中華民國第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030420

當摺紙公理與莫利三角形相會

學校名稱：金門縣立烈嶼國民中學

作者：	指導老師：
國三 翁子棋	陳聖別
國三 方蔚元	沈世寅

關鍵詞：摺紙公理、三等分線、莫利三角形

摘要

Huzita-Hatori 公理和 Morley 三角形都如同黑暗中的一盞明燈，讓我們很想一見其廬山真面目！更想了解他們相會後會激盪出甚麼火花？

我們利用描圖紙摺紙、GGB 作圖，再配合推理論證，終於知道三條 Huzita 公理 6 分別三等分的角、度數、位置、以及與始邊的夾角度數；另外，更奇妙的是，我們發現兩個特別的三角形：第一，任意角的三條 Huzita 公理 6 的摺痕，會圍成三角形，而且此三角形必是完美的正三角形。第二，任意三角形各角的三條 Huzita 公理 6 的摺痕，各會圍成三角形，且此三個三角形彼此相似，他們和原三角形之間還有角度成等差和等腰的關係。

本研究實在見證隨意到完美的奇蹟，驚奇之處俯拾即是！

壹、研究動機

「摺摺稱奇」這本書討論了許多摺紙的東西，也談到跟我們八年級下學期學到的尺規作圖的理念。我們找到了一個叫 Huzita-Hatori 的公理，發現公理 1-5 和 7 是可以由尺規作圖完成，但公理 6 是無法用尺規作圖做出來的，以至於摺紙能完成三等分任意角的作圖。我們想要研究一下，是否能從其中發現新事物？沒想到遇到了莫利三角形，之後想想還有沒有更多可以發掘的想法或特性？我們希望把 Huzita 公理 6 的摺痕研究的更透徹，也想知道更多不同角度處理三等分摺紙作圖時，會有甚麼不同的地方？

貳、研究目的

一、在使用摺紙公理作出三等分任意角的過程中，探討在角度不同時，三條 Huzita 公理 6 所產生之摺痕的位置；分別三等分的角、度數、位置；以及摺痕與始邊的夾角度數，並其他相關特性。

二、任意角做出三條 Huzita 公理 6 摺痕所圍成的三角形，有何特性？

三、三角形三個角分別作出三條 Huzita 公理 6 摺痕，圍成的三角形，有何特性？

參、研究設備及器材

一、筆、紙張、描圖紙、直尺、幾何軟體 GeoGebra

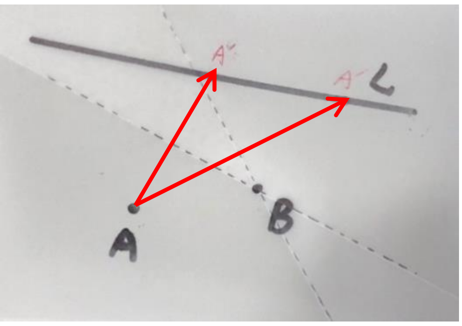
肆、研究過程或方法

一、文獻探討與名詞介紹：

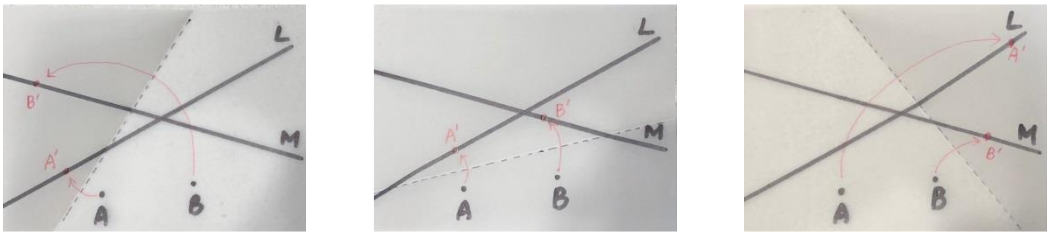
(一) 介紹 Huzita 公理 6 的特殊性：

義大利人 Justin 和日本人 Huzita 分別在 1989 年和 1991 年發現六個摺紙公理，加上 2001 年 Hatori、Robert Lang 發現第七個公理，便出現了近年蠻風行的摺紙數學的一支－Huzita-Hatori 摺紙公理（也有人稱 Justin-Huzita 摺紙公理）。

在實際摺紙的過程中，公理 1～4 和 7 都在給定條件的情況下，只有一種摺法，而公理 5 最多會有 2 種摺法，如下圖：



最特別的是 Huzita 公理 6，它可能會產生三種摺法，如下圖所示：



正因為 Huzita 公理 6 的特殊性，讓摺紙能解決尺規作圖無法解決的「三等分任意角」問題，這也是摺紙作圖之所以迷人的地方！（參洪萬生，2011、顧森，2012）

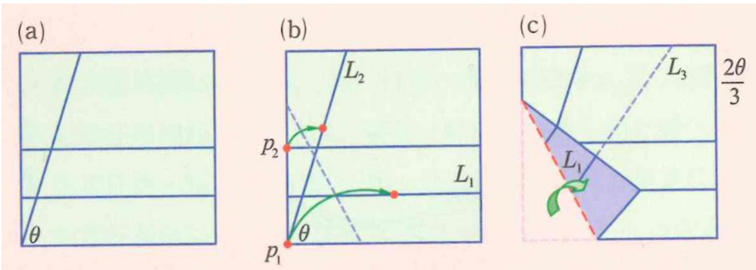
(二) Morley 三角形：任意三角形△ABC，作出三個角的三等分角線，會產生三個交點，這三個交點會圍成一個正三角形，稱此三角形為莫利三角形。它在 1899 年被挖掘出來，無法用尺規作圖作出的三等分角，居然在任意三角形中產生正三角形，確實令人眼睛為之一亮（參維基百科）。

二、探討利用 Huzita 公理解決三等分角的問題：

(一) 我們看了他人用摺紙解決三等分任意角的問題，發現下列三點，讓我們想多探討此問題：

1. 無論是 Hisashi Abe 或是 Jacques Justin 的做法，發表的年份都在 1980 年左右（湯瑪斯．赫爾，2018；洪萬生，2011），雖然摺紙過程都有用到兩點分別摺到兩條指定直線上（Huzita 公理 6），但都有摺紙動作交待不清，或是不符合 Huzita-Hatori 公理的動作。
2. 在 Hisashi Abe 的做法中，只說明要做出兩條平行線，並未說明如何摺。在 Youtube 頻道「linjunJR」的「用摺紙解決歐幾里德的作圖難題－How to Trisect an Angle with Origami」影片中，也使用紙張邊緣摺疊（如下圖所示），不符合摺紙公理的基本操作。（影片取自：https://www.youtube.com/watch?v=AIqcVYF8btg）

3. 在 Hisashi Abe 的做法中，使用摺過再摺如下圖(c)，也就是每摺完一次並未將紙張打開再摺疊。並不符合摺紙公理每次摺疊完，都要把紙張重新攤開的規則（Huzita, 1989；顧森，2012）。



圖片取自洪萬生（2011）《摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學》p.178

(二) 關於摺出任意角的三等分角的過程＆相關名詞與符號定義：

我們嘗試將三等分任意角的所有摺紙步驟，修正成使用只七個 Huzita-Hatori 摺紙公理，我們連同本文會用到的名詞與符號說明如下：

1. Step①：Huzita 公理 1－將角的一邊延長

→→此角的頂點我們設為 A，稱此角為 $\angle A$。

→→此邊我們稱作**<u>始邊</u>**，符號為$\overrightarrow{AX}$；另一邊為**<u>終邊</u>**，符號為$\overrightarrow{AY}$。

→→始邊的延長線，符號為$\overrightarrow{AW}$；終邊的延長線，符號為$\overrightarrow{AZ}$。

2. Step②：Huzita 公理 4－通過角的頂點作垂線→→此垂直線符號為 L_v。
3. Step③：Huzita 公理 4－對上一條垂線再作垂線

   →→此線與始邊平行，稱為 **<u>1st.平行線</u>**，符號為 L_{p1}→→L_v 與 L_{p1} 的交點為 C 點。
4. Step④：Huzita 公理 3－兩線重合，作平行線

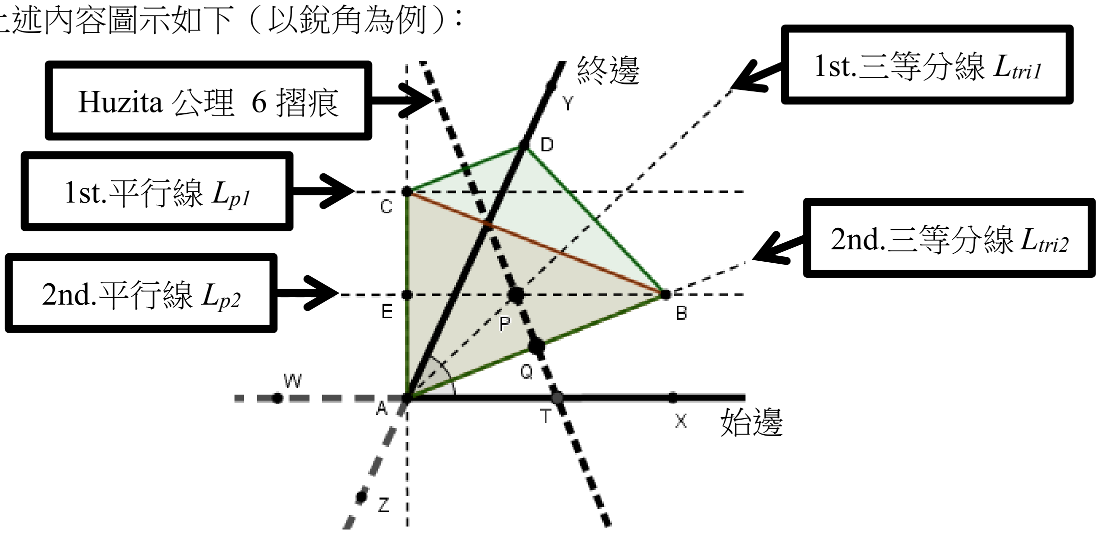
   →→此線也與始邊平行，稱為 **<u>2nd.平行線</u>**，符號為 L_{p2}。
5. Step⑤：Huzita 公理 6－關鍵步驟

   →→會摺出三條 Huzita 公理 6 的摺痕，我們分別稱為 **<u>1st.Huzita 公理 6 摺痕</u>**、**<u>2nd.Huzita 公理 6 摺痕</u>**、**<u>3rd.Huzita 公理 6 摺痕</u>**，符號分別為 L_{1stH}、L_{2ndH}、L_{3rdH}。
6. Step⑥：Huzit 公理 1－作出 **<u>1st.三等分線</u>**：Step④和 Step⑤的摺痕會產生一個交點，將此交點和角的頂點連起來就是 Step⑥

   →→ L_{p2} 和 Huzita 公理 6 的摺痕產生的交點為 P 點→→**<u>1st.三等分線</u>**符號為 L_{tri1}。
7. Step⑦：Huzita 公理 3－作角平分線，作出 **<u>2nd.三等分線</u>**

   →→**<u>2nd.三等分線</u>**符號為 L_{tri2}。

   →→ L_{tri2} 和 Huzita 公理 6 的摺痕產生的交點為 Q 點。
8. 另外，在我們推論的過程中，須找出 A 和 C 點以 Huzita 公理 6 的摺痕為對稱軸的對稱點，分別為 B 和 D 點。在操作上，過 A 點作 Huzita 公理 6 摺痕的垂線，與 2nd.平行線的交點即為 B 點；過 C 點作 Huzita 公理 6 摺痕的垂線，與終邊（$\overrightarrow{AY}$）的交點即為 D 點。
9. 上述內容圖示如下（以銳角為例）：



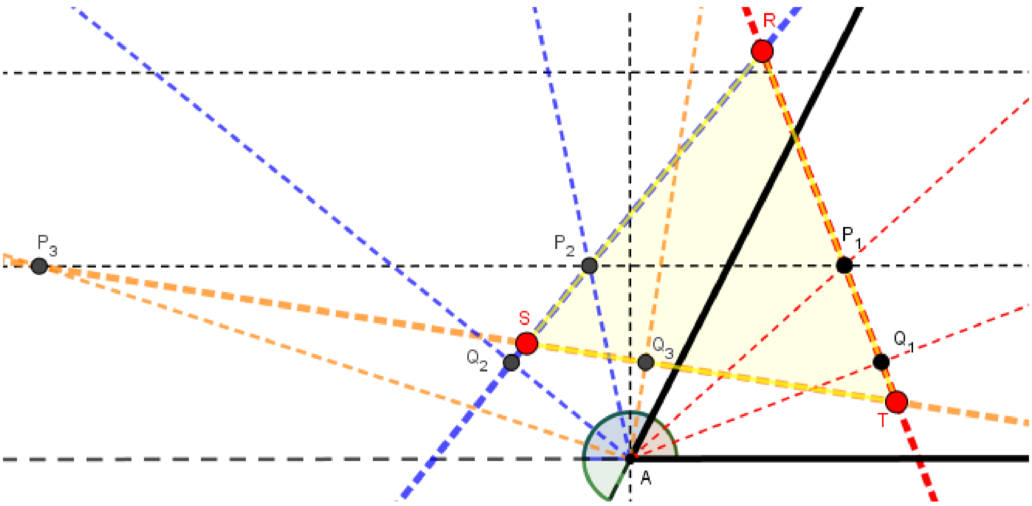
10. 補充：我們查詢文獻，在國內目前有黃啟皓（2019）的論文有完全使用七個摺紙公理完成三等分角的問題，但他 Step⑥、Step⑦分別用了公理 4 和公理 1，相比之下，本研究的作法更為直觀。另外，楊雅淳（2019）引用 Abe 的做法，自 Step④開始與本研究相同，但起始的步驟交代不清。

(三) 關於三條 Huzita 公理 6 摺痕的定義：

（如上頁圖，C 點摺到終邊，A 點摺到 2*nd*.平行線 L_{p2}）

1. 1*st*.Huzita 公理 6 摺痕：利用頂點 A 和終邊，同時分別對到 2*nd*.平行線和 C 點。
2. 2*nd*.Huzita 公理 6 摺痕：利用 2*nd*.平行線與 C 點，同時分別對到頂點 A 和終邊。（如角度超過 180 度，則需對到終邊的延長線）
3. 3*rd*.Huzita 公理 6 摺痕：利用頂點 A 和終邊的延長線，同時分別對到 2nd.平行線和 C 點。

(四) 每一條 Huzita 公理 6 的摺痕都有相對應的兩條三等分線（以銳角為例，如下圖）：

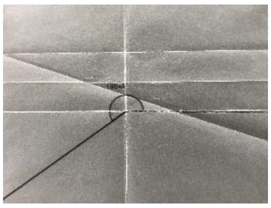
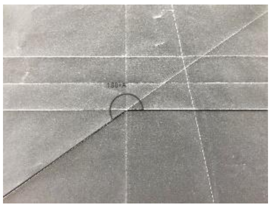
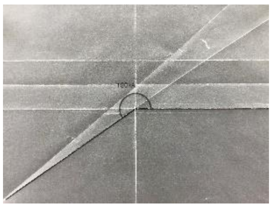
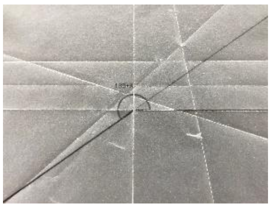


1. 1st.Huzita 公理 6 摺痕為 $\overleftrightarrow{RT}$ → 1st.三等分線為$\overrightarrow{AP_1}$、2nd.三等分線$\overrightarrow{AQ_1}$（紅色）
2. 2nd.Huzita 公理 6 摺痕為 $\overleftrightarrow{RS}$ → 1st.三等分線為$\overrightarrow{AP_2}$、2nd.三等分線$\overrightarrow{AQ_2}$（藍色）
3. 3rd.Huzita 公理 6 摺痕為 $\overleftrightarrow{ST}$ → 1st.三等分線為$\overrightarrow{AP_3}$、2nd.三等分線$\overrightarrow{AQ_3}$（橙色）

三、探討角的度數不同時，三條 Huzita 公理 6 之摺痕的位置，以及相對應之三等分線三等分的角為何：

(一) 做法與過程：

1. 因為 Huzita 公理 6 的摺痕無法用 GGB 直接做出來，所以我們將角印在描圖紙上，直接依照步驟，先摺出 Huzita 公理 6 的摺痕。
2. 在文獻中（洪萬生，2011；顧森，2012；湯瑪斯・赫爾，2018），我們發現用摺紙處理三等分任意角的問題，只處理銳角和鈍角情況，並沒有其他角度時的摺法和討論。所以我們討論了 A、90-A、90+A、180-A、180+A、270-A、270+A、360-A，共八個角（360+A 就廣義角而言，已經與 A 相同，所以我們角度只取到 360-A）。
3. 為讓觀察更容易，我們每一個角度都摺四張，分別是 1st.Huzita 公理 6 摺痕、2nd.Huzita 公理 6 摺痕、3rd.Huzita 公理 6 摺痕各一張、以及三條摺在同一張。舉 180+A 為例如下表：

	1st.Huzita 公理 6 摺痕	2nd.Huzita 公理 6 摺痕	3rd.Huzita 公理 6 摺痕	三條摺在同一張
180+A				

4. 我們共摺了 32 張描圖紙，我們使用的∠A 度數為 35 度，故八種角度分別為 A=35 度、90-A=55 度、90+A=125 度、180-A=145 度、180+A=215 度、270-A=235 度、270+A=305 度、360-A=325 度。

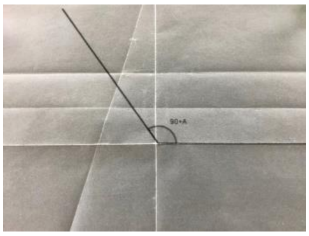
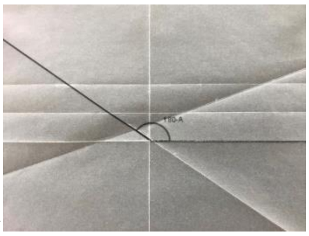
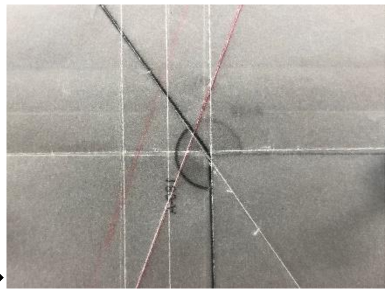
(二) 觀察 32 張描圖紙發現的內容簡要說明如下：

1. 我們將 8 張三條摺在同一張的描圖紙合在一起看，發現每個角的三條 Huzita 公理 6 摺痕所圍成的三角形應該<u>**都相似**</u>，而且分成兩組：A、90-A、180+A、270-A→右偏，90+A、180-A、270+A、360-A→左偏。
2. 我們發現當兩角湊成 90 度、180 度、270 度、或 360 度時，都可以找到相對應的 Huzita 公理 6 摺痕，使得此兩條摺痕互相平行。操作上需將其中一角翻面，並將兩角的始邊和終邊相接而湊成指定角度。舉一例如下：

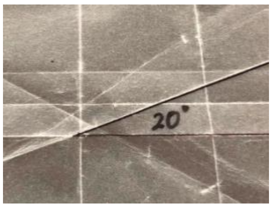
若兩角的和為 270 度，一角之 2nd.Huzita 公理 6 摺痕會與另一角之 3rd.Huzita 公理 6 摺痕的斜率相同（互相平行）；操作上需將其中一角翻面，並將兩角的始邊和終邊相接而湊成 270 度。

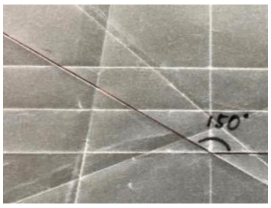
例如：

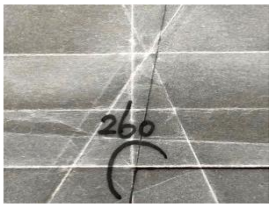
90+A 的 2nd.Huzita 公理 6 摺痕會與 180-A 的 3rd.Huzita 公理 6 摺痕的斜率相同

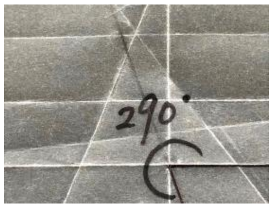

←→

→→


3. 我們對於三條 Huzita 公理 6 摺痕所圍成的三角形應該<u>**都相似**</u>很好奇，心想是否調整∠A 的度數會有不同的結果，所以在嘗試了∠A=20、70、110、150、260、290、310，共 7 種角度，發現竟然全部看起來都相似！而且第一、三象限角<u>右偏</u>，第二、四象限角<u>左偏</u>，舉四例如下：









<u>右偏</u>　<u>左偏</u>　<u>右偏</u>　<u>左偏</u>

4. 我們也發現，1st.Huzita 公理 6 摺痕所產生的三等分線，經觀察應都是三等分∠A（原角），但 2nd.Huzita 公理 6 摺痕和 3rd.Huzita 公理 6 摺痕，有些角掌握不太到三等分哪一個角，就算用量角器嘗試，仍不確定。

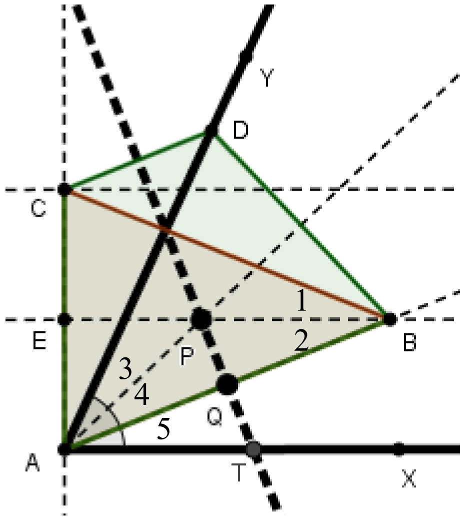
以下，我們將繼續利用較嚴謹的數學推論，來驗證我們的觀察是否正確，也希望可以找出三條 Huzita 公理 6 摺痕所對應的三等分角。推論過程，由於圖形、摺痕的準確度，特別是交點的位置，會影響我們的推論，所以我們利用 GGB 作圖，輸出，並在其上摺出軟體作不出的 Huzita6 摺痕，接著利用紙張進行推論。

(三) 摺紙三等分任意角的證明方法：

1. 證明的方法不只一種，本研究的證法（取自湯瑪斯・赫爾，2018）利用摺紙的對稱性進行推論。我們進一步將過程歸納為三個重要的部分：

(1) Part1：利用<u>等腰三角形</u>的對稱性－頂角被對稱軸平分

作法：找出等腰三角形△ABC，$\overline{AC}$為底邊，頂點為 B，2nd.平行線為對稱軸且平分∠B→∠1=∠2



(2) Part2：利用<u>梯形</u>的對稱性－兩底角度數相同

作法：找出梯形 ABDC（或 ABCD），Huzita 公理 6 的摺痕為對稱軸，而得 Part1 的兩角以 A 為頂點的對稱角。→∠1=∠3、∠2=∠4

(3) Part3：利用<u>平行線的截角性質</u>－內錯角相等

作法：始邊與 2nd.平行線互相平行，2nd.三等分線為截線，可找出第三個等角。→∠2=∠5

(4) 最後即可得∠3=∠4=∠5，三等分∠A。

(5) 另外，根據摺紙的對稱性，∠PQA=∠PQB=90 度，可得下面性質：

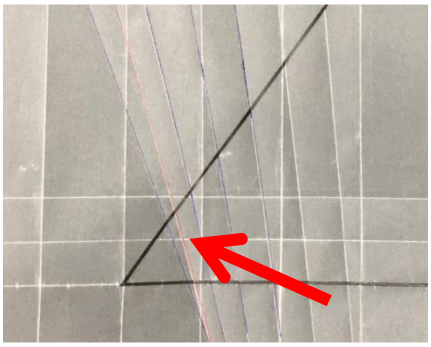
【性質①】Huzita 公理 6 的摺痕會和 2st 三等分線互相垂直。

(6) 最後，在△AQT 中，利用∠AQT=90 度，∠QAT=$\frac{A}{3}$，可得 Huzita 公理 6 的摺痕與始邊的夾角度數。

(四) 上述摺法與證明的細部討論：

1. 對始邊作垂線時，垂足位置對作圖的影響（垂足的位置是否一定要通過角的頂點）

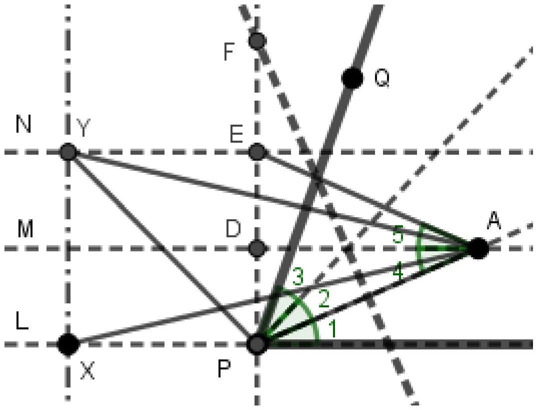
(1) 我們試摺情形如圖，紅線為通過頂點的 Huzita 公理 6 摺痕，藍線為其他垂線產生的 Huzita 公理 6 摺痕。



(2) 我們發現：其他的垂線做出來的 Huzita 公理 6 摺痕，都沒有通過做出 1st 三等分線的關鍵點（圖中紅色箭頭處），所以都沒有辦法完成摺紙三等分任意角的作圖。

(3) 我們試著用摺紙三等分任意角的證明方法，說明原因如下：

若用$\overleftrightarrow{XY}$當垂線，垂足不是頂點 P：



①若 Huzita 公理 6 的摺法為：P 到直線 M，Y 到$\overrightarrow{PQ}$；則△ PAY 不是等腰三角形，所以∠4≠∠YAD，推不出∠2=∠3 的結果。

②若 Huzita 公理 6 的摺法改為：垂足 X 到直線 M，Y 到$\overrightarrow{PQ}$；則△XAY 是等腰三角形，∠XAD=∠YAD，但三等分的角並不是∠P。

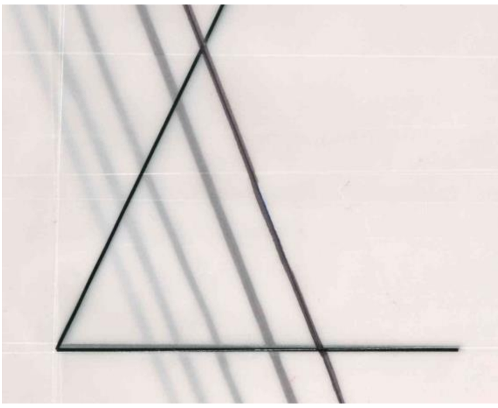
(4) 結論：對某邊作垂線時，垂足的位置一定要通過角的頂點！【性質②】

2. 兩平行線之間的距離對作圖的影響

(1) 我們任選一固定的角，調整兩平行線之間的距離，比較 Huzita 公理 6 摺痕的位置有何改變，摺出來的作品如下：

由左往右，平行線之間的距離逐漸縮小，黑色線為 Huzita 公理 6 的摺痕

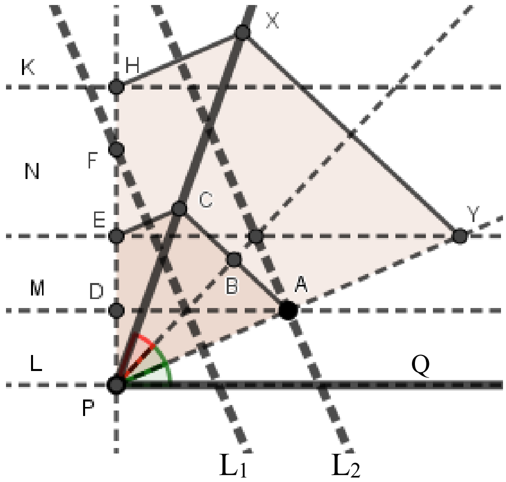
若把 5 張描圖紙疊在一起，可以得到下圖：



(2) 我們發現平行線之間的距離越大，Huzita 公理 6 的摺痕離角的頂點越遠。

(3) 我們試著用摺紙三等分任意角的證明方法，說明原因如下：

直線 N、M 作出的 Huzita 公理 6 摺痕為 L_1，直線 N、M 作出的摺痕為 L_2。



因為$\angle APQ=\frac{1}{3}\angle P=\angle YPQ$，

且$\angle APQ$ 和$\angle YPQ$ 共用$\overrightarrow{PQ}$，

所以$\angle APQ$ 和$\angle YPQ$ 為同一角且$\overrightarrow{PA}$和$\overrightarrow{PY}$共線，

又對稱軸 $L_1 \perp \overrightarrow{PA}$，對稱軸 $L_2 \perp \overrightarrow{PY}$。

故 L_1 和 L_2 互相平行。

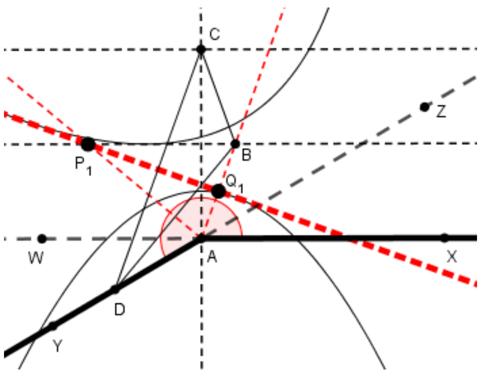
(4) 結論：調整兩平行線之間的距離，會產生一系列互相平行的 Huzita 公理 6 摺痕。【性質③】

(五) 證明三條 Huzita 公理 6 之摺痕相對應的三等分線，三等分哪一個角：

(六) 證明三條 Huzita 公理 6 之摺痕與始邊的夾角度數：

1. 我們一併討論上述兩個議題，推論過程使用摺紙三等分任意角的證明方法與細部討論，分成銳角（0-90）、鈍角（90-180）、180-270、270-360 四種角度討論，每種角度也分別討論三條 Huzita 公理 6 之摺痕的情況。以下僅列出 180-270 的詳細討論過程：

(1) 若 **<u>180<A<270 之 1st.</u>**Huzita 公理 6 的摺痕：



因△ABC 為等腰三角形→$\angle CBP_1=\angle ABP_1$

又 ABCD 為等腰梯形

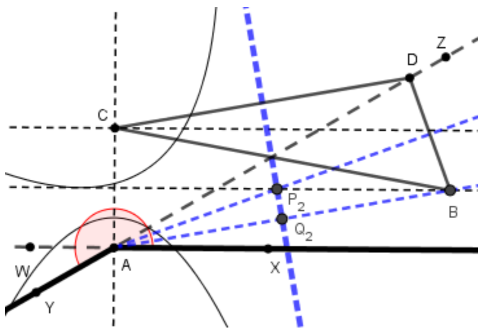
→$\angle CBP_1=\angle DAP_1$，$\angle ABP_1=\angle BAP_1$

又$\overleftrightarrow{BP_1}//\overleftrightarrow{AX}$ →$\angle ABP_1=\angle BAX$

故$\overrightarrow{AP_1}$、$\overrightarrow{AQ_1}$為三等分線且三等分$\angle XAY$

→→度數為 A →→→1st.Huzita 公理 6 的摺痕與始邊夾角為 $90-\frac{A}{3}$

(2) 若 **<u>180<A<270 之 2nd.</u>**Huzita 公理 6 的摺痕：



因△ABC 為等腰三角形→$\angle CBP_2=\angle ABP_2$

又 ABDC 為等腰梯形

→$\angle CBP_2=\angle DAP_2$，$\angle ABP_2=\angle BAP_2$

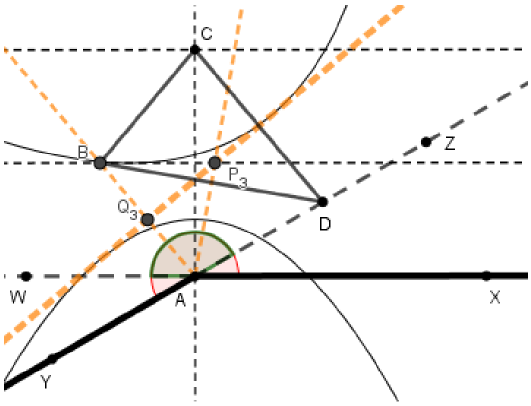
又$\overleftrightarrow{BP_2}//\overleftrightarrow{AX}$ →∠ABP₂=∠BAX

故$\overrightarrow{AP_2}$、$\overrightarrow{AQ_2}$為三等分線且三等分∠ZAX

→→度數為 A –180

→→→2nd.Huzita 公理 6 的摺痕與始邊夾角為 $90-\frac{(A-180)}{3}=150-\frac{A}{3}$

(3) 若 **<u>180<A<270 之 3rd.</u>**Huzita 公理 6 的摺痕：



因△ABC 為等腰三角形→∠CBP_3=∠ABP_3

又 ABCD 為等腰梯形

→∠CBP_3=∠DAP_3，∠ABP_3=∠BAP_3

又$\overleftrightarrow{BP_3}//\overleftrightarrow{AX}$ →∠ABP_3=∠BAW

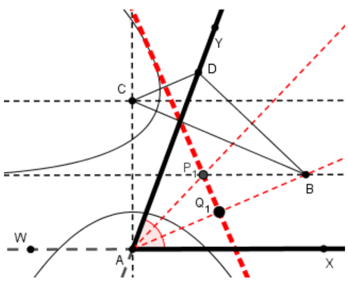
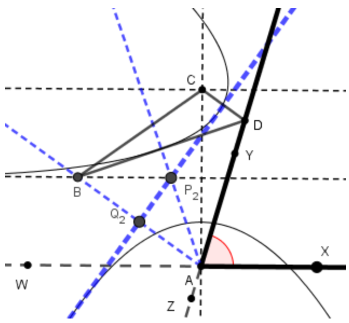
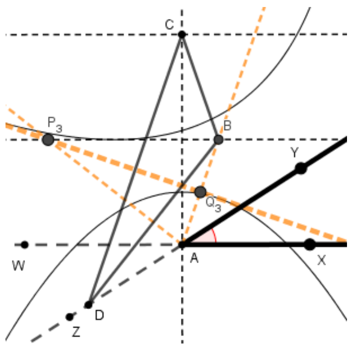
故$\overrightarrow{AP_3}$、$\overrightarrow{AQ_3}$為三等分線且三等分∠WAZ

→→度數為 360–A

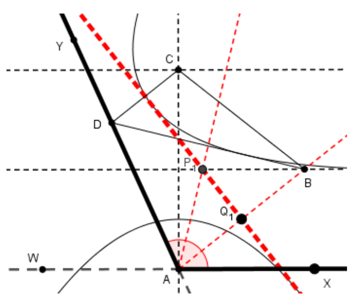
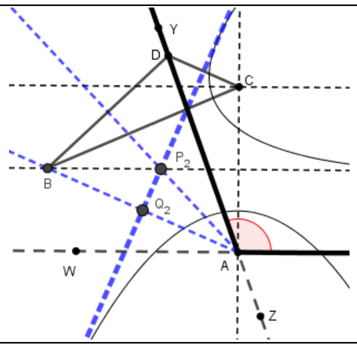
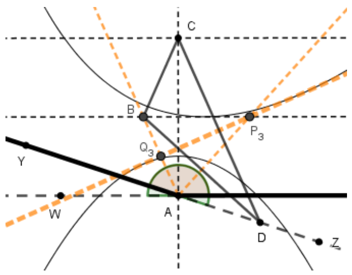
→→→3rd.Huzita 公理 6 的摺痕與始邊夾角為 $90-\frac{(360-A)}{3}=\frac{A}{3}-30$

(4) 其餘情況簡單列出如下：

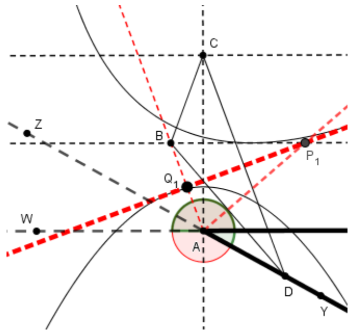
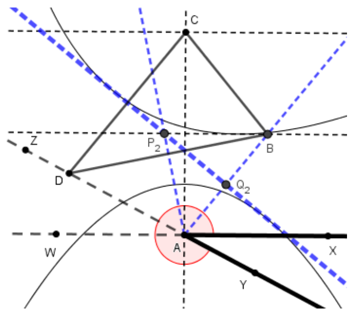
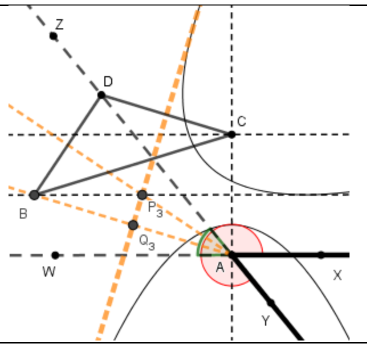
<u>0<A<90</u> 的三條 Huzita 公理 6 摺痕：

1st.	2nd.	3rd.
		
∠XAY 被三等分	∠WAY 被三等分	∠XAZ 被三等分
∠XAY 度數為 A	∠WAY 度數為 180–A	∠XAZ 度數為 180+A
摺痕與始邊夾角為 $90-\frac{A}{3}$	摺痕與始邊夾角為 $30+\frac{A}{3}$	摺痕與始邊夾角為 $30-\frac{A}{3}$

90<A<180 的三條 Huzita 公理 6 摺痕：

1st.	2nd.	3rd.
		
∠XAY 被三等分	∠WAY 被三等分	∠WAZ 被三等分
∠XAY 度數為 A	∠WAY 度數為 180–A	∠WAZ 度數為 360–A
摺痕與始邊夾角為 $90-\frac{A}{3}$	摺痕與始邊夾角為 $30+\frac{A}{3}$	摺痕與始邊夾角為 $\frac{A}{3}-30$

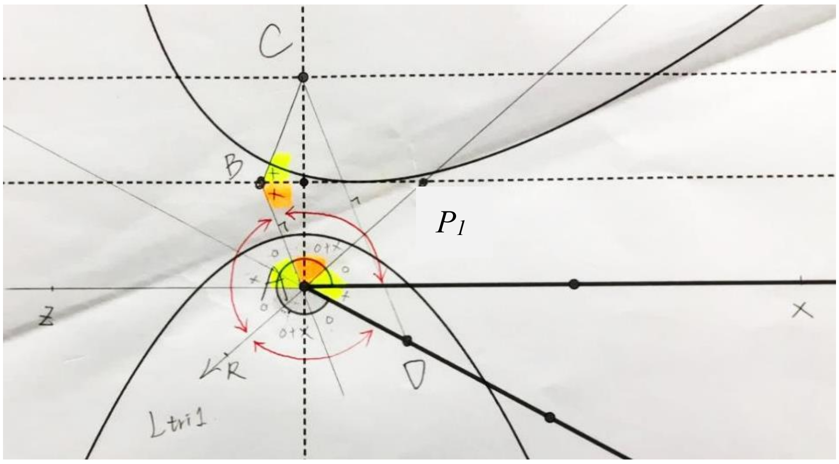
270<A<360 的三條 Huzita 公理 6 摺痕：

1st.	2nd.	3rd.
		
∠WAY 被三等分	∠DAX 被三等分	∠WAZ 被三等分
∠WAY 度數為 540–A	∠DAX 度數為 A–180	∠WAZ 度數為 360–A
摺痕與始邊夾角為$\frac{A}{3}-90$	摺痕與始邊夾角為 $150-\frac{A}{3}$	摺痕與始邊夾角為 $\frac{A}{3}-30$

2. 被三等分角之度數的異中求同：

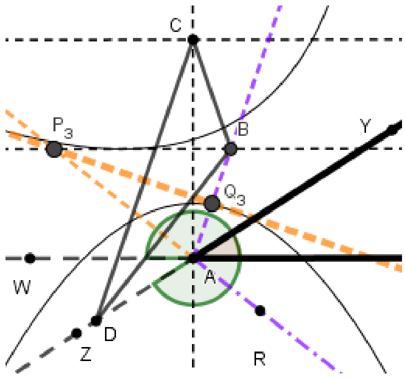
根據上面的結果，我們發現 1st. Huzita 公理 6 的摺痕，在 0<A<90、90<A<180、180<A<270 的情況，都是三等分原角∠A；但 270<A<360 卻沒有將∠A 三等分，而是三等分另一個角。因此，我們試著找出是否仍有另一組三等分線，恰三等分∠A。

我們將始邊、終邊、$\overrightarrow{AP_1}$、$\overrightarrow{AB}$都延長，利用對頂角相等，標出 O、X、O+X 三種角。發現∠A 剛好等於 6 個 O+3 個 X，而且$\overrightarrow{AR}$（$\overrightarrow{AP_1}$的延長線）、$\overrightarrow{AB}$三等分∠A，度數為 2 個 O+1 個 X，$\overrightarrow{AR}$為 1st.三等分線，$\overrightarrow{AB}$為 2nd.三等分線。圖如下所示：



同樣的道理，我們發現 3rd. Huzita 公理 6 的摺痕，在 90<A<180、180<A<270、270<A<360 的情況，被三等分角的度數皆為 360–A。只有 0<A<90 的被三等分角的度數為 180+A。

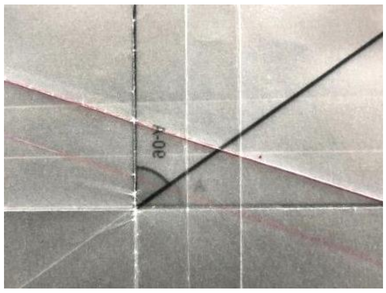
我們亦用上述的方式，也找到度數為 360–A 且被三等分的角（如右圖綠色部分），但三等分線為$\overrightarrow{AR}$（$\overrightarrow{AP_3}$的延長線）和$\overrightarrow{AQ_3}$（紫色線）。



(七) 證明兩角摺痕平行的配對關係：

我們從三條公理 6 摺痕與始邊的夾角出發，去探討兩角摺痕平行的配對關係。

1. 若兩角互餘（和為 90 度）：



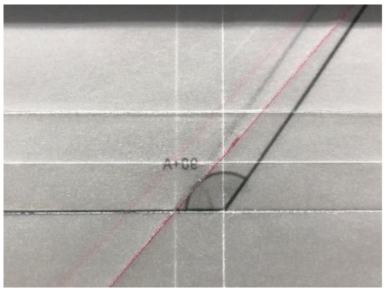
若∠A+∠B=90，

∠A 的 1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角為 $90-\frac{A}{3}$，

∠B 的 3rd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角為 $30-\frac{B}{3}$。

將兩角的始邊和終邊相接而湊成 90 度時，∠B 的 3rd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角為 $90-(30-\frac{B}{3})$，再把 B=90–A 代入，可得 $60+\frac{90-A}{3}=90-\frac{A}{3}$，恰與∠A 的 1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角相同，所以兩摺痕會互相平行。

2. 若兩角互補（和為 180 度）：



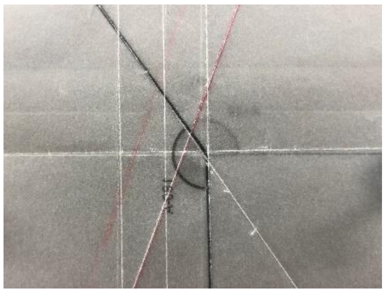
若∠A+∠B=180（0<∠A<90），

∠A 的 1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角為 $90-\frac{A}{3}$，

∠B 的 2nd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角為 $30+\frac{B}{3}$。

將兩角的始邊和終邊相接而湊成 180 度時，∠B 的 2nd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角仍為 $30+\frac{B}{3}$，再把 B=180–A 代入，可得 $30+\frac{180-A}{3}=90-\frac{A}{3}$，恰與∠A 的 1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角相同，所以兩摺痕會互相平行。

3. 若兩角的和為 270 度：



若∠A+∠B=270，可分兩種情況：

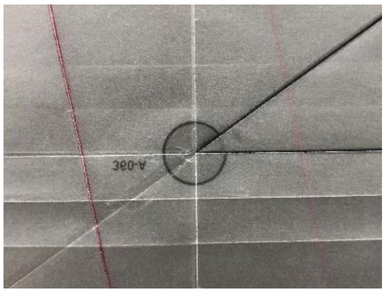
第一，0<∠A<90，180<∠B<270，

第二，90<∠A<180，90<∠A<180，

同理皆可得，

∠A 的 2nd.Huzita 公理 6 摺痕與∠B 的 3rd.Huzita 公理 6 摺痕會互相平行。

4. 若兩角的和為 360 度：



若∠A+∠B=360，可分兩種情況：

第一，0<∠A<90，270<∠B<360，

第二，90<∠A<180，180<∠B<270，

同理皆可得，

∠A 的 1st.Huzita 公理 6 摺痕與∠B 的 3rd.Huzita 公理 6 摺痕會互相平行。

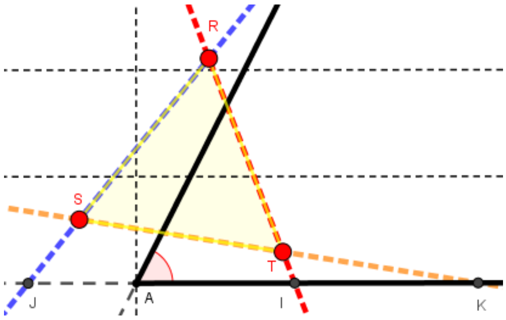
四、關於三條 Huzita 公理 6 的摺痕所圍成的三角形（Huzita6 三角形）：

從描圖紙上的發現，我們猜測三條 Huzita 公理 6 的摺痕所圍成的三角形不論角度，都會是相似三角形。我們利用三條 Huzita 公理 6 的摺痕與始邊的夾角進行推論，因不同角度，夾角有差異，所以分成以下四種情形討論。符號說明如下：

$\overleftrightarrow{RT}$為 1st.Huzita 公理 6 摺痕，與始邊的交點為 I；$\overleftrightarrow{RS}$為 2nd.Huzita 公理 6 摺痕，與始邊的交點為 J；$\overleftrightarrow{ST}$為 3rd.Huzita 公理 6 摺痕，與始邊的交點為 K。

△RST 為三條 Huzita 公理 6 的摺痕所圍成的三角形，我們特別將其稱為「Huzita6 三角形」；角簡記為∠R、∠S、∠T。

(一) **0<A<90 之 Huzita6 三角形**



1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠TIA=$90-\frac{A}{3}$

2nd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠SJA=$30+\frac{A}{3}$

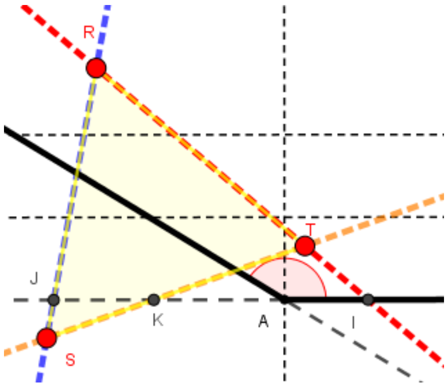
3rd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠TKA=$30-\frac{A}{3}$

∠S=∠SJA+∠TKA=$(30+\frac{A}{3})+(30-\frac{A}{3})=60$

∠R=180–∠SJA–∠TIA =$180-(30+\frac{A}{3})-(90-\frac{A}{3})=60$，得∠T=60，

故△RST 為正三角形，且∠TKA=$30-\frac{A}{3}$ 介於 0～30 度之間，所以三角形右偏。

(二) **90<A<180 之 Huzita6 三角形**



1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠TIA=$90-\frac{A}{3}$

2nd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠RJA=$30+\frac{A}{3}$

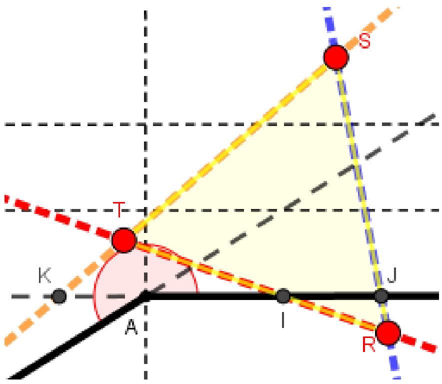
3rd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠TKA=$\frac{A}{3}-30$

∠T=∠TIA＋∠TKA=$(90-\frac{A}{3})+(\frac{A}{3}-30)=60$

∠R=180–∠RJA–∠TIA =$180-(30+\frac{A}{3})-(90-\frac{A}{3})=60$，得∠S=60，

故△RST 為正三角形，且∠TKA=$\frac{A}{3}-30$ 介於 0～30 度之間，所以三角形左偏。

(三) **180<A<270 之 Huzita6 三角形**



1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠TIA=$90-\frac{A}{3}$

2nd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠SJA=$150-\frac{A}{3}$

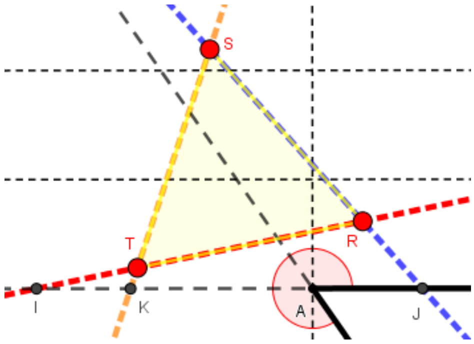
3rd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角∠TKA=$\frac{A}{3}-30$

∠T=∠TIA＋∠TKA=$(90-\frac{A}{3})+(\frac{A}{3}-30)=60$

$\angle$R=$\angle$SJA−$\angle$JIR =(150 − $\frac{A}{3}$)−(90 − $\frac{A}{3}$) = 60，得$\angle$S=60，

故△RST 為正三角形，且$\angle$TIA=90 − $\frac{A}{3}$ 介於 0～30 度之間，所以三角形右偏。

(四) **<u>270<A<360 之 Huzita6 三角形</u>**



1st.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角$\angle$TIA=$\frac{A}{3}$ −90

2nd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角$\angle$RJA=150 − $\frac{A}{3}$

3rd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角$\angle$TKA=$\frac{A}{3}$ − 30

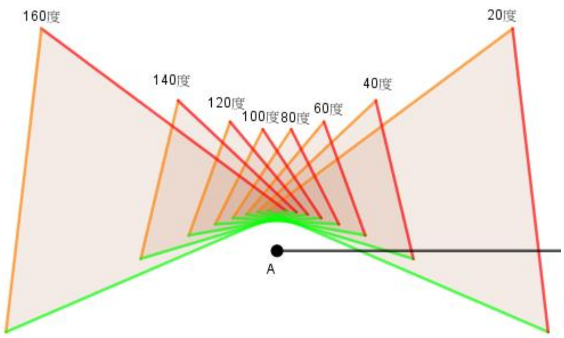
$\angle$R=$\angle$RJA＋$\angle$TIA =(150 − $\frac{A}{3}$)+($\frac{A}{3}$ −90) = 60

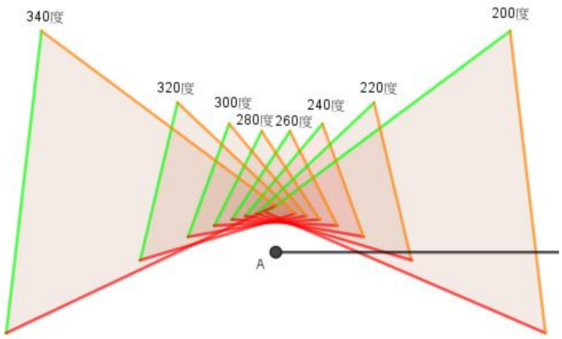
$\angle$S=$\angle$TKA＋$\angle$RJA =180−($\frac{A}{3}$ − 30)−(150 − $\frac{A}{3}$) = 60，得$\angle$S=60，

故△RST 為正三角形，且$\angle$TIA=$\frac{A}{3}$ −90 介於 0～30 度之間，所以三角形左偏。

(五) 不同角度之 Huzita6 三角形的關係：

我們利用 GGB 作圖，將 20、40、…、160 度角的 Huzita6 三角形畫在同一張圖上（左圖），紅色、橘色、綠色分別為 1st.、2nd.、3rd.Huzita 公理 6 摺痕，又將 200、220、…、340 度角的 Huzita6 三角形畫在另一張圖上（右圖）。我們發現原角與多 180 度的角作出的 Huzita6 三角形相同，但三條邊的來源不同。





證明(以$\angle$A 是銳角為例)：$\angle$A 的 1st.Huzita 公理 6 摺痕的與始邊的夾角為 90− $\frac{A}{3}$，$\angle$A+180 度之角的 2nd.Huzita 公理 6 摺痕與始邊的夾角為 150 − $\frac{A+180}{3}$ = 90 − $\frac{A}{3}$，與前者相同。同理，$\angle$A 的 2nd.摺痕與$\angle$A+180 度之角的 3rd.摺痕相同，$\angle$A 的 3rd.摺痕與$\angle$A+180 度之角的 1st.摺痕相同。

五、使用 Huzita 公理摺出 Morley 三角形，步驟如下：

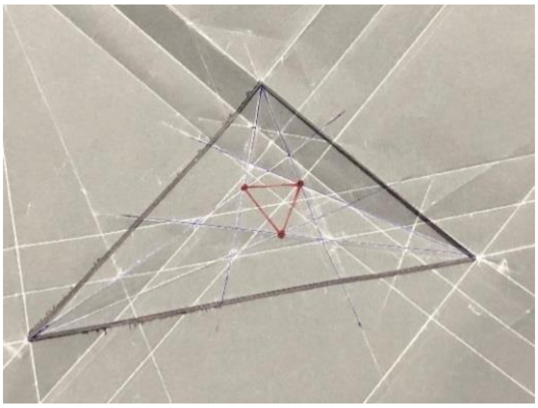
(一) 隨意畫出一個三角形。

(二) 利用 Huzita-Hatori 的摺紙公理三等分三個內角

→上述七個步驟摺三次。

(三) 再將三等分線兩兩的交點，利用 Huzita 公理 1 連起來，即可摺出莫利三角形，如圖所示。

(四) 確認中間是否有一個正三角形，就完成莫利三角形的摺紙作圖，如右圖。



六、關於三角形中，Huzita 公理 6 摺痕所圍成的三角形（Huzita-Morley 三角形）：

(一) Huzita-Morley 三角形的介紹與種類：

我們在摺莫利三角形時，發現 Huzita 公理 6 的摺痕會形成一個三角形，我們將它稱為「Huzita-Morley 三角形」。而三條 Huzita 公理 6 的摺痕會產生三種不同的 Huzita-Morley 三角形，再加上順時針或逆時針作圖會產生兩個不同的三角形。

所以共有 6 個 Huzita-Morley 三角形，分別為「順時針－1st.Huzita-Morley 三角形」、「逆時針－1st.Huzita-Morley 三角形」、「順時針－2nd.Huzita-Morley 三角形」、「逆時針－2nd.Huzita-Morley 三角形」、「順時針－3rd.Huzita-Morley 三角形」、「逆時針－3rd.Huzita-Morley 三角形」。

(二) 六種「Huzita-Morley 三角形」都有一系列的相似三角形：

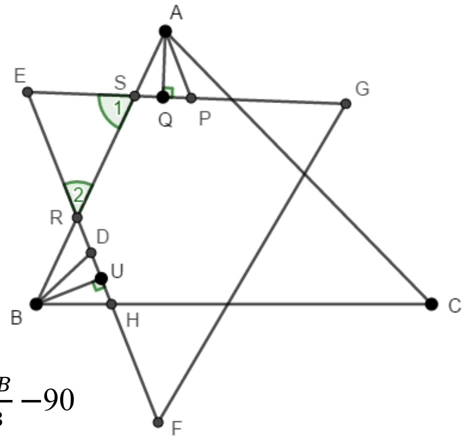
根據【性質③】調整兩平行線之間的距離，會產生一系列互相平行的 Huzita 公理 6 摺痕，在作「Huzita-Morley 三角形」時，因著取的平行線位置不同，會產生許多不同的三角形，但因著 Huzita 公理 6 摺痕，也就是三角形的邊長，彼此之間會互相平行，所以這許多不同的三角形都會分別彼此相似。因此，我們在處理角度問題時，不會因著平行線距離不同，而產生不同的結果。

(三) Huzita-Morley 三角形三內角角度公式探討：

在用 GGB 作圖時，Huzita-Morley 三角形的頂點，有可能會落在△ABC 內部，但將摺痕平移調整後，皆可將三個交點都調到落於△ABC 外部，也就是△EFG；此舉乃是為了讓證明更方便一致。以下將進行我們的探討與證明。

1. 「1st.Huzita-Morley 三角形」三內角的公式：

(1) 「順時針－1st.Huzita-Morley 三角形」:



根據【性質①】

$\overline{AD}$是∠A 的 2nd 三等分線 $\therefore \overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{EG}$

$\overline{BU}$是∠B 的 2nd 三等分線 $\therefore \overline{BU} \perp \overleftrightarrow{EF}$

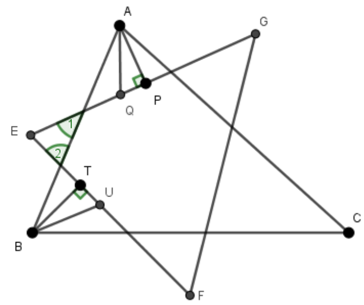
在△ESR 中，

$\angle 1 = \angle ASQ = 180 - \frac{A}{3} - 90$，$\angle 2 = \angle BRU = 180 - \frac{2B}{3} - 90$

$\angle E = 180 - \angle 1 - \angle 2 = 180 - (180 - \frac{A}{3} - 90) - (180 - \frac{2B}{3} - 90) = \frac{A}{3} + \frac{2B}{3}$

同理，$\angle F = \frac{B}{3} + \frac{2C}{3}$，$\angle G = \frac{C}{3} + \frac{2A}{3}$

(2) 「逆時針－1st.Huzita-Morley 三角形」:



同理可得$\angle E = \frac{B}{3} + \frac{2A}{3}$，$\angle F = \frac{C}{3} + \frac{2B}{3}$，$\angle G = \frac{A}{3} + \frac{2C}{3}$

2. 「2nd.Huzita-Morley 三角形」三內角的公式：

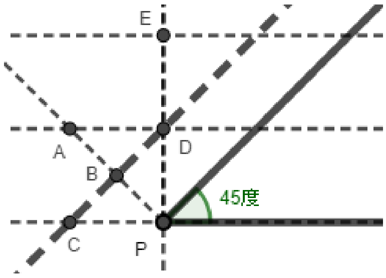
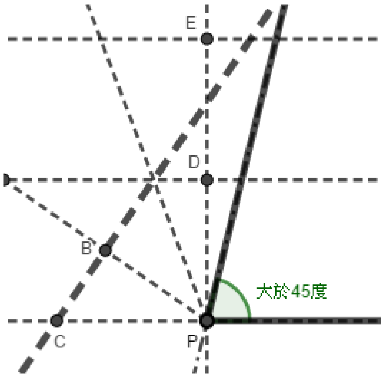
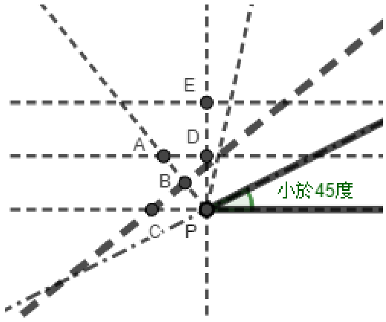
(1) 討論 2nd. Huzita6 摺痕的位置：

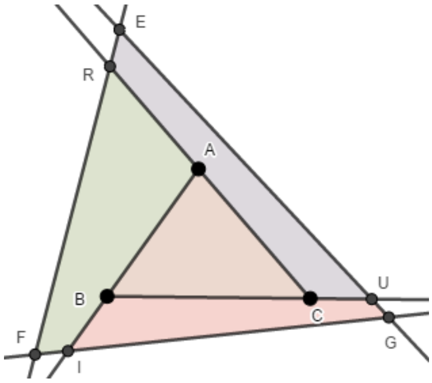
為更了解圖形的準確樣子，根據前面的說明，∠BCP = 30 度+ $\frac{1}{3}$∠P

若∠P=45 度，則 Huzita 公理 6 的摺痕平行於角的一邊；

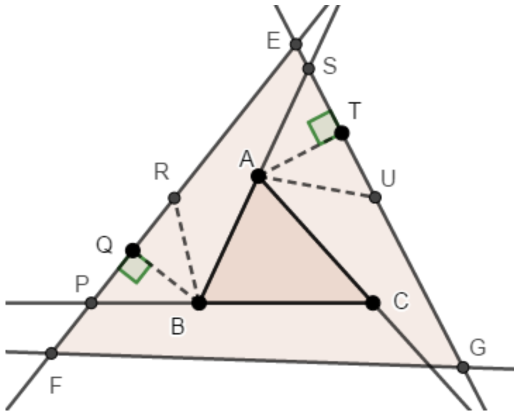
若∠P>45 度，則 Huzita 公理 6 的摺痕與終邊有交點；

若∠P<45 度，則 Huzita 公理 6 的摺痕與終邊的延長線有交點。

等於 45 度	大於 45 度	小於 45 度
		



(2) 為了讓推論更方便，我們會在作圖時，會調整平行線的位置，讓「2nd.Huzita-Morley 三角形」完全落在原三角形之外。另外，也會調整到在原三角形與「2nd.Huzita-Morley 三角形」之間，**剛好出現三個四邊形**，如右圖所示。



(3) 「順時針－2nd.Huzita-Morley 三角形」:

根據【性質①】

$\overline{BQ}$是∠B 的 2nd.三等分線 ∴$\overline{BQ}$垂直$\overleftrightarrow{EF}$

$\overline{AT}$是∠A 的 2nd.三等分線 ∴$\overline{AT}$垂直$\overleftrightarrow{GF}$

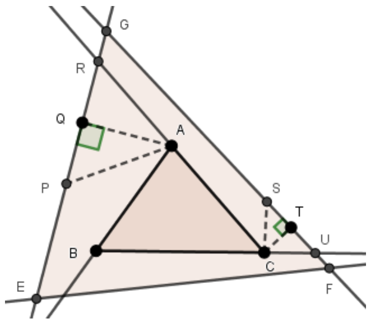
在四邊形 PBSE 中，

$\angle SBP = 180 - B$，$\angle EPB = 180 - 90 - \frac{180-B}{3}$

$\angle ESA = 90 + \angle SAT = 90 + \frac{180-A}{3}$

$\angle E = 180 - \angle SBP - \angle EPB - \angle ESA = 360 - (180 - B) - (90 - \frac{180-B}{3}) - (90 + \frac{180-A}{3})$

$= \frac{A}{3} + \frac{2B}{3}$。同理，$\angle F = \frac{B}{3} + \frac{2C}{3}$ 、$\angle G = \frac{C}{3} + \frac{2A}{3}$

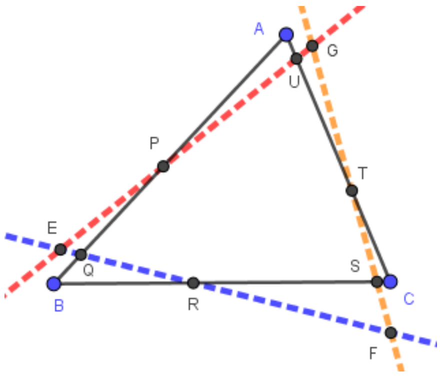


(4) 「逆時針－2nd.Huzita-Morley 三角形」:

同理可得$\angle E = \frac{B}{3} + \frac{2A}{3}$ 、$\angle F = \frac{C}{3} + \frac{2B}{3}$ 、$\angle G = \frac{A}{3} + \frac{2C}{3}$

3. 「3rd.Huzita-Morley 三角形」三內角的公式：

(1) 「順時針－3rd.Huzita-Morley 三角形」：



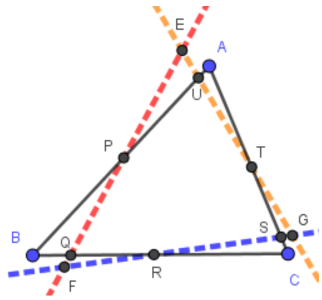
$\overleftrightarrow{EF}$是∠B 的 3rd.Huzita 公理 6 的摺痕，

→ ∠QRB = $30-\frac{B}{3}$ → ∠PQR = B+($30-\frac{B}{3}$)=$30+\frac{2B}{3}$

又$\overleftrightarrow{EG}$是∠A 的 3rd.Huzita 公理 6 的摺痕，

→ ∠EPQ = $30-\frac{A}{3}$

得∠E=∠PQR−∠EPQ = $(30+\frac{2B}{3})-(30-\frac{A}{3})=\frac{A}{3}+\frac{2B}{3}$



同理，∠F＝ $\frac{B}{3}+\frac{2C}{3}$、∠G= $\frac{C}{3}+\frac{2A}{3}$

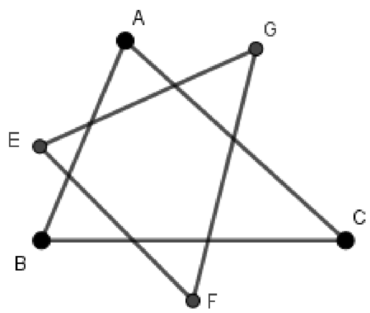
(2) 「逆時針－3rd.Huzita-Morley 三角形」：

同理可得∠E=$\frac{B}{3}+\frac{2A}{3}$、∠F = $\frac{C}{3}+\frac{2B}{3}$、∠G= $\frac{A}{3}+\frac{2C}{3}$

(四) Huzita-Morley 三角形與原三角形的<u>等腰等差互推性質</u>：

1. 原△三內角成<u>等差</u> → Huzita-Morley 三角形為<u>等腰</u>△

(1) 以「1st.Huzita-Morley 三角形」為例：



<u>順時針的部分</u>：

假設 ΔABC 三內角為∠A= a−d、∠B= a、∠C= a+d

得∠E=$\frac{\angle A}{3}+\frac{\angle 2B}{3}=\frac{a-d}{3}+\frac{2a}{3}=a-\frac{d}{3}$

∠F=$\frac{\angle B}{3}+\frac{\angle 2C}{3}=\frac{a}{3}+\frac{2(a+d)}{3}=\frac{3a+d}{3}=a+\frac{2d}{3}$

∠G=$\frac{\angle C}{3}+\frac{\angle 2A}{3}=\frac{a+d}{3}+\frac{2(a-d)}{3}=a-\frac{d}{3}$

所以∠G=∠E，也就是「順時針－1st.Huzita-Morley 三角形」為等腰△。

<u>逆時針的部分</u>：

同樣的證明方式，可得∠E=a−$\frac{2d}{3}$，∠F=a+$\frac{d}{3}$，∠G=a+$\frac{d}{3}$

所以∠G=∠F，也就是「逆時針－1st.Huzita-Morley 三角形」為等腰△。

另外，我們根據公式推導的過程也**發現**：

① 順時針、逆時針兩種三角形，雖然都是等腰三角形，但底角的位置不一樣。

② 底角和頂角度數的差為原三角形三內角度數的公差。

(2) 同理，我們也針對「2nd.Huzita-Morley 三角形」、「3rd.Huzita-Morley 三角形」進行推論，也得到相同的結果。

2. 原△三內角為**等腰**△ → Huzita-Morley 三角形三內角度數成**等差**

(1) 以「2nd. Huzita-Morley 三角形」為例：

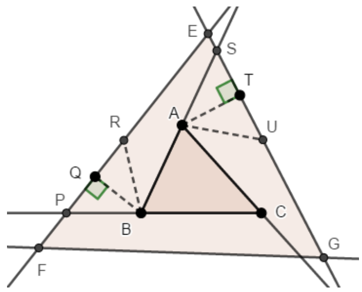
順時針的部分：

假設：∠A=∠B=a、∠C=180－2a

$\angle E=\frac{\angle A}{3}+\frac{\angle 2B}{3}=\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}=\frac{3a}{3}=a$

$\angle F=\frac{\angle B}{3}+\frac{\angle 2C}{3}=\frac{a}{3}+\frac{2(180-2a)}{3}=120-a$

$\angle G=\frac{\angle C}{3}+\frac{\angle 2A}{3}=\frac{180-2a}{3}+\frac{2a}{3}=60$

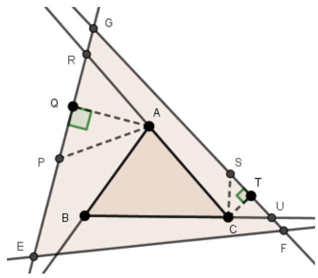


因為∠G－∠F= 120– a – 60= 60– a

∠F－∠E = 60– a = 60– a

所以，∠E，∠G，∠F 三內角度數成等差數列且公差=60–a

逆時針的部分：



同樣的證明方式，

可得∠E= a、∠F=60、∠G=120–a

因為∠F–∠E＝∠G–∠F＝60– a

所以∠E，∠G，∠F 三內角度數也成等差數列且公差=60–a

另外，我們根據公式推導的過程也**發現**：

① 順時針、逆時針兩種三角形，雖然三內角度數成等差數列，位置不太一樣。

② 雖然位置不同，但是度數是相同的，都是a、60、120– a，公差為 60–a。

(2) 同理，我們也針對「1st.Huzita-Morley 三角形」、「3rd.Huzita-Morley 三角形」進行推論，也得到相同的結果。

七、三條 Huzita 公理 6 的摺痕與其對應的兩條三等分線的關係：

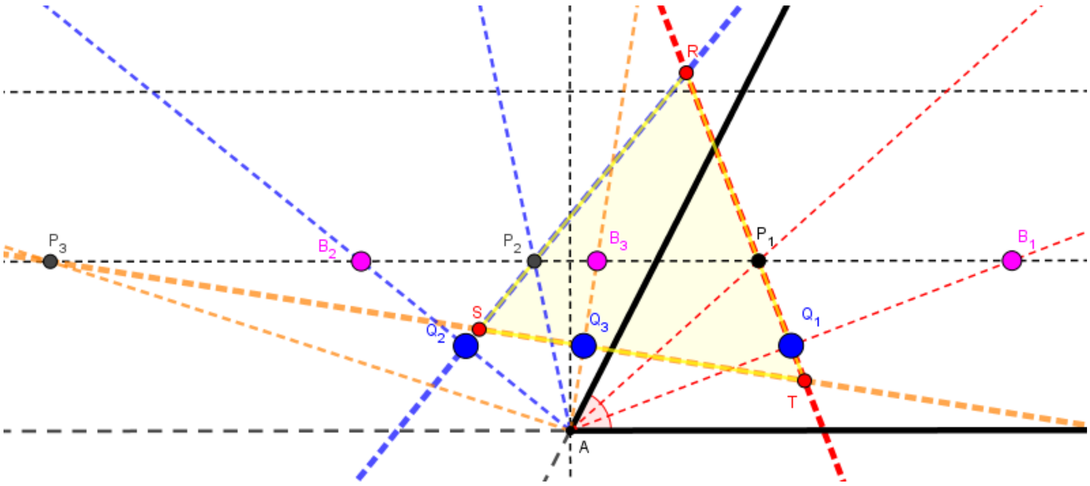
在繪製 Huzita6 三角形的過程中，我們意外發現，似乎三條 Huzita 公理 6 的摺痕與其 2nd.三等分線的交點，好像都在同一條線上，如下圖所示（以銳角為例）：

1st.Huzita 公理 6 摺痕為$\overleftrightarrow{RT}$ 與其 2nd.三等分線$\overrightarrow{AQ_1}$（紅色）的交點為Q_1；

2nd.Huzita 公理 6 摺痕為$\overleftrightarrow{RS}$ 與其 2nd.三等分線$\overrightarrow{AQ_2}$（藍色）的交點為Q_2；

3rd.Huzita 公理 6 摺痕為$\overleftrightarrow{ST}$ 與其 2nd.三等分線$\overrightarrow{AQ_3}$（橙色）的交點為Q_3；

我們發現：Q_1、Q_2、Q_3 位於同一條線上！



證明：

將$\overrightarrow{AQ_1}$、$\overrightarrow{AQ_2}$、$\overrightarrow{AQ_3}$ 延長分別交於 B_1、B_2、B_3，

因 1*st*.Huzita 公理 6 摺痕為$\overline{AB_1}$的對稱軸，所以 Q_1 為$\overline{AB_1}$的中點；

同理，Q_2 為$\overline{AB_2}$的中點，Q_3 為$\overline{AB_3}$的中點。

再根據平行線截比例線段的性質，

可知 Q_1、Q_2、Q_3 都在 2*nd*.平行線與始邊中間的位置，

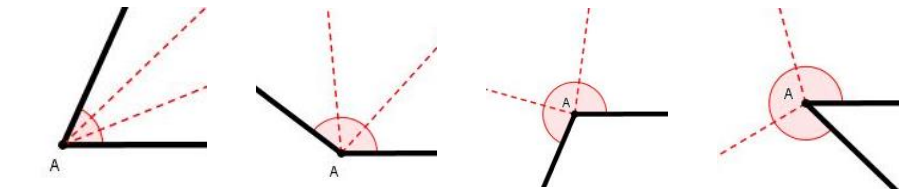
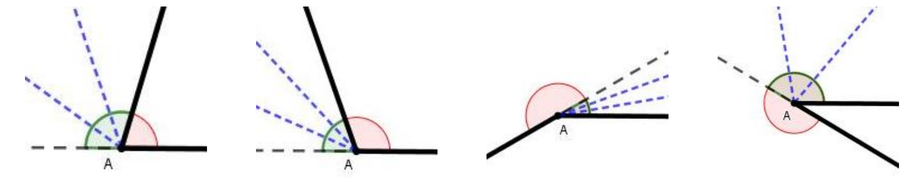
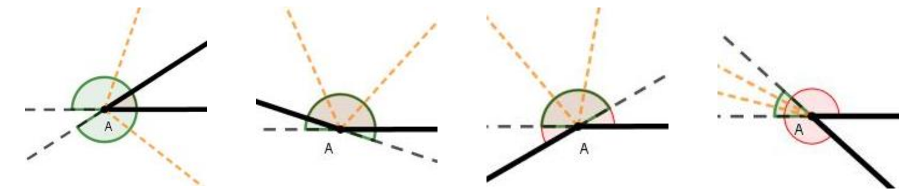
也就是 Q_1、Q_2、Q_3 共線，

且此線與 2*nd*.平行線和始邊互相平行，又與 2*nd*.平行線和始邊等距離。

伍、研究結果

一、關於「<u>**三條 Huzita 公理 6 的摺痕**</u>」：

(一) 在四種不同的角度下，被三等分角的位置如下：

<table>
<tr><th>Huzita 公理 6</th><th>0<A<90</th><th>90<A<180</th><th>180<A<270</th><th>270<A<360</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1st.
Huzita 公理 6
摺痕</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">原角的位置</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2nd.
Huzita 公理 6
摺痕</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">始邊或終邊和另一邊之延長線的夾角</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3rd.
Huzita 公理 6
摺痕</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">始邊和終邊之延長線的夾角</td></tr>
</table>

(二) 兩角摺痕平行的配對關係：兩角和為 90、180、270、360 度時，均可找到兩條 Huzita 公理 6 摺痕，其一經過翻轉+始終邊相疊，會與另一角的摺痕互相平行。

二、關於「<u>**Huzita6 三角形**</u>」：

(一) 三條 Huzita 公理 6 的摺痕所圍成的三角形，也就是「<u>**Huzita 公理 6 三角形**</u>」，不論原角度數為何，作出的「<u>**Huzita 公理 6 三角形**</u>」都是<u>正三角形</u>。我們從原本猜測∠A=35 的系列會都為相似三角形，到∠A 不分角度都相似，最後證明後，卻發現它是完美的正三角形，真是與莫利三角形的的發現，有同樣的驚奇！

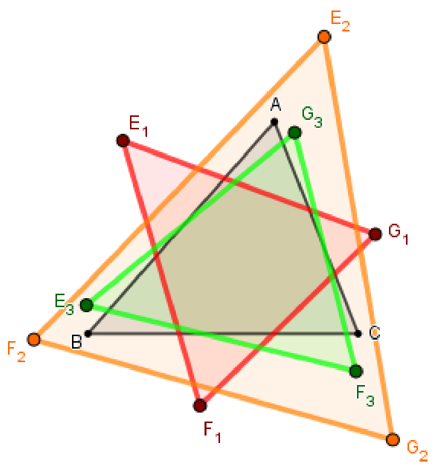
(二) 在角度介於 0-90 與 180-270 時，「<u>**Huzita6 三角形**</u>」同為右偏；而角度介於 90-180 與 270-360 時，「<u>**Huzita6 三角形**</u>」同為左偏。

(三) 在摺出 Huzita 公理 6 摺痕的過程中，在平行線間的距離相同的情況下，若從 0-180 和 180-360 之間各取一角且度數差為 180 度，可做出兩個位置相同且全等的「**<u>Huzita6 三角形</u>**」，但三條邊所對應的 Huzita 公理 6 摺痕不同。

三、關於「**<u>Huzita-Morley 三角形</u>**」：

(一) 順時針的三種「Huzita-Morley 三角形」(1st.、2nd.、3rd.）為位置不同的相似三角形，三內角度數分別為$\frac{A}{3}+\frac{2B}{3}$、$\frac{B}{3}+\frac{2C}{3}$、$\frac{C}{3}+\frac{2A}{3}$；

同理，逆時針的三種「Huzita-Morley 三角形」(1st.、2nd.、3rd.）亦為另一組位置不同的相似三角形，三內角度數分別為$\frac{A}{3}+\frac{2C}{3}$、$\frac{B}{3}+\frac{2A}{3}$、$\frac{C}{3}+\frac{2B}{3}$。

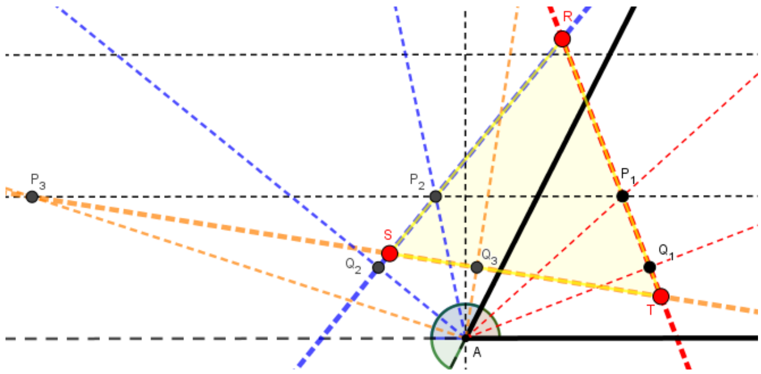


如圖，$\triangle ABC$ 為原三角形，$\triangle E_1F_1G_1$（紅色）、$\triangle E_2F_2G_2$（橘色）、$\triangle E_3F_3G_3$（綠色）分別為 1st.、2nd.、3rd.「**<u>Huzita-Morley 三角形</u>**」，且$\triangle E_1F_1G_1 \sim \triangle E_2F_2G_2 \sim \triangle E_3F_3G_3$。

(二) 「Huzita-Morley 三角形」的等腰與等差互推性質：

1. 我們發現原三角形三個內角成等差數列時，所有相對應的三種「Huzita-Morley 三角形」(1st.、2nd.、3rd.）都會是位置不同、彼此相似的等腰三角形。
2. 我們發現原三角形為等腰三角形時，所有相對應的三種「Huzita-Morley 三角形」(1st.、2nd.、3rd.）的三內角會成等差數列（等差中項必為 60 度），且是位置不同、彼此相似的三角形。

四、三條 Huzita 公理 6 的摺痕與其 2nd.三等分線的交點會**<u>共線</u>**，平行於 2nd.平行線，且與 2nd.平行線和始邊等距離。

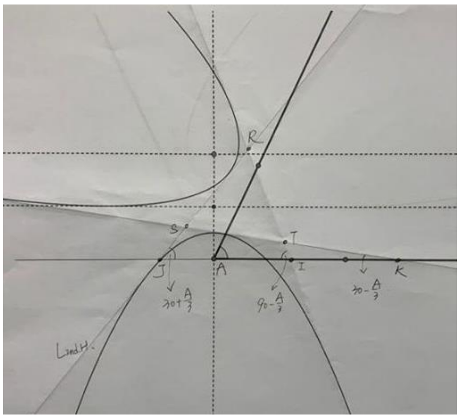


陸、討論與展望：

一、利用 GGB 協助摺紙作圖：

在實際的操作時，我們常找不到 3rd.Huzita 公理 6 的摺痕，所以使用輔助的方式簡要說明如下：

洪萬生（2011）《摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學》書中，提到 Huzita 公理 6 的摺痕相當於分別以兩點為焦點、兩線為準線的兩拋物線的公切線。所以，我們利用 GGB 找出頂點和第二條平行線而得的拋物線，以及第一條平行線與垂直線交點和終邊而得的拋物線。當兩條拋物線都畫出來後，我們就很容易掌握三條 Huzita 公理 6 摺痕的位置，而能輕易的摺出來。如圖所示。



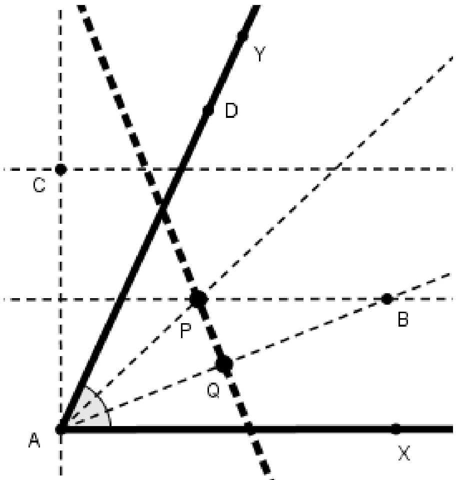
二、如何用 GGB 畫出 Huzita 公理 6 的摺痕：

由於 GGB 中沒有可以直接做出 Huzita 公理 6 摺痕的功能，我們便利用相關的特性進行作圖：

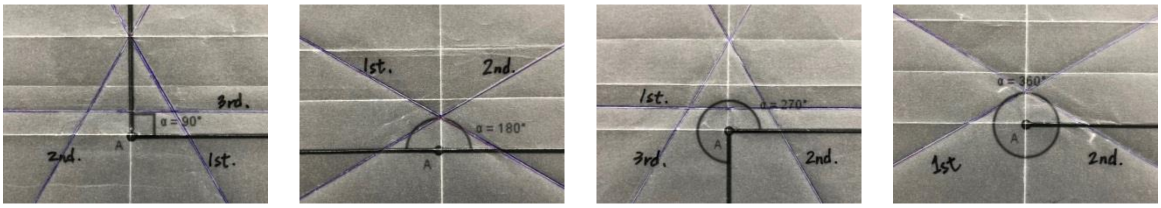
(一) 利用<u>**畫角度**</u>功能，畫出∠A，

(二) 利用<u>**畫指定角**</u>功能，將∠A 三等分，$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$為三等分線。

(三) 利用<u>**垂直線**</u>功能，作$\overleftrightarrow{PQ}$垂直於$\overleftrightarrow{AQ}$，$\overleftrightarrow{PQ}$即為所求。



三、我們在討論各種角度時的 Huzita 公理 6 摺痕時，並沒有討論特殊角的情況，包括 90 度、180 度、270 度、360 度，試摺如下圖所示。其中，108 度和 360 度做不出 3rd.Huzita 公理 6 的摺痕。



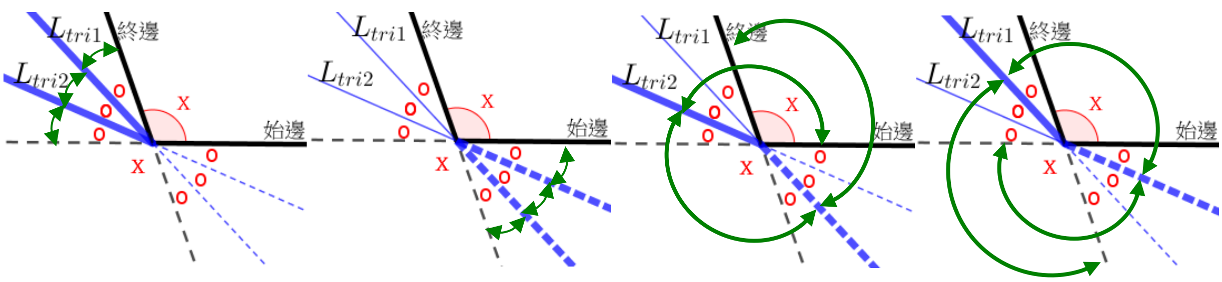
四、第二組被三等分角：

(一) 從研究結果【一】，我們可知在 0<A<90 的 3rd.Huzita 公理 6 摺痕和 270<A<360 的 1st.Huzita 公理 6 兩種情況，都需要用到其中一條三等分線的延長線，才能找到與其他度數雷同的三等分方法。

(二) 我們進一步想，如果各種角度都利用三等分線的延長線，是否都可得另一組三等分角？除原本兩條三等分線①外，還有②兩條三等分線的延長線、③1st.三等分線的延長線+2nd.三等分線、④1st.三等分線+2nd.三等分線的延長線等三種情況，其中②兩條三等分線的延長線，視為三等分被三等分之角的對頂角即可。其餘兩種情況，我們利用本研究的方法進行推論後，發現確實可以得到另一組被三等分角（③④兩種情況度數相同，但角的位置有差異），列表如下：

Huzita 公理 6	項目	0<A<90	90<A<180	180<A<270	270<A<360
1st. Huzita 公理 6 摺痕	三等分角度數	540–A	540–A	540–A	A
	被三等分角的位置	始邊或終邊和另一邊之延長線的夾角			
2nd. Huzita 公理 6 摺痕	三等分角度數	360+A	360+A	720–A	720–A
	被三等分角的位置	原角+360 度或原角對頂角+360 度 的夾角			
3rd. Huzita 公理 6 摺痕	三等分角度數	360–A	180+A	180+A	180+A
	被三等分角的位置	始邊或終邊和另一邊之延長線的夾角			

(三) 此兩組共四個被三等分角，位置恰各為原角、原角的對頂角、始邊至終邊延長線的夾角、始邊延長線至終邊的夾角等四種，如下圖所示（以 90<A<180，2nd. Huzita 公理 6 摺痕為例）。



五、摺紙三等分任意角可一題多解：

經過本研究的討論與分析，我們發現，利用摺紙三等分任意角的方式變得並非唯一解，可用至少三種解法處理同一個問題。以三等分 70 度角為例：

(一) 方法一：利用做出原角的 1st.Huzita 公理 6 摺痕，去摺出三等分線。

(二) 方法二：延長始邊，利用做出始邊延長線與終邊夾角（70 度的補角 110 度）的 2nd.Huzita 公理 6 摺痕，去摺出三等分線。

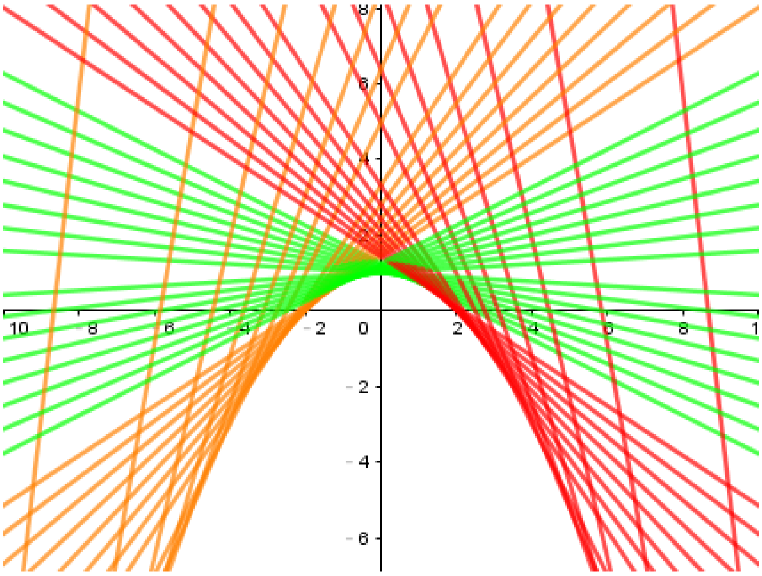
(三) 方法三：將始邊和終邊延長，利用做出兩條延長線夾角的 3rd.Huzita 公理 6 摺痕，去摺出三等分線。

六、對圓錐曲線的觀察與展望

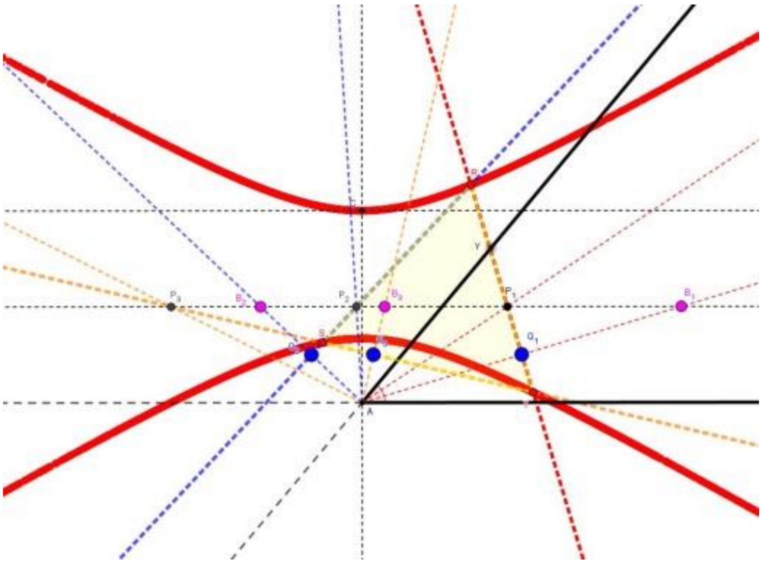
在本研究中，拋物線僅作為幫助摺紙作圖用，並沒有其他討論。其實，在文獻中（湯瑪斯・赫爾，2018、洪萬生，2011）有提到 Huzita 公理 6 與拋物線的關聯，如討論【一】所言。我們在作圖中，也發現 2nd.平行線居然與其中一條拋物線相切，且不論角度皆如此，雖然這不在本研究的內容中，但我們相信，這絕對有潛力可以讓我們繼續追下去！

另外，我們也在做圖中，觀察一些點、線的軌跡，如下面說明：

(一) 我們將不同角度的三條 Huzita 公理 6 的摺痕畫在同一張圖上，可見所有摺痕恰好圍出頂點為焦點、2nd.平行線為準線的拋物線。如右圖所示，其中紅色線為 1st.Huzita 公理 6 的摺痕，橘色為 2nd.，綠色為 3rd.。



(二) 我們利用 GGB 做出 Huzita6 三角形，再調整原角的度數，觀察 Huzita6 三角形三個頂點的軌跡。我們發現圖形狀似雙曲線，且分別由三個頂點的軌跡組成。如下圖：



本研究的推論以平面幾何的概念為主，較沒有以解析幾何的觀點進行論證或研究。但以此議題與圓錐曲線的關聯性，或許從解析幾何出發，配合方程式的運算，我們相信可以激盪出更多、更美妙的結果！

柒、結論

這次科展是個讓我們體驗，從實際操作到嚴謹推理論證的過程，有幾何軟體辦不到的作圖，但也反過來受軟體的幫助來摺出較準確的圖；我們有對於描圖紙上圖形的猜測，也透過證明發現、驗證我們的猜測，甚至在證明的過程中，從相似更進一步到我們沒想到的正三角形。其中，關鍵的第三條 Huzita 公理 6 的摺痕，也在本次研究被我們掌握了，且各種角度的分析，也一一被我們求出！知識海是無止盡的，希望我們有機會可以繼續探索其中的奧妙！

捌、參考資料及其他

一、Huzita, H.(1989). Axiomatic Development of Origami Geometry. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*,143-158.

二、洪萬生（2011）。摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學。臺北市：三民。

三、顧森（2012）。思考的樂趣：Matrix67 數學筆記。人民郵電出版社。

四、湯瑪斯・赫爾（2018）。數學摺紙計畫：30 個課程活動探索。世茂出版社。

五、黃啟皓（2019）。平面摺紙的數學理論探討。國立彰化師範大學數學系碩士論文，彰化。

六、楊雅淳（2019）。運用摺紙探討三次方程式解之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，高雄市。

七、維基百科－莫雷角三分線定理。

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%AB%E9%9B%B7%E8%A7%92%E4%B8%89%E5%88%86%E7%B7%9A%E5%AE%9A%E7%90%86

【評語】030420

作品研究 Huzita-Hatori 摺紙公理三等分任意角摺法的應用。關於利用摺紙公理摺出任意角的三等分角的過程，已經有許多文獻探討，作者們以角的度數分類探討三種 Huzita 公理 6 摺痕的位置和所圍三角形的特性，以及相對應三等分線之摺痕，並分別比較與黃啟皓(2019)和楊雅淳(2019)所著碩士論文探討方法的異同，作品內容豐富，然可惜數學論證的部分較為不足，是美中不足之處。

作品海報

摘要

Huzita-Hatori 公理和 Morley 三角形都如同黑暗中的一盞明燈，讓我們很想一見其廬山真面目！更想了解他們相會後會激盪出甚麼火花？

我們利用描圖紙摺紙、GGB 作圖，再配合推理論證，終於知道三條 Huzita 公理 6 分別三等分的角、度數、位置、以及與始邊的夾角度數；另外，更奇妙的是，我們發現兩個特別的三角形：第一，任意角的三條 Huzita 公理 6 的摺痕，會圍成三角形，而且此三角形必是完美的正三角形。第二，任意三角形各角的三條 Huzita 公理 6 的摺痕，各會圍成三角形，且此三個三角形彼此相似，他們和原三角形之間還有角度成等差和等腰的關係。

研究動機

《摺摺稱奇》一書談到摺紙和尺規作圖的理念和關聯。我們發現有個叫 Huzita-Hatori 的公理，其中公理 6 是無法用尺規作圖做出來的，以至於摺紙能完成三等分任意角的作圖。

我們想要研究一下，是否能從其中發現新事物？沒想到遇到了莫利三角形，我們希望把 Huzita 公理 6 的摺痕研究的更透徹，也想知道裡面還有沒有更多可以發掘的想法或特性？

研究設備及器材

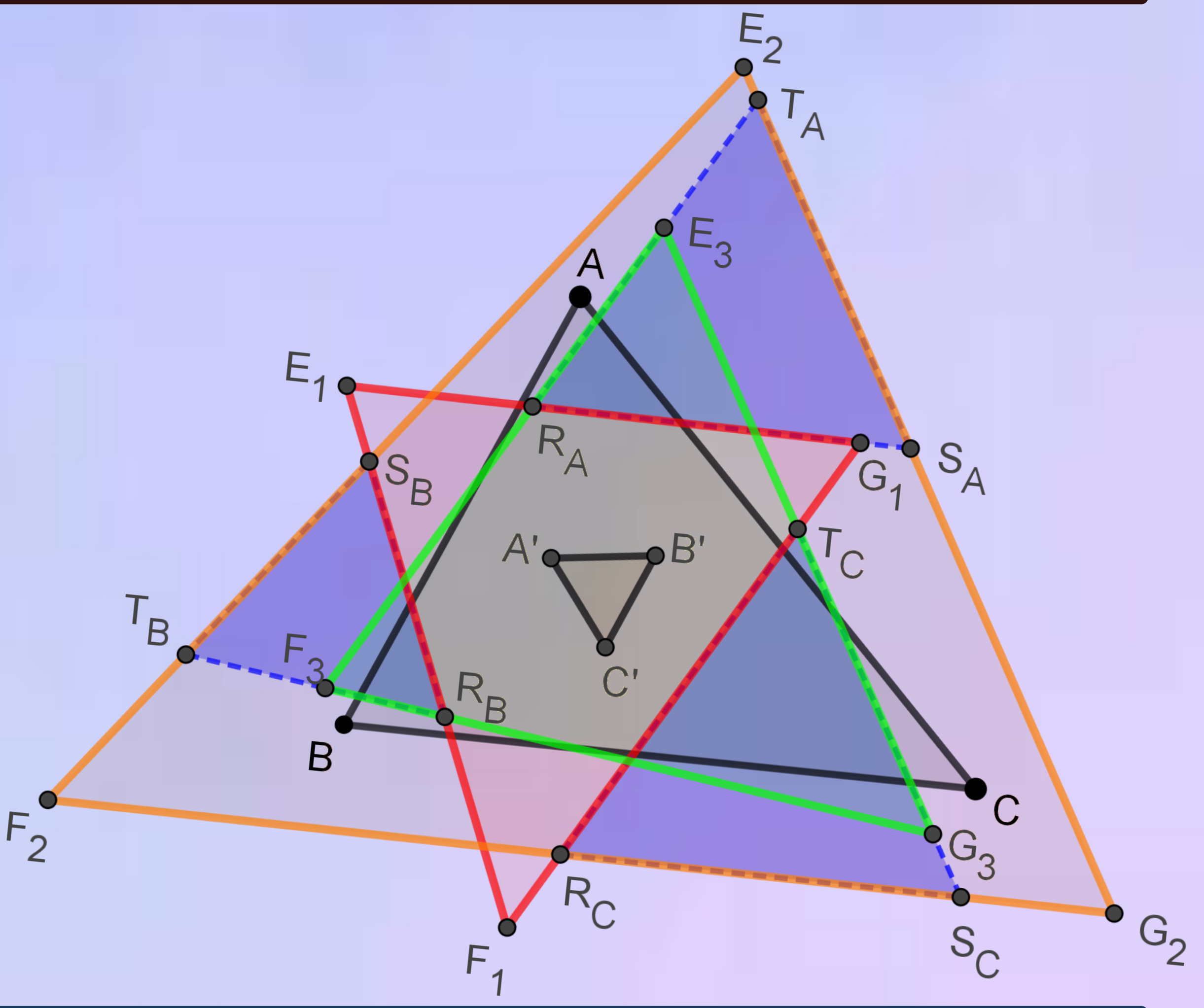
筆、紙張、描圖紙、直尺、幾何軟體 GeoGebra

研究目的

一、探討在角度不同時，三條 Huzita 公理 6所產生之摺痕的位置；分別三等分的角、度數、位置；以及摺痕與始邊的夾角度數，並其他相關特性。

二、任意角做出三條 Huzita 公理 6 摺痕所圍成的三角形有何特性？

三、三角形三個角分別作出三條 Huzita 公理 6 摺痕，圍成的三角形，有何特性？



研究過程與結果（一）Huzita公理6的摺痕

一、探討利用Huzita公理作出三等分角和莫利三角形：

1、Hisashi Abe、Jacques Justin、Youtube頻道「linjunJR」、黃啟皓（2019）、楊雅淳（2019）等人有做法。

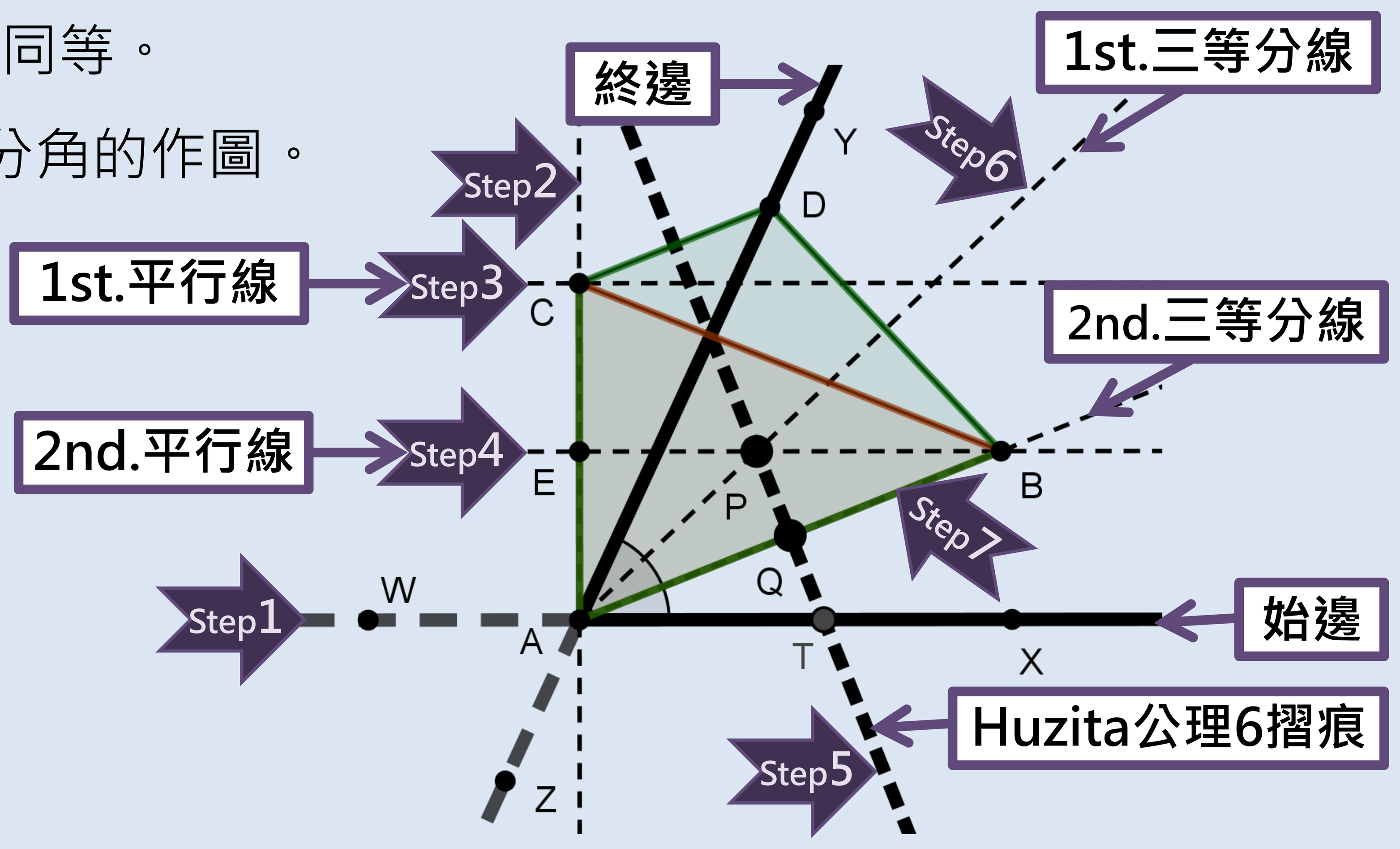
2、上述作法待處理問題：平行線作法交代不清、沒有符合摺紙公理每次摺疊完，都要把紙張重新攤開的規則、起始動作非一般化情況、公理用法不同等。

3、重新利用Huzita-Hatori的七個公理完成三等分角的作圖。

→本研究摺法共7個步驟，如右圖。

4、每個角都有3種Huzita公理6的摺法。

5、利用三等分角的摺紙作圖，作出莫利三角形。



二、摺紙三等分角的證明：

1、採用湯瑪斯．赫爾（2018）的證明法。

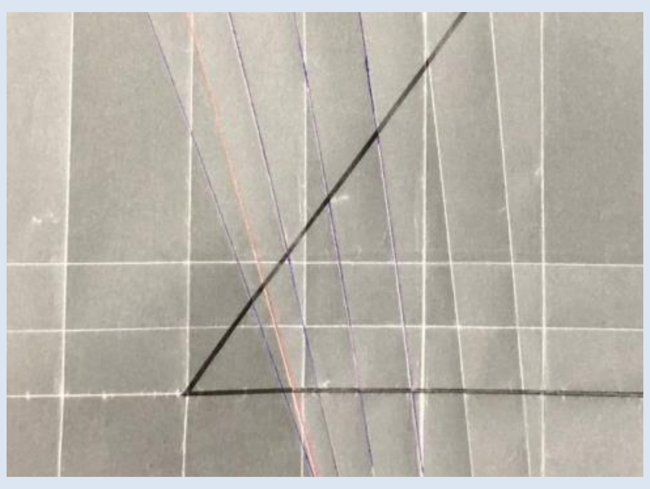
2、證明過程：

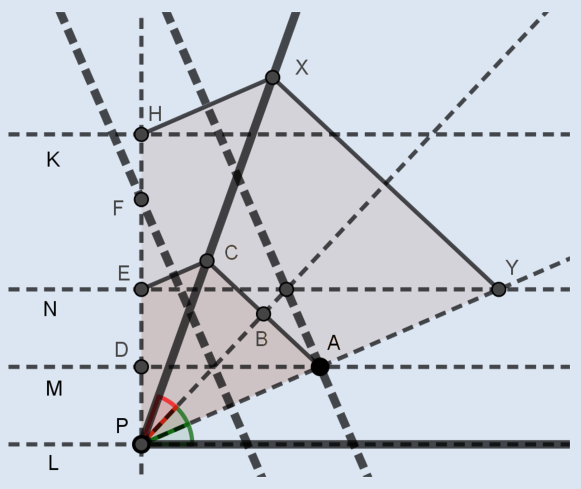
Part1 利用等腰三角形的對稱性 → Part2 利用等腰梯形的對稱性 →Part3 利用平行線內錯角相等

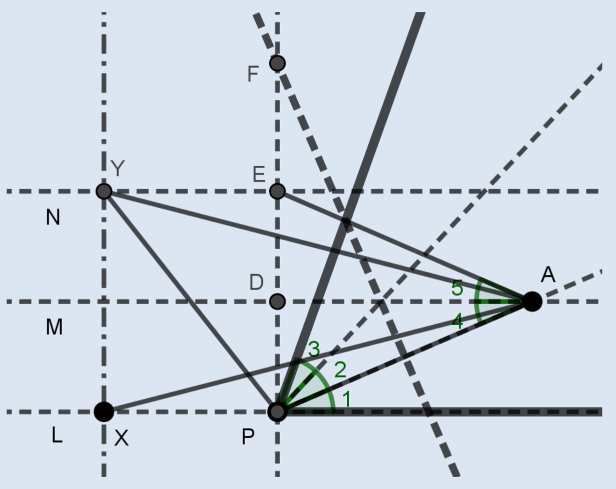
3、【性質1】Huzita公理6的摺痕會和2nd. 三等分線互相垂直。

4、【性質2】對某邊作垂線時，垂足的位置一定要通過角的頂點！

5、【性質3】調整兩平行線之間的距離，會產生一系列互相平行的Huzita公理6摺痕。







三、各種情況下的Huzita公理6摺痕：

1、過程：用GGB輔助摺出所要圖形 → 觀察圖案 → 幾何證明 → 討論各種情況（4種角度*3條摺痕）

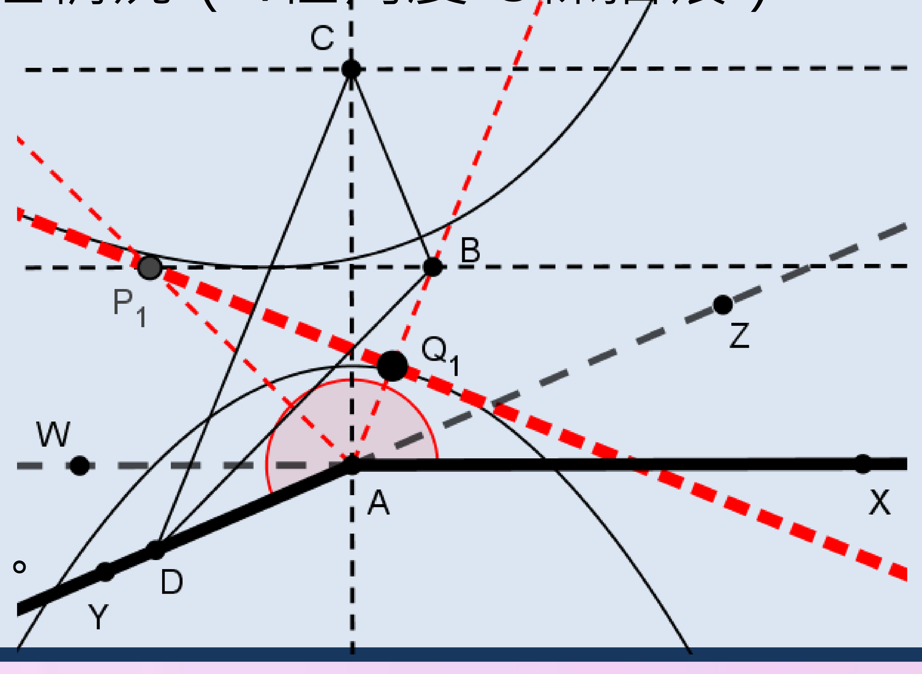
2、證明目標：

三等分何角（∠XAY）→度數（A）

→→ Huzita公理6的摺痕與始邊夾角（$90-\frac{A}{3}$）

3、 特例處理

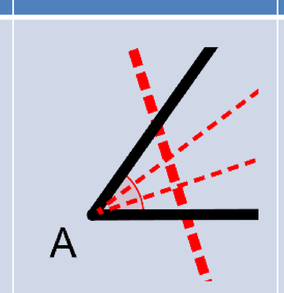
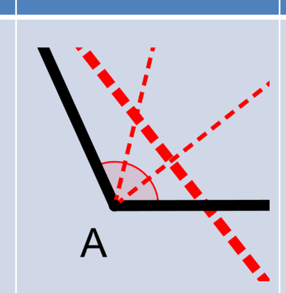
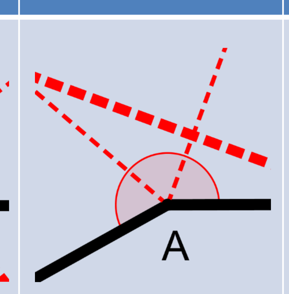
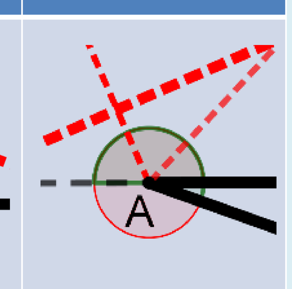
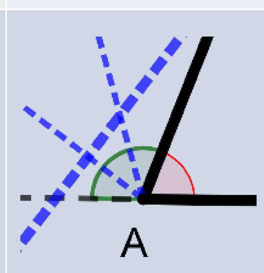
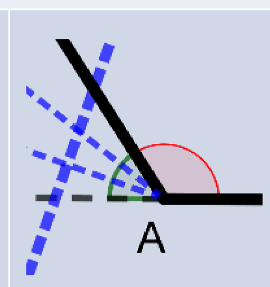
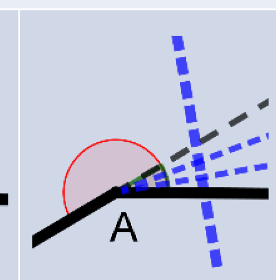
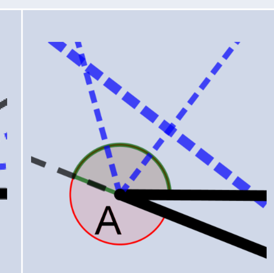
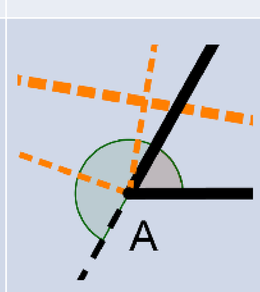
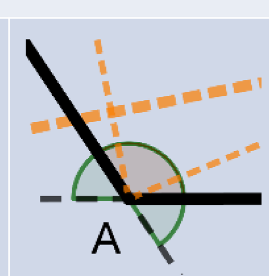
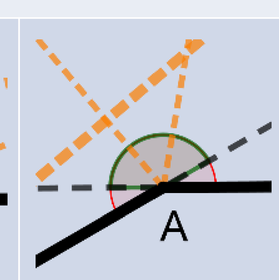
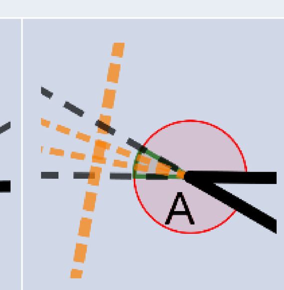
4、摺痕的平行配對關係：利用Huzita公理6的摺痕與始邊夾角進行推論。



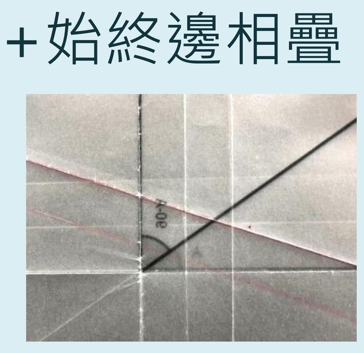
研究過程與結果（一）Huzita公理6的摺痕

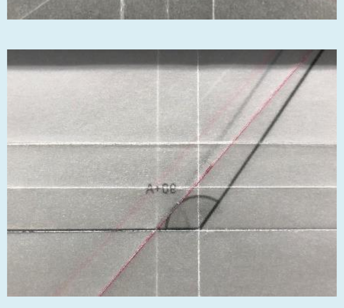
四、結果：

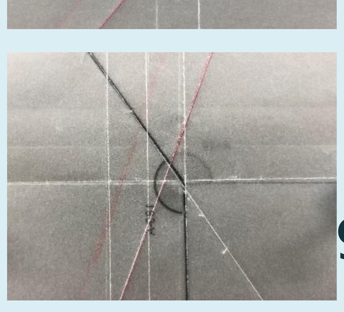
1、Huzita公理6摺痕相關特性一覽表如右圖：

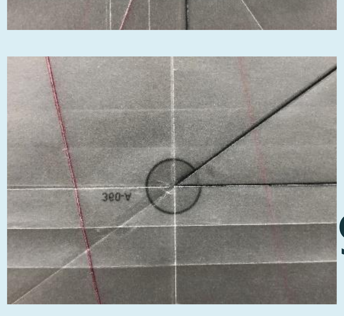
Huzita公理6摺痕		0 - 90	90 - 180	180 - 270	270 - 360
1st.	圖示				
	三等分角度數	A	A	A	540–A
	摺痕和始邊的夾角	$90-\frac{A}{3}$	$90-\frac{A}{3}$	$90-\frac{A}{3}$	$\frac{A}{3}-90$
	被三等分角的位置	原角的位置			
2nd.	圖示				
	三等分角度數	180–A	180–A	A–180	A–180
	摺痕和始邊的夾角	$30+\frac{A}{3}$	$30+\frac{A}{3}$	$150-\frac{A}{3}$	$150-\frac{A}{3}$
	被三等分角的位置	通常為始邊或終邊和其一的延長線的夾角			
3rd.	圖示				
	三等分角度數	180+A	360–A	360–A	360–A
	摺痕和始邊的夾角	$30-\frac{A}{3}$	$\frac{A}{3}-30$	$\frac{A}{3}-30$	$\frac{A}{3}-30$
	被三等分角的位置	通常為始邊和終邊延長線的夾角			

2、**兩角摺痕平行的配對關係**：兩角和為90、180、270、360度時，均可找到兩條Huzita公理6摺痕，其一經過翻轉+始終邊相疊，會與另一角的摺痕互相平行。

和為90度  0<A<90的1st.←→0<B<90的3rd.

和為180度  0<A<90的1st.←→90<B<180的2nd.

和為270度  0<A<90的3rd.←→180<B<270的2nd.
90<A<180的2nd.←→90<B<180的3rd.

和為360度  0<A<90的1st.←→0<B<360的3rd.
90<A<180的1st.←→180<B<270的3rd.

研究過程與結果（二）Huzita6三角形

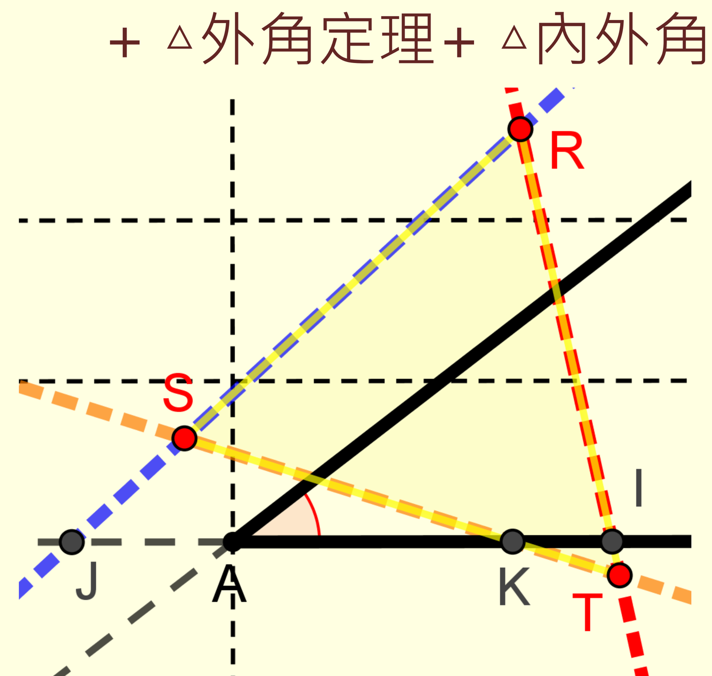
一、**定義**：任意角做出三條Huzita公理6的摺痕，圍成的三角形，我們稱作「**Huzita6三角形**」。

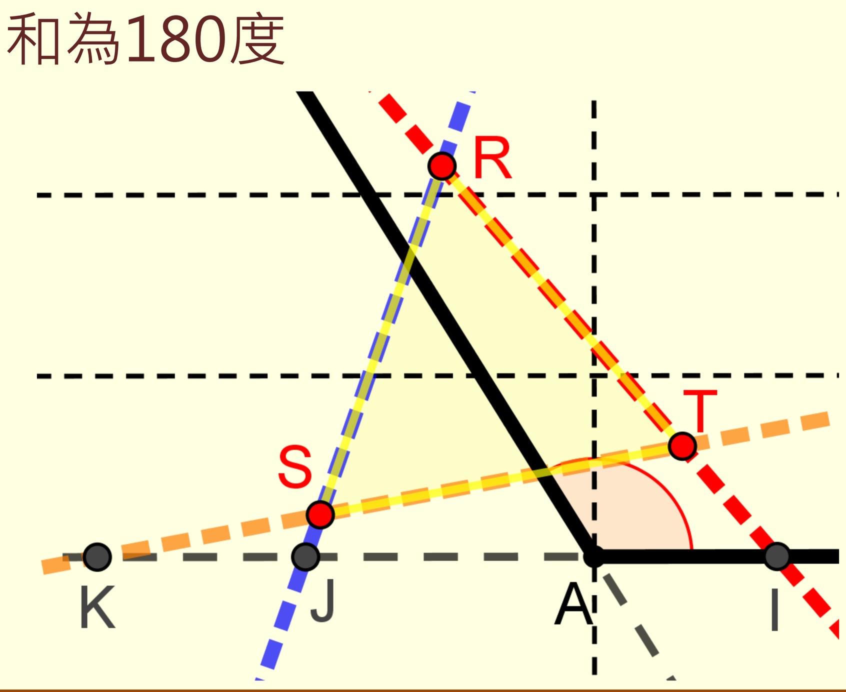
二、**過程**：

同角度三角形皆相似→不同角度亦相似→皆為正三角形

三、**證明方法**：

利用Huzita公理6摺痕與始邊的夾角+▵內角和為180度 +▵外角定理+▵內外角和為180度





研究過程與結果（三）Huzita-Morley三角形

一、**定義**：在摺莫利三角形時，三個角的Huzita公理6摺痕會圍成三角形，我們稱作「**Huzita-Morley三角形**」。

二、**種類（共6個）**：

順時針 - 1st.Huzita-Morley ▵、逆時針 - 1st.Huzita-Morley ▵
順時針 - 2nd.Huzita-Morley ▵、逆時針 - 2nd.Huzita-Morley ▵
順時針 - 3rd.Huzita-Morley ▵、逆時針 - 3rd.Huzita-Morley ▵

三、**證明方法**：

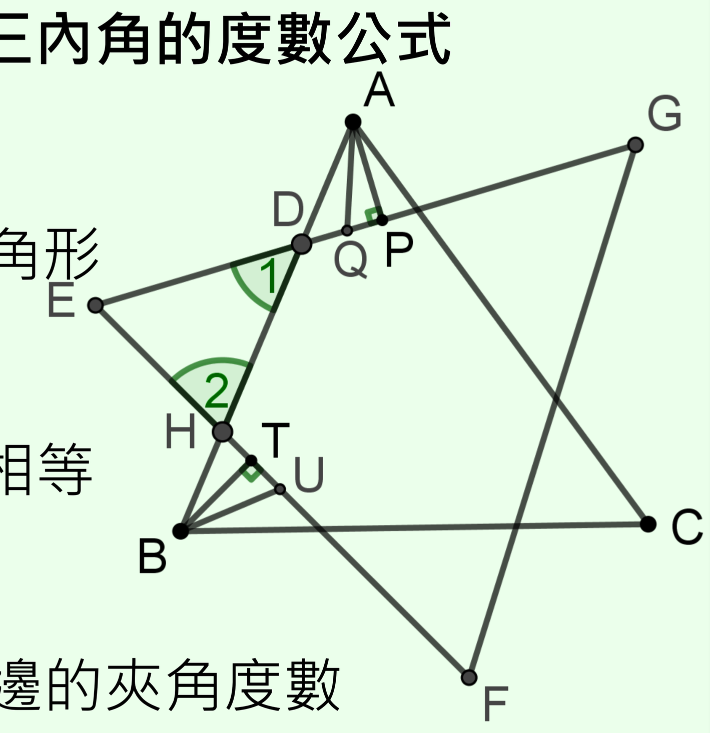
1、**關於Huzita-Morley三角形三內角的度數公式**

方法一：

利用【性質1】可得直角三角形
+被三等分角的度數
+多邊形的內角和+對頂角相等

方法二：

利用Huzita公理6摺痕與始邊的夾角度數
+多邊形的內角和+對頂角相等



2、**關於原▵內角度數成等差→ Huzita-Morley ▵為等腰▵**

假設：三角形三內角度數為 a–d、a、a+d
→ 代入Huzita-Morley ▵三內角的度數公式
→ 求得度數並觀察位置關係

3、**關於原▵為等腰▵ → Huzita-Morley ▵內角度數成等差**

假設：三角形三內角度數為 a、a、180–2a
→代入Huzita-Morley ▵三內角的度數公式
→求得度數並觀察位置關係

四、**結果**：

1、順時針的三種「Huzita-Morley三角形」（1st.、2nd.、3rd.）為位置不同的相似三角形；同理，逆時針的三種「Huzita-Morley三角形」為另一組相似三角形。

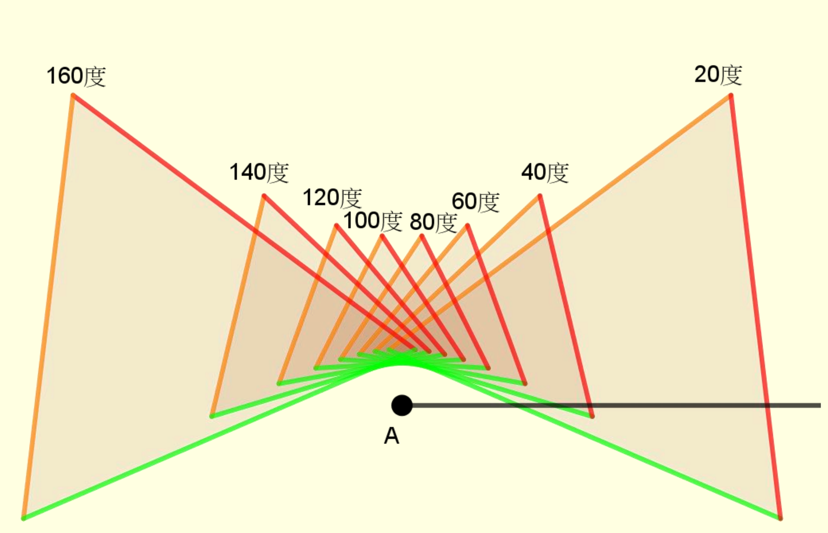
2、「Huzita-Morley三角形」的**等腰與等差互推性質**。

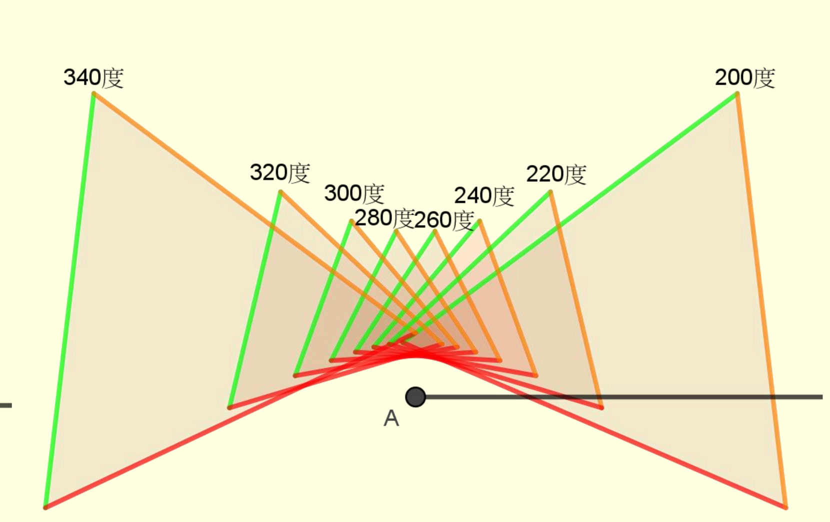
四、**結果**：

1、不論角度為何，「Huzita6三角形」皆為**正三角形**。

2、角度介於0-90與180-270時，▵偏向始邊（右偏）；
角度介於90-180與270-360時，▵偏離始邊（左偏）。

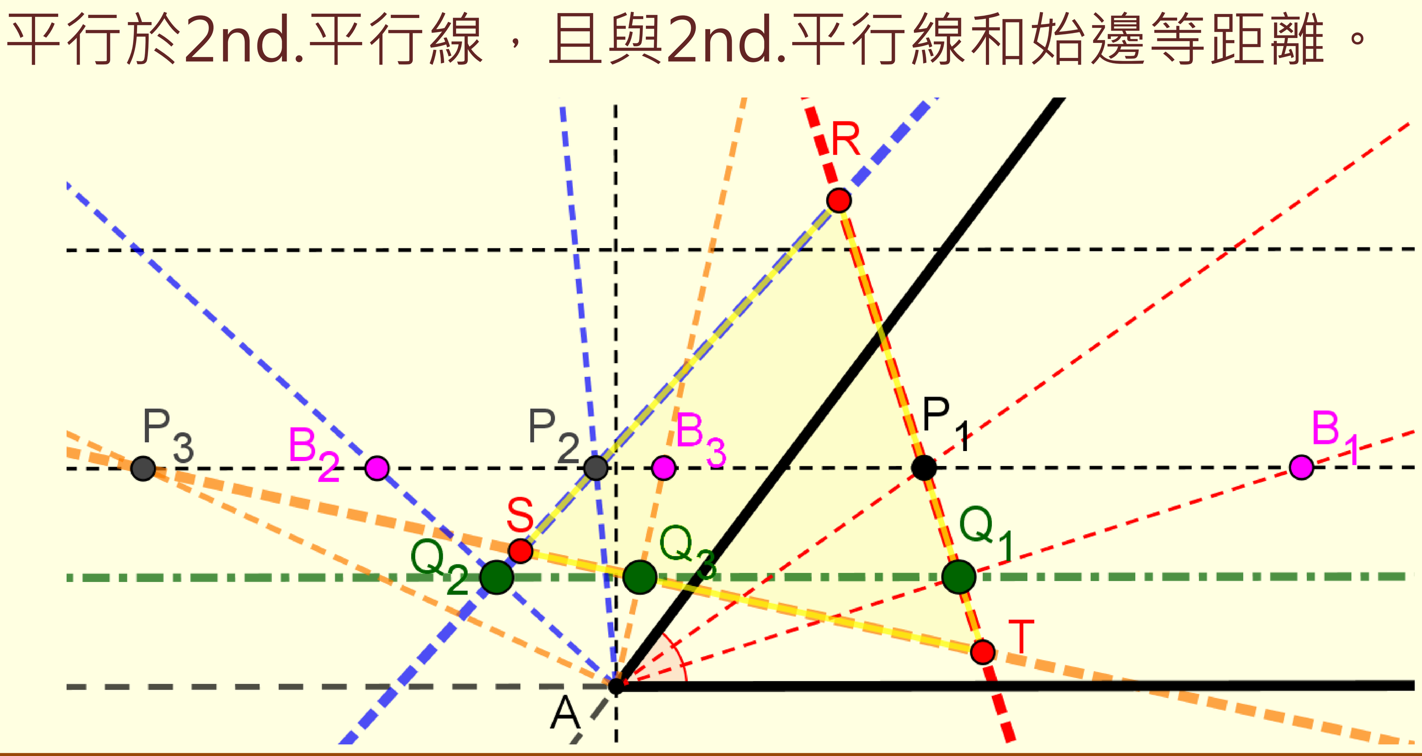
3、從0-180和180-360之間各取一角且度數差為180度，可做出兩個位置相同且全等的「Huzita6三角形」，但三條邊所對應的Huzita公理6摺痕不同。





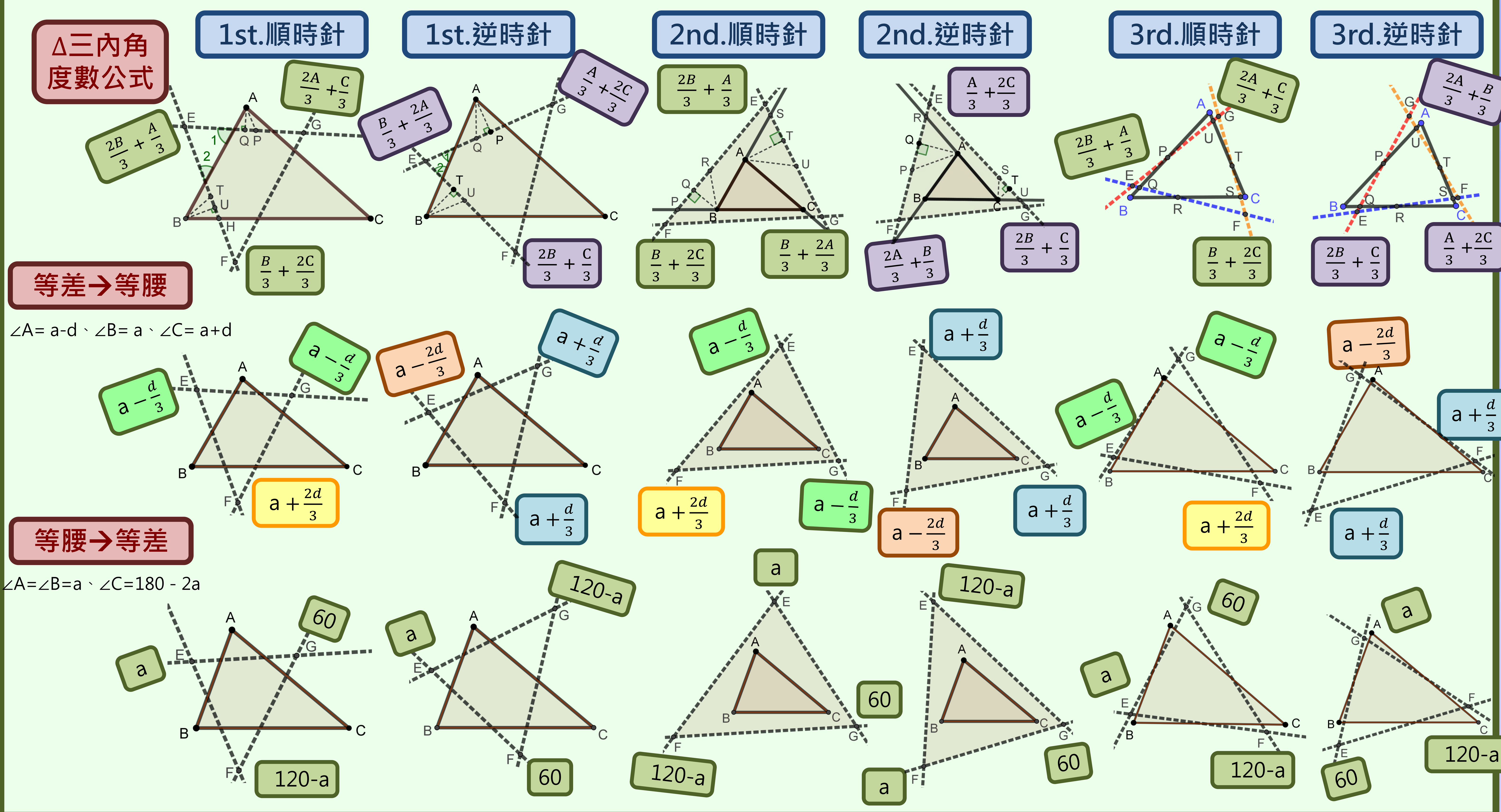
五、**發現（共線問題）**：

三條Huzita公理6的摺痕與其2nd.三等分線的交點會**共線**，平行於2nd.平行線，且與2nd.平行線和始邊等距離。



研究過程與結果（三）Huzita-Morley三角形

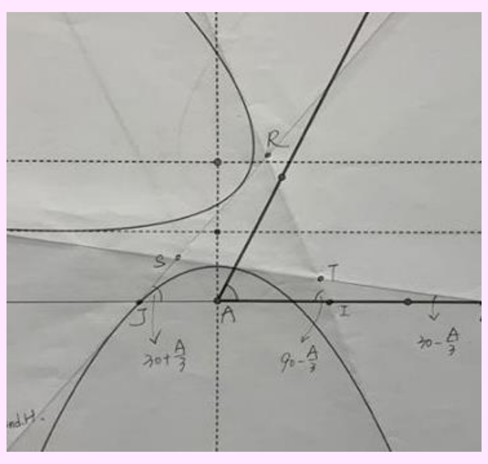
ΔABC為原三角形；ΔEFG為Huzita-Morley三角形



討論

一、利用GGB協助摺紙作圖：

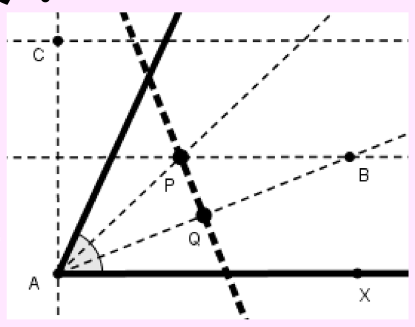
依據Huzita公理6的摺痕相當於分別以兩點為焦點、兩線為準線的兩拋物線的公切線。



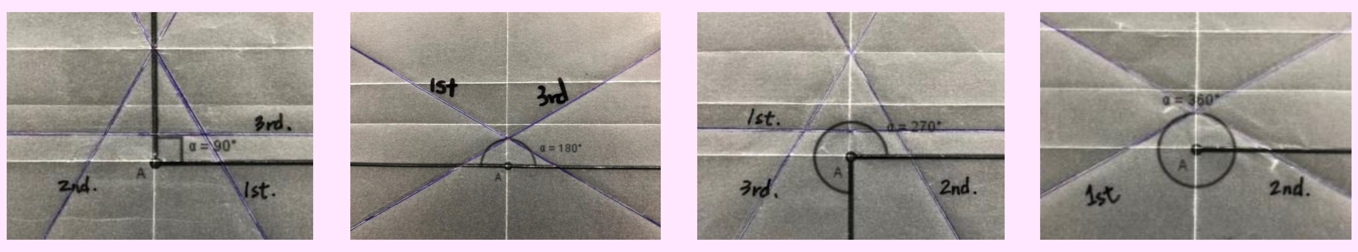
二、如何用GGB畫出Huzita公理6的摺痕：

關鍵功能 -

利用畫指定角功能，出指定角的 $\frac{1}{3}$。



三、特殊角的Huzita公理6摺痕（90、180、270、360度）

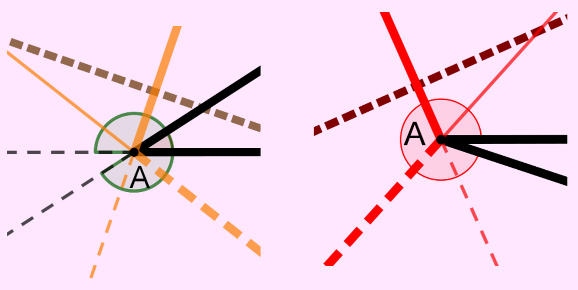


3、結果：

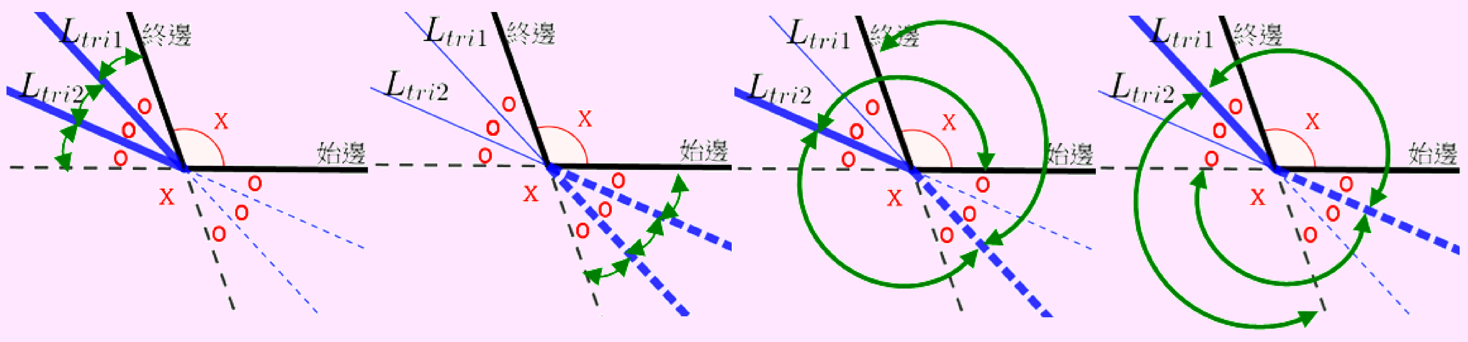
Huzita公理6		0 - 90	90 - 180	180 - 270	270 - 360
1st.	度數	540–A	540–A	540–A	A
	位置	始邊或終邊和另一邊之延長線的夾角			
2nd.	度數	360+A	360+A	720–A	720–A
	位置	原角+360度或原角對頂角+360度 的夾角			
3rd.	度數	360–A	180+A	180+A	180+A
	位置	始邊或終邊和另一邊之延長線的夾角			

四、關於第二組被三等分角：

1、從研究結果一出發，在 0<A<90的3rd.Huzita公理6摺痕 和 270<A<360的1st.Huzita公理6摺痕 兩種情況，都需要用到其中一條三等分線的延長線，才能找到與其他度數雷同的三等分方法。

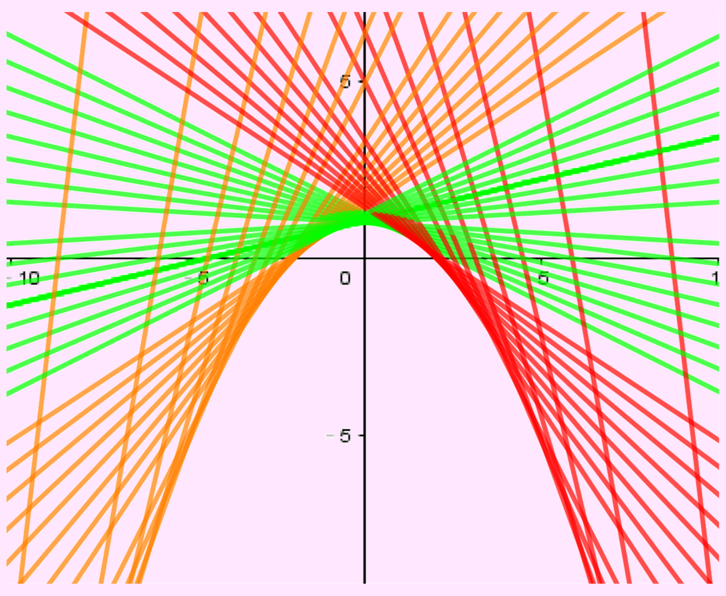


2、進一步利用兩條三等分線的延長線，去找出另一組三等分線（舉例如下圖）。

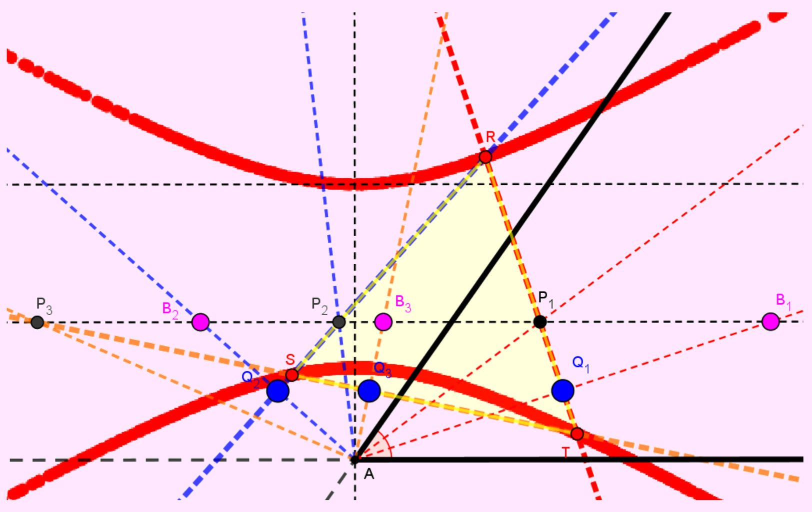


五、摺紙三等分任意角可一題多解

六、對圓錐曲線的觀察與展望：



三條Huzita公理6圍出的拋物線



Huzita6三角形三頂點的軌跡似雙曲線

結論

這次科展是個讓我們體驗，從實際操作到嚴謹推理論證的過程，有幾何軟體辦不到的作圖，但也受軟體的幫助來摺出較準確的圖；我們有對於描圖紙上圖形的猜測，也透過證明發現、驗證我們的猜測，甚至在證明的過程中，從相似更進一步到我們沒想到的正三角形。其中，關鍵的第三條Huzita公理6的摺痕，也在本次研究被我們掌握了，且各種角度的分析，也一一被我們求出！知識海是無止盡的，希望我們有機會可以繼續探索其中的奧妙！

參考資料

① Huzita, H.(1989). Axiomatic Development of Origami Geometry. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*,143-158.
② 洪萬生（2011）。摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學。臺北市：三民。
③ 顧森（2012）。思考的樂趣：Matrix67數學筆記。人民郵電出版社。
④ 湯瑪斯．赫爾（2018）。數學摺紙計畫：30個課程活動探索。世茂出版社。
⑤ 黃啟皓（2019）。平面摺紙的數學理論探討。國立彰化師範大學數學系碩士論文，彰化。
⑥ 楊雅淳（2019）。運用摺紙探討三次方程式解之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，高雄。
⑦ 維基百科 - 莫雷角三分線定理。