6	8
第32組	2	5	7	8
第33組	2	6	7	8
第34組	3	4	5	6
第35組	3	4	5	7
第36組	3	4	5	8

第37組	3	4	6	7
第38組	3	4	6	8
第39組	3	4	7	8
第40組	3	5	6	7
第41組	3	5	6	8
第42組	3	5	7	8

而根據**定理6**，可以用較簡潔的方式證明**定理1**:
只需驗證前兩項2和5，易於得知皆成立，得證!

伍、研究結果與討論

(1) 延伸原題"正整數中，被4整除或被4除餘1的數刪去，剩下的數列$\{a_n\} = \{2,3,6,7,10,11, \ldots\ldots\}$,求$[\sqrt{S_1}] + [\sqrt{S_2}] + [\sqrt{S_3}] + \cdots + [\sqrt{S_{2014}}]$ =?([ ]為高斯符號)"後得到若$A = \{a, a \in \mathbb{N}$

$\& \ a \equiv 2 \ or \ 3 (mod\ 4)\}$，$S_m^1$為 A 中的第 m 個元素，$S_m^2 = \sum_{i=1}^{m} S_i^1$，則有$[\sqrt{S_m^2}] = m$

(2) 設$A = \{a, a \in \mathbb{N} \ \& \ a \equiv k_1 \ or \ k_2 \ldots or \ k_p (mod\ x)\}$

S_m^1為 A 中的第 m 個元素，$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} S_i^n$，若$[\sqrt[n]{S_m^n}]$=m，則 x 與 p 的關係滿足$x = p * (n)!$，此條件為必要條件

(3) 承(2)，進一步確認當$p \geq (n-2)^2 * n!$會存在解，並找出$k_1, k_2, \ldots, k_p$的形式，其滿足$[\sqrt[n]{S_i^n}] = i$，其中$0 < i < p+1$

(4) 對於$A = \{a, a \in \mathbb{N} \ \& \ a \equiv k_1 \ or \ k_2 \ldots or \ k_p (mod\ x)\}$，$S_m^1$為 A 中的第 m 個元素，$S_m^2 = \sum_{i=1}^{m} S_i^1$，若希望有$[\sqrt{S_m^2}] = m$，只能從 mod(2p)中取出 p 個數，且需檢驗前 p 項是否成立，此條件是充分必要條件

陸、相關應用與未來展望

(1)對於 n>2的情形，如何檢驗解的方法還未找出，期待之後有更快的方法

(2)如果不可"排隊站好"，則是否仍可以找出規律。

(3)可否在給定 p,n 的情況下，在滿足上述條件下，算出"排隊站好"的對數

柒、參考資料

(1) 嚴鎮軍(2012)。高中數學競賽教程。臺北市:九章
(2) 陸思明(2001)。數列與級數。新北市:建弘
(3) 二上國中課本

附錄1:定理四測試程式

```
str1=[]
str2=[]
def f(n):
    a=1
    for i in range(1,n+1):
        a=a*i
    return a
#1, 28, 121, 240, 360
rule_sequence=list(map(int,input("首 n 項的值").split(' ')))
num=int(input("幾次方的情形"))
test=int(input('需要測試幾項?'))
how_much=len(rule_sequence)
for j in range(test):
    for k in range(how_much):
        str1.append(rule_sequence[k]+j*f(num)*how_much)
#print(st
for i in range(num-1):
    str2=str1
    str1=[]
    str1.append(rule_sequence[0])
    for k in range(len(str2)-1):
        str1.append(str2[k+1]+str1[k])
print("有無錯解?")
print('#######')
Sol=True
print(str1)
for i in range(len(str1)):
    if (str1[i]>=(i+2)**num) or (str1[i]<(i+1)**num):
            print('第%d 項有錯' % (i+1))
            print('第%i 項的值是%i，開%i 次方後的值是%f' %
(i+1,str1[i],num,str1[i]**(1/num)))
            Sol=False
```

```
                    break
if Sol==True:
        print('OK')
a=input("請問閱讀完畢了嗎?，若閱讀完畢，請按下 ENTER")
```

附錄2:階差數列的數值

```
for k in range(10):
        str1=[]
        for i in range(1,100):
                str1.append(i**k)
        print('Case #%i' % (k))
        print(str1)
        for j in range(k):
                print(' ')
                str2=[1]
                for i in range(len(str1)-1):
                        str2.append(str1[i+1]-str1[i])
                print(str2)
                str1=str2
```

附錄3:n=2,k=4時的所有可能程式碼

```
Answer_array=[]
for i in range(1,9):
        for j in range(1,9):
                for k in range(1,9):
                        for l in range(1,9):
                                if (i!=j) & (i!=k) & (i!=l) & (j!=k) & (j!=l) & (k!=l) & (i<j) & (j<k) & (k<l) :
                                        Answer_array.append([i,j,k,l])
num10=0
for p in range(len(Answer_array)):
        str1=[]
        rule_sequence=Answer_array[p]
        num=2
        test=4
        how_much=len(rule_sequence)
        for j in range(test):
                for k in range(how_much):
```

```
            str1.append(rule_sequence[k]+j*(2*how_much))
    for i in range(num-1):
        str2=str1
        str1=[]
        str1.append(rule_sequence[0])
        for k in range(len(str2)-1):
            str1.append(str2[k+1]+str1[k])
    for i in range(4):
        if (str1[i]>=(i+2)**2) or (str1[i]<(i+1)**2):
            break
        else:
            if i==3:
                print(str1[0],str1[1]-str1[0],str1[2]-str1[1],str1[3]-str1[2])
                num10=num10+1
                print(num10)
print(num10)
```

【評語】030422

給一個由模 n 的餘數所決定出的數列，對此數列求和建構出第一層的新數列，再求和建構第二層的新數列，同理建構第 k 層的新數列。針對 n 該如何選取，才能使得第 k 層的數列的每一項都滿足一個特殊等式。然選題格局小了一點，但符號的使用可能受限於所學，較為混亂. 如果能把表達的方式稍做修正會更好。學生很有想法，能探究一般化的特性得出結論，並能有數學論證，展現了高度的數學潛力，未來發展值得期待。

作品海報

壹、研究動機

因緣巧合下，在某次的數學課中，老師與我討論到一題古老的數學題目，"正整數中，被4整除或被4除餘1的數刪去，剩下的數列$\{a_n\} = \{2,3,6,7,10,11,\dots\dots\}$, 求$[\sqrt{S_1}] + [\sqrt{S_2}] + [\sqrt{S_3}] + \cdots + [\sqrt{S_{2014}}]$ =?([ ]為高斯符號)"，也由於這道有趣的數列題目，讓我開始了這次的研究，觀察前幾項後，我發現雖然不總是剛剛好$S_m = m^2$，但卻總是滿足取完高斯函數後正好等於 m，這也讓我產生了很大的興趣，希望能找到在2次時讓等式成立的條件與n次時讓等式成立的條件又是如何?

貳、研究目的

(1) 證明"S_m^1為$A = \{a, a \in \mathbb{N} \,\&\, a \equiv 2 \text{ or } 3 (mod\ 4)\}$中的第m個元素，$S_m^2 = \sum_{i=1}^m S_i^1$，則$[\sqrt{S_m^2}] = m$，[ ]為高斯符號"。

(2) 找出“當 $A = \{a, a \in \mathbb{N} \,\&\, a \equiv k_1 \text{ or } k_2 \dots \text{or } k_p (mod\ x)\}$，$S_m^1$為A中的第m個元素，$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^m S_i^n$ 時，則A應滿足什麼必要條件， 才能對所有n和m都有$[\sqrt[n]{S_m^n}] = m$?"

(3) 承(2)，證明在任意n的情形下，都有無限多組A數列滿足條件，並給出該數列的形式。

(4) 找出n=2時，滿足$[\sqrt{S_m^2}] = m$的充分條件。

參、研究器材與設備

(1) 手算:筆&紙&黑板　　(2) 電腦輔助:excel 2010, python 3.7,wolfram alpha

肆、研究過程或方法

(一) 符號定義

此處統一定義

n為次方，m為項數，i為自變數

$A = \{a, a \in \mathbb{N} \,\&\, a \equiv k_1 \text{ or } k_2 \dots \text{or } k_p (mod\ x)\}$

S_m^1為A中的第m個元素　$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^m S_i^n$，

輔助數列: H_$S_m^1 = x * \frac{m}{p}$

H_$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^m$ H_S_i^n

[a]=不超過a的最大整數

(二) 延伸原題題目"正整數中，被4整除或被4除餘1的數刪去，剩下的數列$\{a_n\} = \{2,3,6,7,10,11,\dots\dots\}$, 求$[\sqrt{S_1}] + [\sqrt{S_2}] + [\sqrt{S_3}] + \cdots + [\sqrt{S_{2014}}]$ =?([ ]為高斯符號)"至任一項，並探討其規律

定理1:$A = \{a, a \in \mathbb{N} \ \&\ a \equiv 2 \text{ or } 3 (mod\ 4)\}$,試證$[\sqrt{S_m^2}] = m$

【證明】

先構造一個輔助數列: H_S_m^1=2m

因此H_S_m^2=$\sum_{i=1}^m 2i$，H_S_m^2 =m(m+1)

易於得知，輔助數列與原式在m≡ 0(mod 2)時，原式比輔助數列(H_S_m^1)小1，其餘情況相同

因為如果想要H_S_m^2"排隊站好"，只須滿足

$m^2 \le m^2 + m \le (m+1)^2 - 1$，所以易於確認H_$S_m^2$成立

又因為 $m^2 < S_m^2 + [\frac{m}{2}] = m^2 + m < (m+1)^2 - 1$

因此S_m^2滿足題設

(三)承(二)，繼續討論S_m^3的情形

定理2:設$A = \{a, a \in \mathbb{N} \ \&\ a \equiv k_1 \text{ or } k_2 \dots \text{or } k_p (mod\ x)\}$

則若$[\sqrt[3]{S_m^3}] = m$ 對所有 m 皆成立，必有 x=6p

觀察不同x時，如何才會使原式排隊站好(討論只有單一項$k_1 = 1$)

	S_1^3	S_2^3	S_3^3	S_{50}^3	S_{100}^3
x=6	1	9	30	126225	1004950
開三次方	1	2.08	3.10	50.16	100.16
正確與否	OK	OK	OK	OK	OK

	S_1^3	S_2^3	S_3^3	S_{50}^3	S_{100}^3
x=5	1	8	26	105400	838300
開三次方	1	2	2.9	47.2	94.2
正確與否	OK	OK	x	x	x
x=7	1	10	34	147050	1171600
開三次方	1	2.15	3.23	52.78	105.42
正確與否	OK	OK	OK	x	x

【證明】

討論當p=l 時的情況:(仿造作品書p=2時的證法)

先壓上界，假設x>6l:

令$k_i = 0 \ for\ 1 \le i \le l$，並定義H_$S_m^1 = x * \frac{m}{l}$

則H_$S_m^2 = \sum_{i=1}^m$ H_$S_i^1 = x * \sum_{i=1}^m \frac{i}{l} = x * \frac{m*(m+1)}{2*l}$

因此H_$S_m^3 = \sum_{i=1}^m x * \frac{i*(i+1)}{2*l} = x \sum_{i=1}^m \frac{i*(i+1)}{2*l} = x * \frac{m*(m+1)*(m+2)}{6*l}$

$= \frac{x}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$

將H_$S_m^1 - S_m^1$的值變大，使對所有m都有H_$S_m^1 - S_m^1 = x$

則利用階差數列的定義

可知H_$S_m^2 - S_m^2$為m的多項式，次數為1次

H_$S_m^3 - S_m^3$為m的多項式，次數為2次

因此H_$S_m^3 = \frac{x}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$

中的m^3係數就是S_m^3的m^3係數，當$x > 6l$ 時，$\frac{x}{6l} > 1$

於是"在$x > 6l$ 時，m^3的係數必大於1“

即當m很大時，$S_m^3 > (m+1)^3$，故矛盾，因此上界為≤ $6l$

接著求下界，假設x<6l:

則仿造上述證法，令$k_i = x \quad for\ 1 \le i \le l$

並定義H_$S_m^1 = x * \frac{m}{l}$

同理，H_$S_m^3 = \frac{x}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$

將H_$S_m^1 - S_m^1$的值變小，使對所有m都有H_$S_m^1 - S_m^1 = -x$

則利用階差數列的定義

可知H_$S_m^2 - S_m^2$為m的多項式，次數為1次

H_$S_m^3 - S_m^3$為m的多項式，次數為2次

因此H_$S_m^3 = \frac{x}{6l} * (m^3 + 3m^2 + 2m)$

中的m^3係數就是S_m^3的m^3係數，當$x < 6l$ 時，$\frac{x}{6l} < 1$

於是"在$x < 6l$ 時，m^3的係數必小於1"

即當m很大時，$S_m^3 < m^3$，故矛盾

於是下界≥ $6l$

綜合上述，x = 6l，證畢!

(四)

定理3:設$A = \{a, a \in \mathbb{N} \,\&\, a \equiv k_1 \text{ or } k_2 \dots \text{or } k_p (mod\ x)\}$

S_m^1為A中的第m個元素，$S_m^{n+1} = \sum_{i=1}^m S_i^n$

若$[\sqrt[n]{S_m^n}]$=m，則 x與p的關係滿足$x = p * (n)!$

先證明一個引理:

設$f_n(m) = \sum_{i=1}^m i^n$，則滿足下列兩條件

(a) $\deg(f_n(m)) = n + 1$

(b)f_n(m)中的$n + 1$項(即m^{n+1})係數為$\frac{1}{n+1}$

【證明】

計算$\sum_{i=1}^{m} i^n$可以利用以下方法:

$$(m+1)^{n+1}-(m)^{n+1} = C_1^{n+1}m^n + \cdots + C_j^{n+1}m^{n+1-j} + \cdots + 1$$
$$(m)^{n+1}-(m-1)^{n+1} = C_1^{n+1}(m-1)^n + \cdots + C_j^{n+1}(m-1)^{n+1-j} + \cdots + 1$$
$$(m-1)^{n+1}-(m-2)^{n+1} = C_1^{n+1}(m-2)^n + \cdots + C_j^{n+1}(m-2)^{n+1-j} + \cdots + 1$$
$$\cdots$$
$$(1)^{n+1}-(0)^{n+1} = C_1^{n+1}(0)^m + \cdots + C_j^{n+1}(0)^{n+1-j} + \cdots + 1$$

對左右兩邊求和:
左式$=(m+1)^{n+1}$
右式$=C_1^{n+1}\sum_{i=1}^{m} i^n + C_2^{n+1}\sum_{i=1}^{m} i^{n-1} + \cdots + (m+1)$
然後使用數學歸納法:
先證引理在n=1時成立:$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}$
由此可知，n=1時是正確的
之後並假設n=k時皆正確
欲證n=k+1時正確，則由假設:“n=k時正確"，有$\deg(f_k(m)) = k+1$
且之前的值也正確，於是對所有$n \le k$皆有 $\deg(f_n(m)) = n+1$

再比較當n=k+1時前述左右兩式，顯然有左式的次方數=k+2
而右式由上述歸納假設可知$C_1^{k+2}f_{k+1}(m) + C_2^{k+2}\sum_{i=1}^{m} i^k + \cdots + (m+1)$
但是又因為$C_2^{k+2}\sum_{i=1}^{m} i^k + \cdots + (m+1)$的最大degree只有$k+1$
因此必有$\deg(f_{k+1}(m)) = k+2$
之後，展開左式可以知道m^{k+2}的係數為1
故可以知道$f_{k+1}(m)$的m^{k+2}係數為$\frac{1}{C_1^{k+2}} = \frac{1}{k+2}$

至此，引理證明完畢

利用引理來證明定理3:
【證明】
n=2的時候在之前的"三次方的解"中證明過
若有p個數，則欲證$x = p*(n)!$
此處同n=2時，先定義$H_S_m^1 = x*\frac{m}{p}$
因為$H_S_m^{n+1}$的最高次的係數，只跟$H_S_m^n$的最高次係數有關
(*說明:由引理(a)可以知道，$H_S_m^{n+1}$的最高次的係數就是
$H_S_m^n$的最高次係數乘上常數倍關係
，因為$\deg(H_S_m^n)$=n，$\deg(H_S_m^{n+1})$=n+1，
且使得$\deg(H_S_m^{n+1})$=n+1的必定是$H_S_m^n$的最高次)
又$\sum_{i=1}^{m} i^n$中的m^{n+1}係數為$\frac{1}{n+1}$
於是，觀察規律即得
$H_S_m^2$的最高次為2，而且係數為$\frac{x}{p}*\frac{1}{2}$
$H_S_m^3$的最高次為3，而且係數為$\frac{x}{p}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}$
$H_S_m^4$的最高次為4，而且係數為$\frac{x}{p}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}$
…
經過簡單地歸納，可以知道$H_S_m^n$的最高次為n，而且係數為$\frac{x}{p}*\frac{1}{n!}$
之後，討論$H_S_m^1 - S_m^1$，並與之前一樣，將其放大至每項皆為x
於是$H_S_m^1 - S_m^1$的次數為0次(常數)
因此$H_S_m^n - S_m^n$的次數為$n-1$次
於是可以知道S_m^n的最高次係數與$H_S_m^n$相同
因此$\frac{x}{p}*\frac{1}{n!}$必須=1，否則領導系數會增長太快(或太慢)，最後由$\frac{x}{p}*\frac{1}{n!}=1$
可得$\boldsymbol{x = p*(n)!}$
證明結束

*註記:n!表示1*2…*n
利用上述的定理，可以快速排除掉不合理的解答
但是對於是否**有解仍然無法證明**

(五)

定理4+定理5:
設$A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv k_1\ or\ k_2 \ldots or\ k_p (mod\ p*(n!))\}$
其中$k_1, k_2, \ldots, k_p$滿足$\left[\sqrt[n]{S_i^n}\right] = i$，其中$0 < i < p+1$，則當$p \ge n!*(n-2)^2$時，對所有m，都有$\left[\sqrt[n]{S_m^n}\right] = m$

Lemma1:
設m, k是一正整數，則有以下公式:
$\sum_{i=1}^{m} i(i+1)\ldots(i+k) = \frac{1}{k+2}(m)(m+1)(m+2)\ldots(k+m+1)$

Lemma2:
設一數列(仿階差數列)
$A = \{a, a \in \mathbb{N}\ \&\ a \equiv 0 (mod\ x)\}$
$S_m^1 = mx$，則$S_m^n = \frac{1}{n!}m(m+1)(m+2)\ldots(n+m-1)*x$

Lemma3 :
設$f(m) = (m)(m+1)(m+2)\ldots(m+k) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i m^i$
則對所有$a_i, 1 \le i \le k+1$，有$a_i < (k+1)!$

Lemma4:
若$S^0 =$
$\{0, \ldots, 0, (n-2)n!, \ldots, (n-2)n!, 0, \ldots, 0, (n-2)n!, \ldots, (n-2)n!, \ldots\ldots\}$
從第一個$(n-2)n!$開始，循環出現n-2個(n-2)n!和(p-n+2)個0
則$H_S^0 = \{\frac{(n-2)^2 n!}{p}, \frac{(n-2)^2 n!}{p}, \ldots, \frac{(n-2)^2 n!}{p}\}$，在n次時對所有m，都有
$H\_S_m^n \ge S_m^n$，$(n \ge 2)$

【證明】
構造一個輔助數列$G^n_S_m^1$，滿足對所有m，都有$\sqrt[n]{G^n_S_m^n} = m$
其中$G^n_S_m^{j+1} = \sum_{i=1}^{m} G^n_S_i^j$
根據題設可以知道，輔助數列$G^n_S^1$的前p項與S^1的前p項相同
而根據階差數列(高中數學競賽教程中42章p.394)，可以知道
n次階差後，前n-1項相鄰項的差<n!
而從第n-1項開始之後每一相鄰項的差均為n!
因此$S^1 - G^n_S^1$會依照上述的討論，滿足從第p+1項開始
每p項循環一次
例如 n=4 的時候，

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S^1	1	13	36	60	97	109	132	156	193	205	228	252
$G^n\_S^1$	1	13	36	60	84	108	132	156	180	204	228	252
$S^1 - G^n\_S^1$	0	0	0	0	13	1	0	0	13	1	0	0

因此，由上可知，S^1與輔助數列$(G^n_S^1)$的差為
$\{\underbrace{0,0\ldots,0}_{n!*(n-2)^2個},$
$a_1, a_2\ldots, a_{n-2}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n!*(n-2)^2-(n-2)個},$
$a_1, a_2\ldots, a_{n-2}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n!*(n-2)^2-(n-2)個}\ldots\}$
省略一開始的0中的前$n-2$項
(因此數列會變大，不會影響結論之證明)

即可應用Lemma4中的放大方法，因為
$a_i \le n!*(n-2)$，$1 \le i \le n-2$
(設$G^n_S^1$的1到n-1項為
$\{a_1, a_2\ldots, a_{n-2}, a_{n-1}\}$=$\{1, a_2\ldots, a_{n-2}, (n!-1)\}$
設$a_2\ldots, a_{n-2}$皆$=0$即可證得)
所以可以先放大為$a_i = n!*(n-2)$
並利用Lemma4，知道可以放大為
$H\_S^0 = \{\frac{(n-2)^2 n!}{p}, \frac{(n-2)^2 n!}{p}, \ldots, \frac{(n-2)^2 n!}{p}\}$
使用Lemma2，可以知道$H_S_m^{n-1}$為
$$\frac{1}{(n-1)!}m(m+1)(m+2)\ldots(n+m-2)*x$$
其中x=$\frac{(n-2)^2 n!}{p}$
再使用Lemma3，就可以知道只要當$x \le 1$
就有原式每項的係數都小於1，又知
$(m+1)^n - (m)^n$的每項係數皆≥ 1，因此可知成立!
最後，只要$\frac{(n-2)^2 n!}{p} \le 1$時，就會存在解

因此$(n-2)^2 n! \le p$時，定理4+定理5成立。 **證畢！**

(六)

定理6:如果$A=\{a, a\in\mathbb{N}\ \&\ a\equiv k_1\ or\ k_2 \ldots or\ k_p (mod\ x)\}$

且希望$\left[\sqrt{S_m^2}\right]=m$，

(a)則必須要有x=2p

(b)驗證是否成立，則只需確認前p項就可以

【證明】

(a)由定理三的結論即得

(b)以下說明，若前面p項成立，之後的項數必定成立

從p+1項開始:

易於得知，S_{p+1}^1=k_1+2p，而$S_{p+1}^2=S_p^2+k_1$+2p

且已知$p^2\le S_p^2<(p+1)^2$

想要驗證S_{p+1}^2成立，只需滿足

$(p+1)^2\le S_{p+1}^2=S_p^2+k_1+2p<(p+2)^2$

因此，只需k_1滿足$1\le k_1<4$，而此由題設易於得知

利用數學歸納法，即可得知：

設需要驗證的項為S_{pq+t}^1 $(1\le t\le p)$

易於得知，S_{pq+t}^1=k_t+2pq，而

$S_{pq+t}^2=S_{pq}^2+(S_t^2=k_1+k_2+k_3+\cdots+k_t)$+t*(2pq)

且已知$(pq)^2\le S_{pq}^2<(pq+1)^2$

$(t)^2\le S_t^2<(t+1)^2$

故

$(pq)^2+t^2+2pqt\le S_{pq+t}^2=S_{pq}^2+S_t^2+2tpq$

$\le(pq+1)^2-1+(t+1)^2-1+2pqt$

因此

$(pq+t)^2\le S_{pq+t}^2\le(pq)^2+2pq+t^2+2t+2pqt$

因此

$(pq+t)^2\le S_{pq+t}^2<(pq)^2+t^2+1^2+2pqt+2pq+2t$

此式等同

$(pq+t)^2\le S_{pq+t}^2<(pq+t+1)^2$

因此得證!

以下以**定理6**為基礎，列舉出n=2,p=4前四個值的所有可能，以作為應用(參考附錄3程式):

	k_1	k_2	k_3	k_4
第1組	1	3	5	7
第2組	1	3	5	8
第3組	1	3	6	7
第4組	1	3	6	8
第5組	1	3	6	8
第6組	1	3	7	8
第7組	1	4	5	6
第8組	1	4	5	7
第9組	1	4	5	8
第10組	1	4	6	7
第11組	1	4	6	8
第12組	1	4	7	8
第13組	1	5	6	7
第14組	1	5	6	8
第15組	1	6	7	8
第16組	2	3	4	7
第17組	2	3	4	8
第18組	2	3	5	6
第19組	2	3	5	7
第20組	2	3	5	8
第21組	2	3	6	7

	k_1	k_2	k_3	k_4
第22組	2	3	6	8
第23組	2	3	7	8
第24組	2	4	5	6
第25組	2	4	5	7
第26組	2	4	5	8
第27組	2	4	6	7
第28組	2	4	6	8
第29組	2	4	7	8
第30組	2	5	6	7
第31組	2	5	6	8
第32組	2	5	7	8
第33組	2	6	7	8
第34組	3	4	5	6
第35組	3	4	5	7
第36組	3	4	5	8
第37組	3	4	6	7
第38組	3	4	6	8
第39組	3	4	7	8
第40組	3	5	6	7
第41組	3	5	6	8
第42組	3	5	7	8

而根據**定理6**，可以用較簡潔的方式證明**定理1:**只需驗證前兩項2和5，易於得知皆成立，得證!

伍、 研究結果與討論

(1) 延伸原題"正整數中，被4整除或被4除餘1的數刪去，剩下的數列$\{a_n\}=\{2,3,6,7,10,11,\ldots\ldots\}$，求$\left[\sqrt{S_1}\right]+\left[\sqrt{S_2}\right]+\left[\sqrt{S_3}\right]+\cdots+\left[\sqrt{S_{2014}}\right]$=?([ ]為高斯符號)"後得到若$A=\{a, a\in\mathbb{N}\ \&\ a\equiv 2\ or\ 3 (mod\ 4)\}$，$S_m^1$為A中的第m個元素，$S_m^2=\sum_{i=1}^m S_i^1$，則有$\left[\sqrt{S_m^2}\right]=m$

(2) 設$A=\{a, a\in\mathbb{N}\ \&\ a\equiv k_1\ or\ k_2 \ldots or\ k_p (mod\ x)\}$ S_m^1為A中的第m個元素，$S_m^{n+1}=\sum_{i=1}^m S_i^n$，若$\left[\sqrt[n]{S_m^n}\right]$=m，則 x與p的關係滿足$x=p*(n)!$，此條件為必要條件

(3) 承(2)，進一步確認當$p\ge(n-2)^2*n!$會存在解，並找出$k_1,k_2,\ldots,k_p$的形式，其滿足$\left[\sqrt[n]{S_i^n}\right]=i$，其中$0<i<p+1$

(4) 對於$A=\{a, a\in\mathbb{N}\ \&\ a\equiv k_1\ or\ k_2 \ldots or\ k_p (mod\ x)\}$ S_m^1為A中的第m個元素 $S_m^2=\sum_{i=1}^m S_i^1$，若希望有$\left[\sqrt{S_m^2}\right]=m$，只能從mod(2p)中取出p個數，且需檢驗前p項是否成立，此條件是充分必要條件

陸、 相關應用與未來展望

(1) 對於n>2次的情形，如何檢驗解的方法還未找出，期待之後有更快的方法

(2) 如果不可"排隊站好"，則是否仍可以找出規律。

(3) 可否在給定p,n的情況下，在滿足上述條件下，算出"排隊站好"的對數

柒、 參考資料

(1) 嚴鎮軍(2012)。高中數學競賽教程 。臺北市:九章

(2) 陸思明(2001)。數列與級數。新北市:建弘

(3) 二上國中課本