中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

探究精神獎

030421

尤拉線平行兩定點線段的所有解探討

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 巫玟槿	林耀南
國二 李承恩	張淑敏
國二 王妤文	

關鍵詞：尤拉線、K函數、卡爾丹諾法

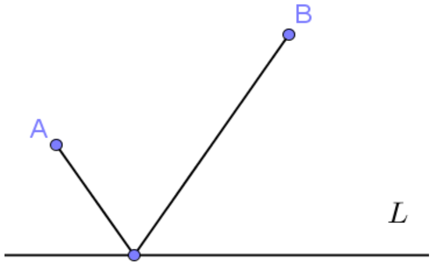
摘要

本文先確認尤拉線平行△一邊的條件為$tan\,\alpha \cdot tan\,\beta = 3$，再針對直線$L$**同側**的兩定點$A$、$B$，探討∥$\overline{AB}$的公式解，過程中用到$K$值曲線凹性判定及此曲線的最小值$N$和3的比較，提供是否有解的探討依據。確定尤拉線∥$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$的存在性及解的公式後，發現最多有一解。對直線$L$**異側**的兩定點$A$、$B$，最特別的是在∥$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$時，最多可得三個解。最後轉換變因，將定直線改成動態直線，用以觀察滿足條件的P點軌跡。

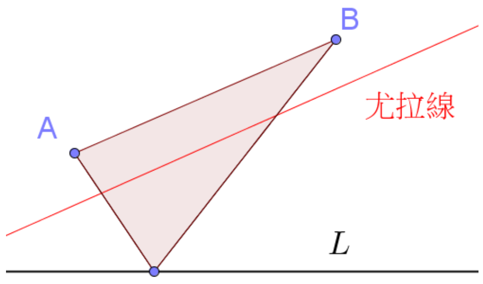
當解的數量依A、B兩點的擺放而有所不同時，本文將判別式圖形畫出來，讀者可在所要的不等式區塊內取得t、b資料，畫出所要的圖形。最後作者針對所要平行的對象設計**專用的兩條直線**，讓讀者依序選定A、B後，可輕易地畫出∥$\overline{AB}$、$\overline{AP}$、$\overline{BP}$的P點解，且同異側皆可，甚是有趣。

壹、研究動機

在幾何課程中，常出現一道題目：在直線L上方有A、B兩定點，如圖(1-1)，試在L上用尺規作圖找出一點P，使$\overline{PA}+\overline{PB}$最小(國中數學翰林版-第四冊-第九單元)。老師說能自己想出作法的同學真的是不簡單，你可以用幾何或代數求解，重點是要自己思考。老師又說是否有同學可以在L上找到一點P，使△PAB的尤拉線平行$\overline{AB}$？如圖(1-2)，這樣的尤拉線一定有解嗎？有沒有什麼規則可以事先預判呢？又這種P點是否可以用尺規作圖直接畫出？同學們很好奇，很想試試看。



圖(1-1)



圖(1-2)

貳、研究目的

在平面中給定相異兩定點A、B與直線L(或圓弧曲線)，若在直線L(或圓弧曲線)上存在P點，

使△ PAB之尤拉線平行△ 任一邊，我們稱為「有解」；反之，若不存在P點，則我們稱為

「無解」。因此，以下為我們想探討的問題：

一、探討尤拉線平行△一邊的條件。

二、建立一套相異兩定點A、B在L同側且P在L上，其有解的判別式。

三、建立一套相異兩定點A、B在L異側且P在L上，其有解的判別式。

四、建立一套相異兩定點A、B且P在圓弧曲線上，其有解的判別式。

五、反過來，直線L過矩形中心點，旋轉L，探討P點的軌跡。

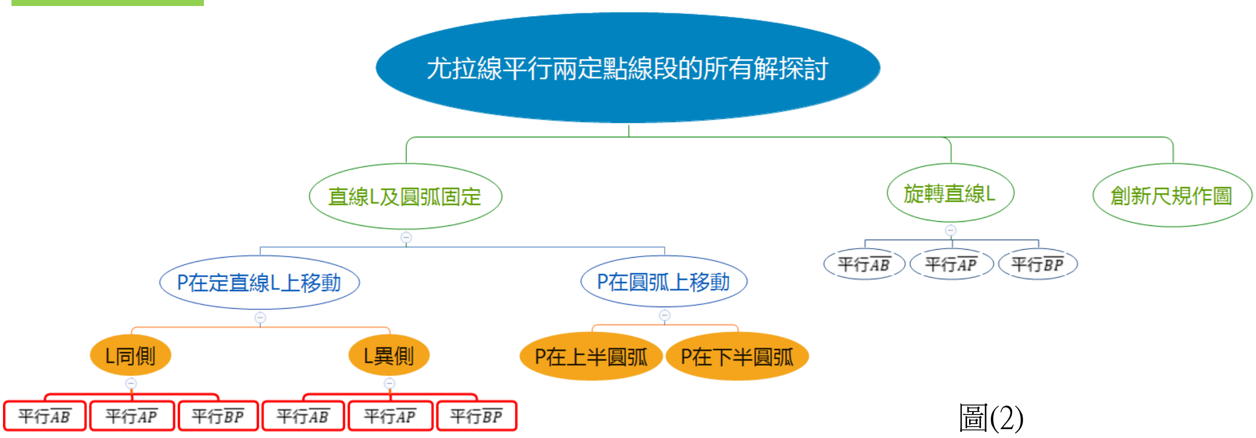
六、利用特殊條件協助尺規作圖，求作在L同側及異側的解。

參、使用設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體、Word 軟體、Python 程式軟體

肆、研究過程與方法

一、研究架構



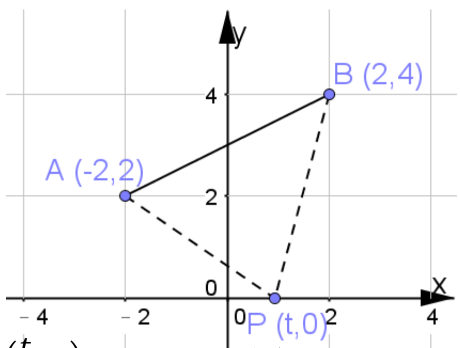
圖(2)

二、尋找平行三角形一邊的尤拉線

(註：本文限定$\overleftrightarrow{AB}$與直線L不垂直)

因為一開始我們並不知道是否真的有這種P點，所以我們想先給個特殊的例子試試看。

(一) 代數運算 (註：本文中大部分都以x軸取代直線L)



圖(3)

設$A(-2,2)$、$B(2,4)$、$P(t,0)$如圖(3)，假設在x軸上可找到一點$P(t,0)$，使$\triangle PAB$的尤拉線$\parallel \overleftrightarrow{AB}$。

由$\overleftrightarrow{AB}$方程式為$y=\dfrac{1}{2}x+3$，令尤拉線之方程式為$y=\dfrac{1}{2}x+k$，而重心座標為$\left(\dfrac{-2+2+t}{3},\dfrac{2+4+0}{3}\right)=\left(\dfrac{t}{3},2\right)$

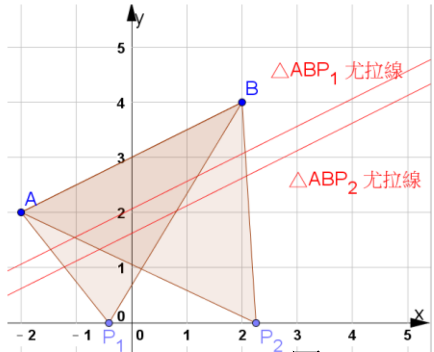
再由$\overline{AB}$、$\overline{PB}$中垂線聯立可得外心座標$=\left(\frac{t^2+4}{2t+12},\frac{-t^2+3t+14}{t+6}\right)$，將外心座標與重心座標代入

尤拉線的方程式$y=\frac{1}{2}x+k$，得： $13t^2-24t-12=0$，

檢查判別式$D=b^2-4ac=1200>0$，有兩解

$\Rightarrow P\left(\frac{12+10\sqrt{3}}{13},0\right)$或$P\left(\frac{12-10\sqrt{3}}{13},0\right)$

將結果畫出，如圖(4)。則尤拉線和$\overleftrightarrow{AB}$平行，即為所求。



圖(4)

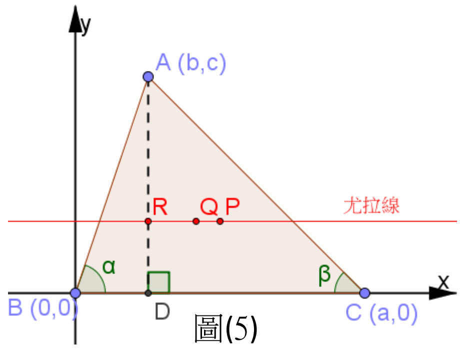
討論說明：

1. 在平面上給兩定點A,B及外側一直線L，檢視在直線L上是否存在一個點P，使$\triangle PAB$的尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$，依上文的舉例來看是存在的，且依一元二次方程式的解來看，可能有兩個相異解、重根一個解，甚至也可能無解。
2. 因為這種P點的解有很多情況，所以我們後面要去創造一套判斷公式，讓使用者在收到A,B兩定點及外側直線L的資料之後，可立即判定是否有解並且利用公式把解算出來。

三、利用三角函數運算輔助幾何作圖使△的尤拉線與底邊能夠平行

(一) 預備定理：當平面上有A,B,C三點及$\triangle ABC$的尤拉線，並令$\angle B=\alpha$、$\angle C=\beta$，則尤拉線 $\parallel \overline{BC}$，若且唯若$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3$。(參[3])

證明：為方便說明，我們將$\triangle ABC$放在平面座標上，令$A(b,c)$、$B(0,0)$、$C(a,0)$，$a>0$、$c>0$，如圖(5)。



圖(5)

1. $\overline{BC}$中垂線：$x=\frac{a}{2}$，$\overline{AB}$中垂線：$y=-\frac{b}{c}x+\frac{b^2+c^2}{2c}$，推得外心$P\left(\frac{a}{2},\frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$
2. 由重心公式可知，重心$Q\left(\frac{b+0+a}{3},\frac{c+0+0}{3}\right)$， 得$Q\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right)$
3. 過A的垂線：$x=b$，過C到$\overline{AB}$的垂線：$y=-\frac{b}{c}x+\frac{ab}{c}$，推得垂心$R\left(b,\frac{ab-b^2}{c}\right)$
4. $\because$ 尤拉線 $\parallel \overline{BC}$， $\therefore P$、Q、R的y座標必相同$\Rightarrow \frac{c}{3}=\frac{b^2+c^2-ab}{2c}=\frac{ab-b^2}{c}\Rightarrow c^2=3(ab-b^2)$

   $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{c^2}{ab-b^2}=\frac{3(ab-b^2)}{ab-b^2}=3$
5. 反過來，當$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3$時，即$\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{a-b}=3$ ， $\therefore \frac{c^2}{ab-b^2}=3$ ，

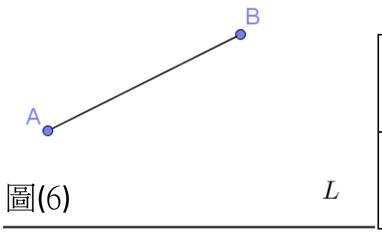
   $\therefore c^2=3(ab-b^2)$ $\Rightarrow \frac{c}{3}=\frac{ab-b^2}{c}\Rightarrow Q$的$y$座標$=R$的$y$座標，同理可推得

P的y座標 $= R$的y座標 $\Rightarrow \overleftrightarrow{PQR} \parallel x$軸 $\Rightarrow \triangle ABC$尤拉線 $\parallel \overleftrightarrow{BC}$，得證。

(二) 前文圖(4)中的P點是利用平面座標計算出來的，我們想要在空白的幾何平面上，用尺規作圖把那兩個P點畫出來，由預備定理得知，要使尤拉線平行$\overleftrightarrow{BC}$的條件是 $\tan\angle B \cdot \tan\angle C = 3$，同理若$\tan\angle A \cdot \tan\angle B = 3$，則尤拉線會平行$\overleftrightarrow{AB}$。實作如下：

步驟 1. 我們為了使$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$，因此我們使用反三角函數，給五組$\tan^{-1}\alpha$和 $\tan^{-1}\beta$，使$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$，如表(一)。

步驟 2. 平面上畫出A、B兩點(如圖 6)，利用 $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$之公式，畫出五個指定角。

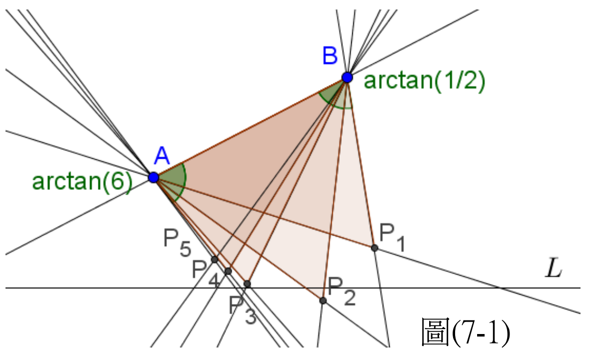


圖(6)

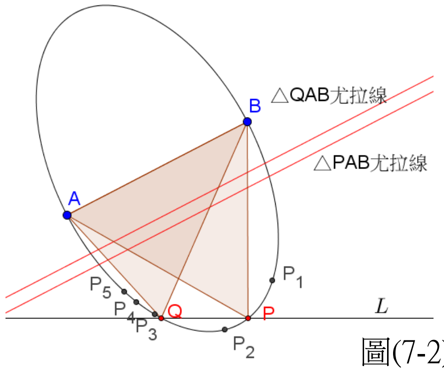
表(一)

α	$\tan^{-1}1$	$\tan^{-1}2$	$\tan^{-1}4$	$\tan^{-1}5$	$\tan^{-1}6$
β	$\tan^{-1}3$	$\tan^{-1}\frac{3}{2}$	$\tan^{-1}\frac{3}{4}$	$\tan^{-1}\frac{3}{5}$	$\tan^{-1}\frac{1}{2}$

步驟 3. 我們將每一組資料用作圖軟體 Geogebra 畫出，並取兩線之交點P，得五點P_1、P_2、P_3、P_4和P_5，並各與A、B點連成三角形，各為 $\triangle P_1AB$、$\triangle P_2AB$、$\triangle P_3AB$、$\triangle P_4AB$和$\triangle P_5AB$，如圖(7-1)。



圖(7-1)



圖(7-2)

步驟 4. 接著將點P_1、P_2、P_3、P_4、P_5連成一圓錐曲線，取圓錐曲線與直線L之交點P和Q， 並各與A、B點連成兩個三角形，分別為$\triangle PAB$和$\triangle QAB$。則$\triangle PAB$和$\triangle QAB$之尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$平行，如圖(7-2)，即為所求。

討論：

1. 由於我們是使用圓錐曲線中的橢圓來輔助找到P點和Q點(在有兩組解的情況下)，理論上有可能不可逆，但我們有用 Geogebra 的檢測指令檢查，真的會平行，完全正確，詳見**定理 1**。

2. 我們畫了很多次的圖(7-2)，不論A、B相距多遠，畫出的橢圓其長短軸的比例都差不多，似乎有固定比，也許我們可以利用這項特性，取長短軸的四個端點，加上另一

組反正切函數資料，共五點，即可畫出。詳見**定理 2** 及**實作範例**。

3. 當P和Q非常靠近時，可能會誤判成只有一解，或當橢圓和直線L微微接觸時會把無解誤判成有解，因此建立一套判別公式是必要的。

(三) 定理 1：如圖(7-2)，在該橢圓上的任一點(除了A、B兩點外)，都能使$\triangle PAB$的尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$。

證明：假設P點位在圖(7-2)的橢圓上，將此橢圓經過旋轉縮放在圖(8-1)成為上下型的橢圓，其方程式為$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{-y^2+2y-1}{x^2-2x}$，$x\neq 0$、2，令其值為3，並整理得$-3x^2+6x-y^2+2y-1=0$，再將它化為橢圓標準式：$\frac{(x-1)^2}{1^2}+\frac{(y-1)^2}{\sqrt{3}^2}=1$，反之，在此橢圓方程式上任意給定$y=y_1$，$x=x_1$，$x_1\neq 0$、2，代入$-3x_1^2+6x_1-y_1^2+2y_1-1=0$，$y_1=\pm\sqrt{3}\sqrt{-x_1^2+2x_1}+1$

$\overleftrightarrow{AB}$的垂線：$x=x_1$，$\overleftrightarrow{AP}$的斜率：$\frac{y_1-1}{x_1}$，則$\overleftrightarrow{AP}$的垂線斜率為：$\frac{x_1}{1-y_1}$

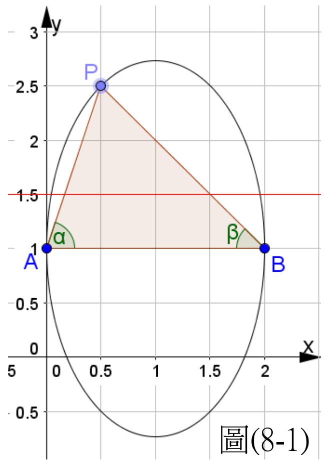
$y=\frac{-x_1}{y_1-1}x+b$，$b=1+\frac{2x_1}{y_1-1}$

$y=-\frac{x_1x}{y_1-1}+\frac{2x_1}{y_1-1}+1$

垂心$\left(x_1,\frac{-x_1^2+2x_1+y_1-1}{y_1-1}\right)$ 重心$\left(\frac{2+x_1}{3},\frac{2+y_1}{3}\right)$

代入$y_1=\pm\sqrt{3}\sqrt{-x_1^2+2x_1}+1$

垂心$\left(x_1,\frac{3+\sqrt{3}\sqrt{-x_1^2+2x_1}}{3}\right)$ 重心$\left(\frac{x_1+2}{3},\frac{3+\sqrt{3}\sqrt{-x_1^2+2x_1}}{3}\right)$



圖(8-1)

重心和垂心所連成的直線斜率為 0，表示$\triangle ABP$之尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$平行

定理 2. 若座標平面上的點$A(x,y)$、$B(0,0)$、$C(a,0)$，定值$a>0$，可使得$\triangle ABC$的尤拉線平行$\overline{BC}$，則點A所在的橢圓短軸：長軸$=1:\sqrt{3}$。

證明：如圖(8-2)令$\angle ABC=\alpha$、$\angle ACB=\beta$ $\because$ 尤拉線平行$\overline{BC}$ $\therefore$ 根據基本定理

$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3$

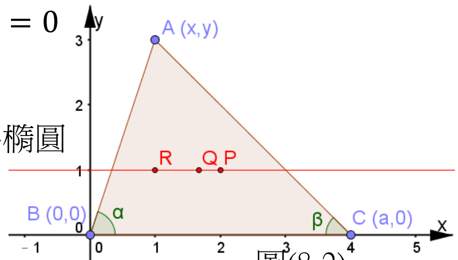
即$\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{a-x}=3$ ，$\frac{y^2}{ax-x^2}=3$

$y^2=3ax-3x^2$，$3x^2-3ax+y^2=0$ ，

$$x^2-ax+\frac{y^2}{3}=0\ ，\ x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+\frac{y^2}{3}=0$$

配方得 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{y^2}{3}=\frac{a^2}{4}$ ，$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{3a^2}{4}}=1$ 為橢圓

此時短軸：長軸 $=\frac{a}{2}:\frac{\sqrt{3}a}{2}=1:\sqrt{3}$ ，得證



圖(8-2)

實作範例：已知直線L和L外A、B

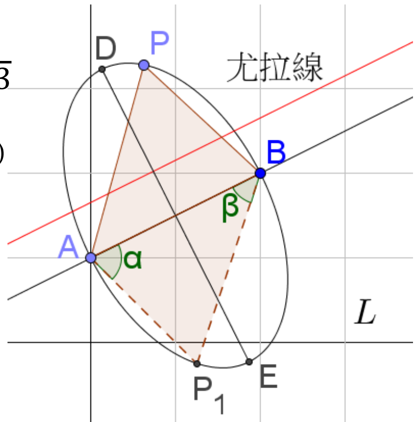
求作：過A、B兩點作一橢圓，使得短軸比長軸為$1:\sqrt{3}$

作法：1.作$\overline{DE}=\sqrt{3}\ \overline{AB}$，並使$DAEB$為菱形，如圖(8-3)

2.過A點作$\angle BAP_1=\alpha=tan^{-1}3$

3.過B點作$\angle ABP_1=\beta=tan^{-1}1$

4. 過A、D、B、E、P_1作橢圓，即為所求



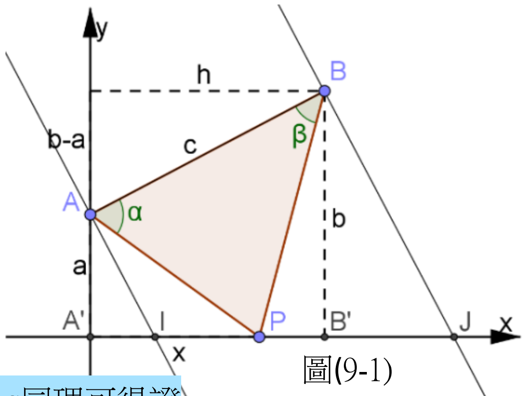
圖(8-3)

四、建立$K=tan\,\alpha\cdot tan\,\beta$的函數及其圖形

(一) 尋找$tan\,\alpha\cdot tan\,\beta$的最小值的預設條件說明

1. 規定：如圖(9-1)，在直角坐標平面上，

令$A(0,a)$、$B(h,b)$、$\overline{AB}=c$，$\overline{AA'}\perp x$軸、$\overline{BB'}\perp x$軸，$\overline{AA'}=a$、$\overline{BB'}=b$，且$b>a$，$A'(0,0)$、$B'(h,0)$，$\overline{A'B'}=h$，作$\overline{AI}\perp\overline{AB}$，$\overline{BJ}\perp\overline{AB}$分別交$x$軸於$I$、$J$。 註：$b<a$、$b=a$同理可得證



圖(9-1)

且由圖(7-2)知該橢圓和x軸最多有兩點或一交點或不相交，但為了使$tan\,\alpha>0$，$tan\,\beta>0$ 恆成立，我們在圖$(9-1)$中，加入$\overline{AI}\perp\overline{AB},\overline{BJ}\perp\overline{AB}$使$\angle PAB$及$\angle PBA$皆為銳角，此時$K>0$而排除$\angle PAB$或$\angle PBA$為鈍角的情況(三角形不可能有兩鈍角)。又由圖(9-1)知道我們要找的P點必落在$\overline{IJ}$上。$P(x,0)$在x軸上，且先假設P點的有效範圍是在I點和J點之間，而$\alpha=\angle PAB$、$\beta=\angle PBA$ 、$K=tan\,\alpha\cdot tan\,\beta$。

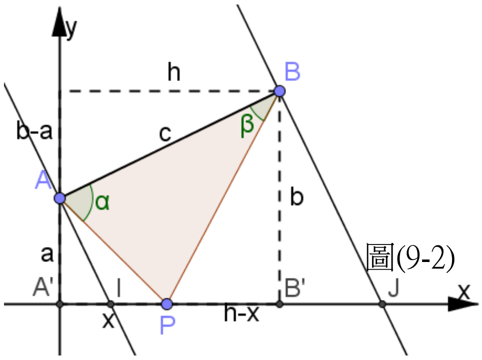
2. 推導K函數

首先利用圖(9-1)去計算$tan\,\alpha$和$tan\,\beta$的表示式，即$K=tan\,\alpha\cdot tan\,\beta$的表示式。

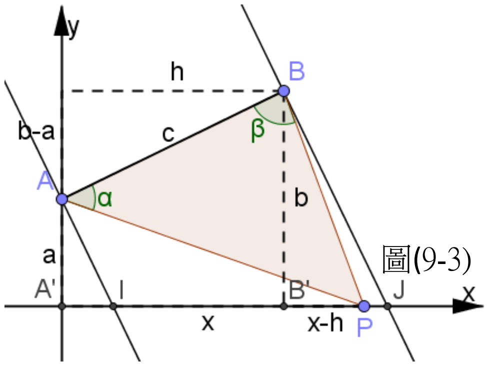
由圖(9-1)可得：

$$\tan\alpha=\frac{-\frac{h}{b-a}-\frac{x}{a}}{1+\frac{-h}{b-a}\cdot\frac{x}{a}}=\frac{-ah-bx+ax}{ab-a^2-hx}$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{h}{b-a}-\frac{h-x}{b}}{1+\frac{h}{b-a}\cdot\frac{h-x}{b}}=\frac{ah+bx-ax}{b^2-ab+h^2-hx}$$



圖(9-2)



圖(9-3)

而由圖(9-2)和圖(9-3)比較過後可知，當P點的x座標小於B'時，$\overline{B'P}=h-x$，如圖(9-2)，而當P點的x座標大於B'時，$\overline{B'P}=x-h$，如圖(9-3)，故當P點在不同位置時，其$\tan\beta$之值可能會有所不同，接下來我們先算出P點的x座標大於B'時的$\tan\beta$，再觀察其值是否不同。

P在B'右邊時，$\tan\beta==\frac{ah+bx-ax}{b^2-ab+h^2-hx}$　　P在B'左邊時，$\tan\beta=\frac{\frac{h}{b-a}+\frac{x-h}{b}}{1-\frac{h}{b-a}\cdot\frac{x-h}{b}}=\frac{ah+bx-ax}{b^2-ab+h^2-hx}$

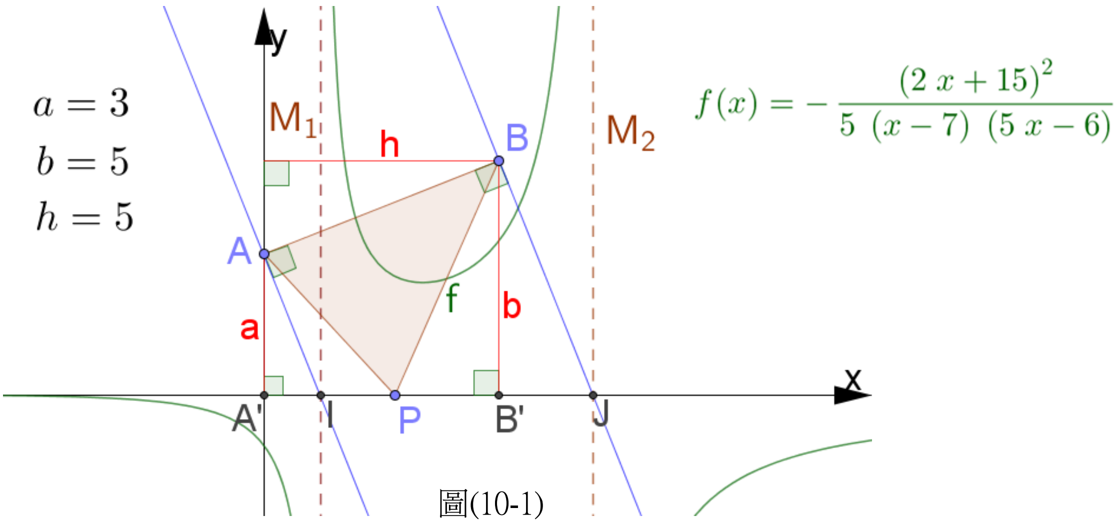
得$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\frac{(ah+bx-ax)^2}{(ab-a^2-hx)(b^2-ab+h^2-hx)}$

(二) 研究K函數所繪出的曲線

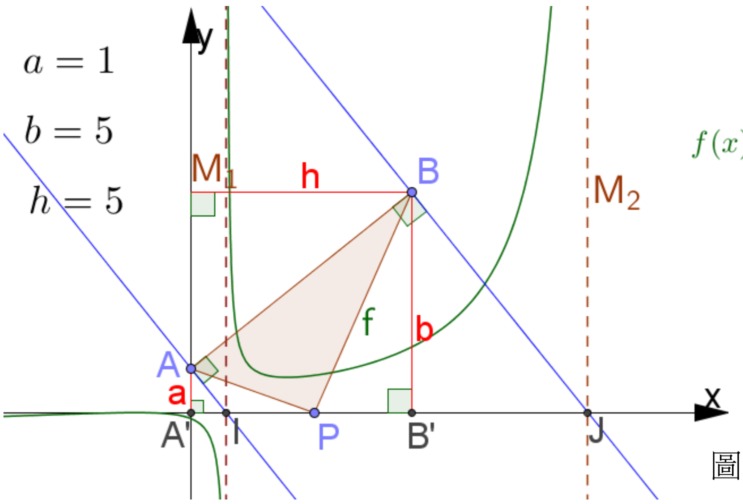
1. 使用 Geogebra 畫出K函數曲線

令$y=f(x)=K$，即$y=f(x)=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$

將上式輸入 Geogebra 並代入a、b、h可得下圖。



圖(10-1)



圖(10-2)

2. 我們由圖(10-1)和圖(10-2)綜合出以下兩點問題：

(1) 我們設的兩組a、b、h中，直線M_1、M_2恰為其之垂直漸近線，因此曲線f的範圍在直線M_1、M_2之間(不包含直線M_1、M_2)，但是我們無法確認是否存在例外，因此我們決定利用代數運算的方式將其推導出。(運算過程請見下文 3.)

(2) 從製作出的兩個f曲線中我們可以得知：其兩漸近線的區間中，f曲線為上凹，但我們仍需要使用代數運算得之，以確保沒有例外。(運算過程請見下文 4.)

3. 使用代數運算計算直線M_1、M_2和f曲線之漸近線

(1) 算出直線M_1、M_2方程式

首先我們算出$\overleftrightarrow{AB}$方程式：$\dfrac{y-a}{x-0}=\dfrac{a-b}{0-h}$

接著算出I和J之座標，令$\overleftrightarrow{AI}$之y截距為k、$\overleftrightarrow{BJ}$之y截距為w

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AI}: y=\frac{h}{a-b}x+k$、$\overleftrightarrow{BJ}: y=\frac{h}{a-b}x+w$，將$A$、$B$座標代入，令$y=0$

得$I\left(-\frac{a(a-b)}{h},0\right), J\left(\frac{-b(a-b)+h}{h},0\right)$

(2) 使用a、b、h代數運算計算出$f(x)$的垂直漸近線

$f(x)=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$

hx任意的趨近於$ab-a^2$和趨近於h^2+b^2-ab，並可任意靠近 0，

故以下式表示之：

$hx-(ab-a^2)\to 0$ 和 $hx-(h^2+b^2-ab)\to 0$

即$x-\left(\frac{ab-a^2}{h}\right)\to 0$ 和$x-\left(\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)\to 0$

並得 $\lim\limits_{x\to\frac{ab-a^2}{h}}\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{0}=\pm\infty$

以及 $\lim\limits_{x\to\frac{h^2+b^2-ab}{h}}\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{0}=\pm\infty$

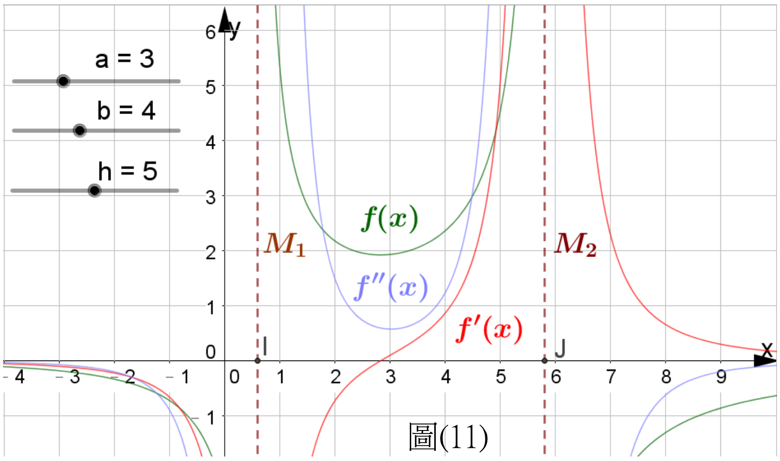
故$f(x)$之垂直漸近線為$x=\frac{ab-a^2}{h}$和$x=\frac{h^2+b^2-ab}{h}$

得$f(x)$，$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$

且上二式與直線M_1、M_2之方程式相符，得證直線M_1、M_2為曲線f之垂直漸近線。

4. 代數運算f曲線之凹性

(1) 使用微分之概念分析(以下皆為$x\in(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h})$之探討)



圖(11)

當$x\in\mathbb{R}$時，其在$f(x)$曲線上的切線的斜率為$f(x)$之一階導數之值，如圖(11)中之$f'(x)$曲線，若$f'(x)$曲線的y值隨x的增加而跟著增加，即其$f'(x)$的每點在曲線上的切線皆>0，則$f(x)$曲線必定為上凹，因此當$f(x)$的二階導數，$f''(x)>0$時，其$f'(x)$必定符合上文所述，則$f(x)$曲線必定為上凹。因此，我們僅需要證明出$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$時，其$f''(x)>0$，即可驗證我們上文所設的假設——$f(x)$曲線之凹性為上凹。

(2) 試證$f''(x)>0$

首先我們先使用 Geogebra 程式運算出 K 函數之二階導數，但由於式子過長，因此我們決定令$a=1$，而當$a\neq 1$時，我們再將其他數字等比例放大或縮小即可。

其值如下：

$f''(x)=(-2(h(hx-b+1)+h(-b^2-h^2+hx+b))(-2(b-1)(bx+h-x)(hx-$

$b+1)(-b^2-h^2+hx+b)+\big(h(hx-b+1)+h(-b^2-h^2+hx+b)\big)(bx+h-x)^2)(hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b)+((hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b))^2(-2(b-1)^2(hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b)+2(b-1)(h(hx-b+1)+h(-b^2-h^2+hx+b))(bx+h-x)-2h(b-1)(bx+h-x)(hx-b+1)-2h(b-1)(bx+h-x)(-b^2-h^2+hx+b)+2h^2(bx+h-x)^2))/((hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b))^4$

由於其分母為完全四次方因此可不用考慮。

分子仍非常繁複，如果再將另外的兩個未知數代入以上數值的話，那便無法涵蓋全部狀況，因此我們決定將其因式分解再做運算。為了方便辨認各類不同之方程式，我們將方程式上色並將其因式分解，可得：

$f''(x)=-2(h^2+b^2-2b+1)(xh-b+1)(xh-h^2-b^2+b)(x^3h^3b^2-x^3h^3+3x^2h^4-3x^2h^2b^3+6x^2h^2b^2-3x^2h^2b-3xh^5-6xh^3b^2+6xh^3b+h^6+3h^4b^2-3h^4b+3h^2b^4-6h^2b^3+3h^2b^2+b^6-4b^5+6b^4-4b^3+b^2)$

由於，$x\in\left(\frac{b-1}{h},\frac{h^2+b^2-b}{h}\right)$ (此為$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$代入$a=1$)，

因此我們可知：

$hx-b+1>0$、$-b^2-h^2+hx+b<0$

則綠色式>0，因此只需要知道上藍色式之正負即可得出$f''(x)$之正負。

我們將其再進行一次微分，並令其$=0$，求其曲線最高或最低點的x座標，

將微分結果因式分解後得：

$3h^2(xb-x+h)(xbh+xh-2b^2+2b-h^2)=0$

得解$x=\frac{2b^2+h^2-2b}{b\,h+h},\frac{-h}{b-1}$，可知前者為$>0$，後者為$<0$。

將兩式代回藍色式因式分解後分別可得：$\frac{b^2\left(h^2+b^2-2b+1\right)^3}{(b+1)^2}$，$\frac{b^2\left(h^2+b^2-2b+1\right)^3}{(b-1)^2}$

又$0<\frac{b^2\left(h^2+b^2-2b+1\right)^3}{(b+1)^2}<\frac{b^2\left(h^2+b^2-2b+1\right)^3}{(b-1)^2}$，若$b>1$，則$x\in[\frac{-h}{b-1},\infty)$時，藍色式所形成的曲線之最低點仍然在$x$軸之上，故當$b>1$時，藍色式$>0$。

當$b=1$，藍色式為$3h^4x^2-3h^5x+h^6$，此曲線的最高或最低點為紫色式(因為此時橘色式不存在)，且紫色式>0，接著我們令藍色式為0，代入公式解的判別式：

$(-3h^5)^2 - 4 \cdot 3h^4 \cdot h^6 = -3h^{10} < 0$

則曲線並不通過x軸，所以可知，此為一上凹圖形，且最低點亦位於x軸之上，當

$b = 1$時，藍色式> 0。

則$f''(x) > 0$ 得證，f曲線為上凹，即為所求。

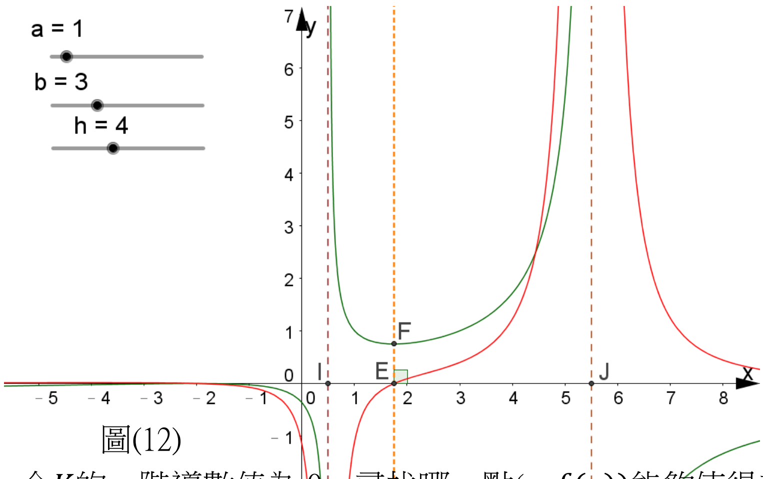
結論：1. K 函數曲線為$y = f(x) = \frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$，其中 b > a

2. 因$f''(x) > 0$，K 函數所繪出的曲線在兩漸近線之間必為上凹曲線

五、利用之前的研究結果建立一套判定尤拉線和兩定點平行的公式解

(一) 架構說明

我們知道f曲線在直線M_1和M_2之間必定為開口向上之曲線，所以只要使用微分的概念便可得到K函數之最小值，如圖(12)，並且由$K = \tan\alpha \cdot \tan\beta$和$y = 3$做出判別式。

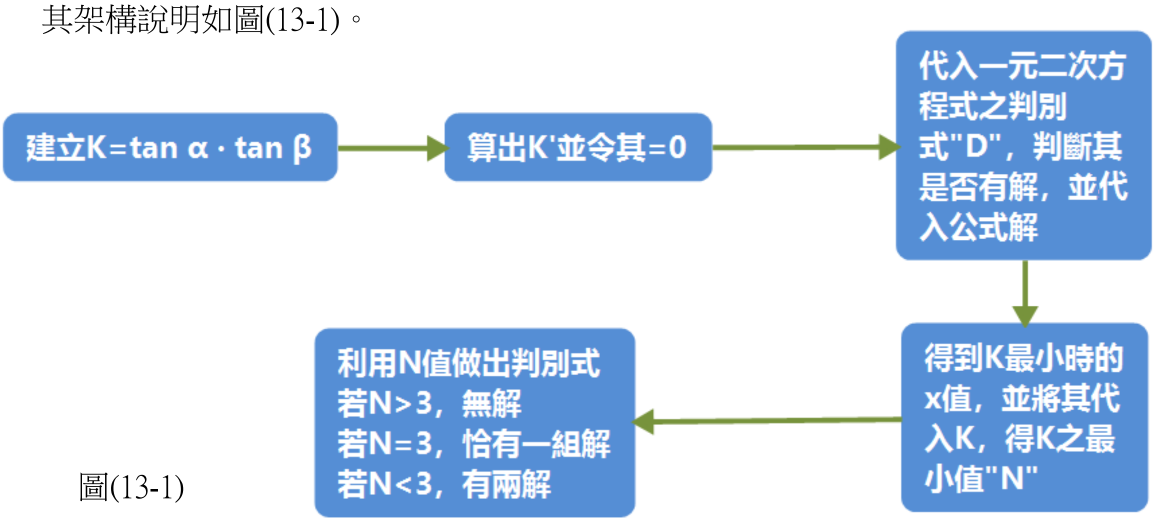


圖(12)

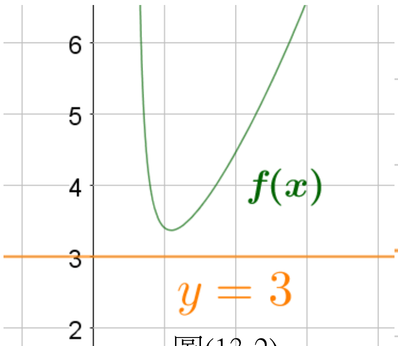
令K的一階導數值為 0，尋找哪一點$(x, f(x))$能夠使得其在曲線f的切線斜率為 0 即可找出何時的K函數最小。

接著將此時的x代入前式之K，就能夠算得K函數之最小值"N"。

其架構說明如圖(13-1)。

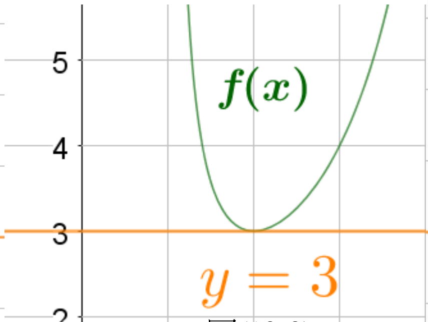


圖(13-1)



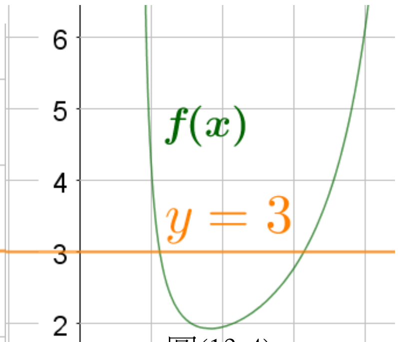
圖(13-2)

$N>3$，無解



圖(13-3)

$N=3$，恰有一解



圖(13-4)

$N<3$，兩解

(二) 在直線M_1和直線M_2之間的範圍，求K的最小值及P點座標

$K=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$，我們使用了Geogebra 程式，

將上式微分，可得下式：

$$\frac{-\left(2(-a+b)(a^2-ab+hx)(ah-ax+bx)(-b^2-h^2+ab+hx)-\left(h(a^2-ab+hx)+h(-b^2-h^2+ab+hx)\right)(ah-ax+bx)^2\right)}{\left((a^2-ab+hx)(-b^2-h^2+ab+hx)\right)^2}$$

令上式為 0，並因式分解後可得下式：

$$(-a^2+2ab-b^2-h^2)(ax-bx-ah)(ahx+bhx+2a^2b-2ab^2-ah^2)=0$$

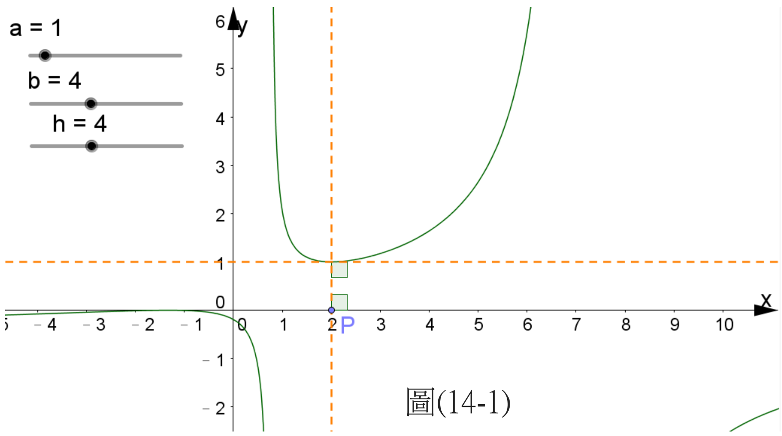
由上式可知：$x=\dfrac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$或$\dfrac{ah}{a-b}$我們知道$f(x)$在$M_1$和$M_2$之間，

即$x\in\left(\dfrac{ab-a^2}{h},\dfrac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$，必為上凹曲線，因此$x$一定只有一解，

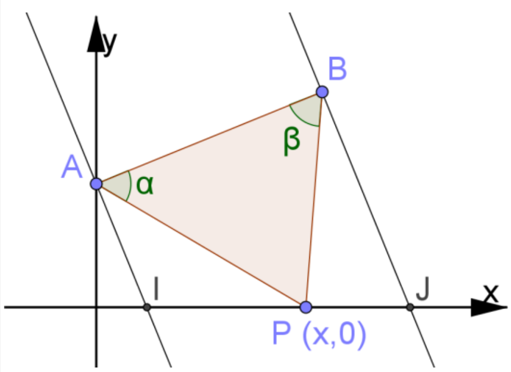
且經過我們的運算後可知：$\frac{ah}{a-b}<\frac{ab-a^2}{h}<\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}<\frac{h^2+b^2-ab}{h}$ 。

(註：$b>a$、$h>0$)，又$x\geq 0$，則x為：$\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$

如示意圖$(14-1)$、圖$(14-2)$。



圖(14-1)



圖(14-2)

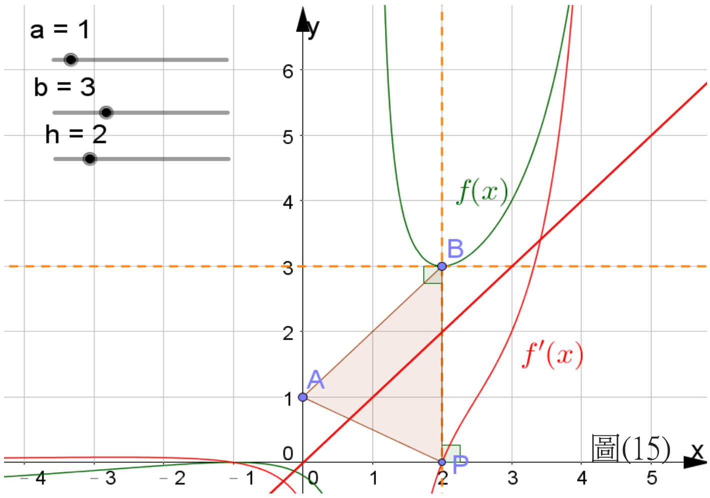
(三) 試找出僅有一組解時的b

若要使$N=3$(即P僅有一解)，便要令$x=\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$，並且代入$K$，然後令其為3。

可得$K=\frac{4ab}{h^2}=3$，我們任意舉了一例，令$h=2$、$a=1$

$\Rightarrow b=3$，再將以上代回$\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$得$x=2$，在 Geogebra 中代入後可得下圖(15)

此時的$N=3$，即P僅有一解，即為所求。



圖(15)

(四) 製作出一套判斷P為解時的狀態之判別式

我們將先前算出之K的最小值時的x，代入$K=3$的方程式之中製作出判別式：

定理 3. 如前述資料，$\mathrm{N}=\frac{4ab}{h^2}$

當$N=3$時，P恰有一組解；當 $N<3$ 時，P 有兩解；當$N>3$時，P無解

當$\overline{AB}\perp$ L時，P無解 (此時$h=0$，N無意義)。

接著我們要求出其解，並用三角函數代數運算出何時P點能使尤拉線與$\overline{AB}$平行。

首先算出$\mathrm{K}=\tan\alpha\cdot\tan\beta$，令$K=3$，即令尤拉線平行$\overline{AB}$。

$$\Rightarrow \frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}=3$$

$$-(-ax+bx+ah)^2-3(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)=0$$

$$x=\frac{3h^3-a^2h+3b^2h-2abh\pm\sqrt{3}\sqrt{3h^2-4ab}(a^2+b^2+h^2-2ab)}{2a^2+2b^2+6h^2-4ab}$$

我們覺得上面的式子仍太過繁複，因此決定使用最基本的公式解，

先算出判別式之中的A、B、C，再代入$\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$中，會較簡短。

令$A=-a^2-b^2-3h^2+2ab$、$B=3h^3-a^2h+3b^2h-2abh$、

$C=-3ab^3+6a^2b^2+2a^2h^2-3a^3b-3abh^2 \quad \Rightarrow x=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

即為所求能使尤拉線平行$\overline{AB}$的P點落在點$\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},0\right)$處。

討論：

我們的兩個判別式B^2-4AC和N都能夠判別出P點有幾個解，不過將B^2-4AC展開之後，其代數式明顯比N長得多，所以當我們要計算出P點有幾個解時，我們就使用N式，而當我們要將P點的座標時，我們再使用公式解。

一般化結論：

結論：設函數$K=tan\,\alpha\cdot tan\,\beta$，$A(a,0)$、$B(b,h)$，b > a

K的最小值$N=\frac{4ab}{h^2}$，給定a、b、h 之後，可得N值

當$N<3$，P有兩解，解為$\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},0\right)$

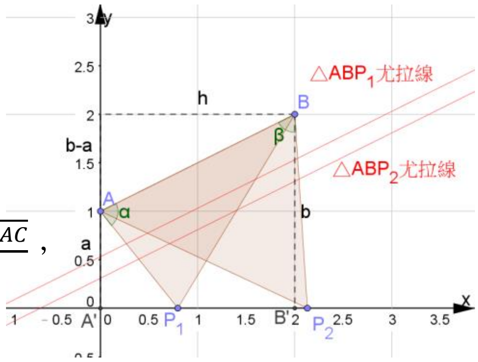
$N=3$，P恰有一解，解為$(-\frac{B}{2A},0)$

$N>3$，無解

(五) 舉例說明

這裡我們要舉例說明我們所算出的方程式是正確的：

先令$A(0,1)$、$B(2,2)$、$P(x,0)$，其中$a=1$、$b=2$、$h=2$，分別代入上式A、B、C，可得：$A=-13$、$B=38$、$C=-22$，並將以上三式代入$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$，可得：$x=\frac{1}{13}(\pm5\sqrt{3}+19)$，代入$P$點座標$(x,0)$，



圖(16)

如圖(16)。則使$\triangle ABP$之尤拉線平行$\overline{AB}$的兩個正確圖形，即為所求。

(六) 程式化

我們將研究出的方程式，先做流程圖，再譯成電腦程式，以供大家使用，詳見**附件一**。此程式能夠精準判斷P點的數量和解出P點的座標，並且判讀輸入是否正確。

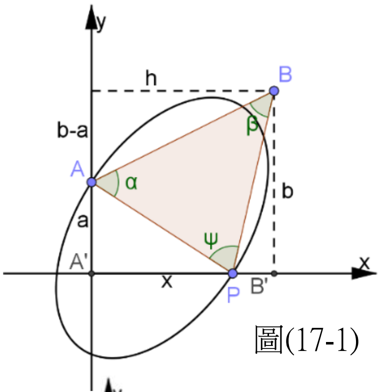
六、在x軸上移動P點，並試著使尤拉線分別平行於$\overline{AP}$、$\overline{BP}$

當P點在x軸上從圖(17-1)往圖(17-2)的方向移動時，以點A、P畫出的橢圓圓錐曲線($\tan\alpha\cdot\tan\psi=3$與前文$tan\,\alpha\cdot tan\,\beta=3$之作圖法相同)只會碰到$B$點一次，

由此可知當尤拉線平行$\overline{AP}$時只會有一組解。同理，當尤拉線平行$\overline{BP}$時亦只會有一組解。

(一) 試使$\triangle ABP$之尤拉線與$\overline{AP}$平行

1. 用解析的代數法求出P點座標



圖(17-1)

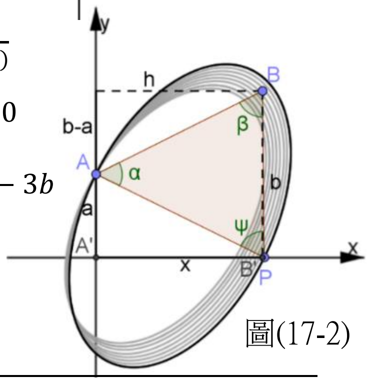
我們先求出$tan\,\alpha \cdot tan\,\psi$之值。令其$= 3$，並將$a = 1$代入，

化簡後可得：　($tan\,\alpha$在上文的三-(一)-2 已算出)

$$tan\,\psi = tan\big(\pi - (\angle APA' + \angle B'PB)\big)$$

$$= \frac{-ah-bx+ax}{hx-x^2-ab} \qquad tan\,\alpha \cdot tan\,\psi = \frac{(ah+bx-ax)^2}{(ab-a^2-hx)(hx-x^2-ab)}$$

$$-3hx^3 + (b^2+3h^2+b-2)x^2 + (h-4bh)x + (3b^2+h^2-3b) = 0$$



圖(17-2)

令$A = -3h$、$B = b^2+3h^2+b-2$、$C = h-4bh$、$D = 3b^2+h^2-3b$

$\Rightarrow Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

代入一元三次方程式之公式：

$$x = -\frac{B}{3A} + \sqrt[3]{\frac{BC}{6A^2} - \frac{B^3}{27A^3} - \frac{D}{2A} + \sqrt{\left(\frac{BC}{6A^2} - \frac{B^3}{27A^3} - \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(\frac{C}{3A} - \frac{B^2}{9A^2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{BC}{6A^2} - \frac{B^3}{27A^3} - \frac{D}{2A} - \sqrt{\left(\frac{BC}{6A^2} - \frac{B^3}{27A^3} - \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(\frac{C}{3A} - \frac{B^2}{9A^2}\right)^3}}$$

而因其中有多處相似，所以我們將相似之處以幾個未知數替代，以方便之後的計算。

令$A' = -\frac{B}{3A}$、$B' = \frac{BC}{6A^2} - \frac{B^3}{27A^3} - \frac{D}{2A}$、$C' = \frac{C}{3A} - \frac{B^2}{9A^2}$

$$\Rightarrow x = A' + \sqrt[3]{B' + \sqrt{B'^2 + C'^3}} + \sqrt[3]{B' - \sqrt{B'^2 + C'^3}}$$

將A、B、C、D之值分別代入A'、B'、C'，可得：

$$A' = \frac{b^2+3h^2+b-2}{9h}$$

$$B' = \frac{(4bh-h)(-b^2-3h^2-b+2)}{54h^2} - \frac{(-b^2-3h^2-b+2)^3}{729h^3} - \frac{(-3b^2-h^2+3b)}{6h}$$

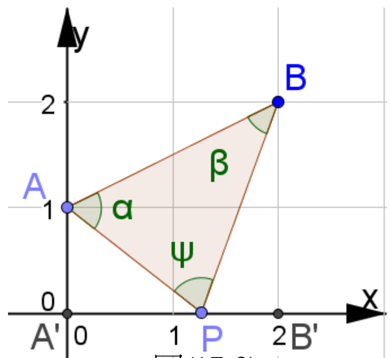
$$C' = \frac{4bh-h}{9h} - \frac{(-b^2-3h^2-b+2)^2}{81h^2}$$

得知b、h的值時，將b、h分別代入A'、B'、C'，再將A'、B'、C'代入

$x = A' + \sqrt[3]{B' + \sqrt{B'^2 + C'^3}} + \sqrt[3]{B' - \sqrt{B'^2 + C'^3}}$，即可求解。

我們把B'、C'代入一元三次方程式之判別式$B'^2 + C'^3$，發現其值必大於0，則此方程式只有一個實數解，而因為另外兩解中含有虛數單位，前面也證明過尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$時僅有一解，所以我們不將那兩解加入討論。

舉例驗證：



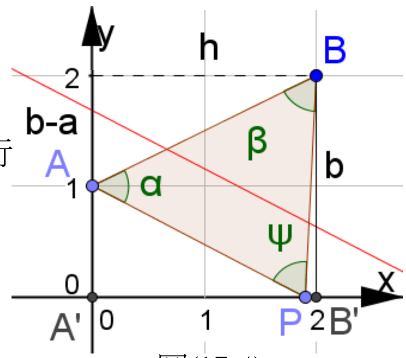
圖(17-3)

設$A(0,1)$、$B(2,2)$、$P(x,0)$，如圖(17-3)，將$b=2$、$h=2$分別代入A'、B'、C'之值，可得：

$A'=\frac{8}{9}$、$B'=\frac{727}{1458}$、$C'=-\frac{1}{81}$，再將以上三式代入

$$x=A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{B'^2+C'^3}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{B'^2+C'^3}}$$

得$x=\frac{8}{9}+\sqrt[3]{\frac{135\sqrt{29}+727}{1458}}+\sqrt[3]{\frac{-135\sqrt{29}+727}{1458}}$



圖(17-4)

代入P點座標$(x,0)$，如圖(17-4)，$\triangle ABP$之尤拉線與$\overline{AP}$平行，即為所求。

(二) 試使$\triangle ABP$之尤拉線與$\overline{BP}$平行

這裡我們運用前文的方法，先將$\tan\beta\cdot\tan\psi$ 算出：

($\tan\beta$在上文的三-(一)-2 已算出，$\tan\psi$在上文的五-(一)已算出，在此直接相乘)

$\tan\beta\cdot\tan\psi=\frac{-(ah+bx-ax)^2}{(b^2-ab+h^2-hx)(hx-x^2-ab)}$ 令其$=3$，並將$a=1$代入，化簡後可得：

$$-3hx^3+(2b^2+6h^2-b-1)x^2+(-3h^3-3b^2h-2bh+2h)x+(3b^3+3bh^2-3b^2-h^2)=0$$

令$A=-3h$、$B=2b^2+6h^2-b-1$、$C=-3h^3-3b^2h-2bh+2h$、$D=3b^3+3bh^2-3b^2-h^2$

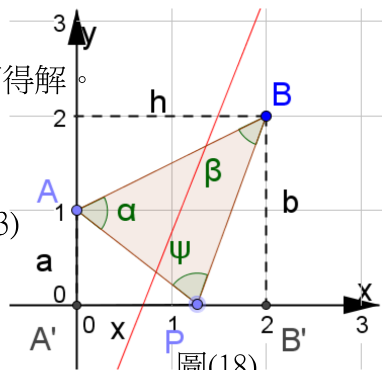
推得$A'=\frac{2b^2+6h^2-b-1}{9h}$

$$B'=\frac{(2b^2+6h^2-b-1)(-3h^3-3b^2h-2bh+2h)}{54h^2}-\frac{(2b^2+6h^2-b-1)^3}{-729h^3}+\frac{(3b^3+3bh^2-3b^2-h^2)}{6h}$$

$$C'=\frac{-4b^4-9h^4+3b^2h^2+4b^3+30bh^2+3b^2-6h^2-2b-1}{81h^2}$$

得知b、h後，先分別代入A'、B'、C'後，再代入公式，即可得解。

舉例驗證：



圖(18)

設$A(0,1)$、$B(2,2)$、$P(x,0)$，即$b=2$、$h=2$，，如圖(17-3)

分別代入A'、B'、C'之值，可得：得$A'=\frac{29}{18}$、$B'=\frac{11807}{2916}$、

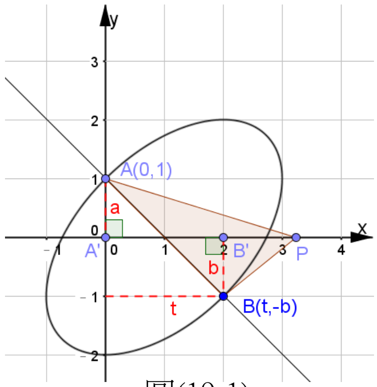
$C'=\frac{95}{324}$，代入$x=A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{B'^2+C'^3}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{B'^2+C'^3}}$，得$x=\frac{4}{3}$，並將其代入$P$點座標$(x,0)$，如圖(18)。

結論：

1. A、B同側時，尤拉線平行$\overline{AP}$、$\overline{BP}$時只會有一組解。

2. A'、B'、C'代入$x = A' + \sqrt[3]{B' + \sqrt{B'^2 + C'^3}} + \sqrt[3]{B' - \sqrt{B'^2 + C'^3}}$，即可求解。

七、當P在x軸上、且A、B分別位於x軸的相異兩側時，試使$\triangle ABP$的尤拉線$\parallel \overleftrightarrow{AB}$，探討$\triangle ABP$的尤拉線$\parallel \overleftrightarrow{AB}$時，其$P$點的解



圖(19-1)

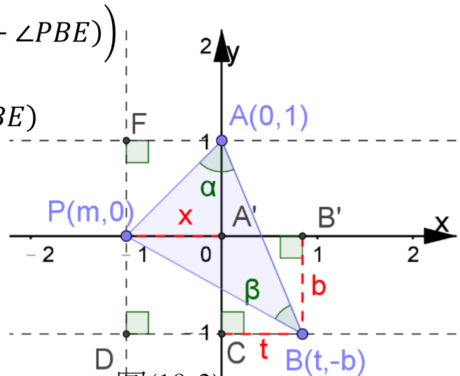
(一) 利用前文所運用橢圓之解法，分析P點可能的位置所在

在平面直角座標上，我們設$A(0,1)$、$B(t,-b)$、b、$t>0$、$P(m,0)$，並令$|m| = x$。利用圖(7-2)繪製橢圓之概念，畫出圖(19-1)，得知此橢圓和x軸的交點恆在A'的左側和B'的右側，即$\overline{A'B'}$和橢圓永不相交⇒兩組解$\notin [0,t]$，當此情況時，橢圓必和x軸有兩交點，但我們發現在$m \in (-\infty, 0)$和$m \in (t, \infty)$時，其$\tan\alpha \cdot \tan\beta$之方程式並不相同，故接下來我們要分成兩部分計算，分別求出的方程式的解，用x_1和x_2以便識別。

(二) 當$m \in (-\infty, 0)$時，如圖$(19-2)$，求$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$的方程式

$$\tan\alpha_1 = \tan(\angle CAB + \angle PAA') = \frac{\tan(\angle CAB) + \tan(\angle PAA')}{1 - \tan(\angle CAB)\cdot\tan(\angle PAA')} = \frac{t + x + bx}{b - tx + 1}$$

$$\tan\beta_1 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (\angle ABD + \angle PBE)\right) = \cot(\angle ABD + \angle PBE) = \frac{t + bx + x}{t^2 + tx + b^2 + b}$$



圖(19-2)

$$\tan\alpha_1 \cdot \tan\beta_1 = \frac{(t+bx+x)^2}{(t^2+tx+b^2+b)(b-tx+1)}$$

令上式為3，使其平行於$\overleftrightarrow{AB}$。

$$\Rightarrow (b^2x^2 + 2btx + 2bx^2 + t^2 + 2tx + x^2) - 3(b^3 - b^2tx + 2b^2 + bt^2 + b - t^3x - t^2x^2 + t^2 + tx) = 0$$

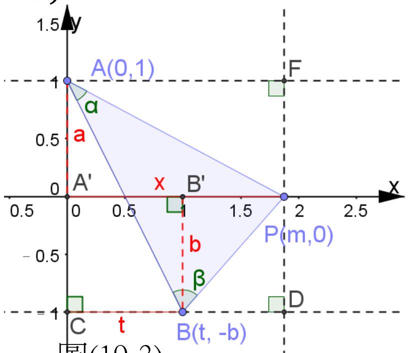
$$x_1 = \frac{-3b^2t - 2bt - 3t^3 + t \pm \left(\sqrt{3b^2} + 2\sqrt{3b} + \sqrt{3t^2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{(4b+3t^2)}}{2b^2+4b+6t^2+2}$$，(取正數解)

(三) 接著，我們試著算出當$m \in (t, \infty)$時，如圖$(19-3)$，$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$的方程式

$\tan\alpha_2 = \tan(\angle PAA' - \angle CAB)$ $\tan\beta_2 = \tan\left(\pi - (\angle DBP + \angle CBA)\right)$

$$= \frac{\tan(\angle PAA') - \tan(CAB)}{1+\tan(\angle PAA')\cdot\tan(CAB)} \qquad = -\tan(\angle DBP + \angle CBA)$$

$$= \frac{x+bx-t}{tx+1+b} \qquad = -\frac{bx+x-t}{tx-t^2-b^2-b}$$



圖(19-3)

$$\tan\alpha_2\cdot\tan\beta_2 = -\frac{(bx-t+x)^2}{(tx+b+1)(b^2+t^2-tx+b)}$$

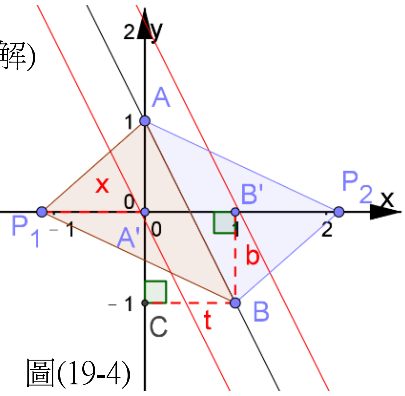
令上式為 3，使其平行於$\overleftrightarrow{AB}$，得：

$$(b^2x^2 - 2btx + 2bx^2 + t^2 - 2tx + x^2) - 3(b^3 + b^2tx + 2b^2 + bt^2 + b + t^3x - t^2x^2 + t^2 - tx) = 0$$

$$x_2 = \frac{3b^2t+2bt+3t^3-t\pm(\sqrt{3}b^2+2\sqrt{3}b+\sqrt{3}t^2+\sqrt{3})\sqrt{4b+3t^2}}{2b^2+4b+6t^2+2}$$ ，(取正數解)

討論：

x_1取正數解的原因是$|m| = x$，$m \in (-\infty, 0)$，即表示P點在x軸的負向位置



圖(19-4)

(四) 舉例驗證

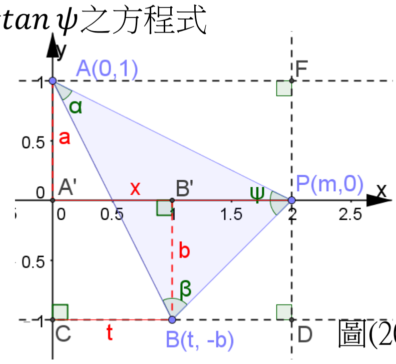
我們令$b = 1, t = 1$，並且代入上式x_1及x_2。並依條件取得兩解為$\frac{1}{14}(5\sqrt{21}+7)$，$\frac{1}{14}(-5\sqrt{21}+7)$， 三角形之尤拉線皆各自與$\overleftrightarrow{AB}$平行，如上圖(19-4)，即為所求。

結論：

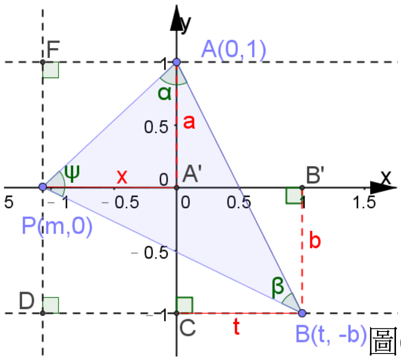
當$A(0,1)$、$B(t,-b)$位在x軸異側時，尤拉線平行$\overline{AB}$的解，會有兩個，一個在x軸的負向，另一個在$x = t$的右側。

八、當A、B分別位於x軸的相異兩側，而P點在x軸上，使$\triangle ABP$之尤拉線$\parallel \overleftrightarrow{AP}$，求$P$點解

(一) 分析$\tan\psi$之方程式



圖(20-1)



圖(20-2)

A、B、P之座標定義如圖(20-1)、圖(20-2)，並令$\angle APB$為ψ。

在$m \in (-\infty, 0)$和$m \in (0, \infty)$時其$\tan\psi$之方程式也不相同，故接下來我們得要分成兩部分做計算$\tan\psi$。

(二) 當$m \in (0,\infty)$時，如圖(20-1)，求$tan\,\alpha \cdot tan\,\psi = 3$的方程式

其$tan\,\alpha$為前式之$tan\,\alpha_2 = \frac{x+bx-t}{tx+1+b}$

$tan\,\psi_1 = \tan(\angle APA' + \angle B'PB)$ $\quad tan\,\alpha_2 \cdot tan\,\psi_1 = \frac{(bx-t+x)^2}{(tx+b+1)(x^2-b-tx)}$

$= \frac{x-t+bx}{x^2-b-tx}$

令上式為3，並展開其算式

得$-3tx^3 + (b^2 - b + 3t^2 - 2)x^2 + (4bt + t)x + (3b^2 + 3b + t^2) = 0$

令$A = -3t$、$B = b^2 + 3t^2 - b - 2$、$C = 4bt + t$、$D = 3b^2 + t^2 + 3b$

接著分別算出A'、B'、C'，可得：

$A' = \frac{b^2+3t^2-b-2}{9t}$ $B' = \frac{(4bt+t)(b^2+3t^2-b-2)}{54t^2} + \frac{\left(b^2+3t^2-b-2\right)^3}{729t^3} + \frac{\left(3b^2+t^2+3b\right)}{6t}$

$C' = -\frac{4bt+t}{9t} - \frac{\left(b^2+3t^2-b-2\right)^2}{81t^2}$

(三) 當$m \in (-\infty,0)$時，如上圖(20-2)，求$tan\,\alpha \cdot tan\,\psi = 3$的方程式

$tan\,\alpha_1 = \frac{x+bx+t}{-tx+1+b}$ $\quad tan\,\psi_2 = tan(\pi - (\angle DPB + \angle APF))$

$tan\,\alpha_1 \cdot tan\,\psi_2 = \frac{-(bx+t+x)^2}{(-x^2-tx+b)(-tx+b+1)}$ $\quad = -\frac{x+t+bx}{b-x^2-tx}$

令上式$= 3$，展開並化簡得下式：

$-3tx^3 + (-b^2 - 3t^2 + b + 2)x^2 + (4bt + t)x + (-3b^2 - t^2 - 3b) = 0$

令$A = -3t$、$B = -b^2 - 3t^2 + b + 2$、$C = 4bt + t$、$D = -3b^2 - t^2 - 3b$

分別代入A'、B'、C'，可得：

$A' = -\frac{b^2+3t^2-b-2}{9t}$

$B' = \frac{-(4bt+t)(b^2+3t^2-b-2)}{54t^2} + \frac{\left(-b^2-3t^2+b+2\right)^3}{729t^3} + \frac{-\left(3b^2+t^2+3b\right)}{6t}$

$C' = -\frac{4bt+t}{9t} - \frac{\left(-b^2-3t^2+b+2\right)^2}{81t^2}$

我們發現，當P點在左邊和在右邊時的的A'、B'、C'有些許的相似，因此我們試著分析這兩種情況的相似之處，希望能將這兩組求解方程式可化作為一組。

已知兩組的A'、B'，為正負相反，而C'一樣，我們將兩組的A'、B'、C'，代入求解方程式，但我們無法得知$\Delta(B'^2 + C'^3)$的區間，因此我們必須得要將其代入三組的公式解中，

才能夠包含到所有的狀況。並令$m \in (0,\infty)$時的A'、B'、C'為標準，而$m \in (-\infty,0)$的三個值為$-A'$、$-B'$、C'。

我們先將三條公式解列出，如下：

註：令$\Delta = B'^2 + C'^3$，其中Δ不受B'的正負值影響。

$$x_1 = A' + \sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = A' + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}$$

$$x_3 = A' + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}$$

經計算後可知：

$$A' + \sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}} = -\left(-A' + \sqrt[3]{-B'+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-B'-\sqrt{\Delta}}\right)$$

$$A' + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}} = -\left(-A' + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'+\sqrt{\Delta}} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'-\sqrt{\Delta}}\right)$$

$$A' + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}} = -\left(-A' + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'+\sqrt{\Delta}} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'-\sqrt{\Delta}}\right)$$

定理 4：在A、B位於異側，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$時，會有一至三組解，若我們稱$m \in (0,\infty)$時，P點的x為x^+，$m \in (-\infty,0)$時P點的x為x^-，則$x_1^+ = -x_1^-$、$x_2^+ = -x_3^-$、$x_3^+ = -x_2^-$

由於只需要正數解，因此我們決定使用$x_i^+(i = 1$、2、$3)$的方程式，因為得到的解只要直接代入P點的x座標即可。

(四) 舉例驗證

我們在這裡舉出一個比較特殊的例子，此圖形存在三個實數解：

設$A(0,1)$、$B(0.2,-0.2)$、$P(m,0)$，即$b = 0.2$、$t = 0.2$

得方程式為：$-\frac{3}{5}x^3 - \frac{51}{25}x^2 + \frac{9}{25}x + \frac{19}{25} = 0$，此方程式算出判別式 $= -\frac{97199}{50625} < 0$

則此方程式有三個實根，由於上面我們所算出公式解太過繁複，因此我們決定直接使用卡爾丹諾法求解。

同除$-\frac{3}{5}$ (使首項係數為 1) $\Rightarrow x^3 + \frac{51}{15}x^2 - \frac{9}{15}x - \frac{19}{15} = 0$

令$x = t - \frac{51}{45}$(以消去 2 次項)，得$t^3 - \frac{334}{75}t + \frac{7846}{3375} = 0$

令$t = u + v$，並將前方程式化為$(u+v)^3 - \frac{337}{75}(u+v) + \frac{7846}{3375} = 0$

$$(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 \Rightarrow (u+v)^3-3uv(u+v)-(u^3+v^3)=0$$

設想上式中$(u+v)$為$t^3-\frac{334}{75}t+\frac{7846}{3375}=0$ 的解，可導出：

$-3uv=-\frac{334}{75}$ 、 $-(u^3+v^3)=\frac{7846}{3375}$ ，將以上兩式改寫為：

$U+V=-\frac{7846}{3375}$ 、$UV=\frac{37259704}{11390625}$ ，其中$U=u^3$、$V=v^3$

再令$(T-U)(T-V)=0 \Rightarrow T^2-(U+V)+UV=0$

可知U和V為方程式$T^2+\frac{7846}{3375}T+\frac{37259704}{11390625}=0$的解。

由上式可得$U=-\frac{3923}{3375}+\frac{37\sqrt{71}i}{225}$ 、$V=-\frac{3923}{3375}-\frac{37\sqrt{71}i}{225}$ ，

$u=\frac{\sqrt[3]{555\sqrt{71}i-3923}}{15}$ 、$v=\frac{\sqrt[3]{-555\sqrt{71}i-3923}}{15}$

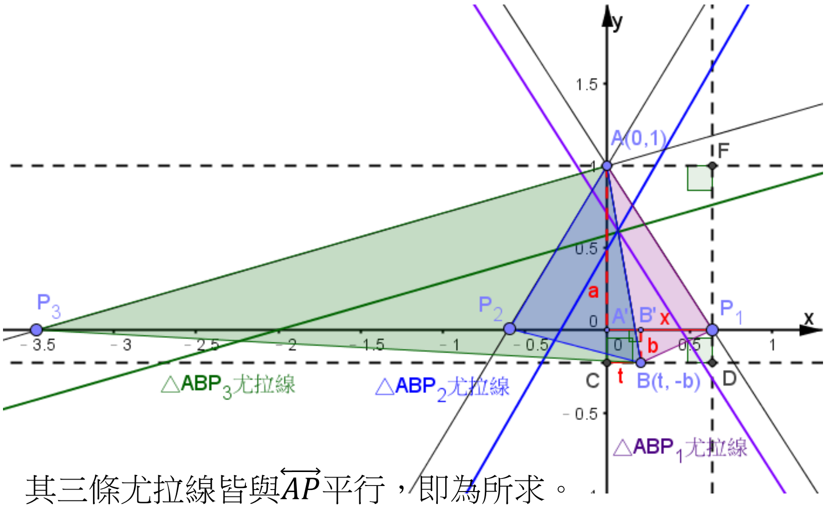
綜合以上式子：

$$x_1=t-\frac{51}{45}=u+v-\frac{51}{45}=\frac{1}{15}\sqrt[3]{555\sqrt{71}i-3923}+\frac{1}{15}\sqrt[3]{(-555)\sqrt{71}i-3923}-\frac{51}{45}\fallingdotseq 0.64$$

$$x_2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\frac{1}{15}\sqrt[3]{555\sqrt{71}i-3923}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1}{15}\sqrt[3]{-555\sqrt{71}i-3923}\right)-\frac{51}{45}\fallingdotseq -0.57$$

$$x_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1}{15}\sqrt[3]{555\sqrt{71}i-3923}\right)+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\frac{1}{15}\sqrt[3]{-555\sqrt{71}i-3923}-\frac{51}{45}\fallingdotseq -3.47$$

代入P點座標(m, 0)，如下圖(21)



圖(21)

其三條尤拉線皆與$\overleftrightarrow{AP}$平行，即為所求。

九、當A、B分別位於x軸的上、下，而P點在x軸上，使△ABP之尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$，求P點解

(一) 當$m\in(0,\infty)$時，如圖(20－1)，求$\tan\beta\cdot\tan\psi=3$的方程式。

接著我們試著算出何時△ABP之尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$

$$\tan\beta_1\cdot\tan\psi_2=\frac{(bx+t+x)^2}{(x^2-b+tx)(t^2+tx+b^2+b)}$$

令上式$=3$，並展開方程式：

$$-3tx^3+(-2b^2-6t^2+1-b)x^2+(-3b^2t+2bt+2t-3t^3)x+(3b^3+3b^2+3bt^2+t^2)=0$$

令$A=-3t$、$B=-2b^2-6t^2-6+1$、$C=-3t^3-3b^2t+2bt+2t$、

$D=3b^3+3bt^2+3b^2+t^2$

接著分別算出A'、B'、C'，可得：

$$A'=\frac{-2b^2-6t^2-b+1}{9t}$$

$$B'=\frac{(-2b^2-6t^2-b+1)(-3t^3-3b^2t+2bt+2t)}{54t^2}+\frac{(-2b^2-6t^2-b\ \ +1)^3}{729t^3}+\frac{3b^3+3bt^2+3b^2+t^2}{6t}$$

$$C'=\frac{-4b^4-9t^4+3b^2t^2-4b^3-30bt^2+3b^2-6t^2+2b-1}{81t^2}$$

最後代入公式即可得解。

(二) 當$m\in(-\infty,0)$時，如圖$(20-2)$，求$\tan\beta\cdot\tan\psi=3$的方程式。

$\tan\beta_2\cdot\tan\psi_1=\frac{-(bx+x-t)^2}{(tx-t^2-b^2-b)(x^2-b-tx)}$ 令上式$=3$，並化簡其算式：

$$-3tx^3+(2b^2+6t^2+b-1)x^2+(-3t^3-3b^2t+2bt+2t)x+(-3b^3-3bt^2-3b^2-t^2)=0$$

令$A=-3t$、$B=2b^2+6t^2+b-1$、$C=-3t^3-3b^2t+2bt+2t$

$D=-3b^3-3bt^2-3b^2-t^2$

分別算出A'、B'、C'，可得：

$A'=\frac{2b^2+6t^2+b-1}{9t}$ 、$B'=\frac{(2b^2+6t^2+b-1)(-3t^3-3b^2t+2bt+2t)}{54t^2}-\frac{(2b^2+6t^2+b-1)^3}{-729t^3}+\frac{(-3b^3-3bt^2-3b^2-t^2)}{6t}$

$$C'=\frac{-4b^4-9t^4+3b^2t^2-4b^3-30bt^2+3b^2-6t^2+2b-1}{81t^2}$$

與上文相同，我們試著將兩種求解的方程式化為一解。

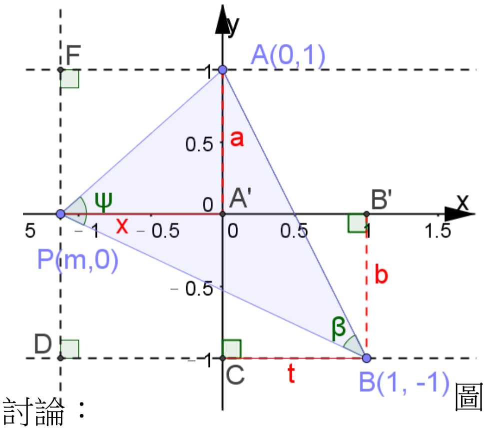
而我們發現這在平行$\overleftrightarrow{AP}$時兩種A'、B'、C'特性是一樣的，A'、B'都是正負相反，C'是完全相同，可知其解的性質與上文相同，也就是說此時與上文一樣：$x_1^+=-x_1^-$、$x_2^+=-x_3^-$、$x_3^+=-x_2^-$，所以我們就取$x_i^+(i=1、2、3)$的方程式，再代入P點x座標即可。

(三) 舉例驗證

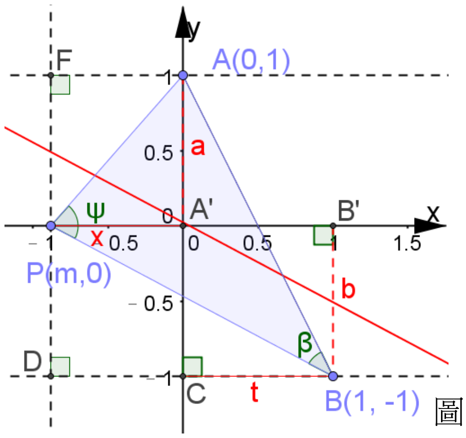
設$A(0,1)$、$B(1,-1)$、$P(m,0)$，即$b=1$、$t=1$，如圖(22-1)，代入$m\in(0,\infty)$時的

A'、B'、C'，可得：$A'=\frac{8}{9}$、$B'=-\frac{919}{729}$、$C'=-\frac{46}{81}$，由於$\Delta=\frac{1025}{729}>0$，可知此方程式只有一個實數解，代入公式解$(x_1)$得：

$x=\frac{1}{9}\left(-\sqrt[3]{135\sqrt{41}+919}-\sqrt[3]{-135\sqrt{41}+919}+8\right)$，代入$P(m,0)$，其尤拉線與$\overleftrightarrow{BP}$平行，如圖(22-2)，即為所求。



圖(22-1)



圖(22-2)

討論：

判別P點有多少解的判別式為Δ，我們把B'、C'代入一元三次方程式之判別式$\Delta=B'^2+C'^3$，運算後可知其值並沒有一定的區間，而一元三次方程式的解有三種狀況：當$\Delta>0$，方程式只有一個實數解，遇到此情況時，我們便會用上文之方法求解；當$\Delta<0$，方程式有三個不等的實根，我們會使用卡爾丹諾法會比較好計算；當$\Delta=0$，方程式有三個實根，這裡又分為兩種情況：當$B'^2=-C'^3=0$時，三實根會相同，但B'^2和C'^3不可能為零，也就是當$\Delta=0$時，我們並不用考慮此狀況；當$B'^2=-C'^3\neq 0$時，三實根中的兩根相同，，而將其解出之方法與$\Delta<0$時相同，因此遇到此情況時也會使用相同的方法求解。因此尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$時，P點可能有一到三組解。且由於一元三次方程式在係數和常數項皆為實數時，其解必有一實根，所以當A、B兩點在x軸的相異兩側時，不論是平行哪一邊，一定不會無解。

定理 5.綜合上文，可知：

當$\Delta>0$，P點恰有一解

當$\Delta=0$，P點僅有兩解

當$\Delta<0$，P點有三組解

結論(八和九)：

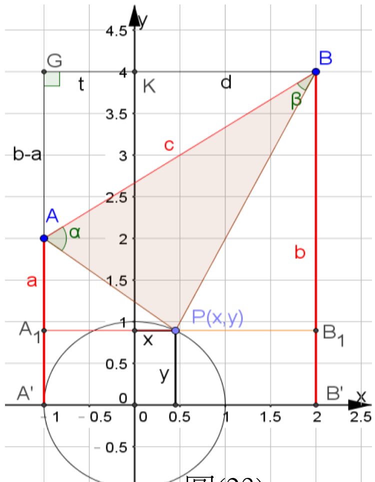
1. P有一至三組解，Δ為判別式
2. 當$\Delta>0$，P點恰有一解，解為$A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}$。

   當$\Delta=0$，P點有兩組解，使用卡爾丹諾法求解。

   當$\Delta<0$，P點有三組解，使用卡爾丹諾法求解。

十、當P點在圓弧上時，使尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$平行，求P點解

設$A(-t,a)$、$B(d,b)$、$P(x,y)$如圖(23)，令原點為圓心，半徑為 1，若有半徑不為 1 的情形，再將其依比例放大或縮小。由上可知圓的方程式為:$x^2+y^2=1$，所以我們將y以x表示之:$y=\pm\sqrt{1-x^2}$但是，由於正負皆有可能，因此我們得將其拆成上下兩個半圓進行探討，方能求得解。



圖(23)

(一) 當P點位於上半圓時，而A、B兩點位於y軸兩側，試使$\triangle ABP$之尤拉線$\parallel \overleftrightarrow{AB}$。

$$\tan\alpha=-\frac{(a-y)(t+d)+(t+x)(b-a)}{(a-y)(b-a)-(t+d)(t+x)}，\tan\beta=\frac{(t+d)(b-y)-(b-a)(d-x)}{(b-a)(b-y)+(d-x)(t+d)}$$

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\frac{[(a-y)(t+d)+(t+x)(b-a)]((t+d)(b-y)-(b-a)(d-x))}{[(a-y)(b-a)-(t+d)(t+x)]((b-a)(b-y)+(d-x)(t+d))}$$

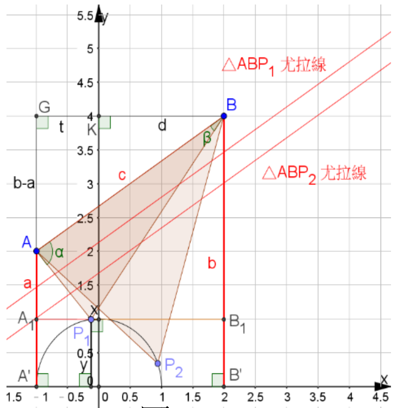
但其方程式為四次，由於我們目前還沒有能力求出一元四次方程式的解，因此我們決定直接舉例。代入$y=\sqrt{-x^2+1}$、$a=2$、$b=4$、$d=2$、$t=1$

$$\Rightarrow\frac{169x^4-169x^3+\sqrt{-x^2+1}(234x^2-2028x-136)-419x^2+2493x+126}{169x^4-1170x^3+2961x^2-900x-576}=3$$

使用 Geogebra 求解程式，得：

$x\approx0.9415118686602$ 或 -0.1236193237217

$y\approx0.33697982309$ 或 0.9923297147635，如圖(24)，其尤拉線與$\overline{AB}$平行，即為所求。



圖(24)

(二) 當P點位在下半圓時，而A、B兩點位於y 軸兩側，試使$\triangle ABP$之尤拉線$\parallel \overleftrightarrow{AB}$。

$$\tan\alpha=-\frac{(a+y)(t+d)+(t+x)(b-a)}{(a+y)(b-a)-(t+d)(t+x)}\quad\tan\beta=\frac{(t+d)(b+y)-(b-a)(d-x)}{(b-a)(b+y)+(d-x)(t+d)}$$

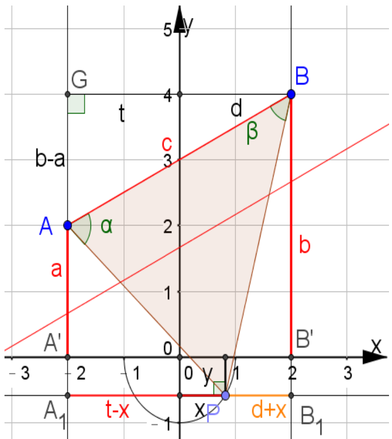
$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\frac{[(a+y)(t+d)+(t+x)(b-a)]((t+d)(b+y)-(b-a)(d-x))}{[(a+y)(b-a)-(t+d)(t+x)]((b-a)(b+y)+(d-x)(t+d))}$$

同上，我們直接舉例。代入相同數值：

$$\Rightarrow\frac{25x^4+\sqrt{-x^2+1}(-90x^2+260x+600)-181x^2+588x+744}{25x^4-120x^3+74x^2+408+189}=3$$

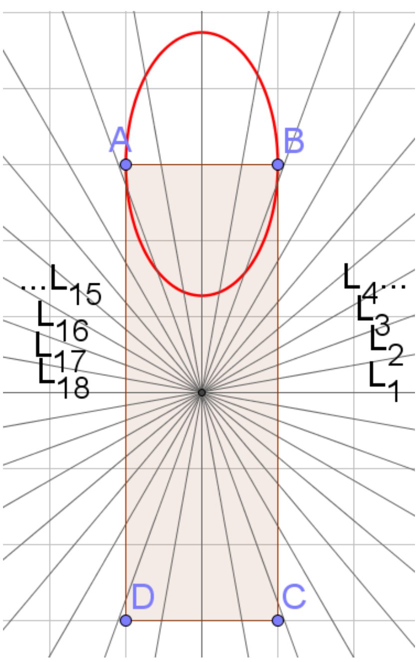
$x\approx0.8147763306671$，$y\approx0.5797754142637$

如圖(25)，其尤拉線與$\overline{AB}$平行，即為所求。

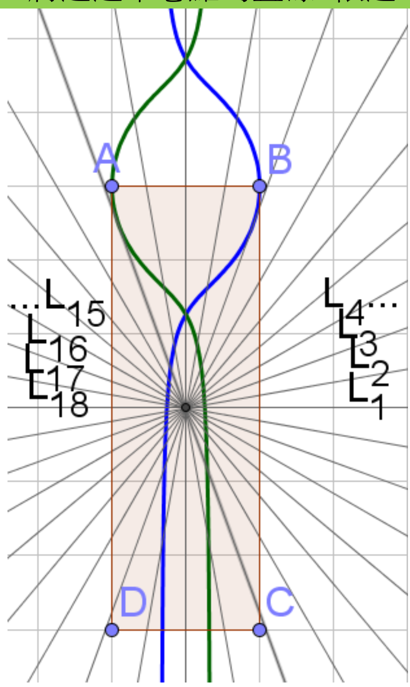


圖(25)

十一、針對長方形兩頂點A、B，將通過中心點的直線L依逆時鐘旋轉一周，觀察P點軌跡



圖(26-1)



圖(26-2)

結論：

(詳細計算詳見**附件三**)

1. 直線L旋轉一圈，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$的軌跡圖，如圖(26-1)中的橢圓。
2. 直線L旋轉一圈，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$的軌跡圖，如圖(26-2)中的藍色曲線。
3. 直線L旋轉一圈，尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$的軌跡圖，如圖(26-2)中的綠色曲線。

十二、利用前文各類判別式，繪出其不等式圖形，以便取得資料畫出對應的P點解

在前文尤拉線平行某一邊的探討時，有些情況因為有多種解，所以建立判別式加以區分，看起來理所當然，但若有人要求你利用這判別式來舉例並畫出正確的圖，這時可能要在繁雜的判別式不等式中掙扎半天，所以接下來我們要把該判別式不等式畫出來，使用者只要在對應的區塊內任挑一點並取其資料，即可畫出所要求的所有解，非常方便。

(一)在A、B位於x軸異側，令$A(0,1)$、$B(t,-b)$，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$時

$$\tan\alpha_2\cdot\tan\psi_1=\frac{(bx-t+x)^2}{(tx+b+1)(x^2-b-tx)}$$

令上式為3，並展開其算式

得$-3tx^3+(b^2-b+3t^2-2)x^2+(4bt+t)x+(3b^2+3b+t^2)=0$

為一元三次方程式，判別式Δ為 註：$m\in(0,\infty)$和$m\in(-\infty,0)$時的Δ相同

$$\left(\frac{-(4bt+t)(b^2+3t^2-b-2)}{54t^2}+\frac{\left(-b^2-3t^2+b+2\right)^3}{729t^3}+\frac{-\left(3b^2+t^2+3b\right)}{6t}\right)^2+\left(-\frac{4bt+t}{9t}-\frac{\left(-b^2-3t^2+b+2\right)^2}{81t^2}\right)^3$$

化簡因式分解為$(b^2+2b+t^2+1)^2\,\frac{(b^4-6b^3+6b^2t^2+12b^2+30bt^2-8b+9t^4-3t^2)}{729t^4}$

觀察上式，Δ的正負關鍵是$b^4-6b^3+6b^2t^2+12b^2+30bt^2-8b+9t^4-3t^2$

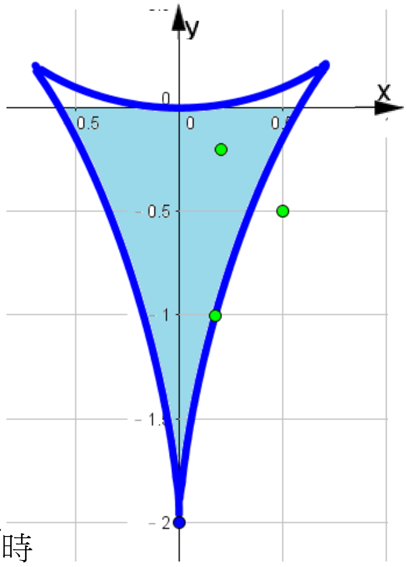
令$t=x$，$b=-y$，畫出其圖形如圖(27-1)

定理 6. A、B在異側，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$，如圖(27-1)

若取$B(t,-b)$在藍色曲線內的時候有三組解；

若取$B(t,-b)$在藍色曲線外的時候有一組解；

若取$B(t,-b)$在藍色曲線上的時候有兩組解。



圖(27-1)

例如取$t = 0.2$，$b = 0.2$，如圖(27-2)，見**附件四**

例如取$t = 0.5$，$b = 0.5$，如圖(27-3)，見**附件四**

例如取$t = \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{5}\ 5\ -\ 11}}{6}$，$b = 1$，如圖(27-4)，見**附件四**

(2)在A、B位於x軸異側，令$A(0,1)$、$B(t,-b)$，尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$時

$$tan\,\beta_1 \cdot tan\,\psi_2 = \frac{(bx+t+x)^2}{(x^2-b+tx)(t^2+tx+b^2+b)}$$

令上式為3，並展開其算式

得$-3tx^3 + (-2b^2-6t^2+1-b)x^2 + (-3b^2t+2bt+2t-3t^3)x + (3b^3+3b^2+3bt^2+t^2) =$ 0為一元三次方程式，判別式Δ為

註：$m \in (0,\infty)$和$m \in (-\infty,0)$時的Δ相同

$$\left(\frac{((-2b^2-6t^2-b+1)(-3t^3-3b^2t+2bt+2t))}{54t^2}+\frac{(-2b^2-6t^2-b+1)^3}{729t^3}+\frac{(3b^3+3bt^2+3b^2+t^2)}{6t}\right)^2+\left(\frac{-4b^4-9t^4+3b^2t^2-4b^3-30bt^2+3b^2-6t^2+2b-1}{81t^2}\right)^3$$

化簡因式分解為$b^2(t^2+b^2+2b+1)^2 \cdot \frac{9t^4-\ 3t^2b^2+\ 30t^2b\ +\ 6t^2-\ 8b^3+\ 12b^2-\ 6b\ +\ 1}{729t^4}$

觀察上式，Δ的正負關鍵是 $9t^4 - 3t^2b^2 + 30t^2b + 6t^2 - 8b^3 + 12b^2 - 6b + 1$

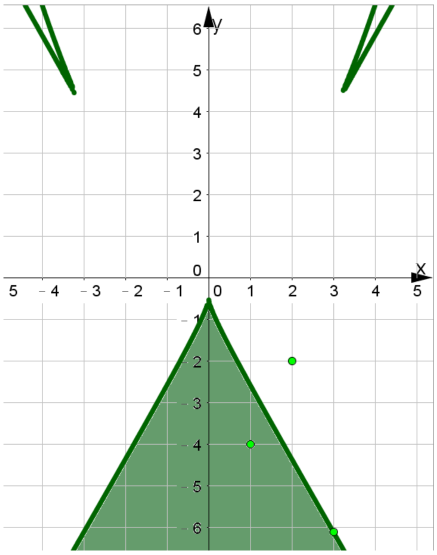
令$t = x$，$b = -y$，畫出其圖形如圖(28-1)

定理 7. A、B異側，尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$，如圖(28-1)

若取$B(t,-b)$在綠色曲線內的時候有三組解；

若取$B(t,-b)$在綠色曲線外的時候有一組解；

若取$B(t,-b)$在綠色曲線上的時候有兩組解。



圖(28-1)

例如取$t = 1$，$b = 4$，如圖(28-2)，見**附件四**

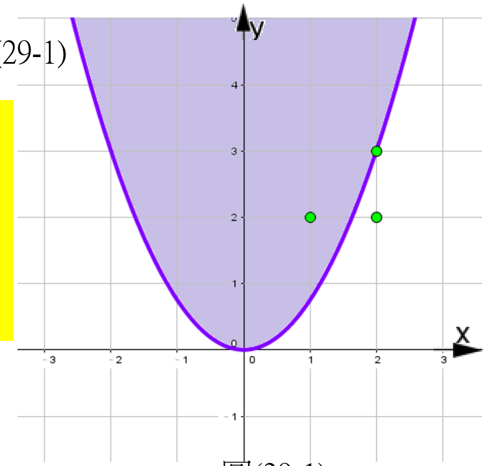
例如取$t = 2$，$b = 2$，如圖(28-3)，見**附件四**

例如取$t = 3$，$b = \frac{49}{8}$，如圖(28-4)，見**附件四**

(3)在A、B位於x軸同側，$A(1,0)$、$B(t,-b)$，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$時

利用微分所導出的判別式「N」: $\frac{-4ab}{t^2}$，代入$a = 1$後

可得$N=\frac{-4b}{t^2}$，令$t=x$，$b=-y$，畫出其圖形如圖(29-1)



圖(29-1)

定理 8. A、B同側，尤拉線平行$\overline{AB}$，如圖(29-1)

若取$B(t,-b)$在紫色曲線內的時候無解；

若取$B(t,-b)$在紫色曲線外的時候有兩組解；

若取$B(t,-b)$在紫色曲線上的時候有一組解

例如取$t=1$，$b=-2$，如圖(29-2)　，見附件四

例如取$t=2$，$b=-2$，如圖(29-3)，見附件四

例如取$t=2$，$b=-3$，如圖(29-4)，見附件四

十三、利用特殊已設條件，協助尺規作圖，在坐標平面上求作能平行各邊的P 點的解。

綜合前文整篇報告的分析，若有人在空白坐標平面上想只用圓規和直尺在x軸上找出P點，使$\triangle ABP$的尤拉線保證能平行$\overline{AB}$、$\overline{AP}$或$\overline{BP}$且同側、異側都行的通，那要如何安排A點和B點呢？解決此問題我們精心設計一套方法，而設計概念來源有二，其一為觀察到在表(一)中反正切函數常用到$tan^{-1}1=45°$的角，其二是來自研究動機的圖(1-1)不等式求作P點的概念。設計及用法分述如下：

定理 9. 用尺規作圖，依步驟在x軸上皆能找出一點P，使$\triangle$ PAB的尤拉線$\parallel\overline{AP}$，同異側皆可

步驟一、在 $y=-2x+2$ 任取一點A，在 $y=x-1$ 任取一點B，連$\overline{AB}$，如圖(30-1)。

步驟二、過A，作$\overrightarrow{AX}\perp\overline{AB}$，作$\angle BAX$的分角線$\overrightarrow{AP}$交$x$軸於$P$，連$\overline{PB}$，則$\triangle PAB$的尤拉線$\parallel\overline{AP}$，即為所求。

證明：1.過B，作$\overrightarrow{BY}\perp\overline{AB}$，交$\overrightarrow{AP}$於C，如圖(30-2)。

2.過A，作$\overline{AD}\perp x$軸，交$y=x-1$於D，交x軸於 E $\therefore\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}=45°$

3.由$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}$，得A、D、C、B共圓。畫出此圓，$\overline{AC}$為直徑。

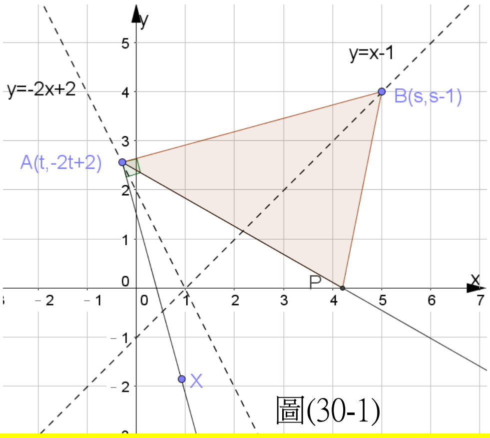
4.過B，作$\overline{BF}\perp$直徑$\overline{AC}$，F 為圓心$\therefore\overline{FA}=\overline{FB}=\overline{FC}=\mathrm{r}$，連$\overline{DC}$，得$D(t,t-1)$

5.$\because\overline{AC}$為直徑$\therefore\angle\mathrm{ADC}=90°\therefore\overline{CD}\perp\overline{AD}$，又$x$軸$\perp\overline{AD}\therefore\overline{CD}\parallel x$軸，即$\overline{CD}\parallel\overline{PE}$

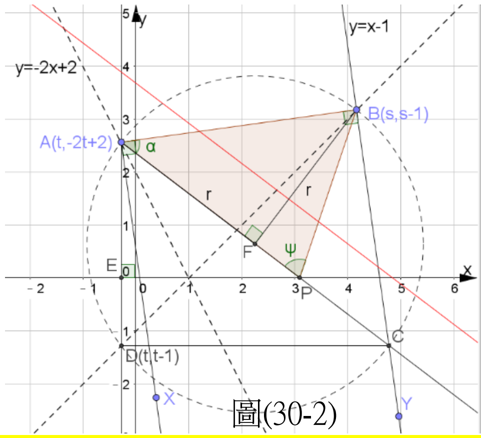
6.在$\triangle$ ADC 中$\because\overline{PE}\parallel\overline{CD}\therefore\overline{AP}:\overline{AC}=\overline{AE}:\overline{AD}=(-2t+2):(-3t+3)=2:3$

$$\therefore(r+\overline{FP}):2r=2:3\therefore\overline{FP}=\frac{1}{3}r$$

7.$\tan\alpha\cdot\tan\psi=1\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FP}}=1\times\frac{r}{\frac{1}{3}r}=3$，得此尤拉線$\parallel\overline{AP}$。



圖(30-1)



圖(30-2)

定理 10. 用尺規作圖，依步驟在x軸上皆能找出一點P，使△ PAB的尤拉線∥ $\overline{AB}$，同異側皆可

步驟一、在 $y=-3x+3$ 任取一點A，在 $y=x-1$ 任取一點B，連$\overline{AB}$，如圖(31-1)。

步驟二、過A，作$\overrightarrow{AX}\perp\overline{AB}$，作$\angle BAX$的分角線交$x$軸於$P$，連$\overline{BP}$，則P 點即為所求。

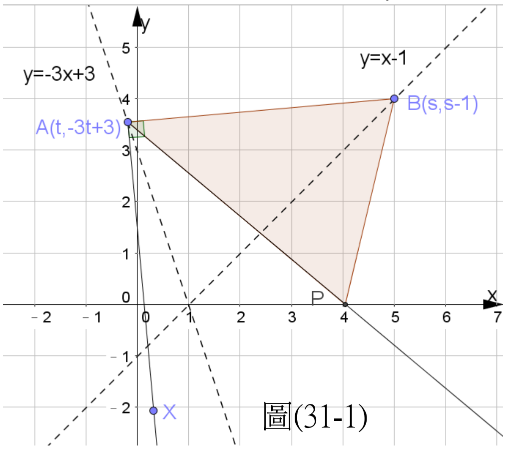
證明：1.過B，作$\overrightarrow{BY}\perp\overline{AB}$，交$\overrightarrow{AP}$於$C$，如圖(31-2)。

2.過A，作$\overline{AD}\perp x$軸，交x軸於E，交$y=x-1$於D，則A、D、B、C共圓，連$\overline{CD}$

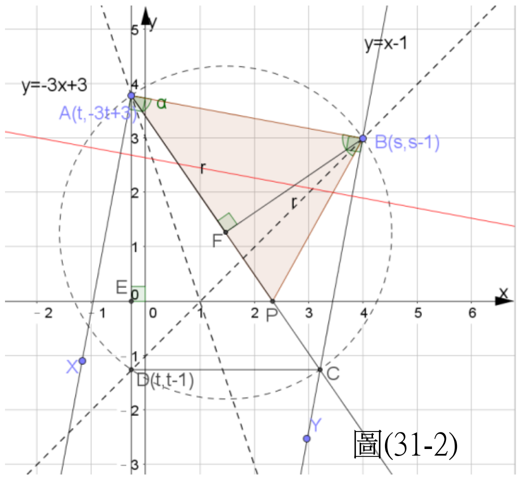
3.作圓心F，則$\overline{FA}=\overline{FB}=\overline{FC}=r$

4.在△ ADC 中，$\overline{AP}:\overline{AC}=\overline{AE}:\overline{AD}=3:4$ ∴ $(\mathrm{r}+\overline{FP}):2\mathrm{r}=3:4$，即$\overline{FP}=\frac{1}{2}r$

5. $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1\times\frac{1+\frac{\frac{1}{2}r}{r}}{1-\frac{\frac{1}{2}r}{r}}=1\times\frac{\frac{3}{2}r}{\frac{1}{2}r}=3$，∴尤拉線∥ $\overline{AB}$。



圖(31-1)



圖(31-2)

定理 11. 用尺規作圖，依步驟在x軸上皆能找出一點P，使△ PAB的尤拉線∥ $\overline{BP}$，同異側皆可

步驟一、在 $y=-x+3$ 任取一點A，在 $y=2x-6$ 任取一點B，連$\overline{AB}$，圖(32-1)。

步驟二、過B，作$\overrightarrow{BY}\perp\overline{BA}$，作$\angle ABY$的分角線交$x$軸於$P$，連$\overline{AP}$，則P點即為所求。

證明：1.過B，作$\overline{BD}\perp x$軸，交$y=-x+3$於D，如圖(32-2)。

2.$\angle ACB=\angle \mathrm{ADB}=45°$，得$A$、$C$、$D$、$B$共圓。

3.畫出此輔助圓，$\overline{BC}$為直徑。連$\overline{CD}$，得$\angle CDB=90°$，又$\overline{BC}\perp x$軸 ∴ $\overline{CD}\parallel x$軸

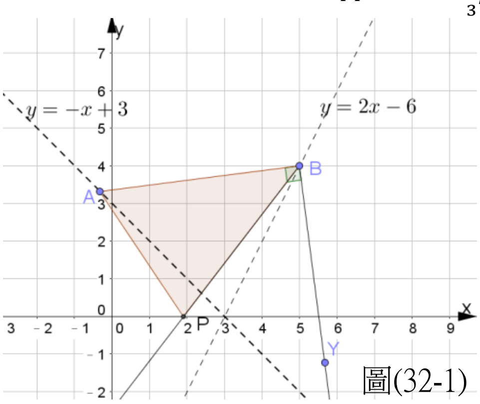
4.由$D(\mathrm{s},-\mathrm{s}+3)$，$\overline{BD}=(2s-6)-(-s+3)=3s-9$

5.在△ BCD 中，$\because \overleftrightarrow{PE} \parallel \overline{CD}$ $\therefore \overline{BP}:\overline{BC}=\overline{BE}:\overline{BD}=(2s-6):(3s-9)=2:3$

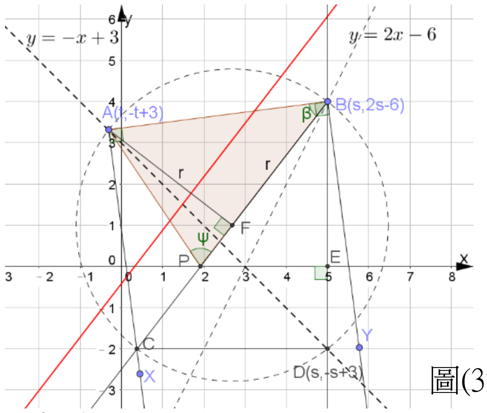
6.過A，作$\overline{AF}\perp$直徑$\overline{BC}$，得$\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{FC}=r$，代入$\overline{BP}:\overline{BC}=2:3$，得

$(\mathrm{r}+\overline{FP}):2r=2:3$，得$\overline{FP}=\frac{1}{3}r$

7.$\tan\beta\cdot\tan\psi=1\times\frac{\overline{AF}}{\overline{FP}}=1\times\frac{r}{\frac{1}{3}r}=3$，得此尤拉線$\parallel \overline{BP}$。



圖(32-1)



圖(32-2)

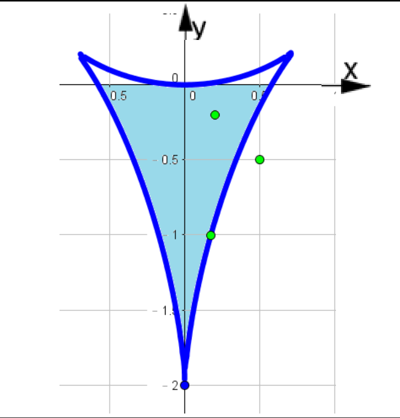
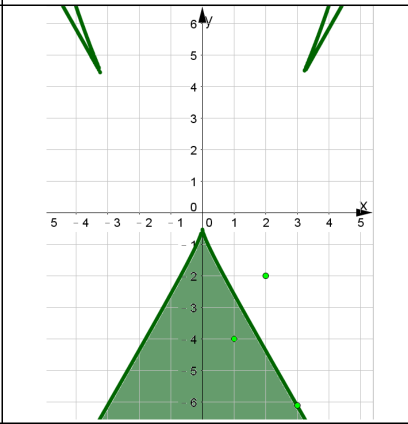
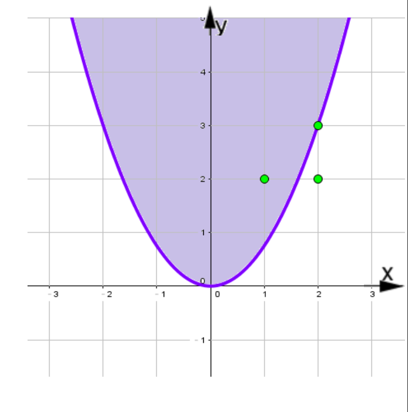
伍、結論

一、若A、B兩相異點在L同側時，則函數$\mathrm{K}=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$，此曲線在$M_1$、$M_2$之間必為上凹曲線。

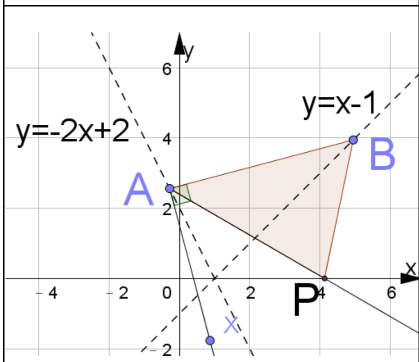
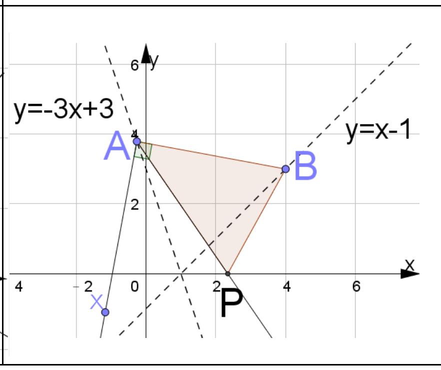
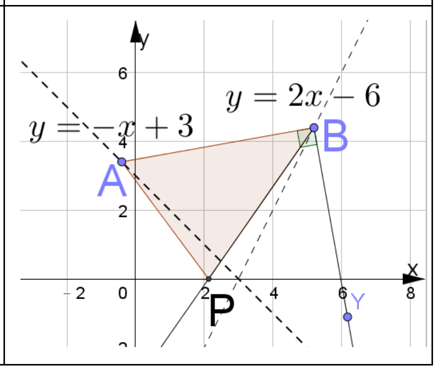
二、相異點A、B 在同、異側時，P點解的數量及解的公式比較。

	尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$	尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$	尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$
同側	給定a、b、h，可計算N值$(\frac{4ac}{h^2})$。 當$N<3$時，有兩解，為 $P\left(\frac{3h^3-a^2h+3b^2h-2abh\pm\sqrt{3h^2-4ab}(\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2+\sqrt{3}h^2-2\sqrt{3}ab)}{2a^2+2b^2+6h^2-4ab},0\right)$ 當$N=3$時，有一解，為$P(\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh},0)$ 當$N>3$時，無解	P必定是恰有一組解 解為：$P\left(A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}\ ,0\right)$ (左右的A′、B′、C′代數式不同)	P必定是恰有一組解 解為：$P\left(A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}\ ,0\right)$
異側	P必定是兩組解，其解為： $P(\frac{3b^2t+2bt+3t^3-t\pm(\sqrt{3}b^2+2\sqrt{3}b+\sqrt{3}t^2+\sqrt{3})\sqrt{4b+3t^2}}{2b^2+4b+6t^2+2}\ ,0)$	P有一至三組解，Δ為判別式 當Δ> 0，P點有一解 當Δ= 0，P點有兩解 當Δ< 0，P點有三解	P有一至三組解，Δ為判別式 當Δ> 0，P點有一解 當Δ= 0，P點有兩解 當Δ< 0，P點有三解

三、在座標平面上$A(0,1)$、$B(t,-b)$，$t\neq 0$，依照在尤拉線平行$\overline{AP}$(異側)、$\overline{BP}$(異側)、$\overline{AB}$(同側)的解的數量之不同(另外三種平行的解的數量是固定的)，將各自的判別式不等式區塊圖示如下：

	A、B且尤拉線異側平行$\overline{AP}$	A、B且尤拉線異側平行$\overline{BP}$	A、B且尤拉線同側平行$\overline{AB}$
判別式形成的圖形			
舉例	若取B在藍色曲線內有三解 若取B在藍色曲線上有兩解 若取B在藍色曲線外有一解	若取B在綠色曲線內有三解 若取B在綠色曲線上有兩解 若取B在綠色曲線外有一解	若取B在紫色曲線內無解 若取B在紫色曲線上有一解 若取B在紫色曲線外有兩解

四、在座標平面上，依照尤拉線∥ $\overline{AP}$ 、$\overline{AB}$ 、$\overline{BP}$的要求，若分別預畫好兩條特定直線，圖示如下，則讀者只要在左右兩條虛線特定直線上依序任取一點A、B，即可依照內文**定理**9、10、11 的國中幾何尺規作圖法在x軸上找到所要的P點，同異側皆可。

A、B同異側且尤拉線平行$\overline{AP}$	A、B同異側且尤拉線平行$\overline{AB}$	A、B同異側且尤拉線平行$\overline{BP}$
		

陸、未來展望

未來我們要將研究拓展到立體空間和球面上，進行更深入的研究。

柒、參考資料及其他

一、國中數學第三、四、五冊，高中數學第一、二、三、四冊。

二、楊精松、莊紹容(2017)。微積分(13 版)。臺北市：臺灣東華。

三、李昱頡、賀崇恩、劉垣妏(2016)。驚嘆尤拉線群遇到60°與 120°。中華民國第 5 6 屆科學展覽會。

【評語】030421

給平面上兩定點 A、B 和一條直線，希望在直線上找到一點 P，使得三角形 PAB 的尤拉線平行於此三角形的某一個邊。本作品用到許多扎實的國中數學，論述完整，說明清楚。作者的數學能力強，並且對作品有充分的理解。部分的論述稍嫌繁瑣了些，理論上只需考慮同側或異側兩種情況，亦可試圖調整座標設定來簡化繁複的計算。可惜原問題的條件"使尤拉線平行邊"的限制相當不自然也限制了發展空間，導致作品中有大量的計算，較無法有亮點，是較為可惜之處。

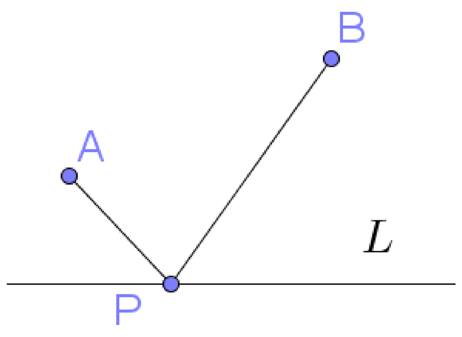
作品海報

壹、研究動機

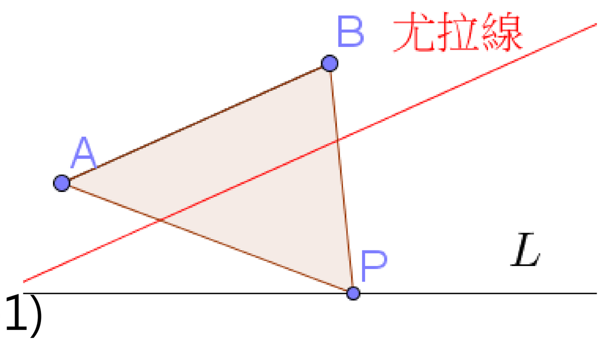
在不等式課程中，常出現一道題目：在直線L上方有A、B兩定點，如圖(1-1)，試在L上用尺規作圖找出一點P，使$\overline{PA}+\overline{PB}$最小(國中數學翰林版-第四冊-第九單元)。老師說能自己想出作法的同學真的是不簡單，你可以用幾何或代數求解，重點是要自己思考。老師又說是否有同學可以在L上找到一點P，使$\triangle PAB$的尤拉線平行$\overline{AB}$？如圖(1-2)，這樣的尤拉線一定有解嗎？有沒有什麼規則可以事先預判呢？又這種P點是否可以用**尺規作圖**直接畫出？同學們很好奇，很想試試看。

貳、研究目的

在平面中給定相異兩定點A、B與直線L(或圓弧曲線)，若在直線L(或圓弧曲線)上存在P點使$\triangle PAB$之尤拉線平行$\triangle$任一邊，我們稱為**「有解」**；反之，若不存在P點，則我們稱為**「無解」**。因此，以下為我們想探討的問題：



圖(1-1)



圖(1-2)

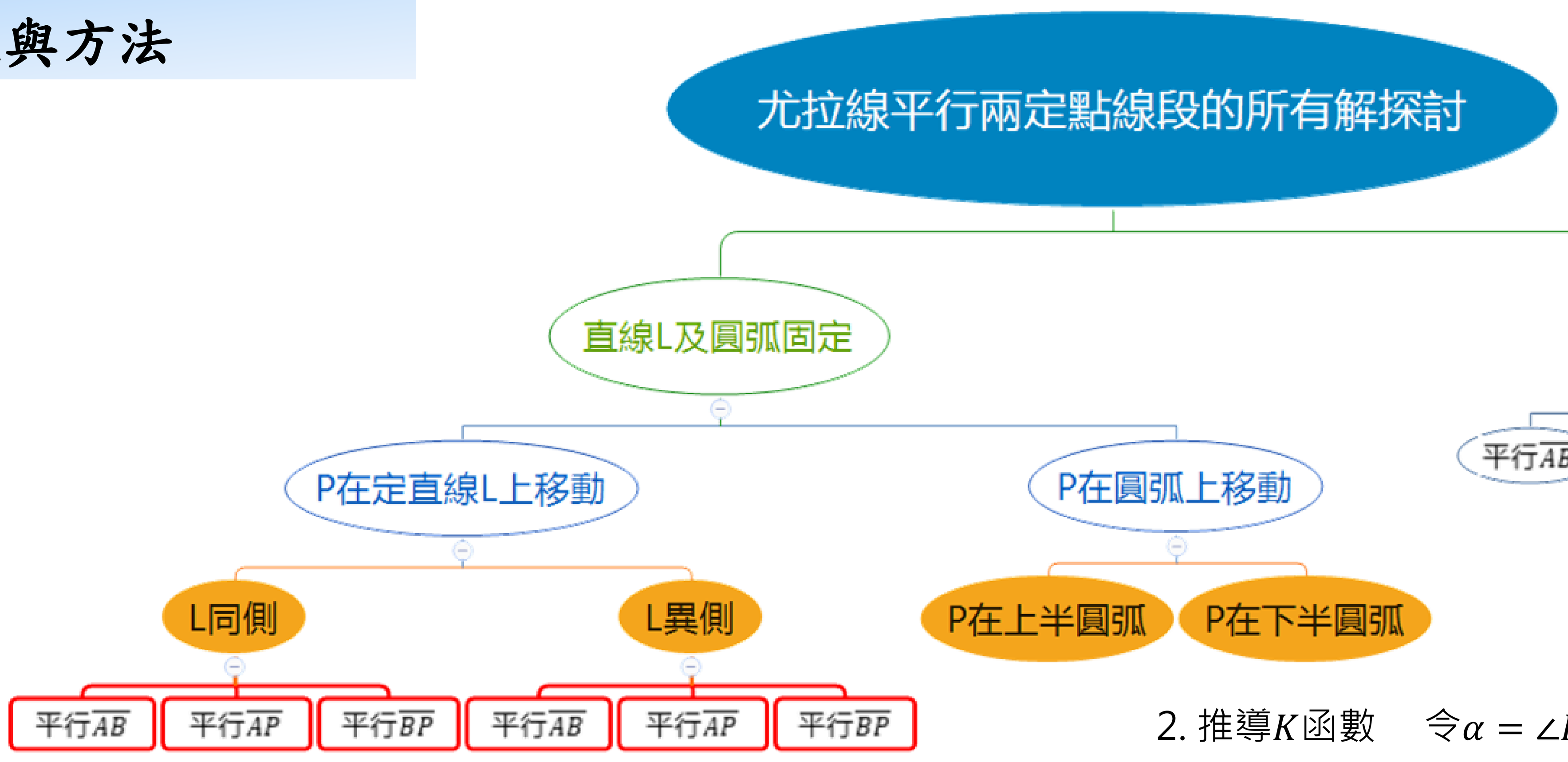
一、探討尤拉線平行$\triangle$一邊的條件。
二、建立一套相異兩定點A、B在L同側且P在L上，其有解的判別式。
三、建立一套相異兩定點A、B在L異側且P在L上，其有解的判別式。
四、建立一套相異兩定點A、B且P在圓弧曲線上，其有解的判別式。
五、反過來，直線L過矩形中心點，旋轉L，探討P點的軌跡。
六、利用特殊條件協助尺規作圖，求作在L同側及異側的P點解。

參、使用設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra繪圖軟體、Word軟體、Python程式軟體

肆、研究過程與方法

一、研究架構

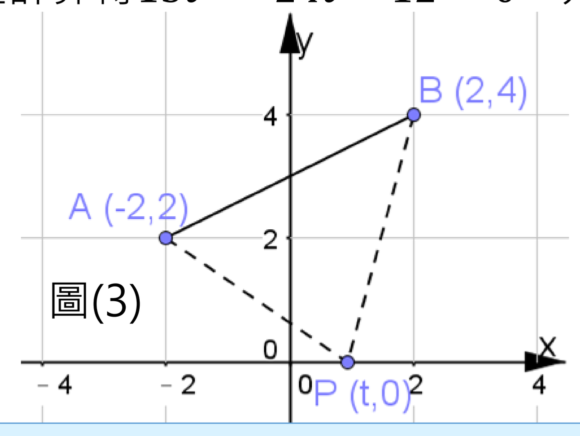


圖(2)

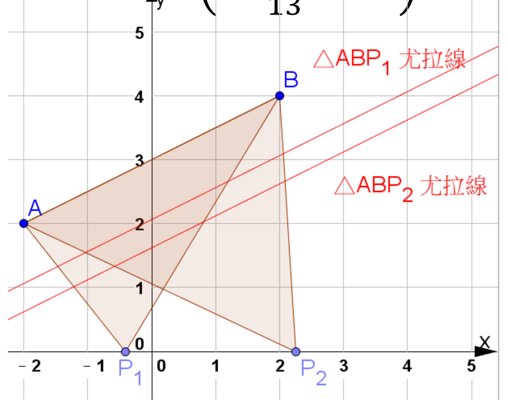
二、尋找平行三角形一邊的尤拉線

(一) P點存在性探討 (註：本文限定$\overleftrightarrow{AB}$與直線L不垂直，且大部分以x軸取代L)

設$A(-2,2)$、$B(2,4)$、$P(t,0)$如圖(3)，假設在x軸上可找到一點$P(t,0)$，使$\triangle PAB$的尤拉線$\parallel\overleftrightarrow{AB}$。經計算得$13t^2-24t-12=0$，判別式$>0\Rightarrow P\left(\frac{12+10\sqrt{3}}{13},0\right)$或$P\left(\frac{12-10\sqrt{3}}{13},0\right)$



圖(3)



圖(4)

討論說明：
1.在平面上給兩定點A,B及外側直線L，檢視在直線L上是否存在點P，使$\triangle PAB$的尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$，依上文舉例是存在的，依一元二次方程式的解來看，可能有兩個相異解、重根一個解，也可能無解。
2. 這種P點解有很多情況，所以要去創造一套判斷公式，讓使用者在收到A,B兩定點及外側直線L的資料之後，可立即判定是否有解並且利用公式把解算出來。

三、利用三角函數運算輔助幾何作圖使△的尤拉線與底邊能夠平行

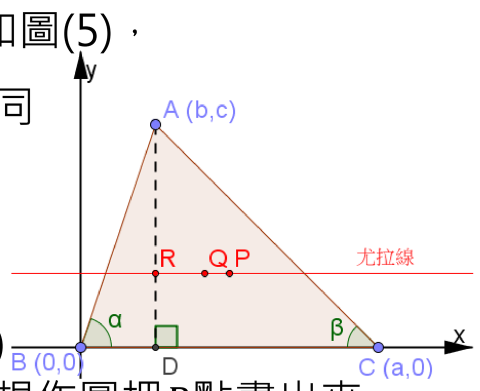
(一) 預備定理：當平面上有A,B,C三點及$\triangle ABC$的尤拉線，並令$\angle B=\alpha$、$\angle C=\beta$，則尤拉線$\parallel\overline{BC}$，若且唯若$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3$。(參[3])

證明：為方便說明，我們將$\triangle ABC$放在平面座標上，設各點座標如圖(5)，

$a>0$、$c>0$。∵尤拉線$\parallel\overline{BC}$，∴外心、重心、垂心的y座標必相同

$\Rightarrow\frac{c}{3}=\frac{b^2+c^2-ab}{2c}=\frac{ab-b^2}{c}\Rightarrow c^2=3(ab-b^2)$

$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{c^2}{ab-b^2}=\frac{3(ab-b^2)}{ab-b^2}=3$，反之亦然



圖(5)

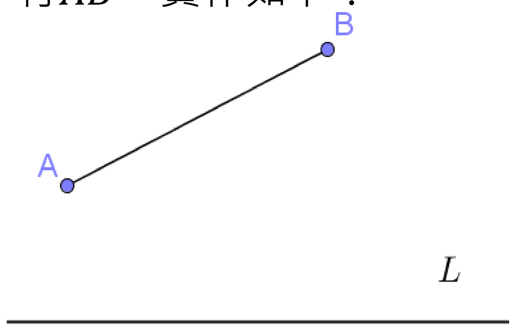
(二) 前文P點是利用平面座標計算出來的，要在幾何平面上，用尺規作圖把P點畫出來。

由預備定理得知，$\tan\angle A\cdot\tan\angle B=3$，尤拉線會平行$\overline{AB}$。實作如下：

步驟1.建立表(一)。

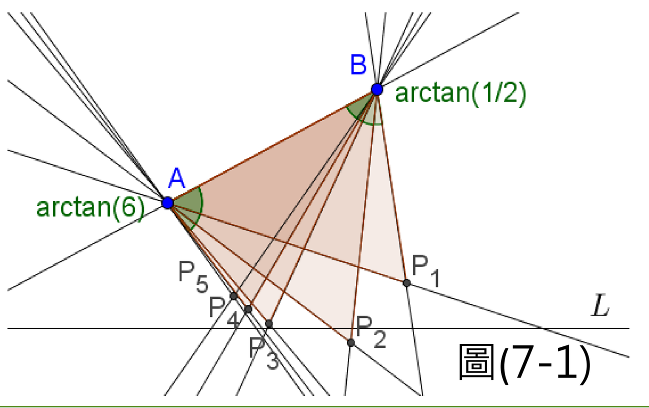
表(一)五組反正切資料

α	$\tan^{-1}1$	$\tan^{-1}2$	$\tan^{-1}4$	$\tan^{-1}5$	$\tan^{-1}6$
β	$\tan^{-1}3$	$\tan^{-1}\frac{3}{2}$	$\tan^{-1}\frac{3}{4}$	$\tan^{-1}\frac{3}{5}$	$\tan^{-1}\frac{1}{2}$

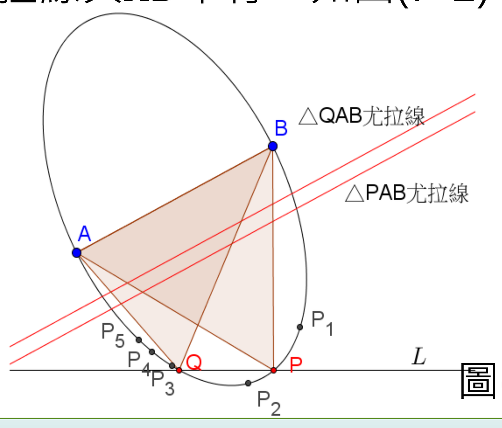


圖(6)

步驟2.給定圖(6)。
步驟3.利用表(一)畫出交點P_1、P_2、P_3、P_4和P_5，如圖(7-1)。
步驟4.將五點連成一圓錐曲線，取其與直線L之交點P和Q，各與A、B點連成三角形，分別為$\triangle PAB$和$\triangle QAB$。則其尤拉線與$\overline{AB}$平行，如圖(7-2)，即為所求。

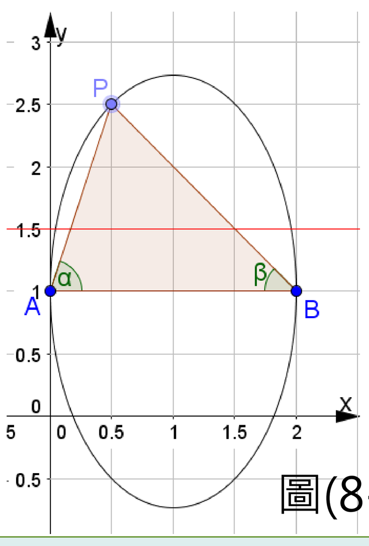


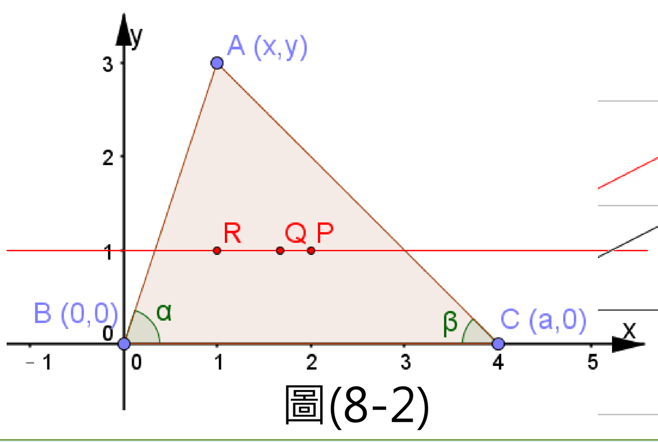
圖(7-1)



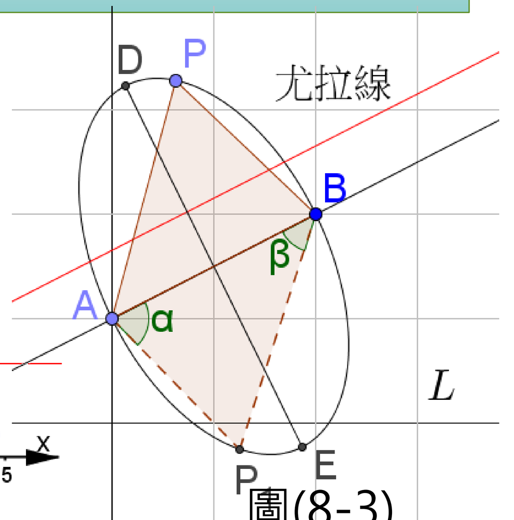
圖(7-2)

(三) 定理1：如圖(7-2)，在該橢圓上的任一點(除了A、B兩點外)，都能使$\triangle PAB$的尤拉線平行$\overline{AB}$。(證明見圖(8-1)。)


圖(8-1)



圖(8-2)



圖(8-3)

定理2：若座標平面上的點$A(x,y)$、$B(0,0)$、$C(a,0)$，定值$a>0$，可使得$\triangle ABC$的尤拉線平行$\overline{BC}$，則點A所在的橢圓短軸：長軸$=1:\sqrt{3}$。見圖(8-2)、實作(8-3)。

四、建立$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$的函數及其圖形

(一) 尋找$\tan\alpha\cdot\tan\beta$在直線M_1、M_2之間的最小值的預設條件說明

1. 規定：設各點座標如圖(9-1)，**詳見作品說明書**

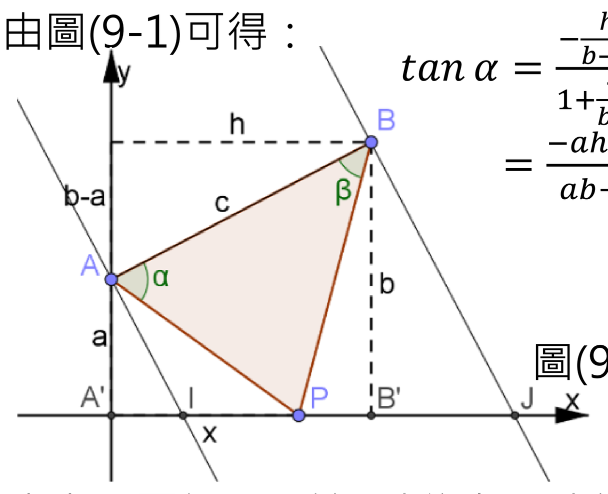
2. 推導K函數　令$\alpha=\angle PAB$、$\beta=\angle PBA$、$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$

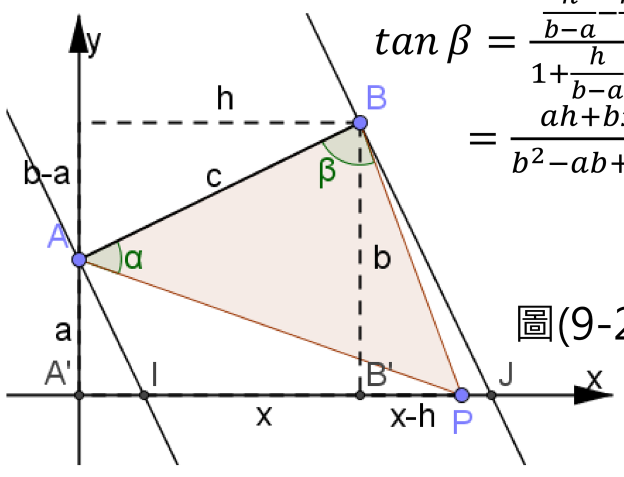
首先利用圖(9-1)去計算$\tan\alpha$和$\tan\beta$的表示式及$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$的表示式。

由圖(9-1)可得：

$$\tan\alpha=\frac{\frac{h}{b-a}-\frac{x}{a}}{1+\frac{-h}{b-a}\cdot\frac{x}{a}}=\frac{-ah-bx+ax}{ab-a^2-hx}$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{h}{b-a}-\frac{h-x}{b}}{1+\frac{h}{b-a}\cdot\frac{h-x}{b}}=\frac{ah+bx-ax}{b^2-ab+h^2-hx}$$


圖(9-1)

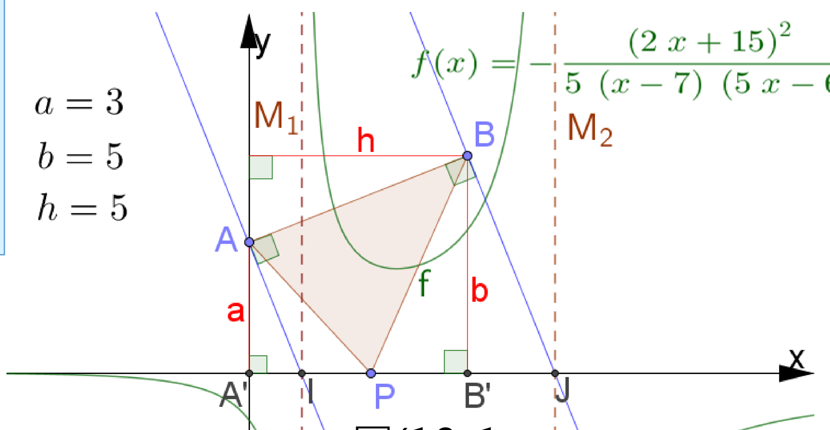

圖(9-2)

由上圖可知，不論P點位在B′點前後都得到同樣的函數

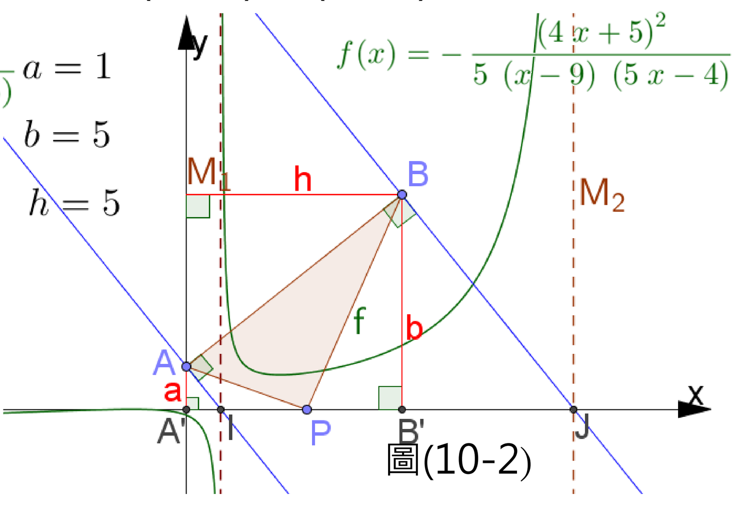
$$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\frac{(ah+bx-ax)^2}{(ab-a^2-hx)(b^2-ab+h^2-hx)}$$

(二) 研究K函數所繪出的曲線

1.各給定a、b、h，令$y=f(x)=K$，繪出得下圖(10-1)、(10-2)。



圖(10-1)



圖(10-2)

2.我們由上圖綜合出以下兩點：

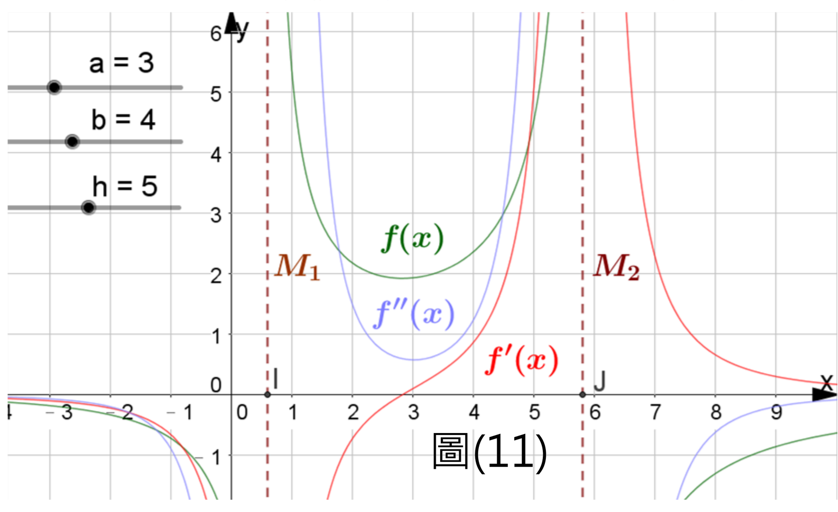
(1) M_1方程式為$x=\frac{ab-a^2}{h}$

M_2方程式為$x=\frac{h^2+b^2-ab}{h}$

(2) M_1、M_2為f曲線的漸近線

3. f曲線之凹性探討，如圖(11)

f曲線為上凹。**詳見作品說明書**



圖(11)

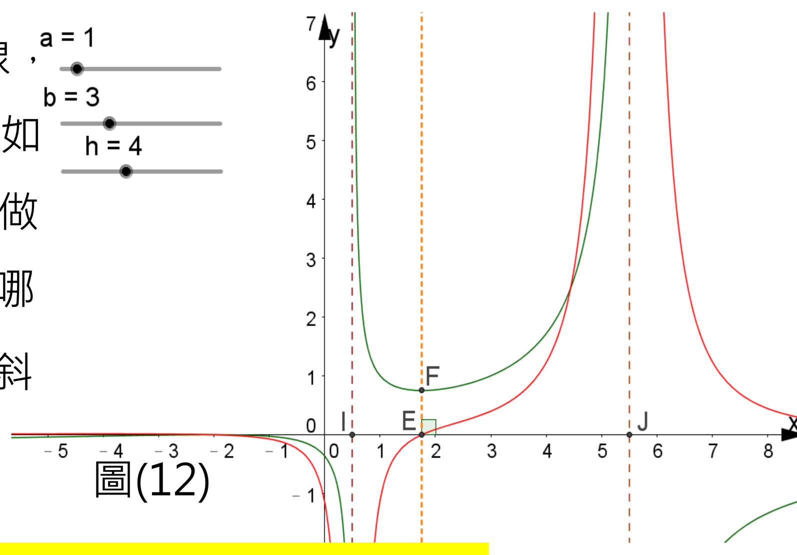
結論：1. K函數曲線為$y=f(x)=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$，其中$b>a$

2. 因$f''(x)>0$，K函數所繪出的曲線在兩漸近線之間必為上凹曲線

五、利用之前的研究結果建立一套判定尤拉線和兩定點平行的公式解

(一) 架構說明

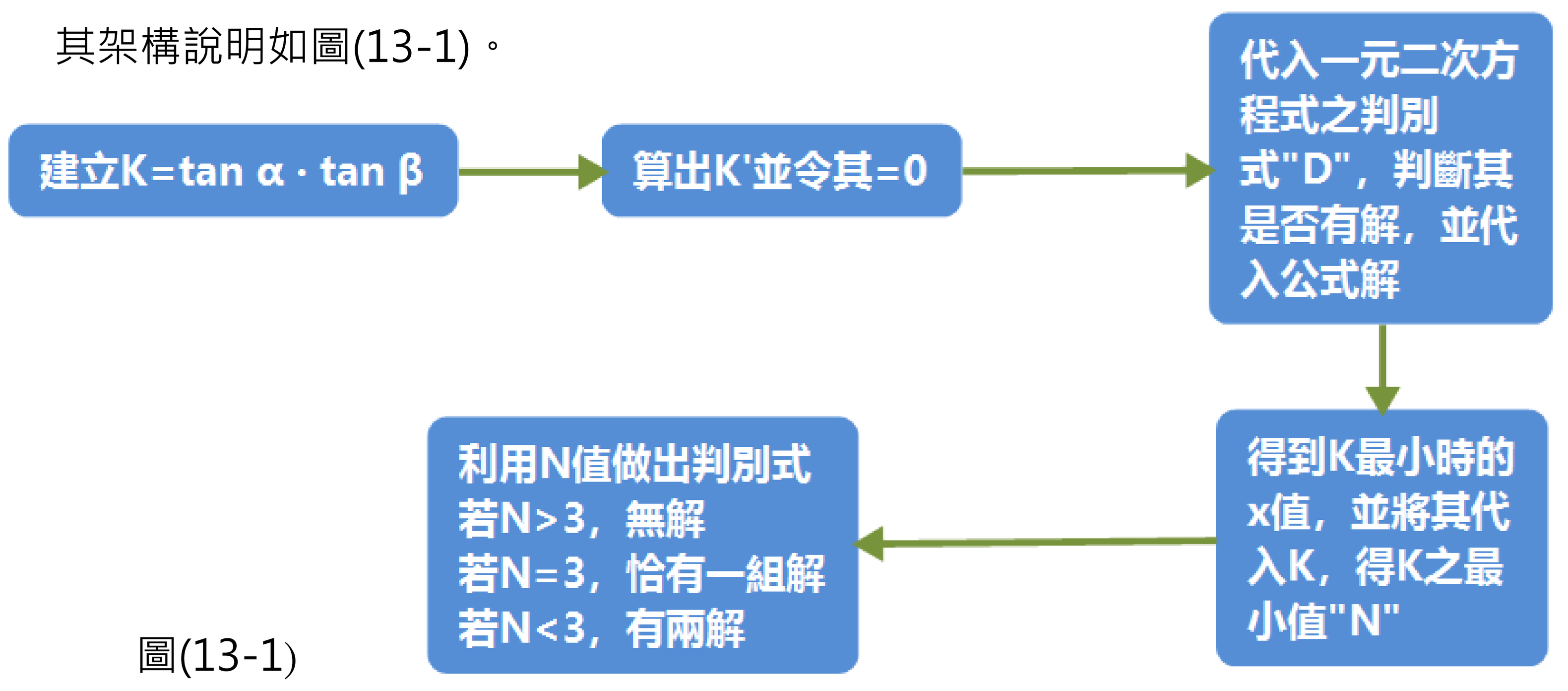
f曲線在直線M_1和M_2之間必定為上凹曲線，只要使用微分便可得到K函數之最小值，如圖(12)，並且由$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$和$y=3$做出判別式，令$K$的一階導數值為0，尋找哪一點$(x,f(x))$能夠使得其在曲線$f$的切線斜率為0，即可找出何時的$K$函數最小。



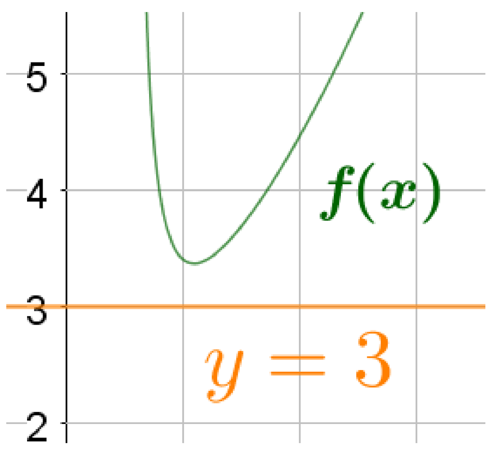
圖(12)

接著將此時的x代入前式之K，就能夠算得K函數之最小值"N"。

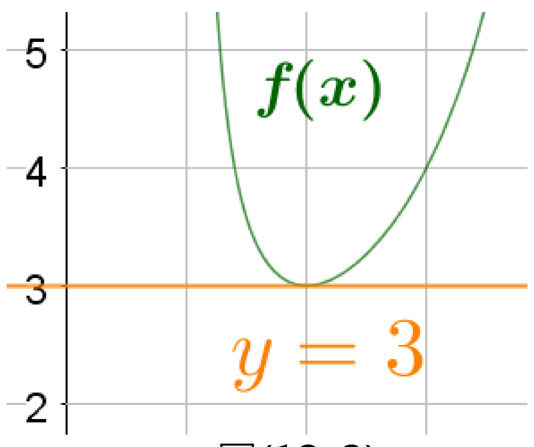
其架構說明如圖(13-1)。



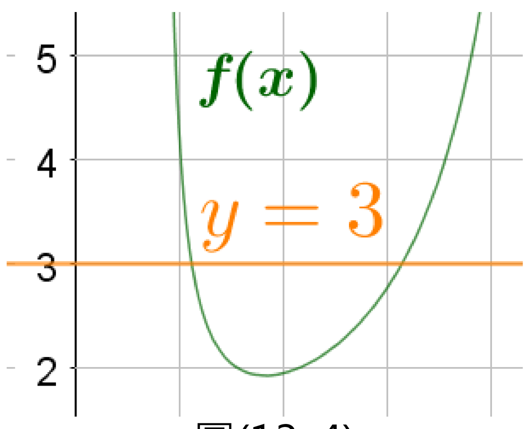
圖(13-1)



圖(13-2)
$N>3$，無解



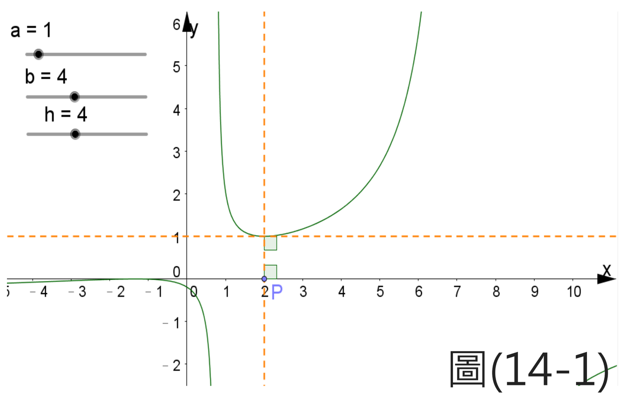
圖(13-3)
$N=3$，恰有一解



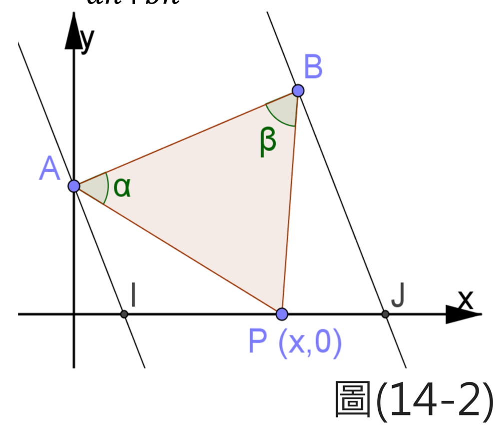
圖(13-4)
$N<3$，兩解

(二) 在直線M_1和直線M_2之間的範圍，求K的最低點的x座標及N的公式

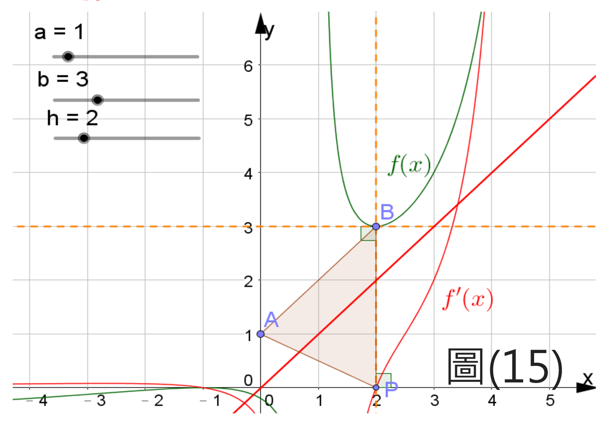
$K=f(x)=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$，經過運算可知：$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$，必為上凹曲線，因此$x$一定只有一解，經由運算可知$x=\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$，代入$K$，得 $N=\frac{4ab}{h^2}$



圖(14-1)



圖(14-2)



圖(15)

(三)試找出僅有一組解時的b

若要使$N=3$(即P僅有一解)，令$N=\frac{4ab}{h^2}=3$。我們任意舉了一例，令$h=2$、$a=1\Rightarrow b=3$，再代回上式，得$x=2$，代入Geogebra可得圖(15)，即為所求。

(四) 製作出一套利用N值判斷P的解之判別式

定理3：如前述資料$N=\frac{4ab}{h^2}$

當$N=3$時，P恰有一組解；當$N<3$時，P有兩解；當$N>3$時，P無解

當$\overline{AB}\perp L$時，P無解 (此時$h=0$，N無意義。)

接著我們要用三角函數代數運算出其解。算出

$K(x)=\tan\alpha\cdot\tan\beta$，令$K=3$，得$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

$A=-a^2-b^2-3h^2+2ab$、

$B=3h^3-a^2h+3b^2h-2abh$、

$C=-3ab^3+6a^2b^2+2a^2h^2-3a^3b-3abh^2$

即為所求能使尤拉線平行$\overline{AB}$的P點落在點$\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},0\right)$處。

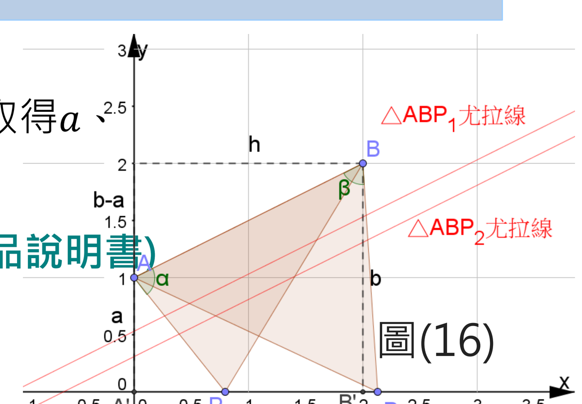
討論：判別式B^2-4AC和N都能判別出P點解的數量，不過展開B^2-4AC後，其代數式比N長得多，所以要計算出P點解的數量時，使用N式，要算出P點的座標時，使用公式解。

一般化結論：

結論：設函數$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$，$A(a,0)$、$B(b,h)$，$b>a$，$K$的最小值$N=\frac{4ab}{h^2}$，給定$a$、$b$、$h$之後可得$N$值
當 $N<3$，P有兩解，解為 $\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},0\right)$
$N=3$，P恰有一解，解為 $\left(-\frac{B}{2A},0\right)$
$N>3$，無解

(五) 舉例說明

我們要舉例說明方程式是正確的：先令$A(0,1)$、$B(2,2)$、$P(x,0)$，分別取得a、b、h，代入$N=\frac{4ab}{h^2}=2$，∴ 有兩組解，再代入$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$，可得：$x=\frac{1}{13}(\pm5\sqrt{3}+19)$，如圖(16)。則尤拉線平行$\overline{AB}$，即為所求。(詳見作品說明書)



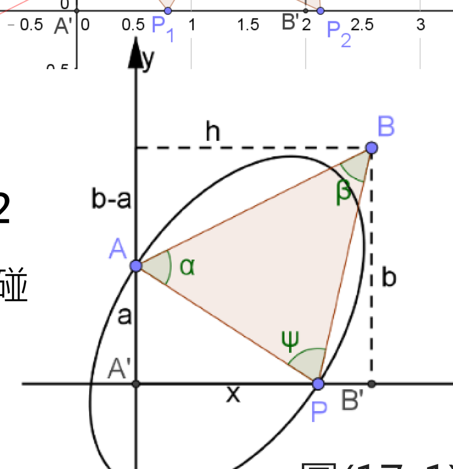
圖(16)

(六) 程式化

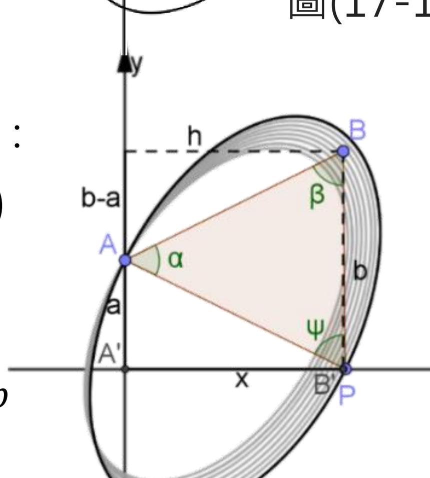
我們將研究出的方程式，做成電腦程式，以供大家使用，詳見附件一。

六、在x軸上移動P點，並試著使尤拉線分別平行於$\overline{AP}$、$\overline{BP}$

當P點在x軸上，在圖(17-1)中，以點A、P畫出的橢圓圓錐曲線(利用**定理2**的長短軸比$\sqrt{3}$：1畫出該橢圓)，當P點由左向右移動到圖(17-2)時，只會碰到B點一次。可知當尤拉線分別平行$\overline{AP}$、$\overline{BP}$時都只會有一組解。



圖(17-1)



圖(17-2)

(一) 試使△ABP之尤拉線與$\overline{AP}$平行

1. 用解析的代數法求出P點座標

我們先求出$\tan\alpha\cdot\tan\psi$之值。令其$=3$，並將$a=1$代入，化簡後可得：

($\tan\alpha$在上文的三-(一)-2已算出) $\tan\psi=\tan(\pi-(\angle APA'+\angle B'PB))$

$\tan\alpha\cdot\tan\psi=\frac{(ah+bx-ax)^2}{(ab-a^2-hx)(hx-x^2-ab)}=\frac{-ah-bx+ax}{hx-x^2-ab}$

令$A=-3h$、$B=b^2+3h^2+b-2$、$C=h-4bh$、$D=3b^2+h^2-3b$

$\Rightarrow Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$

代入一元三次方程式之公式：

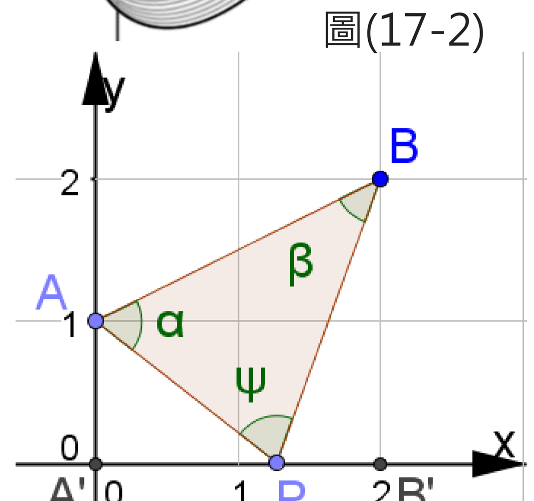
而因其中有多處相似，所以我們將相似之處以幾個未知數替代，以方便之後的計算

令$A'=-\frac{B}{3A}$、$B'=\frac{BC}{6A^2}-\frac{B^3}{27A^3}-\frac{D}{2A}$、$C'=\frac{C}{3A}-\frac{B^2}{9A^2}$

$\Rightarrow x=A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{B'^2+C'^3}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{B'^2+C'^3}}$

得知b、h的值時，將b、h分別代入A、B、C、D，再將A'、B'、C'代入

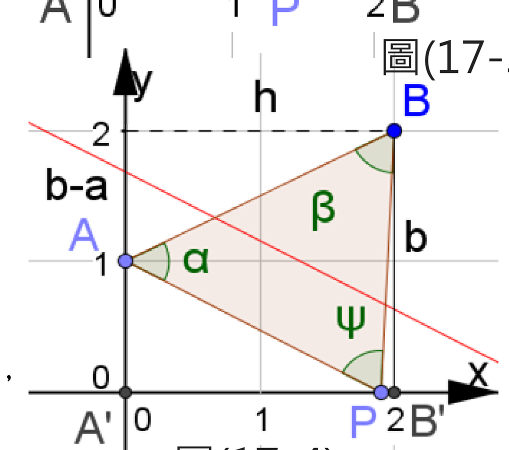
$x=A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{B'^2+C'^3}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{B'^2+C'^3}}$，即為所求之解。



圖(17-3)

舉例驗證：

設各點座標如圖(17-3)，將b、h代入A、B、C、D，再代入前文方程式(詳見作品說明書)，得$x=\frac{8}{9}+\sqrt[3]{\frac{135\sqrt{29}+727}{1458}}+\sqrt[3]{\frac{-135\sqrt{29}+727}{1458}}$，如圖(17-4)，尤拉線與$\overline{AP}$平行，即為所求。



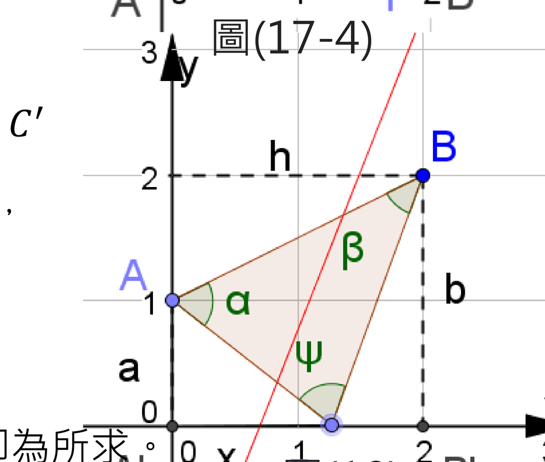
圖(17-4)

(二) 試使△ABP之尤拉線與$\overline{BP}$平行，我們運用前文的方法，可推得A'、B'、C'

如同前文計算方法，可得一個新的一元三次方程式，該實根與上文相同，只是其中的A'、B'、C'代數式不同，舉例驗證如下：

如圖(17-3)，取$a=1$、$b=2$、$h=2$，代入新的A'、B'、C'

可得實根$x=\frac{4}{3}$，即$P(\frac{4}{3},0)$，如圖(18)，得△PAB的尤拉線與$\overline{BP}$平行，即為所求。



圖(18)

結論：

1. A、B同側時，尤拉線平行$\overline{AP}$、$\overline{BP}$都只會有一組解。
2. 該解皆為$x=A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{B'^2+C'^3}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{B'^2+C'^3}}$，只是$A'$、$B'$、$C'$不同而已

七、當P在x軸上，且A、B分別位於x軸的相異兩側時，試使尤拉線$\parallel\overline{AB}$

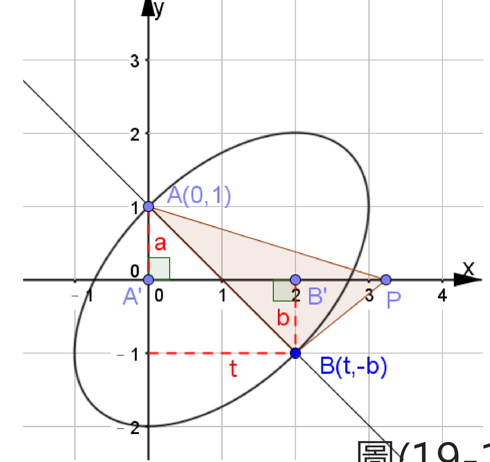
(一) 利用前文橢圓判別存在性方法，得知必有兩解，且取$|m|=x$，如圖(19-1)。

(二) 當$m\in(-\infty,0)$時，如圖$(19-2)$，求$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3$的方程式

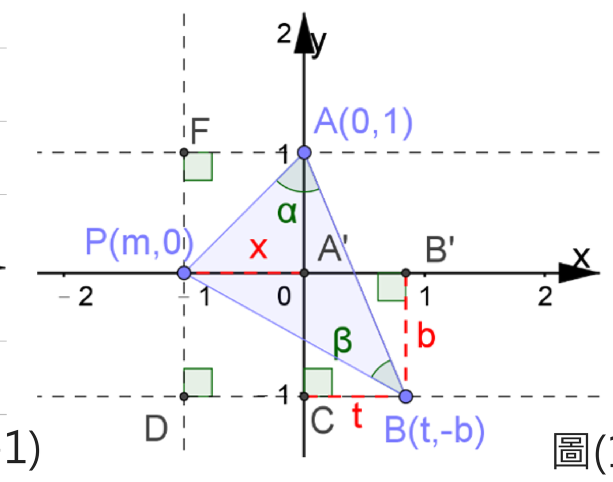
$\tan\alpha_1\cdot\tan\beta_1=\frac{(t+bx+x)^2}{(t^2+tx+b^2+b)(b-tx+1)}$ 得解$x_1=\frac{-3b^2t-2bt-3t^3+t\pm(\sqrt{3b^2}+2\sqrt{3}b+\sqrt{3t^2}+\sqrt{3})\sqrt{(4b+3t^2)}}{2b^2+4b+6t^2+2}$，(取正數解)

(三) 當$m\in(t,\infty)$時，如圖$(19-3)$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3$的方程式

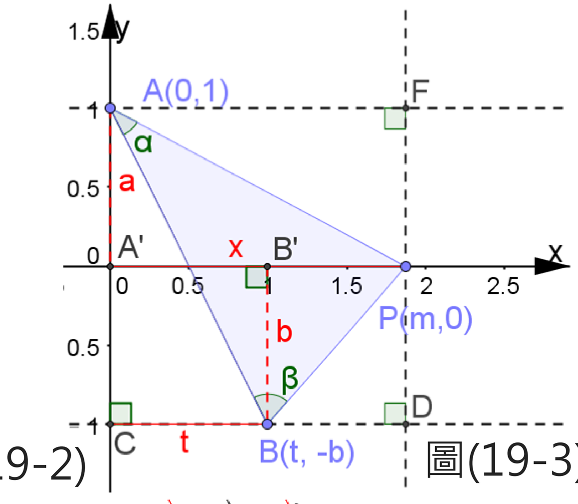
$\tan\alpha_2\cdot\tan\beta_2=-\frac{(bx-t+x)^2}{(tx+b+1)(b^2+t^2-tx+b)}$ 得解$x_2=\frac{3b^2t+2bt+3t^3-t\pm(\sqrt{3b^2}+2\sqrt{3}b+\sqrt{3t^2}+\sqrt{3})\sqrt{4b+3t^2}}{2b^2+4b+6t^2+2}$，(取正數解)



圖(19-1)



圖(19-2)



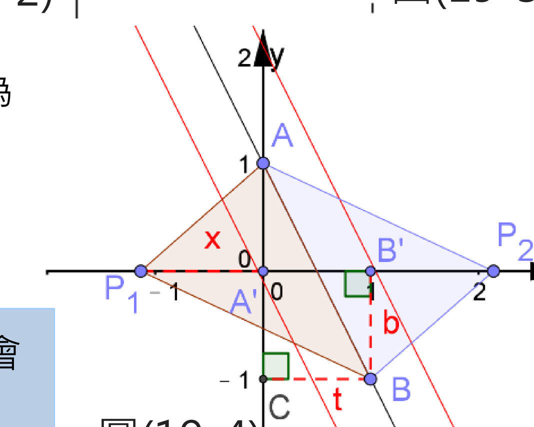
圖(19-3)

舉例驗證：

我們令$b=1$，$t=1$，並且代入上式x_1及x_2。並依條件取得兩解為

$\frac{1}{14}(5\sqrt{21}+7)$，$\frac{1}{14}(-5\sqrt{21}+7)$，尤拉線皆各自與$\overline{AB}$平行，

如圖(19-4)，即為所求。



圖(19-4)

結論：當$A(0,1)$、$B(t,-b)$位在x軸異側時，尤拉線平行$\overline{AB}$的解會有兩個，一個在x軸的負向，另一個在$x=t$的右側。

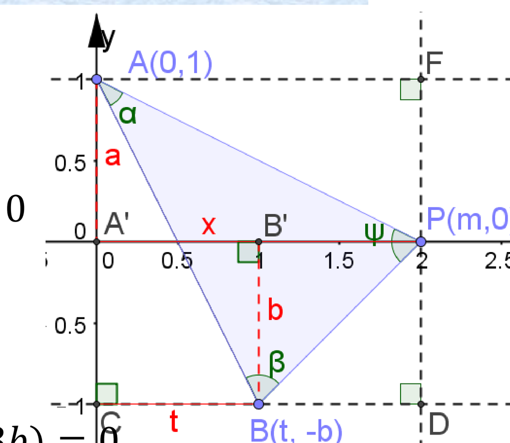
八、當A、B分別位於x軸的相異兩側，而P點在x軸上，使尤拉線$\parallel\overline{AP}$，求P點解

(一) 分析$\tan\psi$之方程式　　　令各點座標如圖(20-1)、(20-2)。

(二) 當$m\in(0,\infty)$時，如圖(20-1)，求$\tan\alpha\cdot\tan\psi=3$的方程式

得$-3tx^3+(b^2-b+3t^2-2)x^2+(4bt+t)x+(3b^2+3b+t^2)=0$

接著利用一元三次方程式的公式解分別算出A'、B'、C'



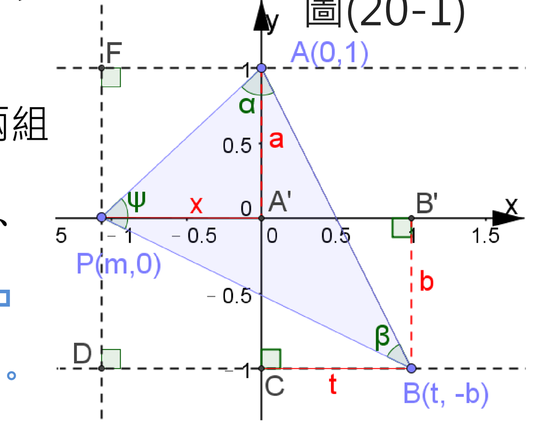
圖(20-1)

(三) 當$m\in(-\infty,0)$時，如圖(20-2)，求$\tan\alpha\cdot\tan\psi=3$的方程式

得$-3tx^3+(-b^2-3t^2+b+2)x^2+(4bt+t)x+(-3b^2-t^2-3b)=0$

接著利用一元三次方程式的公式解分別算出A'、B'、C'

我們發現，當P點在左、右邊時的A'、B'、C'有些相似，已知兩組A'、B'正負相反，C'一樣，則我們令$m\in(-\infty,0)$的三個值為$-A'$、$-B'$、C'。將三條公式解列出，如下：註：令$\Delta=B'^2+C'^3$，其中Δ不受B'的正負值影響。



圖(20-2)

經計算可知：

$x_1=A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}=-\left(-A'+\sqrt[3]{-B'+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-B'-\sqrt{\Delta}}\right)$，即$x_1^+=-x_1^-$。

$x_2=A'+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}=-\left(-A'+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'-\sqrt{\Delta}}\right)$，即$x_2^+=-x_3^-$。

$x_3=A'+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}=-\left(-A'+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-B'-\sqrt{\Delta}}\right)$，即$x_3^+=-x_2^-$。

定理4：在A、B位於異側，尤拉線平行$\overline{AP}$時，會有一至三組解，若我們稱$m\in(0,\infty)$時，P點的x解為x^+，$m\in(-\infty,0)$時的P點的x解為x^-，則$x_1^+=-x_1^-$、$x_2^+=-x_3^-$、$x_3^+=-x_2^-$

這定理的意義是說只要算出在$m\in(0,\infty)$時的三個P點解(這三解有正負)，即為正確的三個解，然而利用$m\in(-\infty,0)$所算出來的三個解，可利用本定理將$-x_1^-$、$-x_2^-$、$-x_3^-$轉換成x_1^+、x_3^+、x_2^+，即為正確的三個解。

(四) 利用卡爾丹諾法在$m\in(0,\infty)$時加速求解(此圖形存在三個實數解)

由於使用公式解$x=A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{B'^2+C'^3}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{B'^2+C'^3}}$就算使用電腦也難以計算，所以我們找來卡爾丹諾幫忙。將原本一長串的式子分割成幾個階段，再層層算出，得到三個正確的解。

舉例：設$A(0,1)$、$B(0.2,-0.2)$、$P(m,0)$，得方程式為：$-\frac{3}{5}x^3-\frac{51}{25}x^2+\frac{9}{25}x+\frac{19}{25}=0$

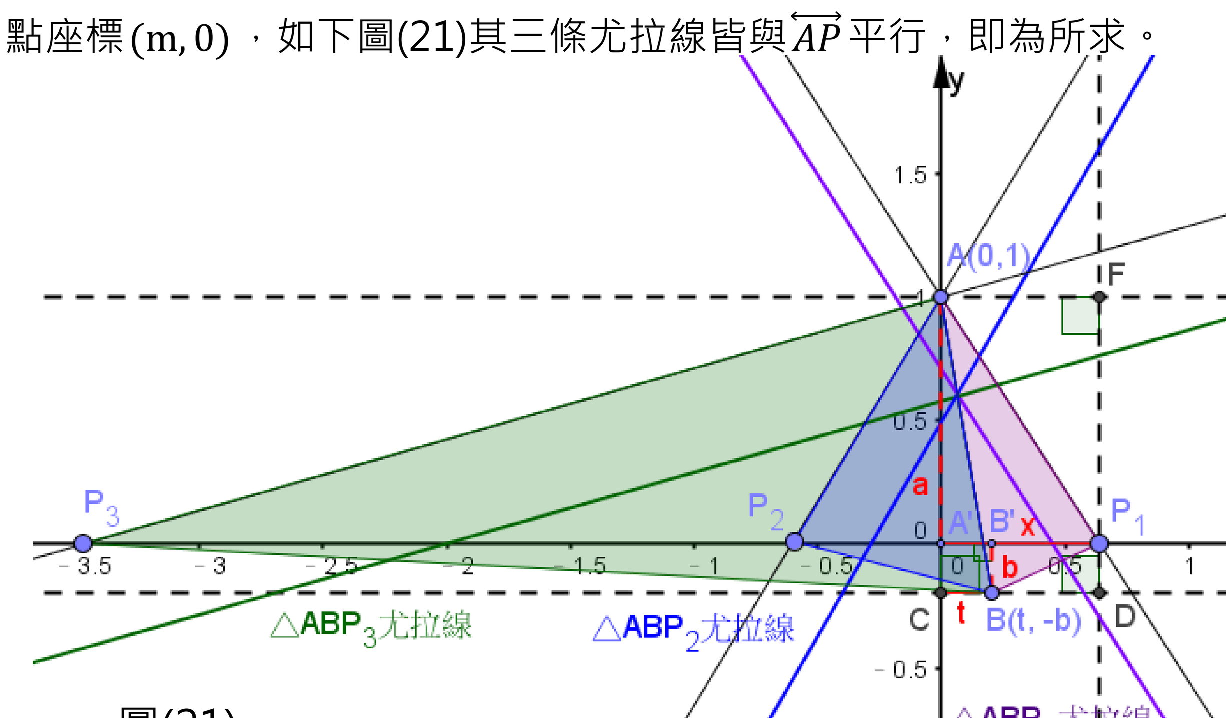
由於上面我們所算出公式解太過繁複，因此我們決定改用**卡爾丹諾法**求解。求解得：

$x_1=t-\frac{51}{45}=u+v-\frac{51}{45}=\frac{1}{15}\sqrt[3]{555\sqrt{71}i-3923}+\frac{1}{15}\sqrt[3]{(-555)\sqrt{71}i-3923}-\frac{51}{45}\fallingdotseq0.64$

$x_2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\frac{1}{15}\sqrt[3]{555\sqrt{71}i-3923}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1}{15}\sqrt[3]{-555\sqrt{71}i-3923}\right)-\frac{51}{45}\fallingdotseq-0.57$

$x_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1}{15}\sqrt[3]{555\sqrt{71}i-3923}\right)+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\frac{1}{15}\sqrt[3]{-555\sqrt{71}i-3923}-\frac{51}{45}\fallingdotseq-3.47$

代入P點座標$(m,0)$，如下圖(21)其三條尤拉線皆與$\overline{AP}$平行，即為所求。



圖(21)

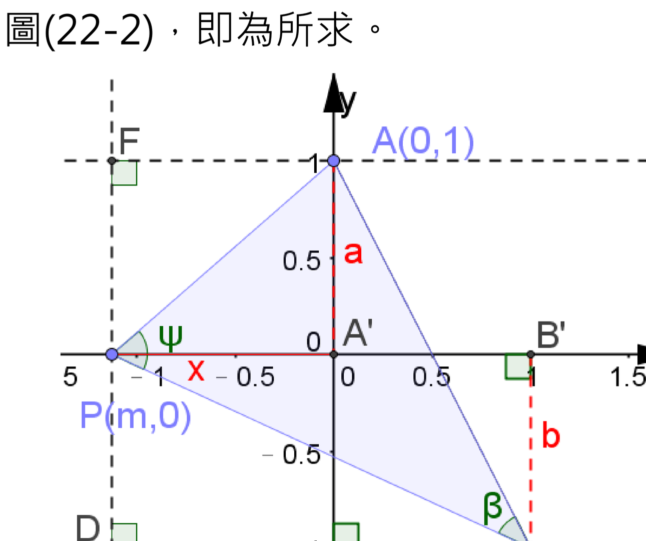
九、當A、B分別位於x軸的上、下，而P點在x軸上，使尤拉線平行$\overline{BP}$，求P點解

推理方法如同上文平行$\overline{AP}$，如有三個解或兩個解一樣使用卡爾丹諾法，詳細過程詳見報告

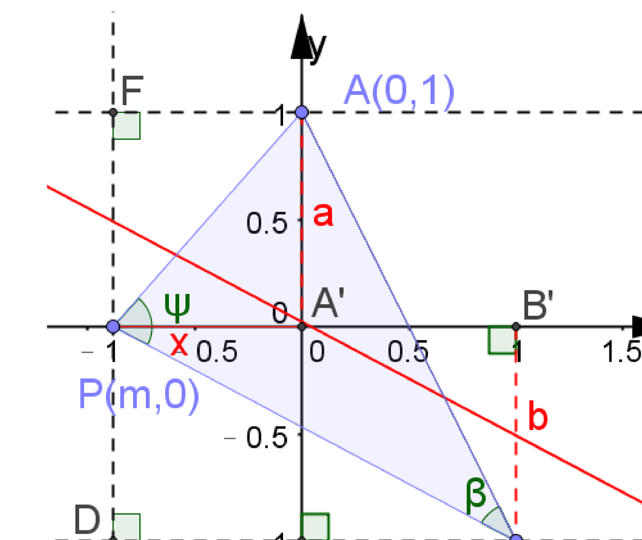
如果僅有一解時，直接代入前文公式即可，舉例如下：(僅有一解)

設各點座標如圖(22-1)，代入$m\in(0,\infty)$時的A'、B'、C'，可得：$A'=\frac{8}{9}$、$B'=-\frac{919}{729}$、$C'=-\frac{46}{81}$，由於$\Delta=\frac{1025}{729}>0$，可知此方程式只有一個實數解，代入公式解$(x_1)$得：

$x=\frac{1}{9}\left(-\sqrt[3]{135\sqrt{41}+919}-\sqrt[3]{-135\sqrt{41}+919}+8\right)=m$，代入$P(m,0)$，其尤拉線與$\overline{BP}$平行，如圖(22-2)，即為所求。



圖(22-1)



圖(22-2)

討論：

尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$時，P點可能有一到三組解 且由於一元三次方程式在係數和常數項皆為實數時，必至少有一實根，所以當 A、B兩點在x軸的相異兩側時，不論是平行哪一邊，一定不會無解。

定理5：綜合上文可知：
當$\Delta>0$，P點恰有一解
當$\Delta=0$，P點僅有兩解
當$\Delta<0$，P點有三組解
$(\Delta=B'^2+C'^3)$

結論(八和九)：

1.P有一到三組解，判別式 $\Delta=B'^2+C'^3$

尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$時判別式形式相同，但B'、C'代數式不同。

2. 當$\Delta>0$，P點恰有一解，解為$A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{B'-\sqrt{\Delta}}$。

當$\Delta=0$，P點有兩組解，使用 **卡爾丹諾法** 求解，較方便。

當$\Delta<0$，P點有三組解，使用 **卡爾丹諾法** 求解，較方便。

十、當P點在圓弧上時，使尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$平行，求P點解

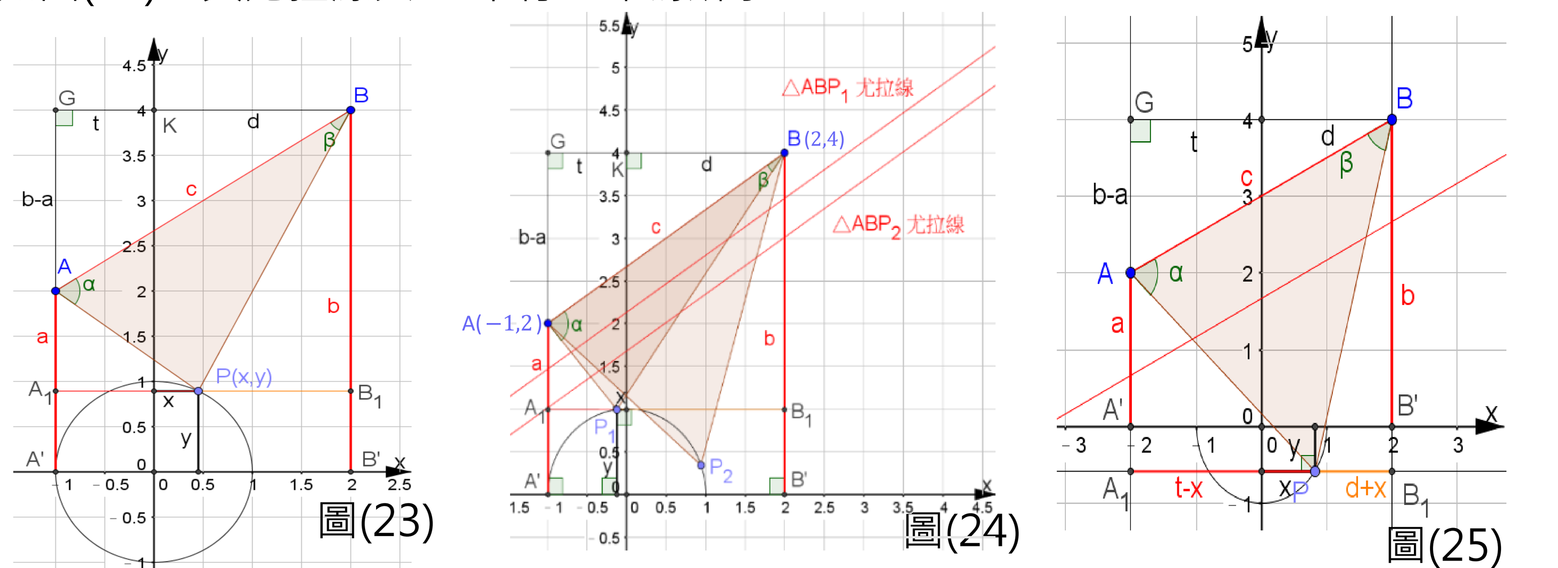
設各點座標如圖(23)，y以$\pm\sqrt{1-x^2}$表示，由於正負皆有可能，我們將其拆成上下半圓進行探討

(一) 當P點位於上半圓時，而A、B兩點位於y軸兩側，試使$\triangle ABP$之尤拉線$\parallel\overleftrightarrow{AB}$。

$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\frac{[(a-y)(t+d)+(t+x)(b-a)][(t+d)(b-y)-(b-a)(d-x)]}{[(a-y)(b-a)-(t+d)(t+x)][(b-a)(b-y)+(d-x)(t+d)]}$，令其值為3，代入數值得$\frac{169x^4-169x^3+\sqrt{-x^2+1}(234x^2-2028x-136)-419x^2+2493x+126}{169x^4-1170x^3+2961x^2-900x-576}=3$

解得$x\approx0.941511$或-0.123619，$y\approx0.336979$或0.992329 **(有兩組解、一組解或無解)**

如圖(24)，其尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$平行，即為所求。



圖(23) 圖(24) 圖(25)

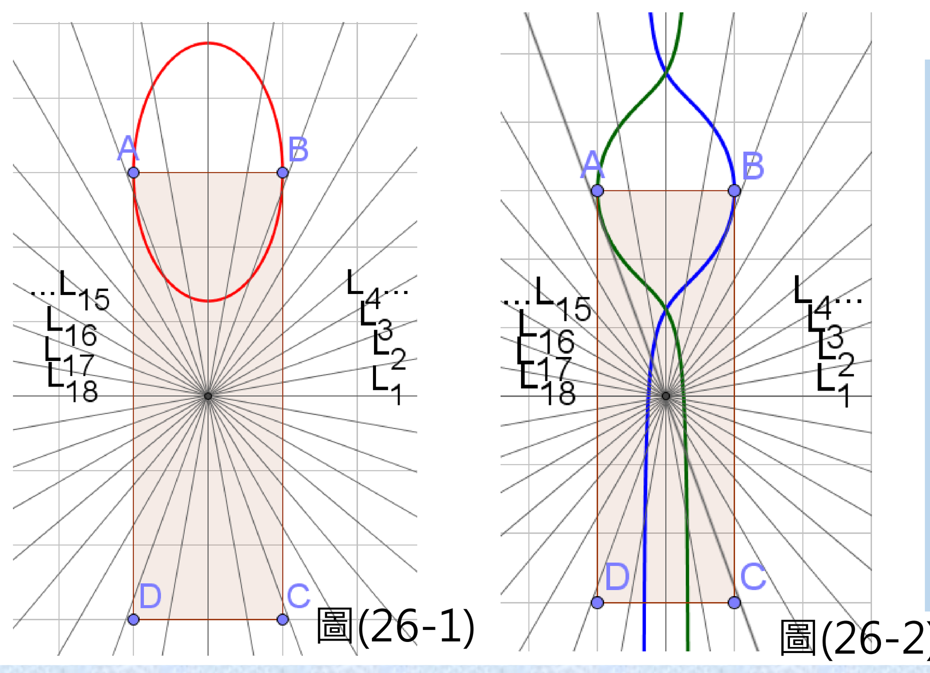
(二) 當P點位在下半圓時，而A、B兩點位於y軸兩側，試使$\triangle ABP$之尤拉線$\parallel\overleftrightarrow{AB}$。

同上文方法得$\frac{25x^4+\sqrt{-x^2+1}(-90x^2+260x+600)-181x^2+588x+744}{25x^4-120x^3+74x^2+408+189}=3$，

$x\approx0.814776$，$y\approx0.579775$，**(有兩組解、一組解或無解)**，如圖(25)，

其尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$平行，即為所求。

十一、針對長方形兩頂點A、B，將通過中心點的直線L依逆時鐘旋轉一周，觀察P點軌跡



圖(26-1) 圖(26-2)

結論：(詳細計算見附件三)
1.直線L旋轉一圈，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$的軌跡圖，如圖(26-1)中的橢圓。
2.直線L旋轉一圈，尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$的軌跡圖，如圖(26-2)中的藍色曲線。
3.直線L旋轉一圈，尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$的軌跡圖，如圖(26-2)中的綠色曲線。

十二、利用前文判別式，繪出其不等式圖形，以方便取得資料畫出指定所要對應的P點解

前文尤拉線平行三角形一邊，有些情況會有多種解，接下來我們把該判別式不等式畫出來，使用者只要在對應區塊內任挑一點並取其資料，即可畫出其所有解。

(一) A、B位於x軸異側，令$A(0,1)$、$B(t,-b)$，使尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$時

$\tan\alpha_2\cdot\tan\psi_1=\frac{(bx-t+x)^2}{(tx+b+1)(x^2-b-tx)}$令上式為3，並展開其算式

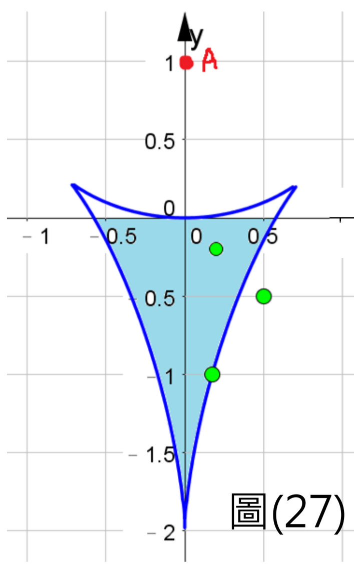
得$-3tx^3+(b^2-b+3t^2-2)x^2+(4bt+t)x+(3b^2+3b+t^2)=0$為一元三次方程式

將判別式Δ化簡並因式分解得$(b^2+2b+t^2+1)^2\frac{(b^4-6b^3+6b^2t^2+12b^2+30bt^2-8b+9t^4-3t^2)}{729t^4}$

觀察上式，Δ的正負關鍵是$b^4-6b^3+6b^2t^2+12b^2+30bt^2-8b+9t^4-3t^2$

令$t=x$，$b=-y$，畫出其圖形如圖(27) **註：$m\in(0,\infty)$和$m\in(-\infty,0)$時的Δ相同**

定理6：A(0,1)、B在異側，使尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$，如圖(27)
若取$B(t,-b)$在x軸下方且於藍色曲線內的時候有三組解；
若取$B(t,-b)$在x軸下方且於藍色曲線外的時候有一組解；
若取$B(t,-b)$在x軸下方且於藍色曲線上的時候有兩組解。



圖(27)

(二)A、B位於x軸異側，令$A(0,1)$、$B(t,-b)$，使尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$時

$\tan\beta_1\cdot\tan\psi_2=\frac{(bx+t+x)^2}{(x^2-b+tx)(t^2+tx+b^2+b)}$

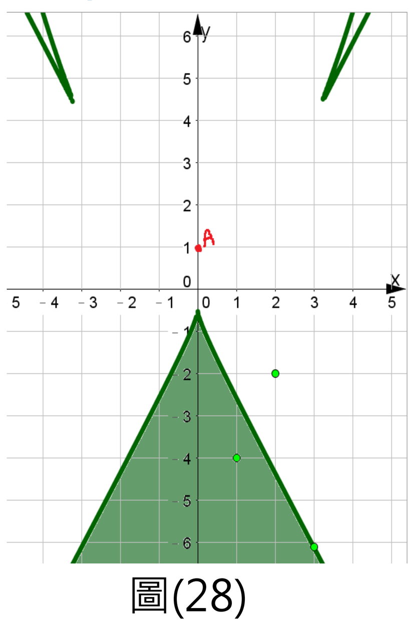
同上文，令上式為3，並展開其算式 化簡因式分解為

$b^2(t^2+b^2+2b+1)^2\cdot\frac{9t^4-3t^2b^2+30t^2b+6t^2-8b^3+12b^2-6b+1}{729t^4}$

觀察上式，Δ的正負關鍵是$9t^4-3t^2b^2+30t^2b+6t^2-8b^3+12b^2-6b+1$

令$t=x$，$b=-y$，畫出其圖形如圖(28) **註：$m\in(0,\infty)$和$m\in(-\infty,0)$時的Δ相同**

定理7：A(0,1)、B在異側，使尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$，如圖(28)
若取$B(t,-b)$在x軸下方且於綠色曲線內的時候有三組解；
若取$B(t,-b)$在x軸下方且於綠色曲線外的時候有一組解；
若取$B(t,-b)$在x軸下方且於綠色曲線上的時候有兩組解。

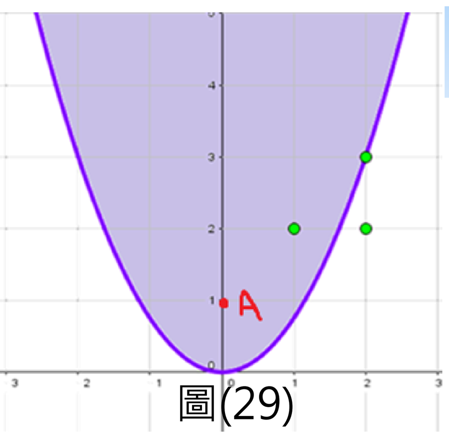


圖(28)

(三)A、B位於x軸同側，$A(0,1)$、$B(t,-b)$，

使尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$時利用微分所導出的判別式「N」：$\frac{-4ab}{t^2}$，代入$a=1$後，可得$N=\frac{-4b}{t^2}$，令$t=x$，$b=-y$，畫出其圖形如圖(29) **註：此時的t為之前的h**

定理8：A(0,1)、B在同側，使尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$，如圖(29)
若取$B(t,-b)$在x軸上方且於紫色曲線內的時候有無解；
若取$B(t,-b)$在x軸上方且於紫色曲線外的時候有兩組解；
若取$B(t,-b)$在x軸上方且於紫色曲線上的時候有一組解。



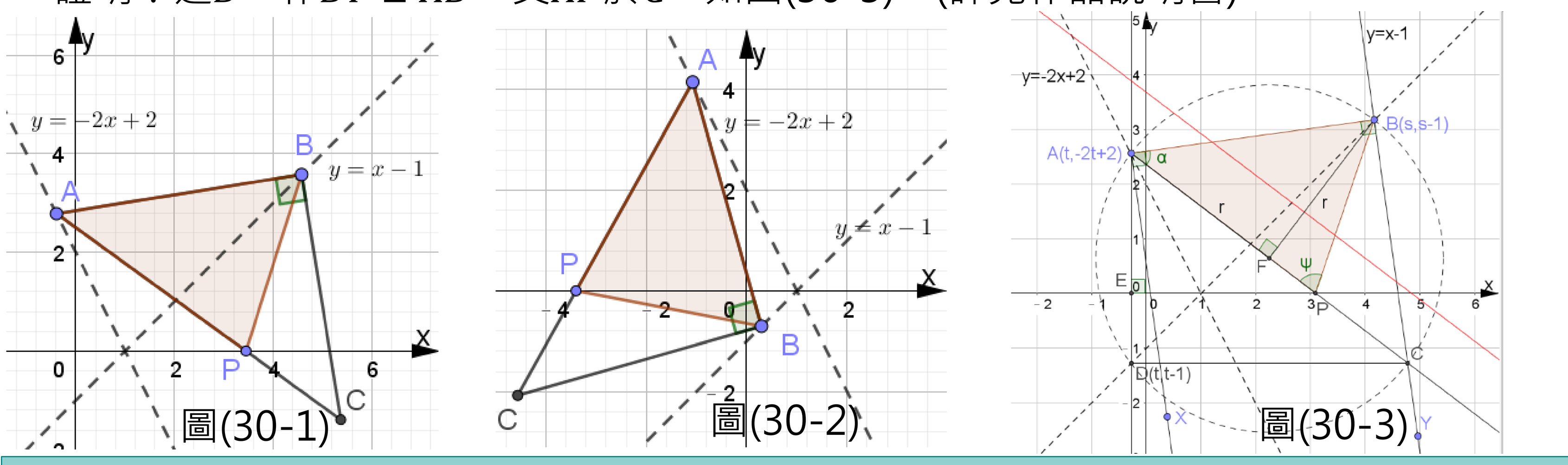
圖(29)

十三、利用特殊已設條件協助尺規作圖，求作能平行各邊的P點解

綜合前文整篇報告的分析，若有人在空白坐標平面上想只用圓規和直尺在x軸上找出P點，那要如何安排A點和B點呢？設計及用法分述如下：

定理9：用尺規作圖，依步驟在x軸上皆能找出一點P，使$\triangle$ PAB的尤拉線$\parallel\overleftrightarrow{AP}$，同異側皆可
步驟一、在 $y=-2x+2$ 任取一點A，在 $y=x-1$ 任取一點B，連$\overline{AB}$
步驟二、過A，作$\overleftrightarrow{AX}\perp\overline{AB}$，作$\angle BAX$的分角線$\overrightarrow{AP}$交$x$軸於$P$，連$\overline{PB}$，則$\triangle PAB$的尤拉線必平行$\overleftrightarrow{AP}$，即為所求。

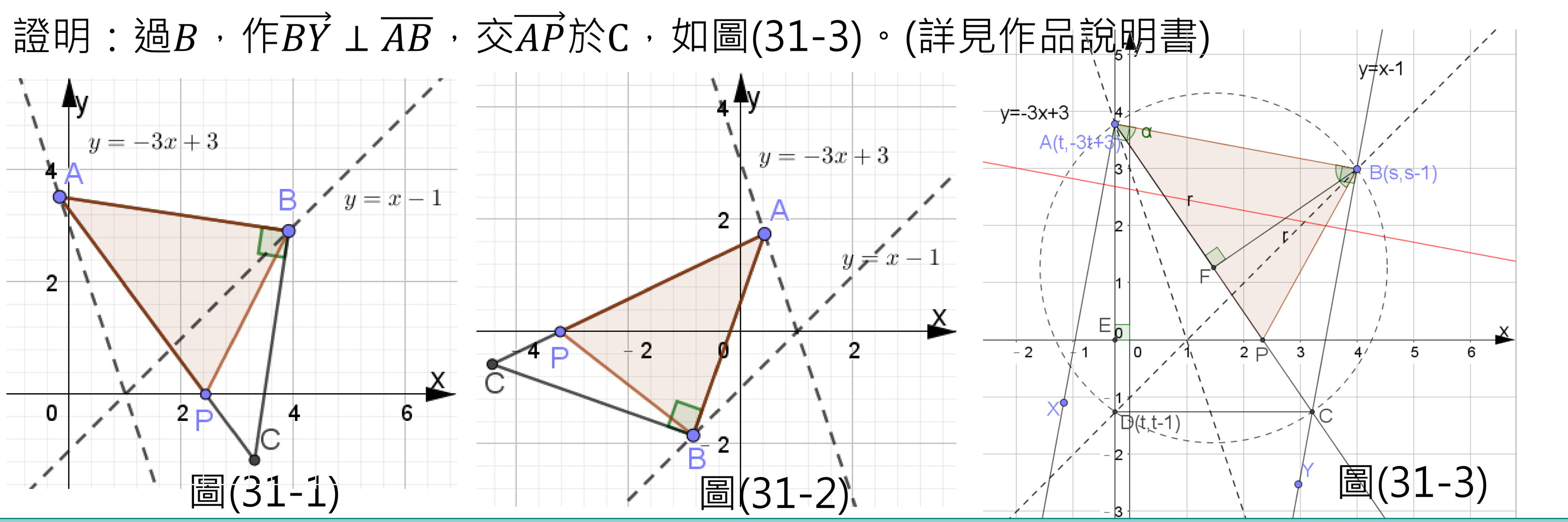
證明：過B，作$\overrightarrow{BY}\perp\overline{AB}$，交$\overrightarrow{AP}$於C，如圖(30-3)。(詳見作品說明書)



圖(30-1) 圖(30-2) 圖(30-3)

定理10：用尺規作圖，依步驟在x軸上找出一點P，使$\triangle$ PAB的尤拉線$\parallel\overleftrightarrow{AB}$，同異側皆可
步驟一、在 $y=-3x+3$ 任取一點A，在 $y=x-1$ 任取一點B，連$\overline{AB}$
步驟二、過A，作$\overleftrightarrow{AX}\perp\overline{AB}$，作$\angle BAX$的分角線$\overrightarrow{AP}$交$x$軸於$P$，連$\overline{PB}$，則$\triangle PAB$的尤拉線必平行$\overleftrightarrow{AB}$，即為所求。

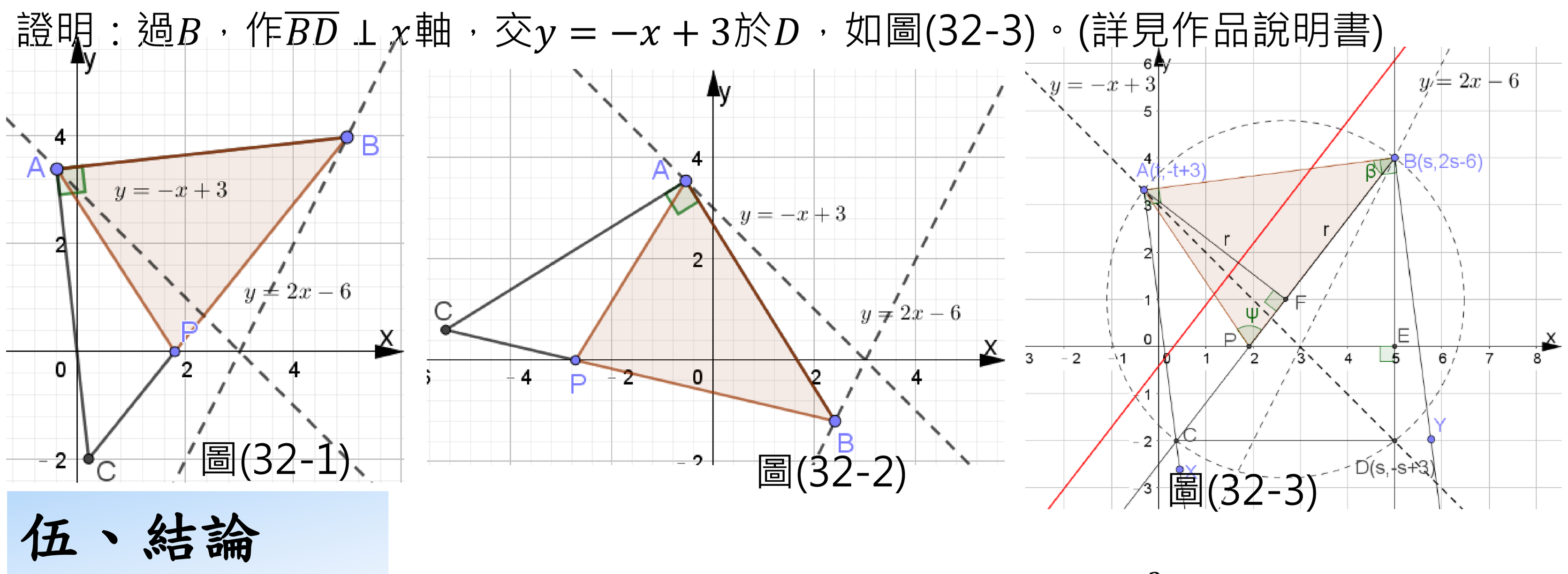
證明：過B，作$\overrightarrow{BY}\perp\overline{AB}$，交$\overrightarrow{AP}$於C，如圖(31-3)。(詳見作品說明書)



圖(31-1) 圖(31-2) 圖(31-3)

定理11：用尺規作圖，依步驟在x軸上找出一點P，使$\triangle$ PAB的尤拉線$\parallel\overleftrightarrow{BP}$，同異側皆可
步驟一、在 $y=-x+3$ 任取一點A，在 $y=2x-6$ 任取一點B，連$\overline{AB}$
步驟二、過B，作$\overrightarrow{BY}\perp\overline{BA}$，作$\angle ABY$的分角線交$x$軸於$P$，連$\overline{AP}$，則$P$點即為所求。

證明：過B，作$\overline{BD}\perp x$軸，交$y=-x+3$於D，如圖(32-3)。(詳見作品說明書)



圖(32-1) 圖(32-2) 圖(32-3)

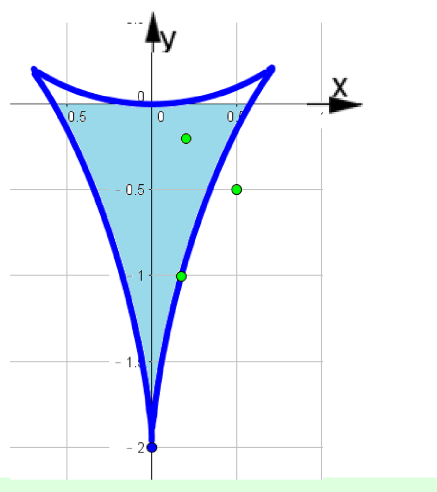
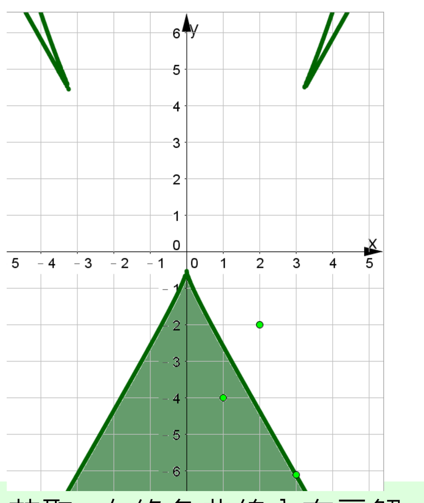
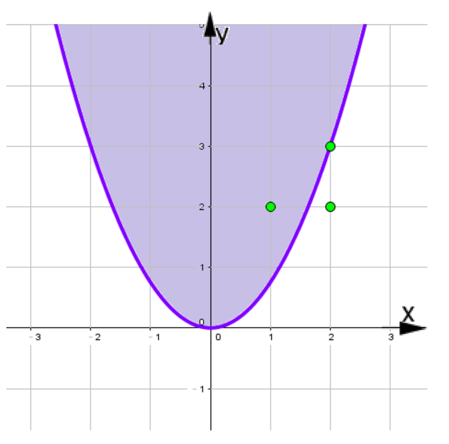
伍、結論

一、若A、B兩相異點在L同側時，則函數K$=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$，此曲線在直線$M_1$、$M_2$之間必為上凹曲線。

二、相異點A、B 在同異側時，P點解的數量及解的公式比較。

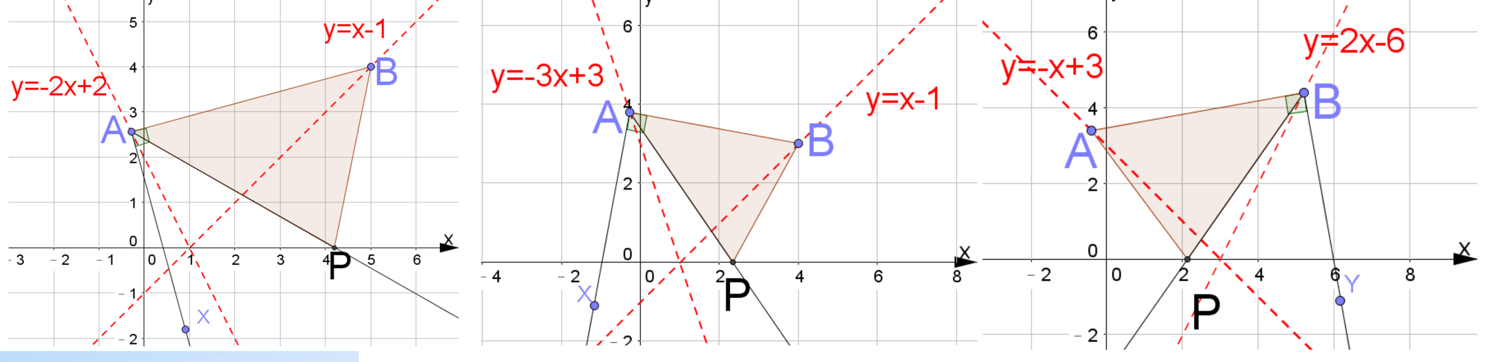
	尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$	尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$	尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$
同側	給定a、b、h，可計算N值$(\frac{4ab}{h^2})$。 當$N<3$時，有兩解，為$P(\frac{3h^3-a^2h+3b^2h-2abh\pm\sqrt{3h^2-4ab}(\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2+\sqrt{3}h^2-2\sqrt{3}ab)}{2a^2+2b^2+6h^2-4ab},0)$ 當$N=3$時，有一解，$P(\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh},0)$ 當$N>3$時，無解	P必定是恰有一組解 解為：$P(A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+$	P必定是恰有一組解 解為：$P(A'+\sqrt[3]{B'+\sqrt{\Delta}}+$
		(左右的A'、B'、C'代數式不同)	
異側	P必定是兩組解，其解為： $P(\frac{3b^2t+2bt+3t^3-t\pm(\sqrt{3}b^2+2\sqrt{3}b+\sqrt{3}t^2+\sqrt{3})\sqrt{4b+3t^2}}{2b^2+4b+6t^2+2},0)$	P有一至三組解，Δ為判別式 當$\Delta>0$，P點有一解 當$\Delta=0$，P點有兩解 當$\Delta<0$，P點有三解	P有一至三組解，Δ為判別式 當$\Delta>0$，P點有一解 當$\Delta=0$，P點有兩解當 $\Delta<0$，P點有三解

三、在座標平面上$A(0,1)$、$B(t,-b)$，$t\neq0$，依照在尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$(異側)、$\overleftrightarrow{BP}$(異側)、$\overleftrightarrow{AB}$(同側)的解的數量之不同(另外三種平行的解的數量是固定的)，將各自的判別式不等式區塊圖示如下：

	A、B且尤拉線異側平行$\overleftrightarrow{AP}$	A、B且尤拉線異側平行$\overleftrightarrow{BP}$	A、B且尤拉線同側平行$\overleftrightarrow{AB}$
判別式形成的圖形			
舉例	若取B在藍色曲線內有三解 若取B在藍色曲線上有兩解 若取B在藍色曲線外有一解	若取B在綠色曲線內有三解 若取B在綠色曲線上有兩解 若取B在綠色曲線外有一解	若取B在紫色曲線內無解 若取B在紫色曲線上有一解 若取B在紫色曲線外有兩解

四、在座標平面上，依照尤拉線$\parallel\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BP}$的要求，分別預畫好兩條特定直線圖示如下，讀者只要在兩條虛線特定直線上依序任取一點A、B，依照內文定理9、10、11即可找到所要P點，同、異側皆可

A、B同異側且尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$	A、B同異側且尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$	A、B同異側且尤拉線平行$\overleftrightarrow{BP}$



陸、未來展望

未來我們要將研究拓展到立體空間和球面上，進行更深入的研究。

柒、參考資料及其他

一、國中數學第三、四、五冊，高中數學第一、二、三、四冊。

二、楊精松、莊紹容(2017)。微積分(13版)。臺北市：臺灣東華。

三、李昱頡、賀崇恩、劉垣奴(2016)。驚嘆尤拉線群遇到60°與120°。中華民國第56屆科學展覽會。