中華民國第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第二名

030419

那裡就是你

學校名稱：新北市立永和國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃靖堯	陳自瑩
國二 梁家瑋	黃國智
國二 李旻威	

關鍵詞：垂足三角形、費馬點、阿波羅尼斯圓

摘要

本研究主要是在探討平面上任一點對三角形三邊所在直線投影或反射後的點所連成的第一垂足（反射）三角形之性質，我們試圖對此垂足（反射）三角形作重複的動作，造出第二垂足（反射）三角形，如此反覆地進行下去，觀察它們與原三角形之間的關係，以及起始投影點的變化，並找出其規律。內容包括：

一、第一與第二垂足（反射）三角形是特殊三角形（等腰三角形、正三角形、直角三角形、相似三角形）時，起始投影點的所在位置。

二、歸納出第 n 垂足（反射）三角形的循環性、互換性與相似性。

研究過程中發現許多與本研究相關的著名幾何性質，如費馬點、布洛卡點、等動力點、阿波羅尼斯圓…等，也得到許多漂亮的性質，令人讚嘆古典幾何之美。

壹、研究動機

平面上任意點對某三角形的三邊所在直線作三個投影點或反射點，會連成什麼三角形呢？這個有意思的問題激發了我們的好奇心，這樣的三角形我們稱之為垂足三角形或反射三角形，從大家熟知的垂心所投影出垂足三角形具有周長最小的性質，到三角形外接圓上一點無法投影出垂足三角形而成一條西姆松線，我們便開始想像，這樣的垂足（反射）三角形若是特殊的三角形時，那麼它一開始的起始投影點會在哪裡？於是我們便一頭栽進平面幾何的想像空間，開始了無數次的手繪與 GSP、GGB 的試作修正，進一步找出答案。

貳、研究目的

一、歸納三角形的特殊心對三角形的三邊所在直線之垂足(反射)三角形之性質。

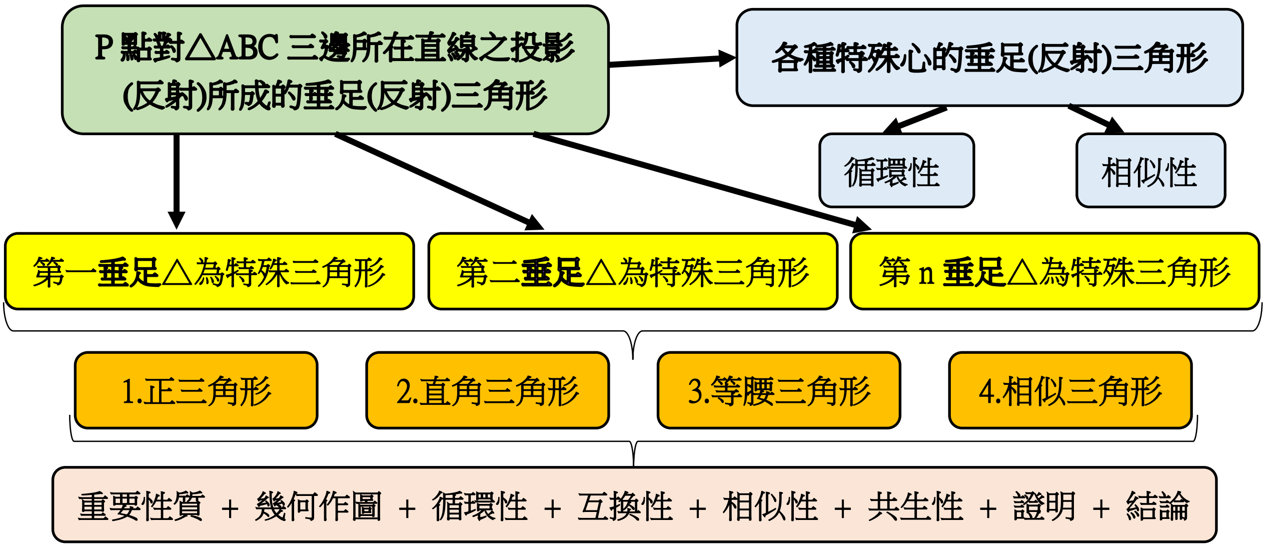
二、找出三角形的內部與外部的第一垂足(反射)三角形為特殊三角形之起始點位置。

三、找出三角形的內部與外部的第二垂足(反射)三角形為特殊三角形之起始點位置。

四、探討第 1 到第 n 垂足(反射)三角形彼此之間的關係是否具有循環性、互換性或其它性質。

參、研究器材

筆、紙、電腦、$\boldsymbol{GeoGebra}$、$\boldsymbol{The\ Geometer's\ Sketchpad}$、$\boldsymbol{Word}$



【圖 1.0】研究流程圖

肆、名詞定義與文獻探討

一、名詞定義：

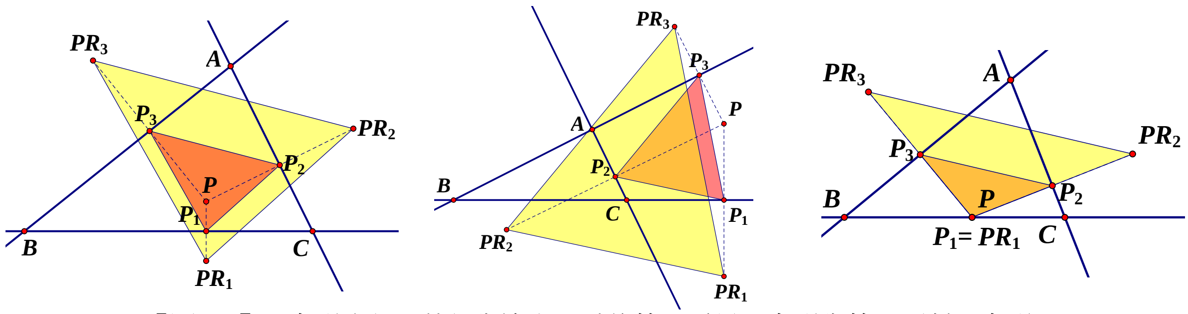
【名詞定義 1】相關代號

表 1：符號對照表

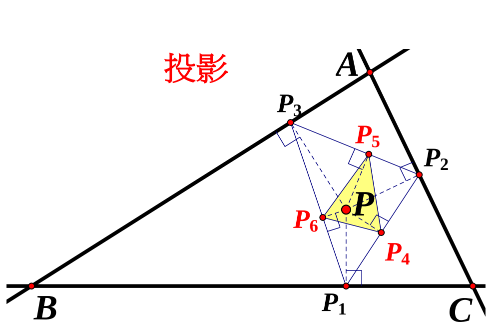
P	平面上一點 P，對某三角形三邊所在直線作投影或反射，此 P 點稱為**起始投影點**，簡稱「**起始點**」				
S	第 1 相似三角點	**S′**	第 2 相似三角點	**S″**	第 3 相似三角點
N	二階第 1 相似三角點	**N′**	二階第 2 相似三角點	**N″**	二階第 3 相似三角點
F	費馬點(類費馬點)	**F′**	第 2 費馬點	**Ω**	第 1 布洛卡點
Ω′	第 2 布洛卡點	**E**	外部第 1 相似三角點	**E′**	外部第 2 相似三角點
E″	外部第 3 相似三角點	**E‴**	外部第 4 相似三角點	**E⁗**	外部第 5 相似三角點
K	外部二階第 1 相似三角點	**K′**	外部二階第 2 相似三角點	$\mathbf{X_{A(B)}}$	第 1(第 2)等動力點

表 2：投影 與 反射點 對照表

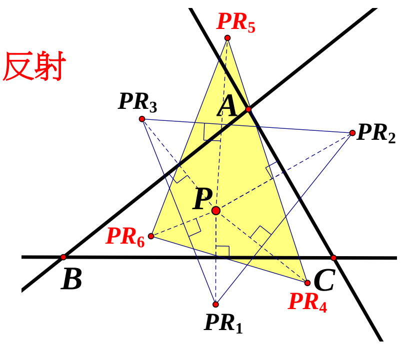
P_1	P 點對$\overleftrightarrow{BC}$投影後的垂足	P_2	P 點對$\overleftrightarrow{AC}$投影後的垂足	P_3	P 點對$\overleftrightarrow{AB}$投影後的垂足
PR_1	P 點對$\overleftrightarrow{BC}$反射後的點	PR_2	P 點對$\overleftrightarrow{AC}$反射後的點	PR_3	P 點對$\overleftrightarrow{AB}$反射後的點
$\triangle P_1P_2P_3$： P 點對△ABC 作的第一垂足三角形(如圖 1.1)			$\triangle PR_1PR_2PR_3$： P 點對△ABC 作的第一反射三角形(如圖 1.1)		
P_4	P 點對$\overleftrightarrow{P_1P_2}$投影後的垂足	P_5	P 點對$\overleftrightarrow{P_2P_3}$投影後的垂足	P_6	P 點對$\overleftrightarrow{P_3P_1}$投影後的垂足
PR_4	P 點對$\overleftrightarrow{PR_1PR_2}$反射後的點	PR_5	P點對$\overleftrightarrow{PR_2PR_3}$反射後的點	PR_6	P 點對$\overleftrightarrow{PR_3PR_1}$反射後的點
$\triangle P_4P_5P_6$： P 點對△ABC 作的第二垂足三角形(如圖 1.2) $\triangle P_7P_8P_9$稱為第三垂足三角形，以此類推			$\triangle PR_4PR_5PR_6$： P 點對△ABC 作的第二反射三角形(如圖 1.3) $\triangle PR_7PR_8PR_9$稱為第三反射三角形，以此類推		



【圖 1.1】三角形內部、外部與邊上一點的第一垂足三角形與第一反射三角形



【圖 1.2】$\triangle P_4P_5P_6$：為 P 點對△ABC 作的第二垂足△(亦為 P 點對$\triangle P_1P_2P_3$作的第一垂足△)



【圖 1.3】$\triangle PR_4PR_5PR_6$：為 P 點對△ABC 作的第二反射△(亦為 P 點對$\triangle PR_1PR_2PR_3$作的第一反射△)

【名詞定義 2】

$\triangle \boldsymbol{H_n}(\mathbf{P})$ $=\triangle P_{3n-2}P_{3n-1}P_{3n}$：P 點對△ABC 作的第 n 垂足三角形。$n \in \mathbb{N}$

$\triangle \boldsymbol{R_n}(\mathbf{P})$ $=\triangle PR_{3n-2}PR_{3n-1}PR_{3n}$：P 點對△ABC 作的第 n 反射三角形。$n \in \mathbb{N}$

【名詞定義 3】「角度關係」之相關名詞定義：

1.區域劃分：

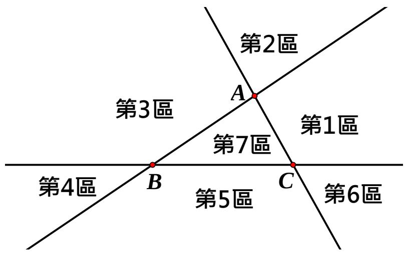
我們以三角形三邊所在直線，將平面分為 7 區，並利用角度關係找出起始點的正確位置，如圖 1.4 的 7 個區域，其中第 7 區為三角形「內部」區，第 1、3、5 區稱為三角形「邊外部」區，第 2、4、6 區稱為三角形「角外部」區

(1)起始點在三角形 內　部 ：第 7 區

(2)起始點在三角形 邊外部 ：第 1、3、5 區

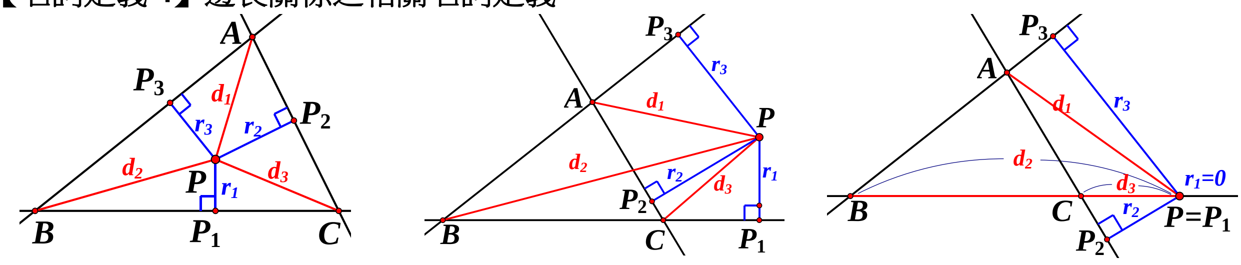
(3)起始點在三角形 角外部 ：第 2、4、6 區

(4)起始點在三角形的邊所在的 直線上 ：$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$



【圖 1.4】三角形內外部之分區

【名詞定義 4】邊長關係之相關名詞定義：

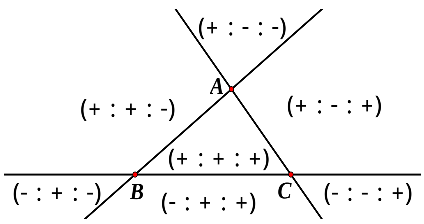


【圖 1.5】三角形內部、外部與邊上一點的三線坐標$(r_1：r_2：r_3)$

※三線坐標(*Trilinear Coordinates*)

為 P 點到$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{AB}$的有向距離比，如圖 1.5

表示方式：$(r_1：r_2：r_3)$用比連接，在三直線的兩側我們賦予不同的正負值，如圖 1.6，其在平面上具有唯一性。



【圖 1.6】三線坐標各象限的正負值

【名詞定義 5】相似三角點 S、S′、S″

銳角三角形內部除了 **O、Ω、Ω′**之外，可以使得$\triangle H_1(\mathrm{P})$與△ABC 相似的點。

【名詞定義 6】類布洛卡點

與三角形的第一、第二布洛卡點(*Brocard Point*)到**三頂點距離比**相同的點。如圖 2.24。

【名詞定義 7】 費馬點(*Fermat Point*)、類費馬點

若△ABC 的最大內角小於等於 120°時，分別以三邊為邊長**向外**作三個正三角形△ABC′、△BCA′、△CAB′，連接$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$，三條直線交於三角形內部或頂點上，此點稱為費馬點，若△ABC 的最大內角大於 120°時，三條直線交於三角形外部，此點稱為類費馬點。

【名詞定義 8】 第二費馬點(*Second Fermat Point*)

△ABC 中，分別以三邊為邊長**向內**作三個正三角形△ABC′、△BCA′、△CAB′，連接$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$，則三條直線的交點稱為第二費馬點。

【名詞定義 9】二階相似三角點N、N′、N″

銳角三角形內部除了 **H、Ω、Ω′**之外，可以使得△H_2(P)與△ABC 相似的點。

二、文獻探討：

根據參考文獻[1]，主要在討論三角形之特殊點的反射三角形之性質，我們將文獻中部分相關內容作修正，整理出下列性質：

(一) 三角形之特殊點的垂足(反射)三角形之循環性與互換性

性質 1.1

若△ABC為銳角三角形，其中 n∈ℕ，則

△ABC 的外心 O 為△H_{3n-2}(O)的垂心、△H_{3n-1}(O)的內心、△H_{3n}(O)的外心

性質 1.2

若△ABC為直角三角形，其中 n∈ℕ，

(1)△ABC 的外心 O 為△H_1(O)的垂心，之後即無法反射成三角形

(2)△ABC 的垂心 H 無法反射成三角形

(3)△ABC 的內心 I 為△H_{3n-2}(I)的外心、△H_{3n-1}(I)的垂心、△H_{3n}(I)的內心

性質 1.3

若△ABC為鈍角三角形，其中 n∈ℕ，

△ABC 的外心 O 為△H_{3n-2}(O)的垂心、△H_{3n-1}(O)的旁心、△H_{3n}(O)的外心

垂心 H、內心 I 的反射情況與外心類似，我們將其整理如下表 3。

表 3：外心 O、垂心 H 與內心 I 的反射情況

起始投影點 P	原△ABC類型	△H_{3n-2}(P)	△H_{3n-1}(P)	△H_{3n}(P)
外心 **O**	銳角三角形	**H**	**I**	**O**
	直角三角形	**H 僅為ΔH_1(O)之垂心**	不存在	不存在
	鈍角三角形	**H**	**I′(旁心)**	**O**

起始投影點 P	原△ABC類型	$\triangle H_{3n-2}(P)$	$\triangle H_{3n-1}(P)$	$\triangle H_{3n}(P)$
垂心 H	銳角三角形	I	O	H
	直角三角形	不存在	不存在	不存在
	鈍角三角形	I′(旁心)	O	H
內心 I	銳角三角形	O	H	I
	直角三角形	O	H	I
	鈍角三角形	O	H	I

(二) 三角形之特殊點的垂足(反射)三角形之相似性

性質 1.4

已知△ABC 非直角三角形，且已知其外心 O 和垂心 H，$n\in\mathbb{N}$

則$\triangle ABC\sim\triangle H_{3n-2}(O)\sim\triangle H_{3n}(O)$　且　$\triangle ABC\sim\triangle H_{3n-1}(H)\sim\triangle H_{3n}(H)$

性質 1.5 (★重要性質，它是決定循環性、互換性與相似性的關鍵)

若平面上一點 P 為不在三角形的外接圓與三邊所在直線上的任意點，

則第三垂足(反射)三角形必與原△ABC相似，即$\triangle ABC\sim\triangle H_{3n}(P)$，且

$\triangle H_{3n}(P)$為△ABC放大$(\sin\angle 2\sin\angle 4\sin\angle 6)^n$或$(\sin\angle 1\sin\angle 3\sin\angle 5)^n$所得；

$\triangle R_{3n}(P)$為△ABC放大$2^{3n}(\sin\angle 2\sin\angle 4\sin\angle 6)^n$或$2^{3n}(\sin\angle 1\sin\angle 3\sin\angle 5)^n$所得

性質 1.6

△ABC 的第一布洛卡點 Ω 和第二布洛卡點Ω′，無論反射幾次，均與原三角形相似

即$\triangle ABC\sim\Delta H_n(\Omega)$且$\Delta ABC\sim\Delta H_n(\Omega)$，$n\in\mathbb{N}$。如圖 2.23，

$\triangle H_n(\Omega)$為△ABC 邊長放大$(\sin\omega)^n$所得　且$\triangle H_n(\Omega')$為△ABC 邊長放大$(\sin\omega')^n$所得

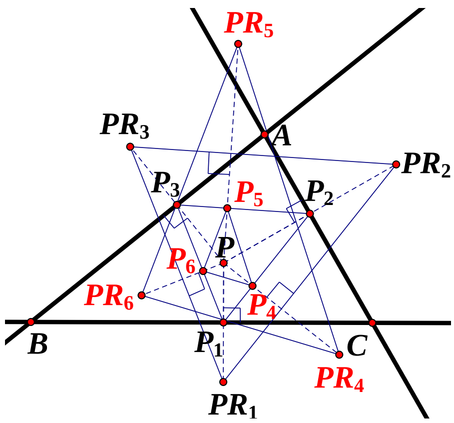
$\triangle R_n(\Omega)$為△ABC 邊長放大$(2\sin\omega)^n$所得且$\triangle R_n(\Omega')$為△ABC 邊長放大$(2\sin\omega')^n$所得

性質 1.7

$\triangle H_n(P)\sim\triangle R_n(P)$，之間的倍數關係

即$\triangle R_n(P)$邊長$=2^n\times\triangle H_n(P)$邊長，

故$\triangle R_n(P)$為$\triangle H_n(P)$放大2^n倍所得到的



【圖 1.7】三角形內部一點的垂足△與反射△之相似關係

【證明】如圖 1.7

1.因為 $2\overline{PP_1}=\overline{PPR_1}$，所以$\triangle R_1(P)=2^1\times\triangle H_1(P)$

2.因為$2^2\overline{PP_4}=\overline{PPR_4}$，所以$\triangle R_2(P)=2^2\times\triangle H_2(P)$

3.因為$2^n\overline{PP_{3n-2}}=\overline{PPR_{3n-2}}$，所以$\triangle R_n(P)=2^n\times\triangle H_n(P)$

由於性質 1.7 中$\triangle H_n(P)$會與$\triangle R_n(P)$相似，故**我們將以垂足$\triangle H_n(P)$為主要的討論方式，用投影取代反射**，以利研究進行，找出 P 點的垂足三角形是特殊三角形的 P 點所在位置。

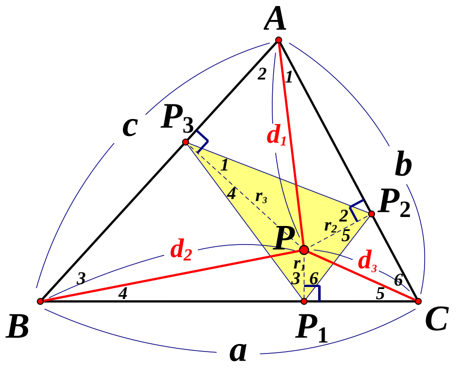
伍、研究過程或方法

由於參考文獻[1]只侷限於銳角三角形內部一點反射 1 次的狀況作討論，我們將起始點的範圍擴大到三角形所在平面上的任意點對任意三角形所作的第 n 垂足三角形。開始尋找其起始點所在的位置與規律。

一、第一垂足(反射)三角形△H_1(P)為特殊三角形的起始投影(反射)點

我們將△ABC 分成內部和外部兩部分討論(分區如圖 1.4)，利用**角度關係**與**邊長關係**尋找△H_1(P)的起始點的位置。為方便討論，我們分別為以下三區作角度與邊長關係的建模。

【△ABC 內部(第 7 區)的起始點建模】



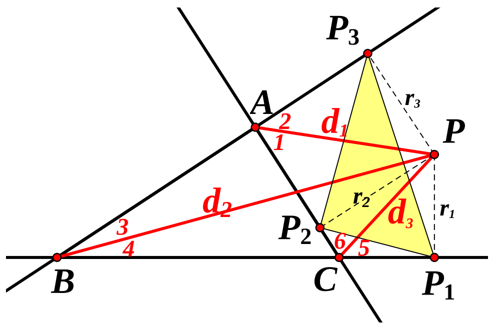
【圖 2.1】三角形內部(第 7 區)一點與三頂點之角度與邊長關係定義

起始點 P 為△ABC 內部一點時，P_1、P_2、P_3 是 P 在三邊之垂足。角度與邊長關係如圖 2.1。

起始點 P 為外部一點時，如圖 2.2、2.3。

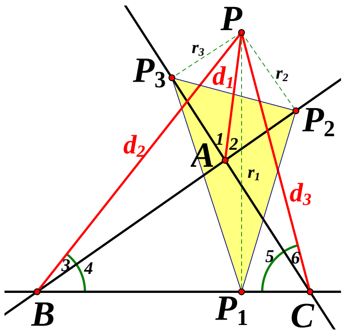
設 $\overline{PA}=d_1$，$\overline{PB}=d_2$，$\overline{PC}=d_3$ 且 ∠1、∠2、∠3、∠4、∠5、∠6 位置如圖所示。

【△ABC 邊外部(第 1 區)的起始點建模】



【圖 2.2】三角形外部(第 1 區)一點與三頂點之角度與邊長關係定義

【△ABC 角外部(第 2 區)的起始點建模】



【圖 2.3】三角形外部(第 2 區)一點與三頂點之角度與邊長關係定義

性質 2.1

已知平面上任一點 P，P 點對△ABC 作垂足△$P_1P_2P_3$，

若$\overline{PA}=d_1$，$\overline{PB}=d_2$，$\overline{PC}=d_3 \Rightarrow \overline{P_2P_3}=d_1 sinA$ 且 $\overline{P_1P_3}=d_2 sinB$ 且 $\overline{P_1P_2}=d_3 sinC$。

【證明】

由上圖 2.1、2.2、2.3 知 ∵A、P_3、P、P_2四點共圓，d_1 為此圓的直徑

∴由正弦定理知 $d_1=\frac{\overline{P_2P_3}}{sinA}$，⇒ $\overline{P_2P_3}=d_1 sinA$，同理$\overline{P_1P_3}=d_2 sinB$ 且 $\overline{P_1P_2}=d_3 sinC$。

性質 2.2　無法投影出垂足三角形與僅能投影 1 次的點

1. 在△ABC 外接圓上的 P 點，其$\triangle H_1(P)$不存在，投影點連線即為**西姆松線(*Simson line*)**。
2. 在△ABC 三邊所在直線上的 P 點，(不包含 A、B、C 三頂點)，僅存在$\triangle H_1(P)$。

(一) 若$\triangle H_1$(P)為等腰三角形

1. 邊長關係：

△ABC 可投影出等腰$\triangle P_1P_2P_3$之起始點位置，

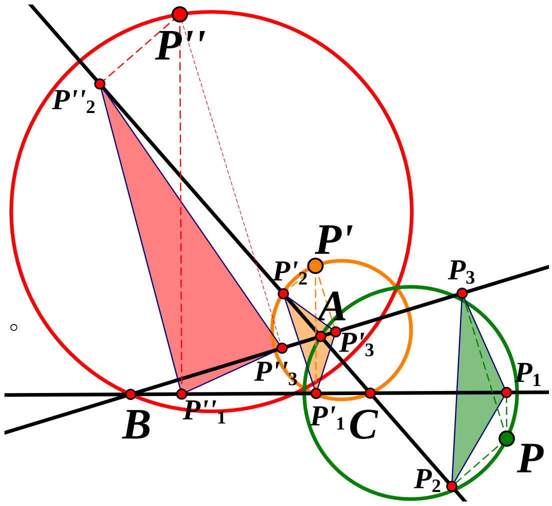
由性質 2.1，我們可以得到以下關係式：

$\overline{P_3P_2}=\overline{P_3P_1} \Rightarrow d_1\sin A = d_2\sin B \Rightarrow \frac{d_1}{d_2}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$。

由上式可知動點 P 到兩定點比為定值，此即為

阿波羅尼斯圓(*Apollonius Circle*)。同理，

若$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_3}$，$\Rightarrow \frac{d_2}{d_3}=\frac{c}{b}$；若$\overline{P_2P_1}=\overline{P_2P_3}$，$\Rightarrow \frac{d_3}{d_1}=\frac{a}{c}$。



【圖 2.22】等腰三角形反射圓上面任意點P′、P″、P'''之第一垂足三角形均為等腰三角形

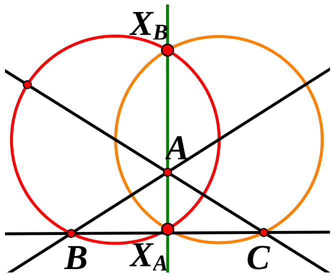
2. 小結：

(1)△ABC 為非等腰三角形時，我們可作出 3 個由 A、B、C 三頂點出發的阿波羅尼斯圓，如圖 2.4，圓上任意點 P 之$\triangle H_1(P)$均為等腰三角形，稱之為「**等腰三角形反射圓**」。

(2)△ABC 為等腰△時，如圖 2.5。以∠B=∠C 為例，∠A 為出發點的阿波羅尼斯圓會退化成一條直線。

(3)△ABC 為正三角形時，三個阿波羅尼斯圓均退化成一直線。

(4)等動力點X_A、X_B(*Isodynamic point*)即三個等腰三角形反射圓之交點，其為$\triangle H_1(P)$均為正三角形。



【圖 2.5】阿波羅尼斯圓的退化

(二) 若$\triangle H_1$(P)為正三角形

以下將△ABC 與$\triangle H_1$(P)分別用「**角度關係**」與「**邊長關係**」來尋找起始點所在位置。

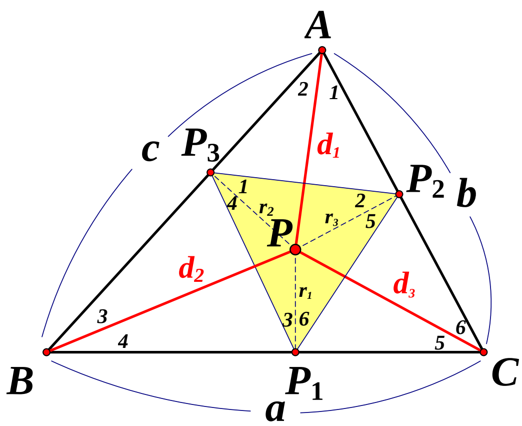
1. 起始點的尋找：

●角度關係(第 7 區)：如圖 2.6，

∵∠1+∠4=∠2+∠5=∠3+∠6=60°

∴∠BPC=(∠1+∠2)+(∠3+∠6)=∠A+60°

同理∠CPA=∠B+60°　，∠APB=∠C+60°



【圖 2.6】正三角形內部(第 7 區)一點與三頂點之角度與邊長關係

性質 2.3

若 $\triangle H_1$(P)為正三角形，**P** 在△ABC 內部(第七區)

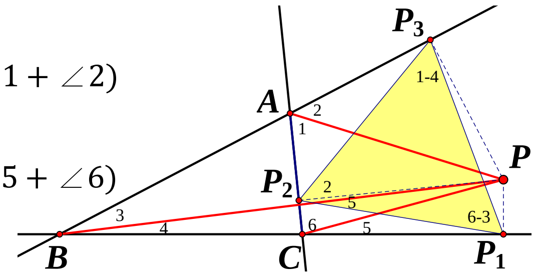
(1)當△ABC 為鈍角＞**120**°，內部起始點不存在，**P 點位於該鈍角所對應的最大邊外部**

(2)當△ABC 為鈍角＝**120**°，**P 點會位於鈍角所對應的最大邊上 (如圖 2.17*b*)**

(3)當△ABC 為三個角均＜**120**°，**P 點位於三角形的內部**

●角度關係(第 1 區)：如圖 2.7

$$\begin{cases}\angle P_1 = \angle 6 - \angle 3 = 60^\circ \\ \angle P_2 = \angle 2 + \angle 5 = 60^\circ \\ \angle P_3 = \angle 1 - \angle 4 = 60^\circ\end{cases} \wedge \begin{cases}\angle A = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) \\ \angle B = \angle 3 + \angle 4 \\ \angle C = 180^\circ - (\angle 5 + \angle 6)\end{cases}$$



【圖 2.7】邊外部(第 1 區)一點 P 投影後與三頂點之角度關係

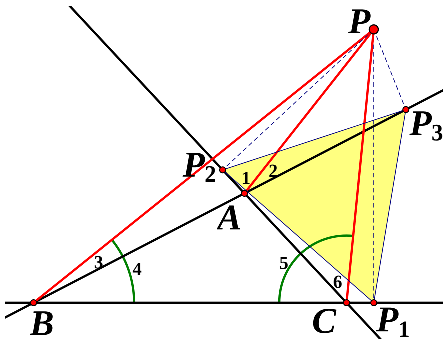
可得 $\angle BPC = \angle 5 - \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 - 120^\circ$

$\angle BPC = \angle A - 60^\circ$，$\Rightarrow$**$\angle A > 60^\circ$**(大角)；

同理，$\angle BPA = \angle C - 60^\circ$，$\Rightarrow$**$\angle C > 60^\circ$(大角)**；**$\angle B < 60^\circ$(小角)**。

●角度關係(第 2 區) 如圖 2.8，在$\triangle H_1(P)$中，

$$\begin{cases}\angle P_1 = \angle 3 + \angle 6 = 60^\circ \\ \angle P_2 = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 5) = 60^\circ \\ \angle P_3 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 4) = 60^\circ\end{cases}$$



【圖 2.8】角外部(第 2 區)一點 P 投影後與三頂點之角度關係

可得 $\angle 2 + \angle 5 = 120^\circ$ 且 $\angle 3 + \angle 6 = 60^\circ$

$\Rightarrow (\angle 2 - \angle 3) + (\angle 5 - \angle 6) = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle APB + \angle C = 60^\circ$，$\Rightarrow$**$\angle C < 60^\circ$(小角)** ；

同理，$\angle APC + \angle B = 60^\circ$，$\Rightarrow$**$\angle B < 60^\circ$**(小角)；**$\angle A > 60^\circ$**(大角)。

●邊長關係(全區)

由性質 2.1 知，$\because \overline{P_2P_3} = \overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_2}$ ，$\Rightarrow d_1\sin A = d_2\sin B = d_3\sin C$，

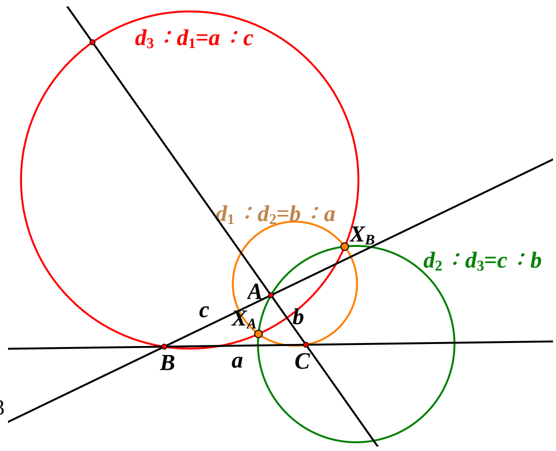
$\Rightarrow d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}$ ，

$\Rightarrow d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$，

$\Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{a}$ 且 $\frac{d_2}{d_3} = \frac{c}{b}$ 且 $\frac{d_3}{d_1} = \frac{a}{c}$。

【作法】如圖 2.9

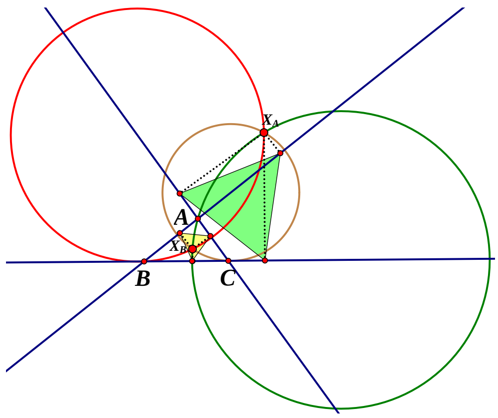
$\therefore$P 點與 A、B、C 三頂點的距離 d_1、d_2、d_3 若成上述比例關係，$\triangle H_1$(P)即為正△。



【圖 2.9】第一反射為正三角形之阿波羅尼斯圓作圖(等動力點)

此即對△ABC 的三個頂點兩兩作出符合上數比例的阿波羅尼斯圓之交點即為所求。

三個阿波羅尼斯圓會有兩交點 $\mathbf{X_A}$、$\mathbf{X_B}$，**分別稱為第一與第二等動力點**，利用邊長關係式可同時找出△ABC 內部與外部的起始點，如圖 2.10。



【圖 2.10】兩等動力點作第 1 垂足(反射)三角形為正三角形

2. 小結：

△ABC 中一內角θ，當$\theta \geq 120°$時，我們稱θ為「**超大角**」；當$60° \leq \theta < 120°$時，稱θ為「**大角**」；當$\theta < 60°$時，稱θ為「**小角**」，則△H_1(P)為正三角形的起始點分布情形如下：

(1) 大角+大角+小角 ，如圖 2.11

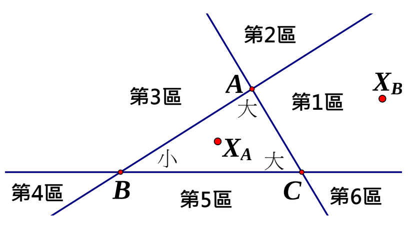
三角形中有 1 個角小於$60°$，2 個角大於等於$60°$時，內部有一起始點X_A，此時外部起始點X_B必最小邊的「邊外部」區域中。

(2) 大角+小角+小角 ，如圖 2.12

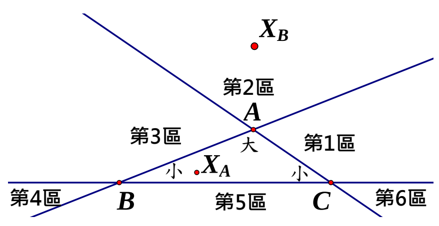
三角形中有 2 個角小於$60°$，1 個角大於$60°$時，內部有一起始點X_A，此時外部起始點X_B在大角的「角外部」區域中。

(3) 60°+大角+小角 ，如圖 2.13 和 2.17a

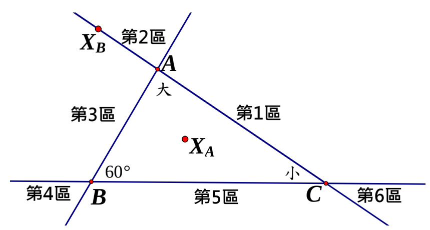
三角形中僅有一角為$60°$時，另外 2 個角分別為大角和小角，內部有一起始點X_A，此時外部起始點X_B在小角頂點通過大角頂點的射線上。



【圖 2.11】△ABC 為大角+大角+小角時，△H_1(P)為正△之起始點為X_A、X_B所在位置



【圖 2.12】△ABC 為大角+小角+小角時，△H_1(P)為正△之起始點X_A、X_B所在位置



【圖 2.13】△ABC 為 60°+大角+小角時，△H_1(P)為正△之起始點X_A、X_B所在位置

(4) 若超大角=120^o ，如圖 2.14

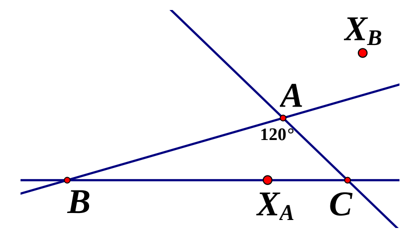
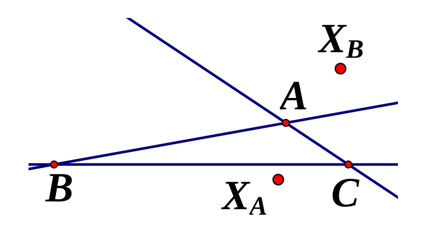
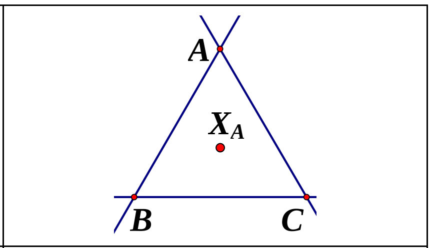
內部無起始點，起始點X_A會落在最大邊上，X_B會落在最大角的「角外部」。

(5) 若超大角＞120^o ，如圖 2.15

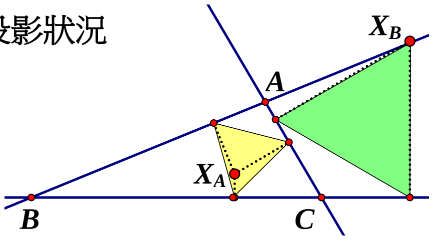
內部無起始點，起始點X_A會落在最大邊的「邊外部」，X_B會落在最大角的「角外部」。

(6) $\boxed{60° + 60° + 60°}$，如圖 2.16

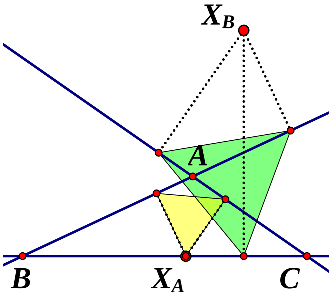
即原三角形為正△，僅有內部中心起始點X_A，並不存在外部起始點。

		
【圖 2.14】超大角=120°時，起始點X_A 、X_B所在位置	【圖 2.15】超大角> 120°時起始點X_A 、X_B所在位置	【圖 2.16】原三角形為正三角形時，起始點X_A所在位置

3. 實際投影狀況



【圖 2.17a】第一垂足三角形為正三角形
（∠C＝60°時的投影狀況）



【圖 2.17b】第一垂足三角形為正三角形
（∠A＝120°時的投影狀況）

(三) 若△$H_1(P)$為直角三角形

1. 角度關係：

如圖 2.1，若∠$P_3P_1P_2$＝90°，⇒∠BPC＝∠A＋90°， ∵∠$P_3P_1P_2$＝∠3＋∠6＝90°，

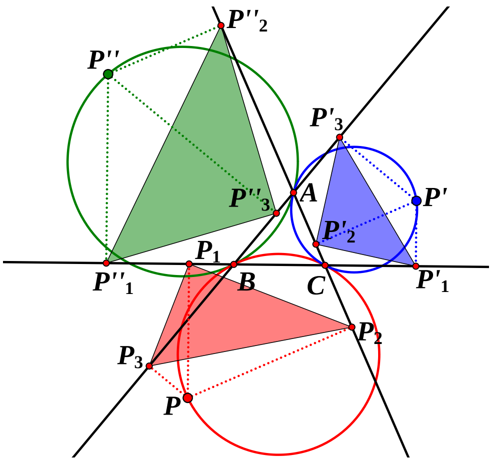
∴∠BPC＝（∠1＋∠2）＋（∠3＋∠6）＝∠A＋90°。

同理∠$P_1P_2P_3$＝90°，⇒∠CPA＝∠B＋90°，∠$P_2P_3P_1$＝90°，⇒∠APB＝∠C＋90°。

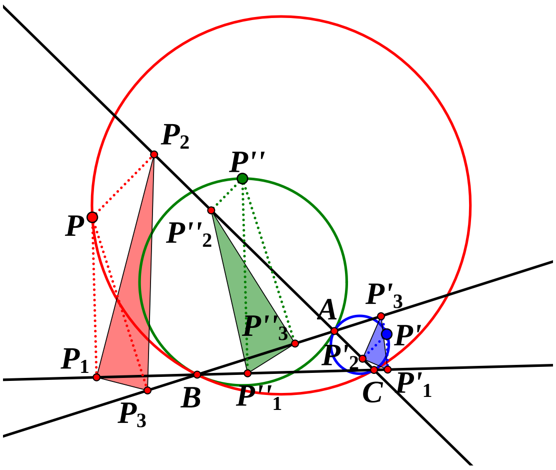
2. 直角三角形反射圓起始點所在位置

(1)三角形△ABC 為銳角三角形時

存在可投影(反射)成直角△的起始點 P 點在三個「**直角三角形反射圓**」上，如圖 2.18。



【圖 2.18】第一垂足三角形為直角三角形
(△ABC 為鋭角△時的反射狀況)



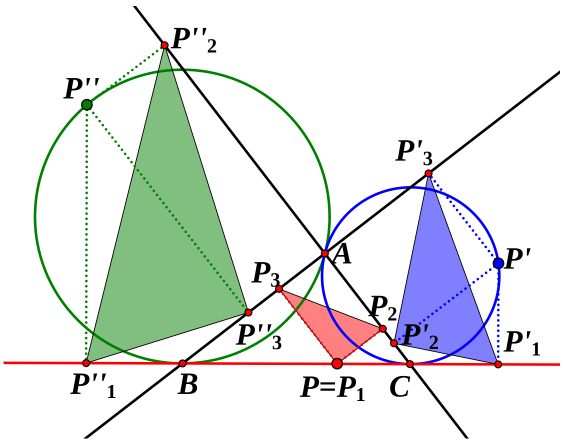
【圖 2.19】第一垂足三角形為直角三角形
(△ABC 為鈍角△時的反射狀況)

(2)當△ABC 為鈍角△時

存在可投影(反射)成直角△的 P 點亦在三個「直角三角形反射圓」上，如圖 2.19。

(3)當△ABC 為直角△時

若∠A＝90°，⇒ 以$\angle P_1$為 90°的直角$\triangle P_1P_2P_3$中，P 點軌跡退化成一條直線，此即$\overleftrightarrow{BC}$，如圖 2.20。



【圖 2.20】第一垂足三角形為直角三角形

(∠A＝90°時的反射狀況)

【作法】以∠BPC＝∠A＋90°為例

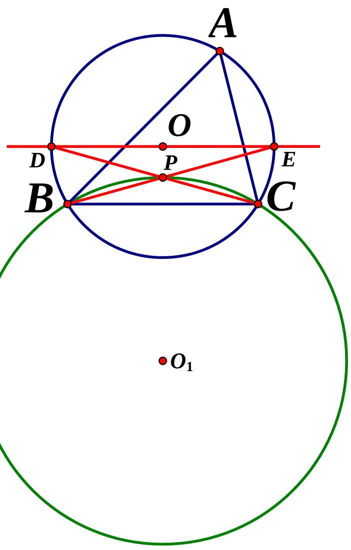
利用∠BPC＝∠A＋90°，∠CPA＝∠B＋90°，∠APB＝∠C＋90°

①過 O 點作$\overline{\mathbf{DE}}$//$\overline{\mathbf{BC}}$

②連接$\overline{\mathbf{BE}}$和$\overline{\mathbf{CD}}$相交於 **P 點**

③作△BPC 之外接圓 O_1 即為所求

（同理可作出另兩個直角三角形反射圓）



【圖 2.21】直角三角形反射圓

尺規作圖

(四) 若$\triangle H_1$(P)為相似三角形

1. 尋找起始點

由性質 2.1 知，$\overline{P_1P_3} = d_1\sin A$，$\overline{P_1P_2} = d_2\sin B$，$\overline{P_2P_3} = d_3\sin C$，接著我們用邊長關係來尋找，因為$\triangle ABC$與$\triangle H_1$(P)相似，所以我們可分成以下 6 種情況來討論：

(1) $\frac{d_1\sin A}{a} = \frac{d_2\sin B}{b} = \frac{d_3\sin C}{c}$　(2) $\frac{d_1\sin A}{a} = \frac{d_2\sin B}{c} = \frac{d_3\sin C}{b}$　(3) $\frac{d_1\sin A}{b} = \frac{d_2\sin B}{a} = \frac{d_3\sin C}{c}$

(4) $\frac{d_1\sin A}{b} = \frac{d_2\sin B}{c} = \frac{d_3\sin C}{a}$　(5) $\frac{d_1\sin A}{c} = \frac{d_2\sin B}{a} = \frac{d_3\sin C}{b}$　(6) $\frac{d_1\sin A}{c} = \frac{d_2\sin B}{b} = \frac{d_3\sin C}{a}$

【證明】由邊長關係得知

(1)$\frac{d_1\sin A}{a} = \frac{d_2\sin B}{b} = \frac{d_3\sin C}{c}$，⇒ $\boxed{\boldsymbol{d_1 = d_2 = d_3}}$ (此為三角形的**外心 O**)

(2) $\frac{d_1\sin A}{a} = \frac{d_2\sin B}{c} = \frac{d_3\sin C}{b}$，⇒ $\frac{d_1\sin A}{a} = \frac{d_2\sin B}{c}\times\frac{b}{b} = \frac{d_3\sin C}{b}\times\frac{c}{c}$，

⇒ $\boxed{\boldsymbol{\frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{c}}\text{且}\boldsymbol{\frac{d_1}{d_3} = \frac{c}{b}}\text{且}\boldsymbol{\frac{d_2}{d_3} = \frac{c^2}{b^2}}}$

⇒此可作兩阿波羅尼斯圓相交於 2 點

(此兩點為如圖 2.22 中的 **S 點**和 **E 點**)

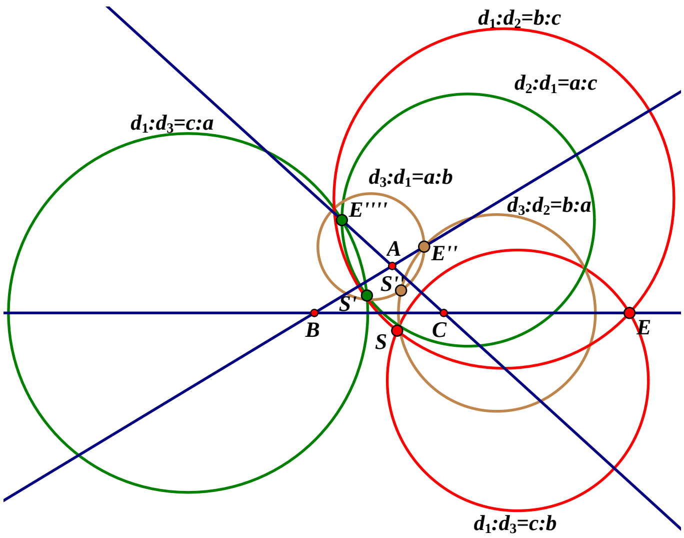
(3) $\frac{d_1 \sin A}{b} = \frac{d_2 \sin B}{a} = \frac{d_3 \sin C}{c}$

$\Rightarrow \frac{d_1 \sin A}{b} \times \frac{a}{a} = \frac{d_2 \sin B}{a} \times \frac{b}{b} = \frac{d_3 \sin C}{c}$，

$\Rightarrow \boxed{\frac{d_3}{d_1} = \frac{a}{b} 且 \frac{d_3}{d_2} = \frac{b}{a} 且 \frac{d_1}{d_2} = \frac{b^2}{a^2}}$

⇒此可作兩阿波羅尼斯圓相交於 2 點

(此兩點為如圖 2.22 中的**S'點**和 **E'''點**)



【圖 2.22】兩兩阿波尼斯圓的交點可以看出內部相似三角點S、S'、S''與外部相似三角點E、E''、E''''的共生狀態

(4) $\frac{d_1 \sin A}{b} = \frac{d_2 \sin B}{c} = \frac{d_3 \sin C}{a}$

$\Rightarrow \frac{d_1 \sin A}{b} \times \frac{a}{a} = \frac{d_2 \sin B}{c} \times \frac{b}{b} = \frac{d_3 \sin C}{a} \times \frac{c}{c}$ ，$\Rightarrow d_1 \times \frac{a}{b} = d_2 \times \frac{b}{c} = d_3 \times \frac{c}{a}$，

$\Rightarrow \boxed{d_1 : d_2 : d_3 = \frac{b}{a} : \frac{c}{b} : \frac{a}{c}}$ ，此為 P 點到△ABC 三頂點的距離比。

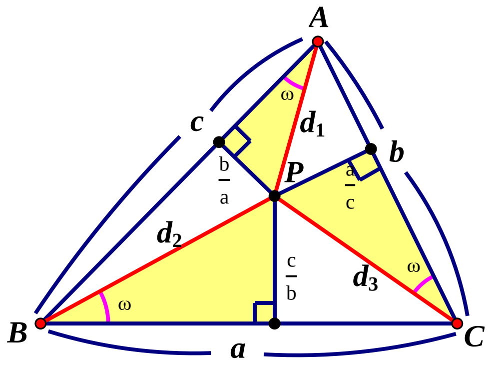
若 $d_1 : d_2 : d_3 \neq 1 : 1 : 1$ 則平面上符合此距離比的點會有兩點，分別為

△ABC 內部的**第 1 布洛卡點Ω** 與 △ABC 外部的**第 1 類布洛卡點**E''' (如圖 2.23、2.24)。

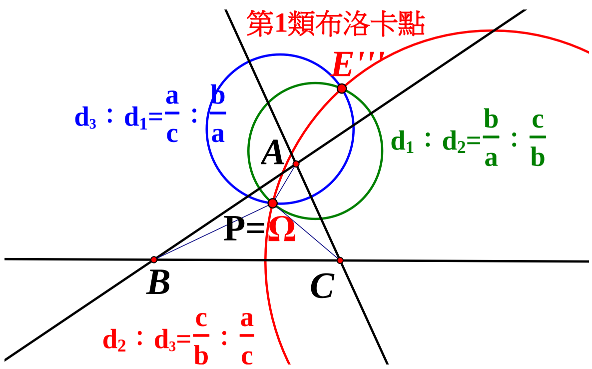
性質 2.4

若 P 點到 3 頂點距離比為 $d_1 : d_2 : d_3 \neq 1 : 1 : 1$；則平面上此必有 2 個點符合此比例

【說明】如圖 2.24，可作 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{d_1}{d_2}$，$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{d_2}{d_3}$，$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{d_3}{d_1}$的阿波羅尼斯圓，此 3 圓必交於兩點。



【圖 2.23】三角形內部第 1 布洛卡點



【圖 2.24】三角形外部的第 1 類布洛卡點

【證明】根據參考文獻[3]，第 1 布洛卡點的三線座標為 $\frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$，

表示 P 點到$\overleftrightarrow{BC}$的距離：P 點到$\overleftrightarrow{AC}$的距離：P 點到$\overleftrightarrow{AB}$的距離$= \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$

由圖 2.23 可知$sin\omega = \frac{\frac{b}{a}}{d_1} = \frac{\frac{c}{b}}{d_2} = \frac{\frac{a}{c}}{d_3} \Rightarrow d_1 : d_2 : d_3 = \frac{b}{a} : \frac{c}{b} : \frac{a}{c}$ (到 3 頂點距離比)

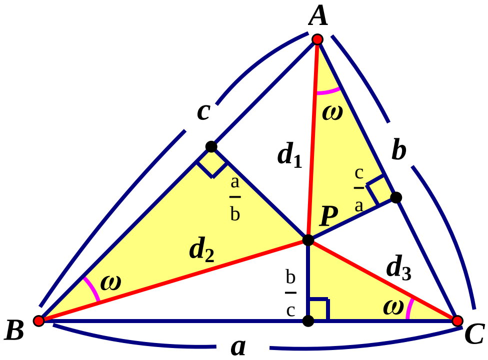
(5)$\dfrac{d_1\sin A}{c}=\dfrac{d_2\sin B}{a}=\dfrac{d_3\sin C}{b}$

$\Rightarrow\dfrac{d_1\sin A}{c}\times\dfrac{a}{a}=\dfrac{d_2\sin B}{a}\times\dfrac{b}{b}=\dfrac{d_3\sin C}{b}\times\dfrac{c}{c}\Rightarrow d_1\times\dfrac{a}{c}=d_2\times\dfrac{b}{a}=d_3\times\dfrac{c}{b}$

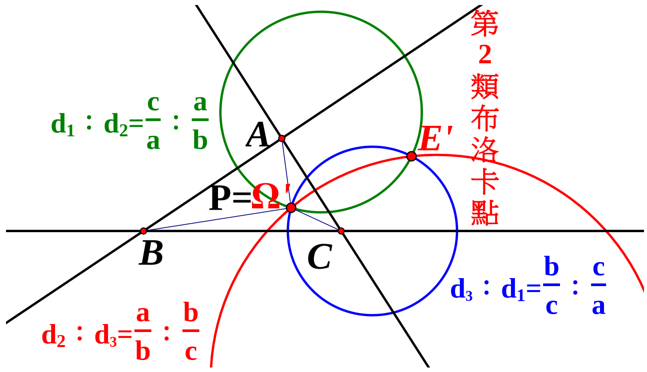
$\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{d_1:d_2:d_3=\frac{c}{a}:\frac{a}{b}:\frac{b}{c}}}$　此為 P 點到△ABC 三頂點的距離比。

若 $\boldsymbol{d_1:d_2:d_3\neq 1:1:1}$ 則平面上符合此距離比的點會有兩點，分別為

△ABC 內部的**第 2 布洛卡點$\boldsymbol{\Omega'}$** 與 △ABC 外部的**第 2 類布洛卡點$\mathbf{E'}$** (如圖 2.25、2.26)



【圖 2.25】三角形內部第 2 布洛卡點



【圖 2.26】三角形外部的第 2 類布洛卡點

(6)$\dfrac{d_1\sin A}{c}=\dfrac{d_2\sin B}{b}=\dfrac{d_3\sin C}{a}$

$\Rightarrow\dfrac{d_1\sin A}{c}\times\dfrac{a}{a}=\dfrac{d_2\sin B}{b}=\dfrac{d_3\sin C}{a}\times\dfrac{c}{c}$，$\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{\frac{d_2}{d_1}=\frac{a}{c}}\text{且}\boldsymbol{\frac{d_2}{d_3}=\frac{c}{a}}\text{且}\frac{d_1}{d_3}=\frac{c^2}{a^2}}$

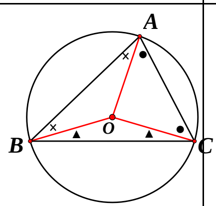
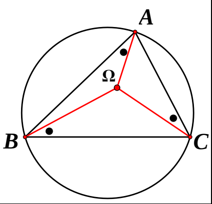
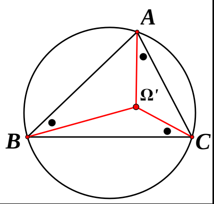
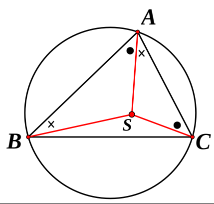
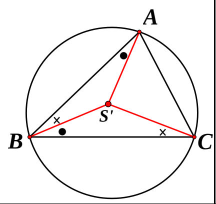
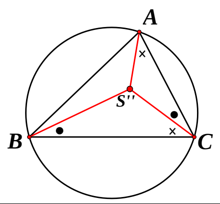
⇒此可作兩阿波羅尼斯圓相交於 2 點 (此兩點為如圖 2.22 中的**$\mathbf{S''}$點和 $\mathbf{E''}$點**)

2.起始點$\boldsymbol{O}$、**Ω、Ω′、S、S′、S″綜合討論**

(1) △ABC銳角三角形時：

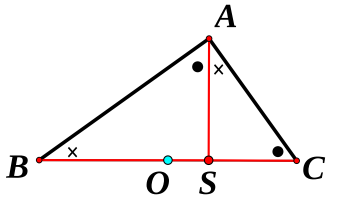
我們將$\triangle H_1(P)$與$\triangle ABC$相似的起始點，利用「角度關係」分成 6 種情況逐一討論，發現所有起始點均在三角形的內部，得到的結果如下表 4，此結論與參考文獻[2]的一致。但本研究使用古典幾何方式探討，與參考文獻中較複雜的解析幾何技巧不同。

表 4：銳角三角形內部所有$\triangle H_1(P)\sim\triangle ABC$的起始點角度特徵

O (外心)	**Ω** (第 1 布洛卡點)	**Ω′** (第 2 布洛卡點)	**S** (第 1 相似三角點)	**S′** (第 2 相似三角點)	**S″** (第 3 相似三角點)
					
$\triangle H_1(O)$ $=\triangle P_1P_2P_3\sim$ $\triangle ABC$	$\triangle H_1(\Omega)$ $=\triangle P_3P_1P_2\sim$ $\triangle ABC$	$\triangle H_1(\Omega')$ $=\triangle P_2P_3P_1\sim$ $\triangle ABC$	$\triangle H_1(S)$ $=\triangle P_1P_3P_2\sim$ $\triangle ABC$	$\triangle H_1(S')$ $=\triangle P_3P_2P_1\sim$ $\triangle ABC$	$\triangle H_1(S'')$ $=\triangle P_2P_1P_3\sim$ $\triangle ABC$

(2) △ABC為直角三角形時：

外心$\boldsymbol{O}$會在斜邊中點上，其中一個相似三角點($\boldsymbol{S}$或$\boldsymbol{S'}$或$\boldsymbol{S''}$)即為 斜邊上的高之垂足 。

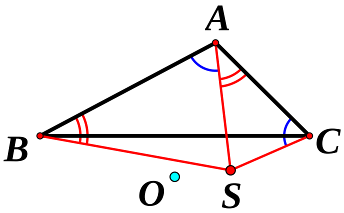


【圖 2.27】∠A=90°時，$\boldsymbol{O}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 的位置

(3) △ABC為鈍角三角形時：

外心$\boldsymbol{O}$與其中一個相似三角點($\boldsymbol{S}$或$\boldsymbol{S'}$或$\boldsymbol{S''}$)會同時落在最大邊的 邊外部 。

故當△ABC為非銳角三角形時，內部僅剩最多 4 個點。



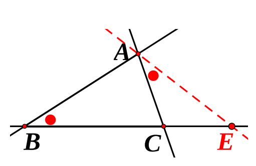
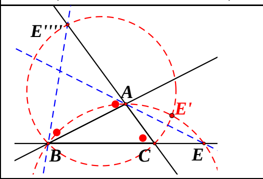
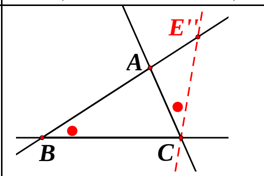
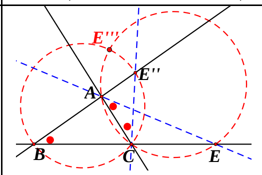
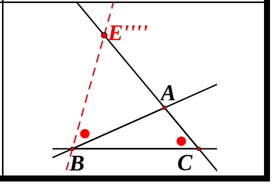
【圖 2.28】∠A>90°時，$\boldsymbol{O}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 的位置

3. 起始點E、E′、E″、E‴、E⁗綜合討論

(1)外部相似三角點：

我們一樣利用「角度關係」逐一討論，也順利找出所有外部起始點，如下表 5。

表 5：三角形外部$\triangle H_1(P)\sim\triangle ABC$的起始點角度特徵與作圖

E (外部第 1 相似點)	E′ (外部第 2 相似點)	E″ (外部第 3 相似點)	E‴ (外部第 4 相似點)	E⁗ (外部第 5 相似點)
				

(2) 外部相似三角反射線段：

由參考文獻[2]，E、E′、E″、E‴、E⁗這五點共線，本文稱之為「**外部相似三角反射線段**」，此線段為△ABC之**萊莫恩線**(*Lemoine line*)的一部份。

性質 2.5

△ABC 的外部相似三角反射線段，必通過**E、E′、E″、E‴、E⁗這五個外部相似三角點。**

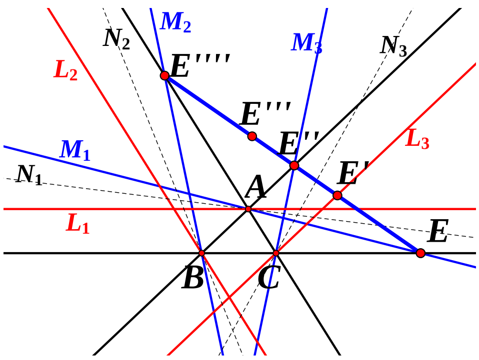
【作法】本文的作法與萊莫恩線作法等價：如圖 2.29

①過 A 作直線L_1 $//\overline{BC}$與∠A 的外角平分線N_1。

② L_1對N_1作反射，得到直線M_1。

同理過 B 作出M_2，過 C 作出M_3。

③M_1 、M_2 、M_3必與△ABC三邊所在直線交於 2 個點，連接$\overline{EE''''}$，即為外部第一相似三角反射線段，值得注意的是此線段會隨著△ABC角度的改變它的位置。



【圖 2.29】外部相似三角反射線段作圖

外部相似三角反射線段會橫跨△ABC 最大角的角外部 與 最短邊的邊外部 所在區域。

E、E′、E″、E‴、E⁗ 五點共線證明：

【Step1】如圖 2.30，△ABC中，我們先用表 5 的作法將 E、E′、E″、E‴、E⁗五點作出

1.設$\angle A=\angle 1$，$\angle B=\angle 3+\angle 4$，$\angle C=\angle 2$

2.作$\angle CAE=\angle B=\angle ACE''$分別交$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AB}$於E、E″，及$\angle ABE''''=\angle C$交$\overleftrightarrow{AC}$於E⁗

3.作△BCE⁗外接圓O_1、△ABE 外接圓O_2，兩圓O_1、O_2交於E′

4.作△ACE外接圓O_3、△BCE″外接圓O_4，兩圓O_3、O_4交於E‴

【Step2】連接$\overleftrightarrow{EE'}$後分別交$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AC}$於P、P'兩點，並證明以下三個結果

1.連接$\overleftrightarrow{EE'}$交$\overleftrightarrow{AB}$於P，若$\angle ACP=\angle B=\angle 3+\angle 4$，則$P=E''$。

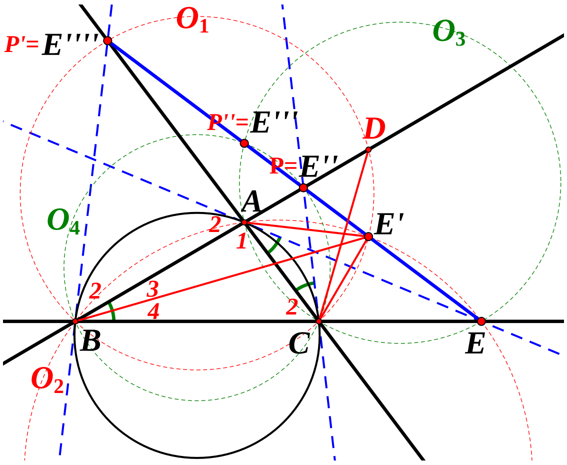
2.連接$\overleftrightarrow{EE'}$交$\overleftrightarrow{AC}$於P'，若$\angle P'BA=\angle C=\angle 2$，則$P'=E''''$。

3.作△ACE 外接圓O_3交$\overleftrightarrow{EE'}$於P″，若P″、P′、B、A四點共圓，則$P''=E'''$。

【證明】

1. (1)在$\overrightarrow{BA}$上取 D，使$\angle ACD=\angle C$，則 D 亦在圓O_1上。在△ACD中，由外角定理知

$\angle ADC=\angle 1-\angle ACD=\angle 1-\angle 2$



【圖 2.30】外部相似三角反射線段共圓關係

(2)在圓O_1中，$\angle BDC=\frac{1}{2}\widehat{BC}=\angle BE'C$

$=\angle 1-\angle 2$(對同弧之圓周角)

(3)在△ABE中，$\angle AEB=\angle PAE-\angle B$

$=\angle 2-(\angle 3+\angle 4)$(外角定理)

(4)在圓O_2中，$\angle AE'P=\angle 3+\angle 4$

(∵A、B、E、E′四點共圓)

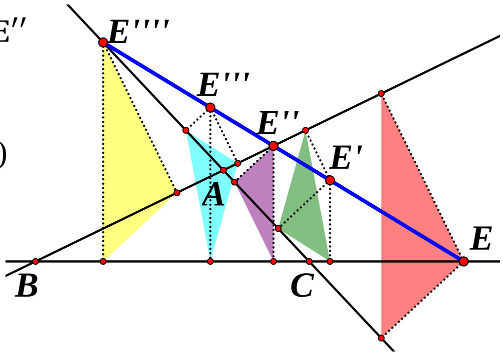
且$\angle AE'B=\angle AEB=\angle 2-(\angle 3+\angle 4)$

(5)$\angle PE'C=\angle AE'P+AE'B+\angle BE'C$

$=(\angle 3+\angle 4)+[\angle 2-(\angle 3+\angle 4)]+$

$\angle 1-\angle 2=\angle 1$，故A、C、E′、P四點共圓

(6)$\therefore\angle ACP=AE'P=\angle 3+\angle 4=\angle B\Rightarrow\ \therefore P=E''$



【圖 2.31】外部相似三角點的投影狀況

2. (1)在圓O_2中，$\angle AEE'=\angle ABE'=\frac{1}{2}\widehat{AE'}=\angle 3$

(2)在△P′CE 中，$\angle CP'E=\angle 2-\angle CEP'$(外角定理)

$=\angle 2-(\angle AEC+\angle AEE')$

$=\angle 2-[\angle 2-(\angle 3+\angle 4)+\angle 3]=\angle 4$

(3)$\because\angle CP'E'=\angle CBE'=\angle 4$，∴P′必在圓$O_1$上

(4)在圓O_1中，$\angle P'BD=\frac{1}{2}\widehat{P'D}=\angle P'CD=\angle 2$，

又已知$\angle E''''BD=\angle 2$，且P′、E⁗皆在$\overrightarrow{CA}$上，$\therefore P'=E''''$

3. (1)在圓O_3中，∵A、C、E、P″四點共圓，$\therefore\angle AP''E=\angle ACB=\angle 2$

(2)$\because\angle AP''E=\angle P'BA=\angle 2$，∴P′、B、A、P″四點共圓，$\angle P'P''B=\angle P'AB$，又

$\angle P'AB=\angle ABC+\angle ACB=(\angle 3+\angle 4)+\angle 2=\angle ACE''+\angle ACB=\angle BCE''$，

故$\angle P'P''B=\angle BCE''$，得P″、E″、$C$、$B$共圓(即圓$O_4$)，$\therefore P''=E'''$。 $\boxed{\text{故得證五點共線。}}$

4. 小結：

由以上可知，任意三角形最多會有 **O、S、S′、S″、Ω、Ω′、E、E′、E″、E‴、E⁗** 這 11 個點可投影出相似三角形，其分布情形如表 6、表 7。

表 6：△ABC 中三個內角均不相等(∠A≠∠B≠∠C)起始點的分布狀況

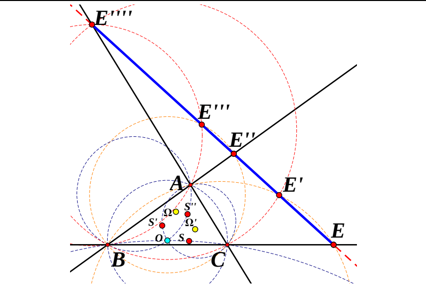
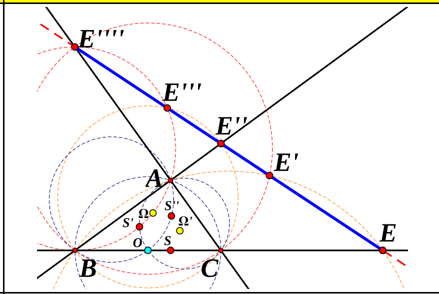
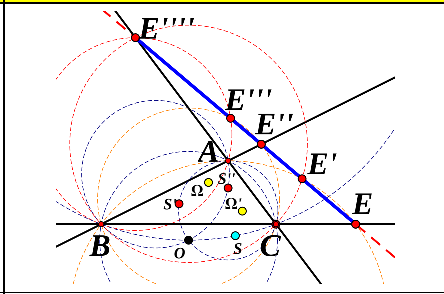
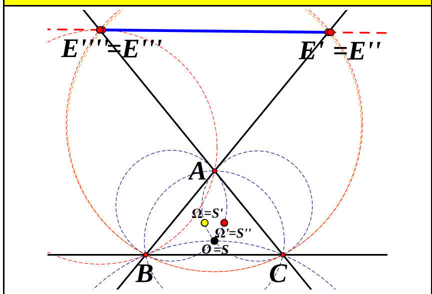
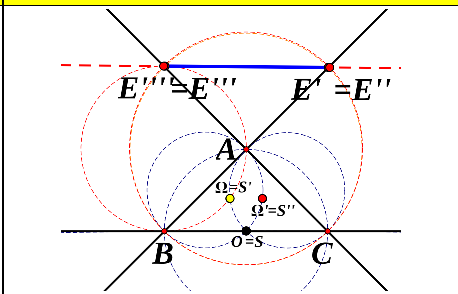
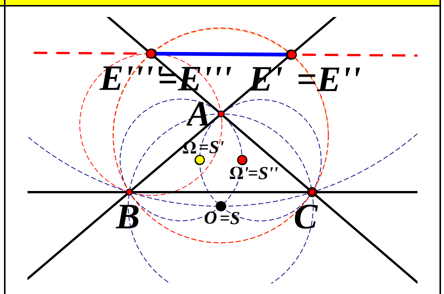
銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形
		
內部 6 點：O、Ω、Ω′、S、S'、S'' 外部 5 點：E、E'、E''、E'''、E''''	內部 4 點：Ω、Ω′、S'、S'' 邊上 2 點：O 和S (S為斜邊$\overline{BC}$上高的垂足) 外部 5 點：E、E'、E''、E'''、E''''	內部 4 點：Ω、Ω′、S'、S'' 外部 7 點：O、S、E、E'、E''、 E'''、E''''

表 7： 以∠A 為頂角的等腰△ABC 起始點的分布狀況

等腰銳角三角形	等腰直角三角形	等腰鈍角三角形
		
內部 3 點：O 和 S 重合 Ω 和S'重合 Ω′和S''重合 外部 2 點：E′和 E″重合 E‴和E⁗重合，E 消失	內部 2 點：Ω 和S'重合 Ω′和S''重合 邊上 1 點：O 和 S 重合在斜邊 外部 2 點：E′和 E″重合 E‴和E⁗重合，E 消失	內部 2 點：Ω 和S'重合 Ω′和S''重合 外部 3 點：E′和 E″重合 E‴和 E⁗重合 O 和 S 重合落到外面，E 消失

二、第二垂足(反射)三角形$\triangle H_2$(P)為特殊三角形的起始投影(反射)點

(一) 第二垂足三角形$\triangle H_2$(P)為等腰三角形

●角度關係，如圖 3.1，

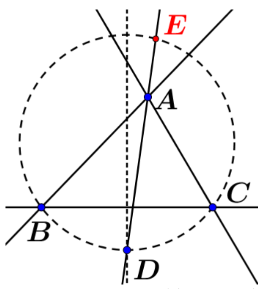
若$\angle P_5=\angle P_6$，可得

$\angle 4+\angle 5=\angle 1+\angle 6$

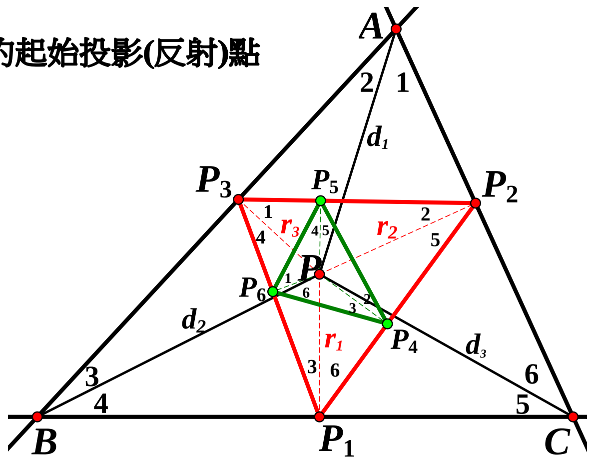
【作法】如圖 3.2，

1.作$\overline{BC}$的中垂線。

2.中垂線上任選一點 D。



【圖 3.2】二階等腰三角形反射自交曲線作法



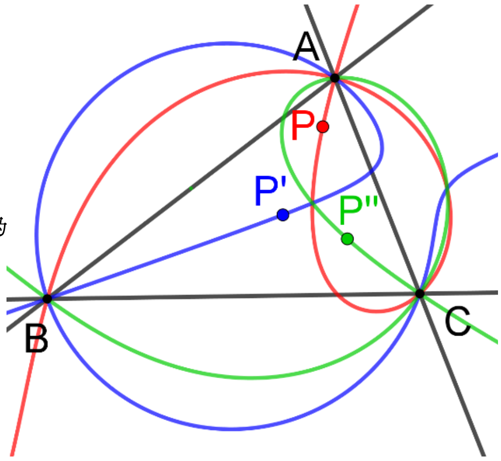
【圖 3.1】第 7 區：起始點 P 在△ABC 內部之第二反射三角形的角度與邊長關係

3.作△BDC 的外接圓。

4.作$\overleftrightarrow{AD}$與△BDC 外接圓交於 E 點。

5.之後拉動 D 點與 E 點對應的軌跡即為所求。

另兩條作法相同。我們稱紅、藍、綠這三條曲線為「**二階等腰三角形反射自交曲線**」。如圖 3.3。



【圖 3.3】起始點P、P′、P″在 3 條二階等腰三角形反射自交曲線上

(二) 第二垂足三角形△$\boldsymbol{H_2}$(P)為正三角形

●邊長關係(全區)

1. 尋找起始點 (如圖 3.1)

(1) r_i與d_i的關係：r_i、d_i分別為 P 點到三角形三邊所在直線的距離與到三頂點的距離，

$r_1=d_2\sin\angle4=d_3\sin\angle5$ 且 $r_2=d_3\sin\angle6=d_1\sin\angle1$ 且$r_3=d_1\sin\angle2=d_2\sin\angle3$

(2)△$H_1(P)$與d_i的關係

∵P、P_1、C、P_2四點共圓 ∴由正弦定理可知 $\overline{P_1P_2}=d_3\sin C$。同理

$\overline{P_2P_3}=d_1\sin A$ 且 $\overline{P_3P_1}=d_2\sin B$ ，故得$\overline{P_1P_2}:\overline{P_2P_3}:\overline{P_3P_1}=d_3c:d_1a:d_2b$。

(3) △$H_2(P)$與r_i的關係

$\overline{P_4P_5}=r_2\sin P_2$ 、 $\overline{P_5P_6}=r_3\sin P_3$ 、 $\overline{P_6P_4}=r_1\sin P_1$。

(4)若△$H_2(P)$為正三角形

$\overline{P_4P_5}=\overline{P_5P_6}=\overline{P_6P_4}$， $\Rightarrow r_1\sin P_1=r_2\sin P_2=r_3\sin P_3$，

∵由正弦定理可知$\Rightarrow\frac{\sin P_1}{\overline{P_2P_3}}=\frac{\sin P_2}{\overline{P_3P_1}}=\frac{\sin P_3}{\overline{P_1P_2}}$ ，故得 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{r_2b}{r_1a}=\frac{d_1\sin\angle1\cdot b}{d_2\sin\angle4\cdot a}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sin\angle1}{\sin\angle4}$ 。

同理$\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\sin\angle3}{\sin\angle6}$ 且 $\frac{c}{a}=\frac{\sin\angle5}{\sin\angle2}$ $\Rightarrow$ 此 P 點為 **費馬點(類費馬點) F** 或 **第二費馬點 F′**

性質 3.1

若 P 點為可以投影出△$H_2(P)$為正三角形的起始點，並滿足$\frac{a}{b}=\frac{\sin\angle1}{\sin\angle4}$且$\frac{b}{c}=\frac{\sin\angle3}{\sin\angle6}$且$\frac{c}{a}=\frac{\sin\angle5}{\sin\angle2}$

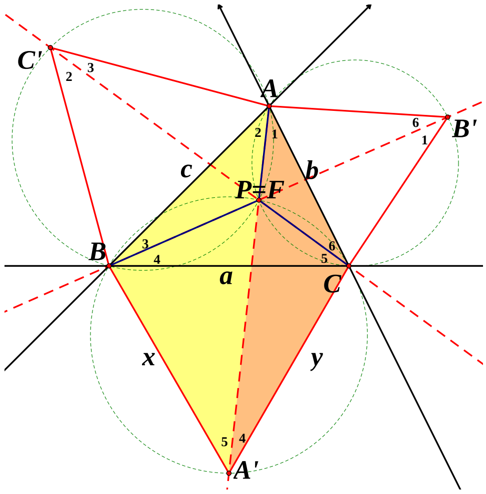
則 **P 點為 F(費馬點或類費馬點)和F′(第二費馬點)**

【證明】如圖 3.4、3.5，

①作△PBC 的外接圓

②延長$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$交此圓於A′

③連接$\overline{A'B}$、$\overline{A'C}$



【圖 3.4】第二反射三角形為正三角形的起始點在費馬點(類費馬點)F上

④令$\overline{A'B}=x$且$\overline{A'C}=y$

⑤在△ABA′中，由正弦定理可知

$$\frac{c}{\sin\angle AA'B}=\frac{x}{\sin\angle 2}\ ,\ \Rightarrow\frac{c}{x}=\frac{\sin\angle AA'B}{\sin\angle 2}=\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 2}$$，故 $x=a$。

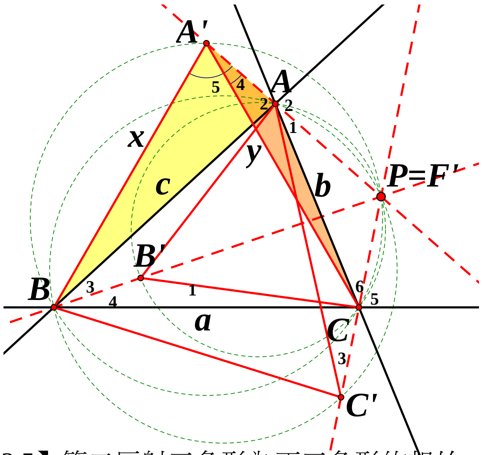
⑥△ACA′中，由正弦定理可知

$$\frac{y}{\sin\angle 1}=\frac{b}{\sin\angle AA'C}\Rightarrow\frac{y}{b}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle AA'C}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 4}\ ,$$

⇒ 故 $y=a$，∴△A′BC 為正三角形

⑦同理△B′AC和△C′AB 均為正三角形

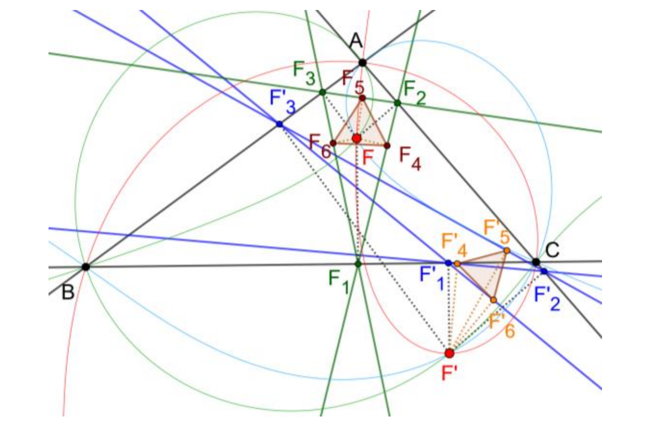
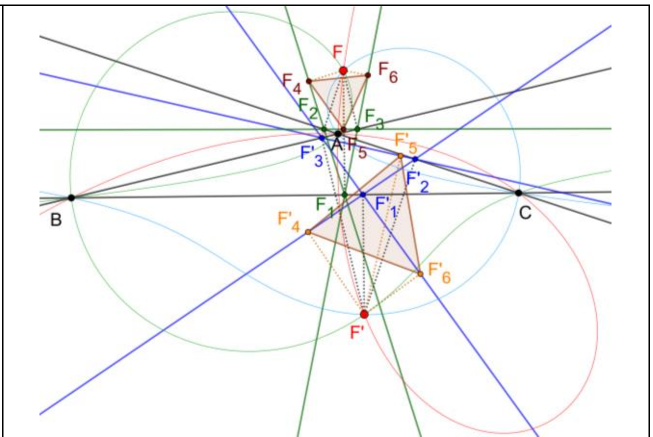
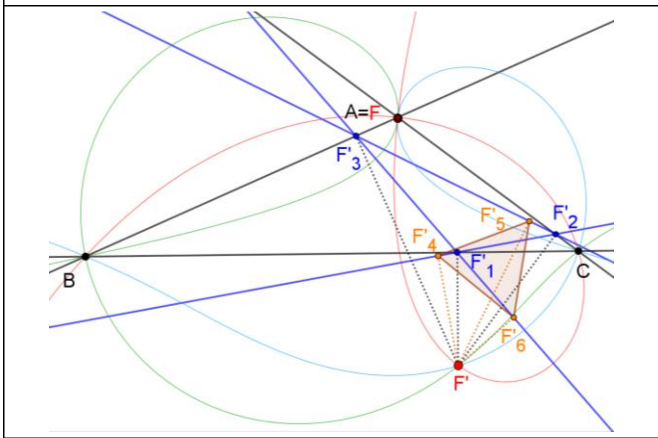
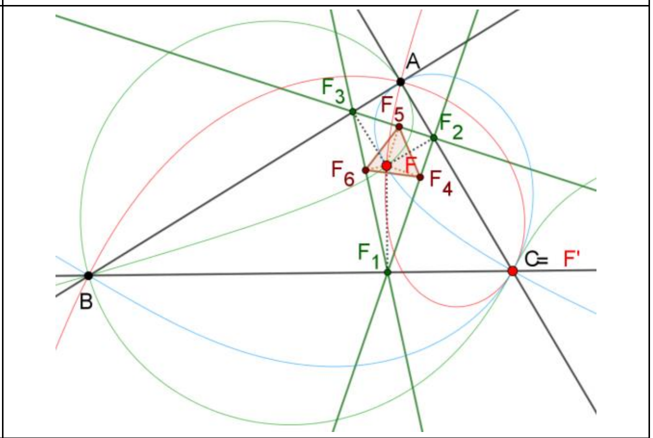
故 P 點即為$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$三線之交點 (*第 2 費馬點F′ 同理可證*)



【圖 3.5】第二反射三角形為正三角形的起始點在第二費馬點F'上

2. 小結：

△$\boldsymbol{H_2}$(P)為正三角形的投影狀況：(紅、藍、綠為「二階等腰三角形反射自交曲線」)

	
【圖 3.6】∠A<120°且∠B、∠C 均不等於 60°時 **存在△$\boldsymbol{H_2}$(F)與△$\boldsymbol{H_2}$(F′)均為正三角形**	【圖 3.7】∠A>120° **存在△$\boldsymbol{H_2}$(F)與△$\boldsymbol{H_2}$(F′)均為正三角形** 此時的 F 在三角形外部，本文稱為類費馬點
	
【圖 3.8】∠A=120° **僅存在△$\boldsymbol{H_2}$(F′)為正三角形**	【圖 3.9】∠A<120°且∠C=60°時 **僅存△$\boldsymbol{H_2}$(F)為正三角形**

(1) 內部起始點

若∠A、∠B、∠C 均小於 120° ⇒ **起始點在F(費馬點)上**

若∠A、∠B、∠C 有一角等於 120° ⇒ **無內部起始點**

若∠A、∠B、∠C 一角大於 120° ⇒ **無內部起始點**

(2) 外部起始點

①若∠A、∠B、∠C 均不等於 60°

若∠A、∠B、∠C 均小於 120° ⇒ **起始點在F′(第二費馬點)上**

若∠A、∠B、∠C 有一角等於 120° ⇒ **起始點在F′(第二費馬點)上**

若∠A、∠B、∠C 一角大於 120°⇒ **起始點在F(類費馬點)與F′(第二費馬點)上**

②若∠A、∠B、∠C 有一角為 60°

此時第二費馬點會落在 60°的頂點上，則無法投影(反射)出三角形 ⇒ 無外部起始點

(三) 第二垂足三角形△H_2(P)為直角三角形

●角度關係

如圖 3.10，若∠1+∠6=90°，

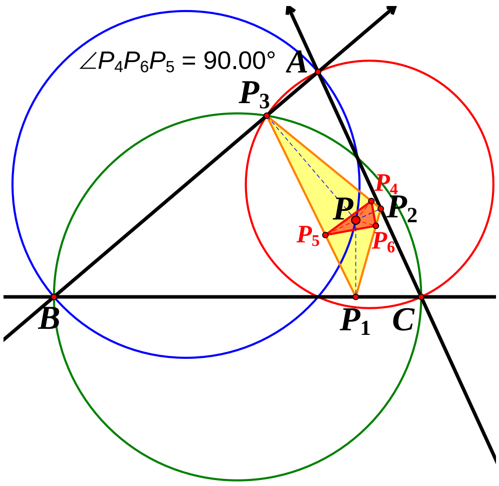
⇒$\angle P_1PP_3$=∠2+∠5+90°=180°−∠B，

⇒∠2+∠5=90°−∠B，⇒∠2+∠5+∠B=90°。

同理∠1+∠4+∠C=90°；∠3+∠6+∠A=90°。

起始點在如圖 3.10 以三邊長為直徑的圓上。

我們稱這三個圓為「**二階直角三角形反射圓**」。



【圖 3.10】起始點分別在以三個邊長為直徑的圓上

(四) 第二垂足三角形△H_2(P)為相似三角形

這裡我們利用「角度關係」與「邊長關係」找出$\triangle H_2(P) \sim \triangle ABC$的起始點所在位置。

●角度關係(全區)

1. 內部所有起始點(第七區)

由圖 3.1 知，我們將$\triangle H_2(P) \sim \triangle ABC$而分成以下 6 種情況，如表 8、表 9：

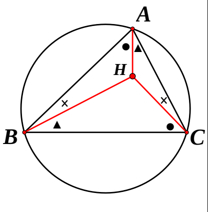
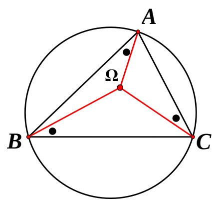
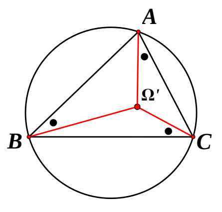
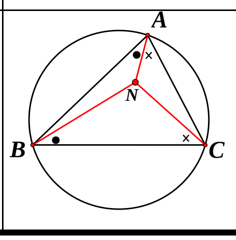
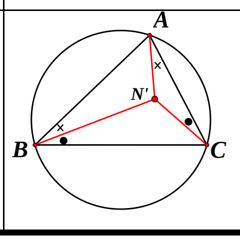
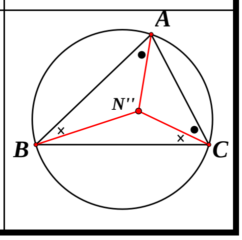
(1)$\triangle P_5P_6P_4 \sim \triangle ABC$　(2)$\triangle P_6P_4P_5 \sim \triangle ABC$　(3)$\triangle P_4P_5P_6 \sim \triangle ABC$

(4)$\triangle P_5P_4P_6 \sim \triangle ABC$　(5)$\triangle P_4P_6P_5 \sim \triangle ABC$　(6)$\triangle P_6P_5P_4 \sim \triangle ABC$

表 8：銳角三角形內部$\triangle P_4P_5P_6 \sim \triangle ABC$的 6 種情況

(1)三角形的垂心(H) $\begin{cases} \angle1+\angle2=\angle4+\angle5 \text{ ——①} \\ \angle3+\angle4=\angle1+\angle6 \text{ ——②} \\ \angle5+\angle6=\angle2+\angle3 \text{ ——③} \end{cases}$ $\Rightarrow \angle2=\angle5$，$\angle3=\angle6$， $\angle1=\angle4$	(2)第一布洛卡點(Ω) $\begin{cases} \angle1+\angle2=\angle1+\angle6 \text{ ——①} \\ \angle3+\angle4=\angle2+\angle3 \text{ ——②} \\ \angle5+\angle6=\angle5+\angle4 \text{ ——③} \end{cases}$ $\Rightarrow \angle2=\angle4=\angle6$	(3)第二布洛卡點(Ω′) $\begin{cases} \angle1+\angle2=\angle2+\angle3 \text{ ——①} \\ \angle3+\angle4=\angle5+\angle4 \text{ ——②} \\ \angle5+\angle6=\angle1+\angle6 \text{ ——③} \end{cases}$ $\Rightarrow \angle1=\angle3=\angle5$
(4)二階第 1 相似三角點(N) $\begin{cases} \angle1+\angle2=\angle4+\angle5 \text{ ——①} \\ \angle3+\angle4=\angle3+\angle2 \text{ ——②} \\ \angle5+\angle6=\angle1+\angle6 \text{ ——③} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \angle1=\angle5 \\ \angle2=\angle4 \end{cases}$	(5)二階第 2 相似三角點(N') $\begin{cases} \angle1+\angle2=\angle2+\angle3 \text{ ——①} \\ \angle3+\angle4=\angle1+\angle6 \text{ ——②} \\ \angle5+\angle6=\angle4+\angle5 \text{ ——③} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \angle1=\angle3 \\ \angle4=\angle6 \end{cases}$	(6)二階第 3 相似三角點(N'') $\begin{cases} \angle1+\angle2=\angle1+\angle6 \text{ ——①} \\ \angle3+\angle4=\angle5+\angle4 \text{ ——②} \\ \angle5+\angle6=\angle2+\angle3 \text{ ——③} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \angle2=\angle6 \\ \angle3=\angle5 \end{cases}$

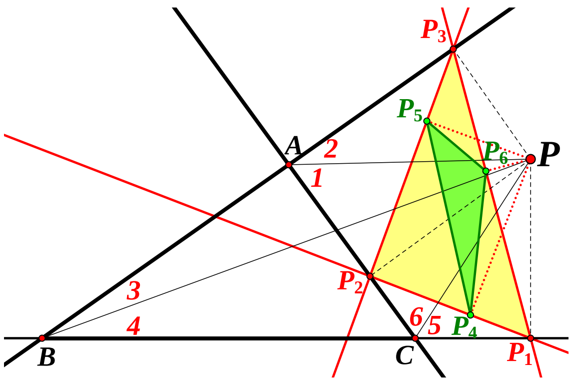
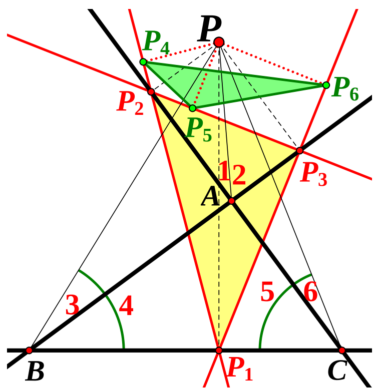
表 9：銳角三角形內部所有$\triangle H_2(P) \sim \triangle ABC$的起始點角度特徵

H(垂心)	Ω (第 1 布洛卡點)	Ω′ (第 2 布洛卡點)	N (二階第 1 相似三角點)	N′ (二階第 2 相似三角點)	N″ (二階第 3 相似三角點)
					

2. 外部所有起始點

除了上面 6 個起始點外，尚有兩個**外部二階第 1(第 2)相似三角點K與K′**，故總共最多 8 個起始點，我們利用角度關係將外部的起始點找出來，如表 10。

表 10：邊外部和角外部$\triangle P_4P_5P_6 \sim \triangle ABC$的 6 種情況

●角度關係：邊外部(第 1 區)	●角度關係：角外部(第 2 區)
	
【圖 3.11】起始點 P 在△ABC 邊外部之第二垂足三角形的角度與邊長關係	【圖 3.12】起始點 P 在△ABC 角外部之第二垂足三角形的角度與邊長關係

由上圖 3.11$\triangle P_4P_5P_6$可得以下角度關係：

$\angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3$

$\angle \mathrm{P}_5 = \angle 5 - \angle 4$

$\angle P_6 = \angle 1 + \angle 6$

由上圖 3.12$\triangle P_4P_5P_6$可得以下角度關係：

$\angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3$

$\angle \mathrm{P}_5 = \angle 4 + \angle 5$

$\angle P_6 = \angle 1 - \angle 6$

$\triangle P_4P_5P_6 \sim \triangle ABC$分成以下 6 種情況：

(1) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle A \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 5 - \angle 4 = \angle \mathrm{B} \\ \angle P_6 = \angle 1 + \angle 6 = \angle \mathrm{C} \end{cases}$

$\Rightarrow \angle 2 = \angle 3 + \angle A$且$\angle 5 = \angle 4 + \angle B$

此即為「 外部二階第 2 相似三角點K' 」

(2) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle A \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 5 - \angle 4 = \angle \mathrm{C} \\ \angle P_6 = \angle 1 + \angle 6 = \angle \mathrm{B} \end{cases}$

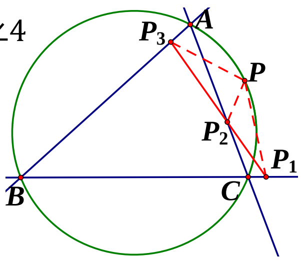
$\because \angle 1 + \angle 6 = \angle \mathrm{B} = \angle 3 + \angle 4$

故起始點 P 必落在

$\triangle$ABC 外接圓中的$\widehat{AC}$

劣弧上，此時 P 點對三邊

的投影點P_1 、P_2 、P_3共線，



此線稱為**西姆松線**(*Simson line*)，如圖，

無法構成$\triangle P_1P_2P_3$，故$\triangle H_1(P)$不存在。

(3) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle \mathrm{B} \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 5 - \angle 4 = \angle A \Rightarrow \\ \angle P_6 = \angle 1 + \angle 6 = \angle \mathrm{C} \end{cases}$

$\begin{cases} \angle 2 = \angle 3 + \angle \mathrm{B} \\ \angle 5 = \angle 4 + \angle A \end{cases} \Rightarrow$

$\because \angle 5 + \angle 6 = \angle 6 + \angle 4 + \angle A = \angle 3 + \angle 4 + \angle A$

$\therefore \angle 3 = \angle 6 \Rightarrow$與(2)的情況相同

(4) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle \mathrm{B} \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 5 - \angle 4 = \angle C \\ \angle P_6 = \angle 1 + \angle 6 = \angle \mathrm{A} \end{cases}$

$\Rightarrow \angle 2 = \angle 3 + \angle B$且$\angle 5 = \angle 4 + \angle \mathrm{C}$

此即為「 外部二階第 1 相似三角點K 」。

(5) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle \mathrm{C} \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 5 - \angle 4 = \angle A \\ \angle P_6 = \angle 1 + \angle 6 = \angle \mathrm{B} \end{cases}$

$\because \angle 1 + \angle 6 = \angle \mathrm{B} = \angle 3 + \angle 4$

同(2)的情況，此時$\triangle H_1(P)$亦不存在。

$\triangle P_4P_5P_6 \sim \triangle ABC$分成以下 6 種情況：

(1) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle A = \angle 1 + \angle 2 \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 4 + \angle 5 = \angle B = \angle 4 - \angle 3 \\ \angle P_6 = \angle 1 - \angle 6 = \angle C = \angle 5 - \angle 6 \end{cases}$

$\because -\angle 3 = \angle 1$，矛盾，故不存在起始點。

(2) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle A = \angle 1 + \angle 2 \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 4 + \angle 5 = \angle C = \angle 5 - \angle 6 \\ \angle P_6 = \angle 1 - \angle 6 = \angle B = \angle 4 - \angle 3 \end{cases}$

$\because -\angle 3 = \angle 1$，$\Rightarrow$矛盾，故不存在起始點。

(3) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle B = \angle 4 - \angle 3 \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 4 + \angle 5 = \angle A = \angle 1 + \angle 2 \\ \angle P_6 = \angle 1 - \angle 6 = \angle C = \angle 5 - \angle 6 \end{cases}$

$\because \begin{cases} \angle 2 = \angle 4 \\ \angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 2 \\ \angle 1 = \angle 5 \end{cases}$

$\Rightarrow$此即為「 二階第 1 相似三角點 $\boldsymbol{N}$ 」。

①$\angle A = 90°$時，$\Rightarrow$ $\boldsymbol{N}$ 在$\angle A$頂點上

②$\angle A < 90°$時，$\Rightarrow$ $\boldsymbol{N}$ 在$\triangle$ABC 內部

③$\angle A > 90°$時，$\Rightarrow$ $\boldsymbol{N}$ 在$\angle A$的「角外部」

若以$\angle B$ 、$\angle C$的角度變化討論之，則

$\boldsymbol{N}'$ 、$\boldsymbol{N}''$亦具有相同的性質。

(4) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle B = \angle 4 - \angle 3 \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 4 + \angle 5 = \angle C = \angle 5 - \angle 6 \\ \angle P_6 = \angle 1 - \angle 6 = \angle A = \angle 1 + \angle 2 \end{cases}$

$\because \angle 4 = -\angle 6$，$\Rightarrow$ 矛盾，故不存在起始點。

(5) $\begin{cases} \angle \mathrm{P}_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle C = \angle 5 - \angle 6 \\ \angle \mathrm{P}_5 = \angle 4 + \angle 5 = \angle A = \angle 1 + \angle 2 \\ \angle P_6 = \angle 1 - \angle 6 = \angle B = \angle 4 - \angle 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$此即為「 垂心 $\boldsymbol{H}$ 」。

①$\angle A = 90°$時，$\Rightarrow$ $\boldsymbol{H}$ 在$\angle A$頂點上

②$\angle A < 90°$時，$\Rightarrow$ $\boldsymbol{H}$ 在$\triangle$ABC 內部

③$\angle A > 90°$時，$\Rightarrow \boldsymbol{H}$ 在$\angle A$的「角外部」

(6) $\begin{cases} \angle P_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle C \\ \angle P_5 = \angle 5 - \angle 4 = \angle B \\ \angle P_6 = \angle 1 + \angle 6 = \angle A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle 2 = \angle 3 + \angle C \\ \angle 5 = \angle 4 + \angle B \end{cases}$ $\because \angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 3 + \angle C = \angle 4 + \angle 3 + \angle C$ $\therefore \angle 1 = \angle 4$， $\Rightarrow$與(2)的情況相同。	(6) $\begin{cases} \angle P_4 = \angle 2 - \angle 3 = \angle 5 - \angle 6 = \angle C \\ \angle P_5 = \angle 4 + \angle 5 = \angle 4 - \angle 3 = \angle B \\ \angle P_6 = \angle 1 - \angle 6 = \angle 1 + \angle 2 = \angle A \end{cases}$ $\because -\angle 6 = \angle 2$， $\Rightarrow$ 矛盾，故不存在起始點。

3. 特殊起始點的作圖

(1)二階相似三角點(N、N'、N'')

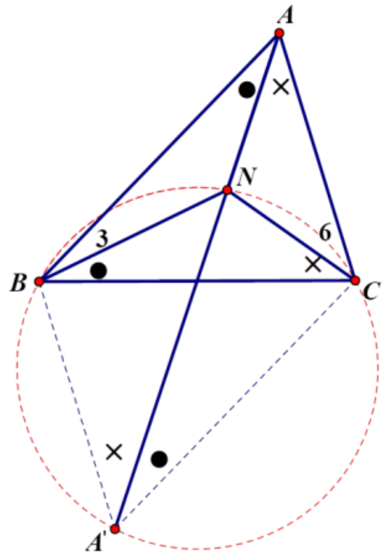
【作法】如圖 3.13

①過 B 作$\overline{BA'}$ // $\overline{AC}$、過 C 作$\overline{CA'}$ // $\overline{AB}$。

②作△A'BC 外接圓，連接$\overline{AA'}$交該圓於N即為所求。

N、N'、N''同理可作。

若∠A>90°時，N會落在∠A 的**角外部**。



【圖 3.13】二階相似三角點的作圖

(2)外部二階相似三角點(K、K')

【作法】如圖 3.14

①過 A 作直線$L_1 \perp \overline{BC}$

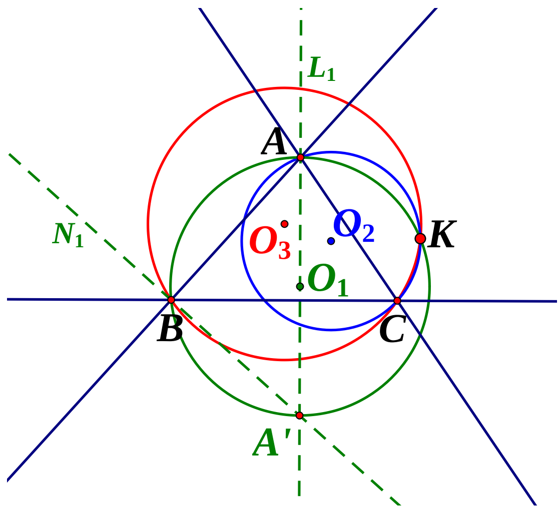
②過 B 作直線$N_1 \perp \overline{AB}$交L_1於A′

③作△ABA′的外接圓O_1

④同理過 B、過 C 用同樣的方式作O_2、O_3，

則O_1, O_2, O_3必交於一點K於**邊外部**，

K'同理可作，逆向旋轉作圖即可。



【圖 3.14】外部二階相似三角點 K 作圖

此即為外部二階第 1、2 相似三角點，

無論△ABC 如何改變，K、K'兩起始點必落在邊外部或三角形的 3 頂點上。

●邊長關係(全區)

循環反推法

因為我們要尋找的是△H_2(P)～△ABC 之 P 點所在位置，故我們定義△H_{-1}(P)代表當 P 點對△H_{-1}(P)可投影(反射)出△ABC 與其相似。

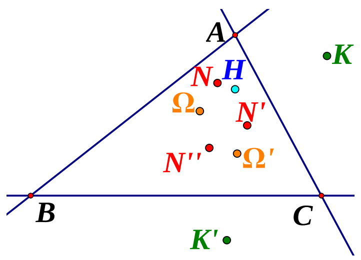
由定理 1.5 知，$\triangle H_{-1}(\mathrm{P})\sim\triangle H_{-1+3}(\mathrm{P})\cong\triangle H_2(\mathrm{P})$。故 P 點必落在$\triangle H_{-1}(\mathrm{P})$的 11 個投影(反射)點其中之一，原本的外部相似三角反射線段上的E、E″、E‴因為在$\triangle H_{-1}(\mathrm{P})$三邊所在直線上，僅能投影(反射)1 次，故僅剩下 11－3=8 個點，其對應如下表 11。

表 11：$\triangle H_{-1}(\mathrm{P})\sim\triangle\mathrm{ABC}$ 時的互換性對照表

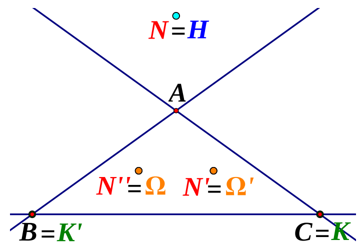
三角形	起始點位置（共 8 個起始點）							
$\triangle H_{-1}(\mathrm{P})$	O	Ω	Ω'	S	S'	S''	E′	E‴
△ABC	H	Ω	Ω'	N	N'	N''	K	K′

3. 小結：

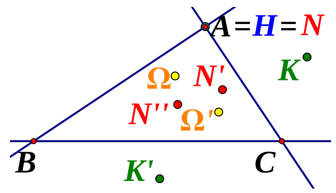
如圖 3.15，第二垂足(反射)三角形為相似三角形所有起始點的分布狀況，我們發現要使得$\triangle \boldsymbol{H_2}(\mathbf{F})\sim\triangle\mathbf{ABC}$最多僅有這八個點，銳角$\triangle\mathbf{ABC}$內部的六個點跟前面第一垂足(反射)三角形為相似三角形的六個點有類似的特性，由圖 3.16 知，若以∠A>90°為頂角的等腰三角形，N和H重合且會落在三角形外部、Ω 和N''重合、Ω'和N'重合、K 和C重合、K'和 B 重合。由圖 3.17 知，若以∠A＝90°，則 A、H、N 三點會重合在 90°角的頂點上。



【圖 3.15】△ABC 銳角三角形時$\triangle H_2(\mathrm{P})\sim\triangle\mathrm{ABC}$ 的所有起始點



【圖 3.16】△ABC為頂角∠A>90°的等腰鈍角三角形時$\triangle H_2(\mathrm{P})\sim\triangle\mathrm{ABC}$ 的所有起始點



【圖 3.17】△ABC為∠A＝90°的直角三角形時$\triangle H_2(\mathrm{P})\sim\triangle\mathrm{ABC}$ 的所有起始點

三、第 n 垂足(反射)三角形$\triangle \boldsymbol{H_n}(\mathbf{P})$為特殊三角形的循環性與相似性

前述第一部分的 **性質 1.5 中的$\triangle\mathbf{ABC}\sim\triangle \boldsymbol{H_{3n}(P)}$**中 ，我們可以知道平面上若不在$\triangle\mathbf{ABC}$的三邊所在直線或外接圓上的任意一點 P，它對△ABC三邊所在直線作三次的投影(反射)後的垂足(反射)三角形，必與原三角形相似，它的存在解釋了兩個起始點之間的互換性與循環性，這也是兩點之間為何會以 3 的倍數為周期做循環互換的主要原因，以下針對各個起始點循環性、互換性與相似性做綜合歸納，分成許多性質。

其中**性質 4.3 和性質 4.4 也正好說明了$\triangle \boldsymbol{H_1(P)}\sim\triangle\mathbf{ABC}$為何總共會有 11 個點**，而$\triangle \boldsymbol{H_2(P)}\sim\triangle\mathbf{ABC}$**會有總共會有 8 個點，兩個相差 3 個點的主要原因了。**

性質 4.1

三角形的**相似三角點S、S'、S''**之循環性與相似性

$\triangle ABC \sim \triangle H_{3n-2}(S) \sim \triangle H_{3n}(S)$，其中$\triangle H_{3n-1}(S)$均為等腰三角形，

且△ABC 的相似三角點為$\triangle H_{3n-2}(S)$的二階相似三角點和$\triangle H_{3n}(S)$的相似三角點。

表 12：三角形的**相似三角點S、S'、S''**之循環性與相似性

△ABC	$\triangle \mathrm{H}_1(S)$	$\triangle \mathrm{H}_2(S)$	$\triangle \mathrm{H}_3(S)$
P在△ ABC **相似三角點** S、S'、S''上	～△ ABC	等腰三角形	～△ ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle \mathrm{H}_{3n-2}(S)$	$\triangle \mathrm{H}_{3n-1}(S)$	$\triangle \mathrm{H}_{3n}(S)$
	～△ABC	等腰三角形	～△ABC

【證明】

1.由性質 1.5 知，$\triangle \mathrm{H}_{3n}(S) \sim \triangle \mathrm{ABC}$

2. $\triangle \mathrm{H}_{3n-1}(S)$必為等腰三角形，如圖 4.1

3.$\because \triangle \mathrm{H}_{3n-2}(S) \sim \triangle \mathrm{ABC}$ (已證) 且 $\triangle \mathrm{H}_{3n-2}(S)$的第三

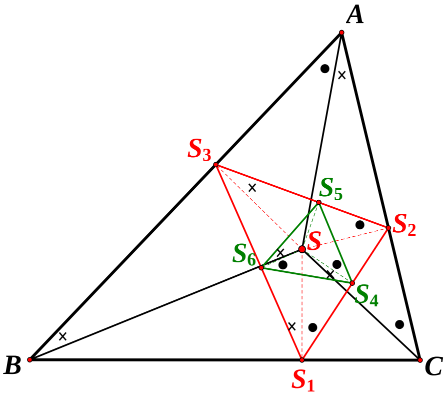
垂足三角形為$\triangle \mathrm{H}_{3n-2+3}(S) \cong \triangle \mathrm{H}_{3(n+1)-2}(S)$

$\therefore$故由上表知，$\triangle \mathrm{H}_{3(n+1)-2}(S) \sim \triangle \mathrm{H}_{3n-2}(S) \sim \triangle \mathrm{ABC}$

4.$\triangle \mathrm{H}_{3n-2}(S)$的第二垂足三角形為$\triangle \mathrm{H}_{3n-2+2}(S) \cong \triangle \mathrm{H}_{3n}(S)$

$\therefore$故由上表知，$\triangle \mathrm{H}_{3n}(S) \sim \triangle \mathrm{H}_{3n-2}(S) \sim \triangle \mathrm{ABC}$

角度如圖 4.1，S點必在$\triangle \mathrm{H}_{3n-2}(S)$的二階相似三角點$N$上。



【圖 4.1】三角形的**相似三角點**

S、S'、S''之循環性與相似性

性質 4.2

三角形的**二階相似三角點N、N'、N''**之循環性與相似性

$\triangle ABC \sim \triangle H_{3n-1}(N) \sim \triangle H_{3n}(N)$ ，其中$\triangle H_{3n-2}(N)$均為等腰三角形

且△ABC 的二階相似三角點為$\triangle H_{3n-1}(N)$的相似三角點和$\triangle H_{3n}(N)$的相似三角點

表 13：三角形的**二階相似三角點N、N'、N''**之循環性與相似性

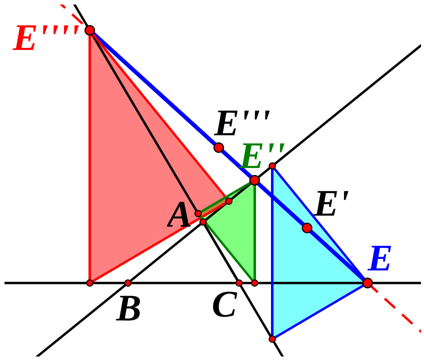
△ABC	$\triangle \mathrm{H}_1(N)$	$\triangle \mathrm{H}_2(N)$	$\triangle \mathrm{H}_3(N)$
P在△ABC **二階相似三角點N、N'、N''**上	等腰三角形	～△ABC	～△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle \mathrm{H}_{3n-2}(N)$	$\triangle \mathrm{H}_{3n-1}(N)$	$\triangle \mathrm{H}_{3n}(N)$
	等腰三角形	～△ABC	～△ABC

【證明】**其推論方式與性質 4.1 大致相同。**

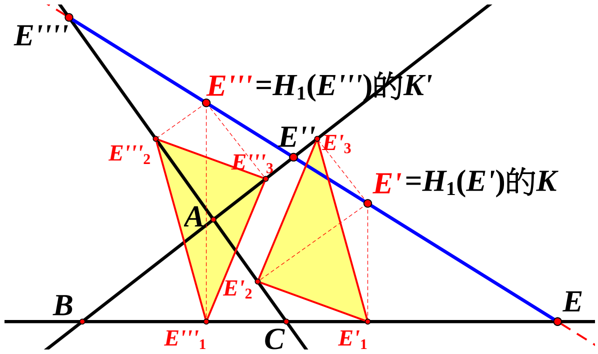
性質 4.3

外部的相似三角點E、E′、E″、E‴、E⁗，其中E、E″、E⁗在△ABC三邊所在直線上，僅能投影 1 次，即△ABC~$H_1(E)$、△ABC~$H_1(E'')$、△ABC~$H_1(E'''')$

【證明】由性質 2.2 可知，投影狀況如圖 4.2。



【圖 4.2】三角形的**外部相似三角點*E*、*E″*、*E⁗***僅能投影 1 次



【圖 4.3】三角形的**外部相似三角點*E′*、*E″***的投影狀況

性質 4.4

外部的第 2、第 4 相似三角點E′和E‴亦稱為**第 1 和第 2 類布洛卡點**

△ABC~$\triangle H_{3n-2}(E')$~$\triangle H_{3n}(E')$ 且△ABC~$\triangle H_{3n-2}(E''')$~$\triangle H_{3n}(E''')$

△ABC的E′ 為$\triangle H_{3n-2}(E')$ 的**二階外部第 1 相似三角點*K***

△ABC的E‴為$\triangle H_{3n-2}(E''')$的**二階外部第 2 相似三角點*K′***

表 14：**外部的第 2、第 4 相似三角點E′和E‴**之循環性與相似性

△ABC	**$\triangle H_1(E')$**	**$\triangle H_2(E')$**	**$\triangle H_3(E')$**
P在△ABC **外部的第 1 與第 2 相似三角點 E′和E‴**上	**～△ABC**		**～△ABC**
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(E')$	**$\triangle H_{3n-1}(E')$**	**$\triangle H_{3n}(E')$**
	～△ABC		**～△ABC**

【證明】由定理 1.5 知，$\triangle H_{3n}(E')\sim\triangle ABC$

1.∵$\triangle H_{3n-2}(E')\sim\triangle ABC$ (已證) 且

$\triangle H_{3n-2}(E')$的第三垂足三角形為$\triangle H_{3n-2+3}(E')\cong\triangle H_{3(n+1)-2}(E')$

∴故由上表知，$\triangle H_{3(n+1)-2}(E')\sim\triangle H_{3n-2}(E')\sim\triangle ABC$

2.$\triangle H_{3n-2}(E')$的第二垂足三角形為$\triangle H_{3n-2+2}(E')\cong\triangle H_{3n}(E')$

∴故由上表知，$\triangle H_{3n}(E')\sim\triangle H_{3n-2}(E')\sim\triangle ABC$

故*E*點必在$\triangle H_{3n-2}(E')$的二階外部第 1 相似三角點*K*上，如圖 4.3。

同理，$\triangle H_{3n-2}(E''')$的二階外部第 2 相似三角點*K′*上，如圖 4.3。

性質 4.5

若X_A、X_B為△ABC 的等動力點，則△ $H_{3n-2}(X_A)$和△ $H_{3n-2}(X_B)$為正三角形

其中①△ ABC的**內部**X_A為△ $H_{3n-1}(X_A)$的**費馬點(或類費馬點) *F***

②△ ABC的**外部**X_B為△ $H_{3n-1}(X_B)$的**第 2 費馬點 *F′***

表 15：三角形的等動力點X_A、X_B之循環性與相似性

△ABC	$\triangle \mathrm{H_1}(X_A)$	$\triangle \mathrm{H_2}(X_A)$	$\triangle \mathrm{H_3}(X_A)$
P在△ABC **等動力點** X_A或X_B上	正三角形		～△ ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle \mathrm{H_{3n-2}}(X_A)$	$\triangle \mathrm{H_{3n-1}}(X_A)$	$\triangle \mathrm{H_{3n}}(X_A)$
	正三角形		～△ABC

【證明】由定理 1.5 知，$\triangle \mathrm{H_{3n}}(X_A) \sim \triangle \mathrm{ABC}$

1.∵$\triangle \mathrm{H_{3n-2}}(X_A)$**為正三角形 (已證)** 且

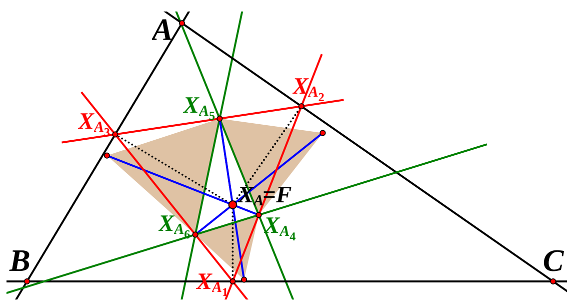
$\triangle \mathrm{H_{3n-2}}(X_A)$的第三垂足三角形為$\triangle \mathrm{H_{3n-2+3}}(X_A) \cong \triangle \mathrm{H_{3(n+1)-2}}(X_A)$

∴故由上表知，$\triangle \mathrm{H_{3(n+1)-2}}(X_A) \sim \triangle \mathrm{H_{3n-2}}(X_A)$**皆為正三角形**

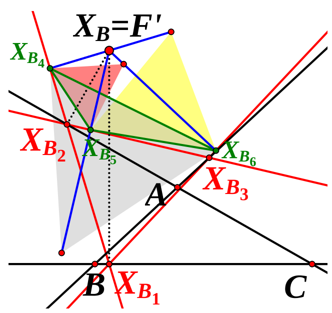
2.$\triangle \mathrm{H_{3n-1}}(X_A)$的第二垂足三角形為$\triangle \mathrm{H_{3n-1+2}}(X_A) \cong \triangle \mathrm{H_{3(n+1)-2}}(X_A)$

∴故由上表知，$\triangle \mathrm{H_{3(n+1)-2}}(X_A) \sim \triangle \mathrm{H_{3n-2}}(X_A)$**皆為正三角形**，如圖 4.4、4.5，可知$X_A$在

$\triangle \mathrm{H_{3n-1}}(X_A)$的費馬點(或類費馬點) *F* 上，同理**$X_B$在$\triangle \mathrm{H_{3n-1}}(X_B)$的第 2 費馬點 *F′* 上**



【圖 4.4】X_A在$\triangle \mathbf{H_2}(X_A)$的費馬點***F***上



【圖 4.5】X_B在$\triangle \mathbf{H_2}(X_B)$的第 2 費馬點***F′***上

性質 4.6

已知△ABC的三個**直角三角形反射圓**上的點 P，則$\triangle H_{3n-2}(P)$為直角三角形

其中 P 點必在$\triangle H_{3n-1}(P)$的 3 個**二階直角三角形反射圓**上

表 16：三角形的**直角三角形反射圓**之循環性與相似性

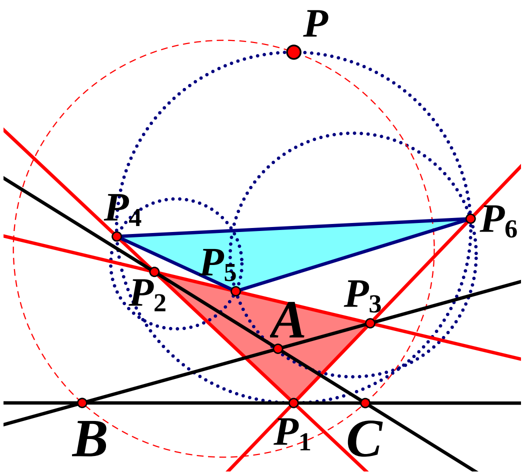
△ABC	$\triangle \mathrm{H_1(P)}$	$\triangle \mathrm{H_2(P)}$	$\triangle \mathrm{H_3(P)}$
P在△ ABC的 **直角三角形 反射圓**上	直角三角形		～△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle \mathrm{H_{3n-2}(P)}$	$\triangle \mathrm{H_{3n-1}(P)}$	$\triangle \mathrm{H_{3n}(P)}$
	直角三角形		～△ABC

【證明】

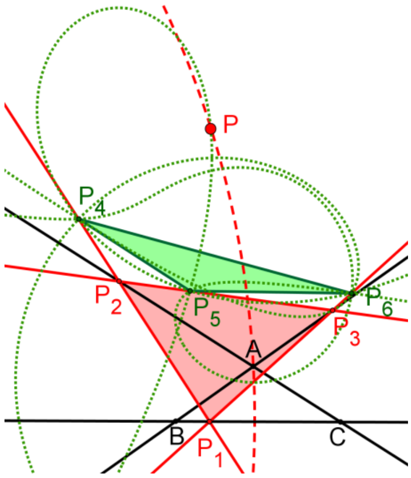
∵$\triangle H_{3n-1}(P)$的第二垂足三角形為$\triangle H_{3n-1+2}(P)=\triangle H_{3(n+1)-2}(P)$

∴由上表知，$\triangle H_{3(n+1)-2}(P)$必為直角三角形，

故P點必在$\triangle H_{3n-1}(P)$的「**二階直角三角形反射圓**」上。如圖 4.6。



【圖 4.6】起始點 P 同時在△ABC的**直角三角形反射圓上**與$\triangle H_2(P)$的二階直角三角形反射圓上
(紅色虛線) **(藍色點線)**



【圖 4.7】起始點 P 同時在△ABC的**等腰三角形反射圓上**與$\triangle H_2(P)$的二階等腰三角形反射自交曲線上
(紅色虛線) **(綠色點線)**

性質 4.7

已知△ABC的三個**等腰三角形反射圓**上的點 P，則$\triangle H_{3n-2}(P)$必為等腰三角形，

其中 P 點必在$\triangle H_{3n-1}(P)$的 3 個**二階等腰三角形反射自交曲線**上

表 17：三角形的**等腰三角形反射圓**之循環性與相似性

△ABC	$\triangle H_1(P)$	$\triangle H_2(P)$	$\triangle H_3(P)$
P在△ ABC的**等腰三角形反射圓**上	等腰三角形		∼△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(P)$	$\triangle H_{3n-1}(P)$	$\triangle H_{3n}(P)$
	等腰三角形		∼△ABC

【證明】

∵$\triangle H_{3n-1}(P)$的第二垂足三角形為$\triangle H_{3n-1+2}(P)\cong\triangle H_{3(n+1)-2}(P)$

∴由上表知，$\triangle H_{3(n+1)-2}(P)$必為**等腰三角形**

故P點必在$\triangle H_{3n-1}(P)$的「**二階等腰三角形反射自交曲線**」上。如圖 4.7 。

陸、研究結果

一、三角形內部特殊點的投影(反射)性質

(一)循環性：三角形的外心O、內心I、垂心H之垂足(反射)三角形以一遞推方式互相取代。

(二)相似性：1. 外心 O 和垂心 H的垂足(反射)三角形具有相似性，即

$\triangle\mathbf{ABC}\sim\triangle\mathbf{H_{3n-2}(O)}\sim\triangle\mathbf{H_{3n}(O)}$且$\triangle\mathbf{ABC}\sim\triangle\mathbf{H_{3n-1}(H)}\sim\triangle\mathbf{H_{3n}(H)}$。

2. 原三角形布洛卡點仍為其垂足(反射)三角形的布洛卡點，且所有垂足(反射)三角形均相似，即$\triangle\mathbf{ABC}\sim\triangle\boldsymbol{H_n}(\boldsymbol{\Omega})\sim\triangle\boldsymbol{H_n}(\boldsymbol{\Omega'})$。

3. 平面上 P 為不在三角形外接圓或三邊所在直線上的任一點，其第 3n 垂足三角形必與原三角形相似，即$\triangle\mathbf{ABC}\sim\triangle\boldsymbol{H_{3n}}(\boldsymbol{P})$。

二、第一垂足三角形為特殊三角形的起始點位置

(一) $\triangle H_1(P)$為等腰三角形時，起始點在以三邊比例所作的 **3 個阿波羅尼斯圓上**。

(二) $\triangle H_1(P)$為正三角形時，起始點為 3 個阿波羅尼斯圓的兩個交點$\boldsymbol{X_A}$、$\boldsymbol{X_B}$。

(三) $\triangle H_1(P)$為直角三角形時，起始點在以 3 邊為弦所作的 3 個直角三角形反射圓上。

(四) $\triangle H_1(P)$與原三角形相似時，起始點最多有$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{\Omega}$、$\boldsymbol{\Omega'}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{S'}$、$\boldsymbol{S''}$與$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{E'}$、$\boldsymbol{E''}$、$\boldsymbol{E'''}$、$\boldsymbol{E''''}$共 11 個點。

表 18：$\triangle H_1$(P)為特殊三角形時，內部+外部反射狀況

	$\triangle\boldsymbol{H_1}$(P)為 等腰三角形	$\triangle\boldsymbol{H_1}$(P)為 正三角形	$\triangle\boldsymbol{H_1}$(P)為 直角三角形	$\triangle\boldsymbol{H_1}$(P)為 相似三角形
起始點位置	①原△為非等腰三角形⇒3 個阿波羅尼斯圓上 ②原△為等腰三角形⇒2 個阿波羅尼斯圓與 1 直線上 ③原△為正三角形⇒3 條直線上	①原△三個內角均不相等且均小於120°，$\boldsymbol{X_A}$、$\boldsymbol{X_B}$在內部、外部各一點 ②原△有一角等於 120°時，$\boldsymbol{X_A}$、$\boldsymbol{X_B}$一個在外部，一個在最長邊上 ③原△有一角大於120°時，$\boldsymbol{X_A}$、$\boldsymbol{X_B}$在外部 ④原△為正△，內部中心點	①原△為銳角或鈍角三角形⇒3 個直角△反射圓上 ②原△為直角三角形⇒2 個直角△反射圓與斜邊所在直線上	①原△三個內角均不相等時，共 11 個起始點 $\mathbf{O}$、$\boldsymbol{\Omega}$、$\boldsymbol{\Omega'}$、$\mathbf{S}$、$\boldsymbol{S'}$、$\boldsymbol{S''}$、 ②原△為等腰三角形，共 5 個起始點 ③原△為正三角形，僅 1 起始點
● 若$\triangle H_1$(P)的起始點軌跡有通過△ABC 的外接圓，則無法投影(反射)出三角形				

三、第二垂足三角形為特殊三角形的起始點位置

(一)$\triangle H_2(P)$為等腰三角形時，起始點分別在 3 條**二階等腰三角形反射自交曲線**上。

(二)$\triangle H_2(P)$為正三角形時，起始點在**費馬點**(或**類費馬點**)和**第二費馬點**上，值得注意的是會因三角形角度的改變，以上的點有可能造成無法投影(反射)的情況。

(三)$\triangle H_2(P)$為直角三角形時，起始點在以 3 邊為直徑所作的**二階直角三角形反射圓**上。

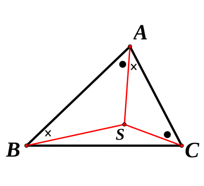
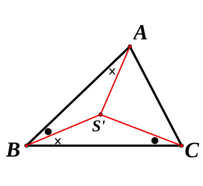
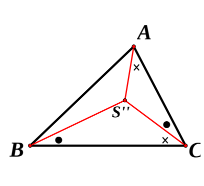
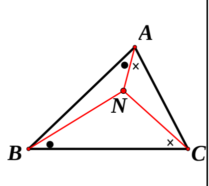
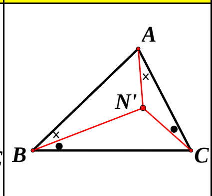
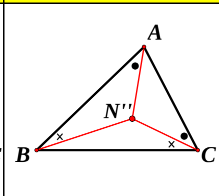
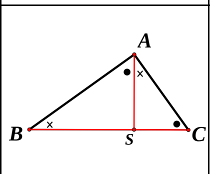
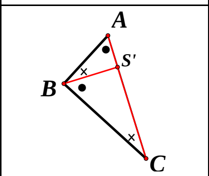
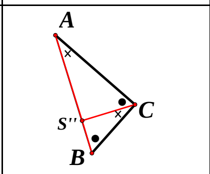
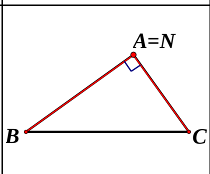
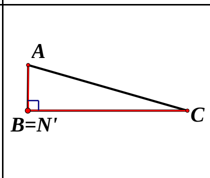
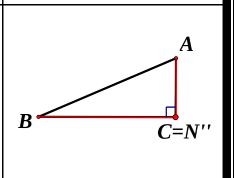
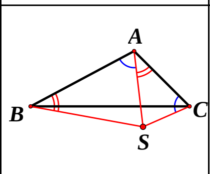
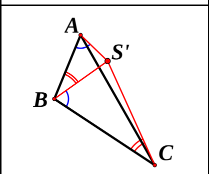
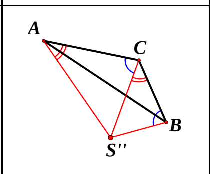
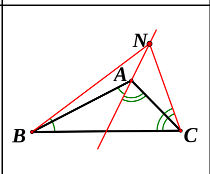
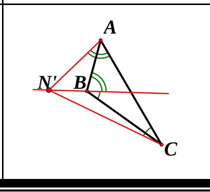
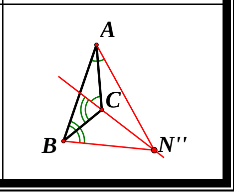
(四)$\triangle H_2(P)$與原三角形相似時，起始點最多$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{\Omega}$、$\boldsymbol{\Omega'}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N'}$、$\boldsymbol{N''}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{K'}$共 8 個點。

表 19：$\triangle H_2$(P)為特殊三角形時，內部+外部反射狀況(原△三個內角均不相等)

	$\triangle H_2$(P)為 等腰三角形	**$\triangle H_2$(P)為 正三角形**	**$\triangle H_2$(P)為 直角三角形**	**$\triangle H_2$(P)為 相似三角形**
起始點	3 條二階等腰三角形反射自交曲線	F(費馬點或類費馬點) F′(第二費馬點)	3 個二階直角三角形反射圓	H(垂心)、Ω、Ω′(第 1、2 布洛卡點) N、N′、N″(二階第 1、2、3 相似三角點) K、K'(外部二階第 1、2 相似三角點)
●若$\triangle H_2$(P)起始點軌跡通過△ABC 的外接圓與其三邊所在直線上，則無法投影(反射)兩次				

四、相似三角點$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{S'}$、$\boldsymbol{S''}$與二階相似三角點$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N'}$、$\boldsymbol{N'}$的性質：

表 20：相似三角點$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{S'}$、$\boldsymbol{S''}$與二階相似三角點$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N'}$、$\boldsymbol{N'}$的定義圖說對照表

起始點	**第 1 相似三角點 $\boldsymbol{S}$**	**第 2 相似三角點 $\boldsymbol{S'}$**	**第 3 相似三角點 $\boldsymbol{S''}$**	二階第 1 相似三角點$\boldsymbol{N}$	二階第 2 相似三角點$\boldsymbol{N'}$	二階第 3 相似三角點$\boldsymbol{N''}$
銳角三角形						
直角三角形						
鈍角三角形						

由上表 20 我們可以看出，無論是相似三角點$\boldsymbol{S}$或是二階相似三角點$\boldsymbol{N}$，在$\triangle ABC$為銳角三角形時，它們都在三角形的內部；△ABC為直角三角形時，$\boldsymbol{S}$點會落在斜邊上的高之垂足上，$\boldsymbol{N}$點會落在 90 度角上造成無法投影(反射)；△ ABC為鈍角三角形時，$\boldsymbol{S}$落在最長邊的**邊外部**，而$\boldsymbol{N}$落在 90 度角的**角外部**。

當△ABC為等腰三角形時，**$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{S'}$、$\boldsymbol{S''}$會分別與O、Ω、Ω′兩兩重合，而$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N'}$、$\boldsymbol{N''}$會分別與H、Ω′、Ω兩兩重合**。

五、外部相似三角點E、E'、E''、E'''、E''''與外部二階相似三角點K、K'的性質

(一) E、E'、E''、E'''、E''''五點共線，形成一條**外部相似三角反射線段**。當△ABC為等腰三角形時，此五個點會有兩兩重合，一個會消失的情況，此時線段上會僅剩下兩個外部相似三角點，當△ABC為正三角形時則全部消失。

(二) K、K'隨著△ ABC的變化而改變位置，而且僅會落在$\boxed{\text{邊外部}}$。當△ABC為等腰三角形時，K、K'分別會與等腰三角形的兩底角頂點重合而無法投影出垂足三角形。

六、第 n 垂足(反射)三角形

我們發現這些起始點具有循環的特性，可以進一步推算出投影(反射)n 次後是否仍為特殊三角形，它們彼此存在著共生或互換的關係，如此我們將這些起始點的循環性、互換性與相似性作了更一般化的討論，整理出相關的循環對照表。

柒、結論與未來展望

本研究中順利找出所有可以經過 1 次、2 次、n 次投影(反射)所得的特殊三角形之所有起始點的位置和軌跡，並得到某些不錯的規律，讓我們瞭解平面上的點對三角形三邊所在直線作投影(反射)後所形成的垂足(反射)三角形之間的關係，並且透過古典幾何作圖的方式也能快速找到它們，其中尚有許多可以發展的方向，例如對多邊形、多面體的投影或反射，期待未來可以發現更多有趣的結果。

捌、參考文獻

一、 林妮瑾、陳愷欣、江品萱(2018)。*三角形的心心相映*。新北市 106 學年度中小學科學展覽國中組數學科

二、 Georgi Ganchev, Gyulbeyaz Ahmed, Marinella Petkova(2012).*Points, whose pedal triangles are similar to the given triangle*. Retrieved May 20, 2020, from Cornell University, History and Overview (math.HO) Web site : https://arxiv.org/abs/1210.2929

三、 Clark Kimberling(2003),*Bicentric Pairs of Points and Related Triangle Centers*. Retrieved Dec 15, 2019, Web site : http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200303.pdf

四、 國中數學課本第五冊第三章：推理證明與三角形的心。南一書局

【評語】030419

作品研究平面幾何相關問題，作者們考慮平面上任一點 P 對三角形△ABC 三邊直線作投影或反射後的點所連成的三角形稱為第一垂足（反射）三角形，對第一垂足（反射）三角形重複相同的動作造出第二垂足（反射）三角形，如此反覆地進行下去。主要結果包括第一與第二垂足（反射）三角形是特殊三角形（等腰三角形、正三角形、直角三角形、相似三角形）時起始點的位置，得到許多有趣的性質，與著名的費馬點、布洛卡點和阿波羅尼斯圓等的關聯。此外，作者們歸納出第 n 垂足（反射）三角形的循環性、互換性與相似性。作品內容豐富論證清楚。

作品海報

壹、 研究動機

平面上任意點對給定三角形的三邊所在直線作三個投影點（反射）點，會連成什麼樣的三角形呢？這個有意思的問題激發了我們的好奇心，這樣的三角形我們稱為垂足（反射）三角形，從大家熟知的垂心投影出垂足三角形在銳角三角形中是周長最小的內接三角形，到三角形外接圓上一點無法投影出垂足三角形而連成一條西姆松線，我們便開始想像，這樣的垂足（反射）三角形若是特殊的三角形時，那麼它一開始的起始投影（反射）點會在哪裡？於是我們便一頭栽進平面幾何的想像空間，開始了無數次的手繪與 *The Geometer's Sketchpad*、*GeoGebra* 的試作修正，進一步找出答案。

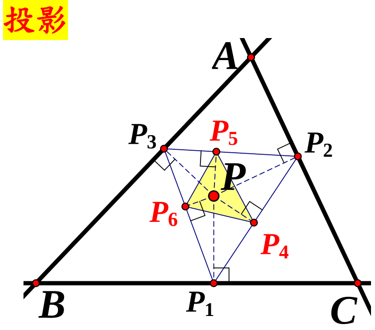
貳、 研究目的

一、 名詞解釋及定義

表 1：本研究中△*ABC* 的一些特殊起始投影點之名詞定義

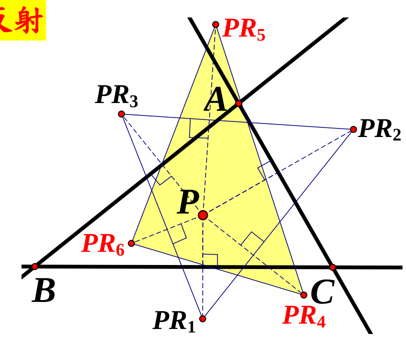
S、S'、S''	第 1、2、3 相似三角點	N、N'、N''	二階第 1、2、3 相似三角點
E、E'、E''、E'''、E''''	外部第 1、2、3、4、5 相似三角點	K、K'	外部二階第 1、2 相似三角點
Ω、Ω'	第 1、2 布洛卡點	X_A、X_B	第 1、2 等動力點
$\triangle H_n(P)$	即$\triangle P_{3n-2}P_{3n-1}P_{3n}$：表示 P 點對△ABC 作的第 n 垂足三角形。$n\in\mathbb{N}$		
$\triangle R_n(P)$	即$\triangle PR_{3n-2}PR_{3n-1}PR_{3n}$：表示 P 點對△ABC 作的第 n 反射三角形。$n\in\mathbb{N}$		

投影



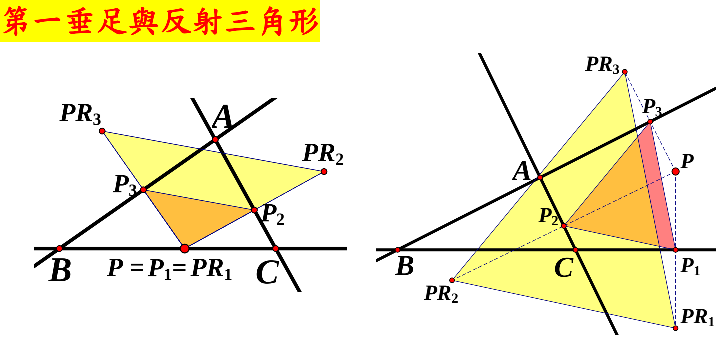
【圖 1.1】第一和第二垂足三角形

反射



【圖 1.2】第一和第二反射三角形

第一垂足與反射三角形



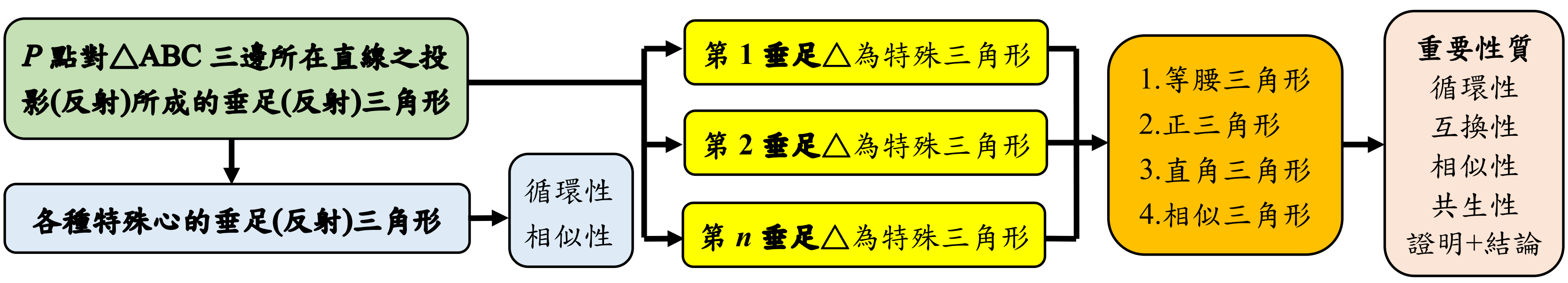
【圖 1.3】邊上及外部投影反射狀況

二、研究問題與流程圖

(一) 歸納三角形的特殊心對三角形的三邊所在直線之投影(反射)三角形之性質。

(二) 找出三角形的內部與外部的第 1 與第 2 垂足(反射)三角形為特殊三角形之起始點位置。

(三) 探討第 1 到第n投影(反射)三角形彼此之間的關係是否具有循環性、互換性、相似性或其它性質。



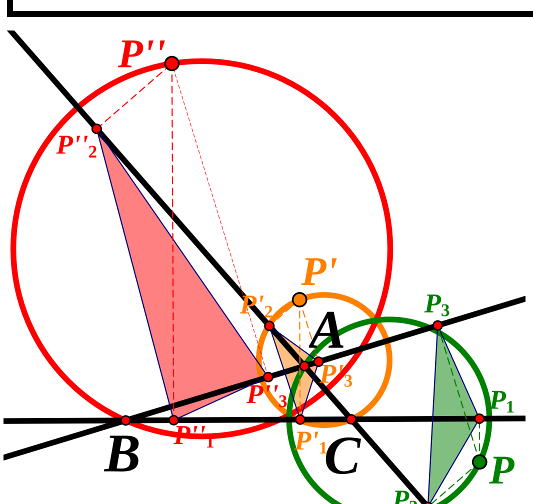
【圖 1.4】研究流程圖

參、 研究結果與討論

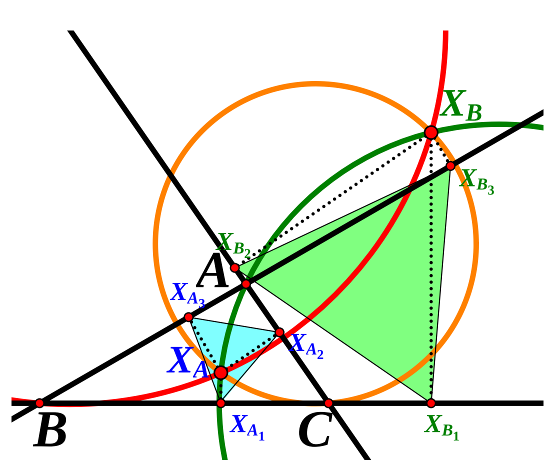
一、 第一垂足(反射)三角形△$H_1(P)$為特殊三角形的起始點

表 2：△$H_1(P)$為特殊三角形時，內部與外部起始點位置

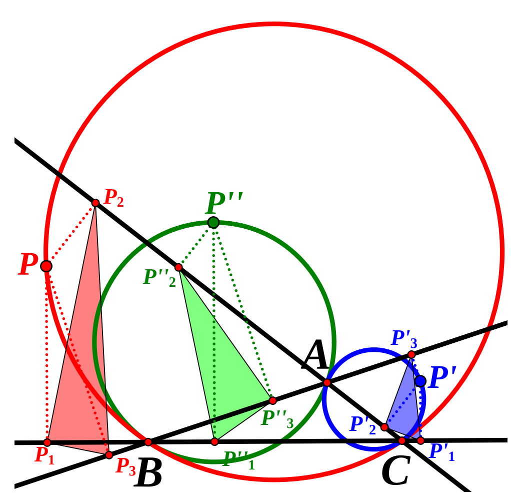
△$H_1(P)$	等腰三角形	正三角形	直角三角形	相似三角形
起始點位置	①原△為非等腰三角形 ⇒3 個等腰△反射圓上 ②原△為等腰三角形 ⇒ 2個等腰△反射圓與 1 條直線上 ③原△為正三角形 ⇒3 條直線上	① $\angle A\neq\angle B\neq\angle C$ 且均小於120°，X_A、X_B在內部、外部各一點 ②有一角為 120°，X_A、X_B有一個在外部，一個在最長邊上 ③一角>120°時，X_A、X_B在外部 ④△*ABC* 為正△，內部中心點	①原△為銳角三角形 ⇒3 個直角△反射圓上 ②原△為直角三角形 ⇒2 個直角△反射圓與斜邊上 ③原△為鈍角三角形 ⇒3 個直角△反射圓上	① $\angle A\neq\angle B\neq\angle C$ 共 **11 個起始點** O、Ω、Ω'、S、S'、S'' 、E、E'、E''、E'''、E'''' ②原△為等腰△，共 **5 個起始點** ③原△為正△，僅 **1 起始點**
● 起始點 *P* 的軌跡與△*ABC* 外接圓之交點無法投影(反射)出垂足三角形				



【圖 2.1】第一垂足三角形為等腰三角形
(△ABC 為非等腰三角形時)

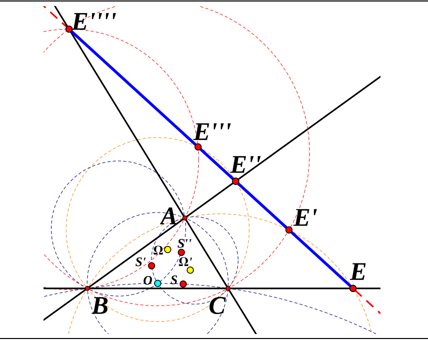
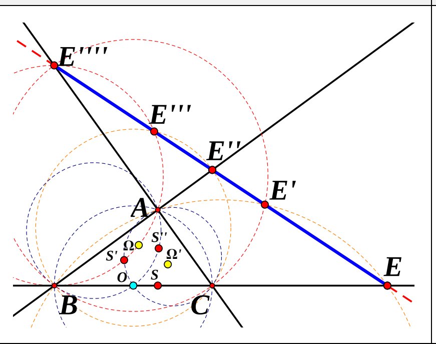
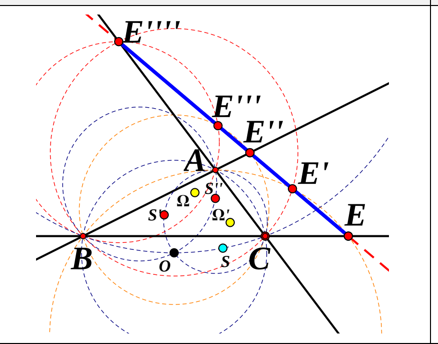
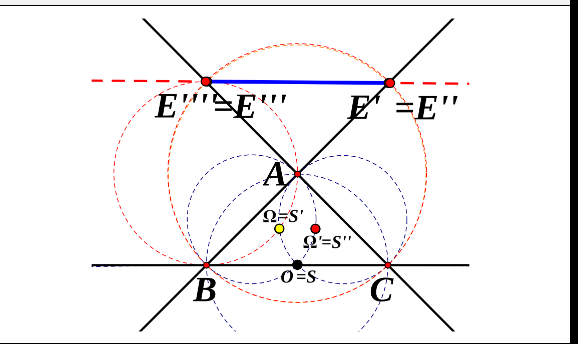


【圖 2.2】第一垂足三角形為正三角形
(∠A ≠∠B ≠∠C 均小於120°時)



【圖 2.3】第一垂足三角形為直角三角形
(△ABC 為鈍角△時)

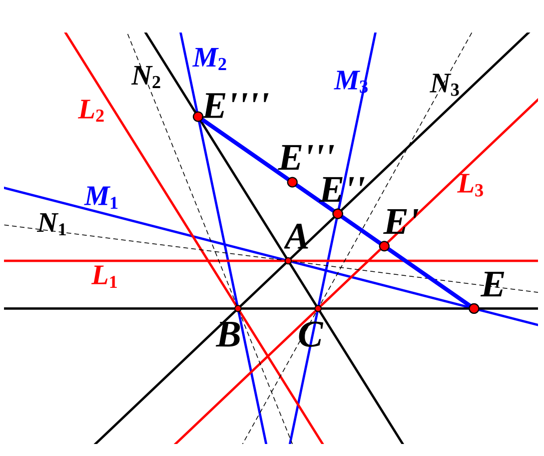
表 3：$\triangle H_1(P)$與$\triangle ABC$相似時，內部與外部起始點位置

$\triangle ABC$ 為銳角三角形(非等腰)	$\triangle ABC$ 為直角三角形(非等腰)	$\triangle ABC$ 為鈍角三角形(非等腰)	$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形
			
內部 6 點：O、Ω、Ω'、S、S'、S'' 外部 5 點：$E\sim E''''$	內部 4 點：Ω、Ω'、S'、S'' 邊上 2 點：O 和S在$\overline{BC}$上 外部 5 點：$E\sim E''''$	內部 4 點：Ω、Ω'、S'、S'' 外部 7 點：$E\sim E''''$、O、S	內部 2 點：Ω 和S'重合、Ω'和S''重合 邊上 1 點：O和S重合在斜邊 外部 2 點：E'和E''重合、E'''和E''''重合、E消失

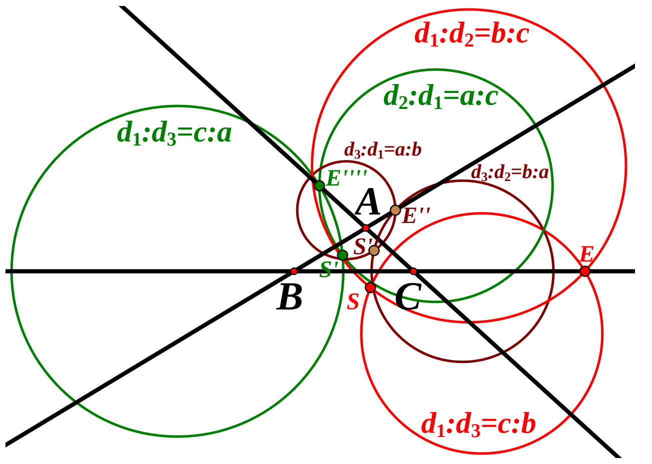
由上表 3 可知，任意三角形最多有 **11 個起始點**可投影出與$\triangle ABC$ 相似的三角形$\triangle H_1(P)$

性質 2.5

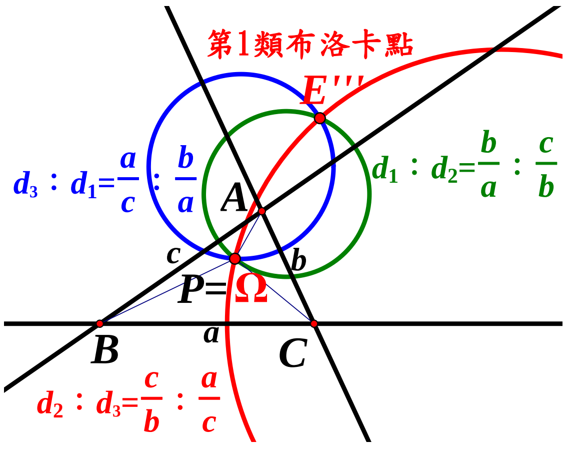
$\triangle ABC$ 的外部相似三角點E、E'、E''、E'''、E''''五點共線，稱為**外部相似三角反射線段**，此線段為萊莫恩線(*Lemoine line*)的一部份



【圖 2.4】外部相似三角反射線段作圖



【圖 2.5】兩兩阿波羅尼斯圓的交點看出相似三角點S、S'、S''與外部相似三角點E、E''、E''''的共生狀態

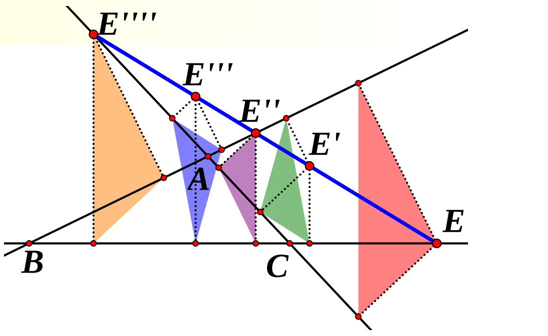


【圖 2.6】三角形的第 1 布洛卡點Ω與第 1 類布洛卡點E'''的共生狀態

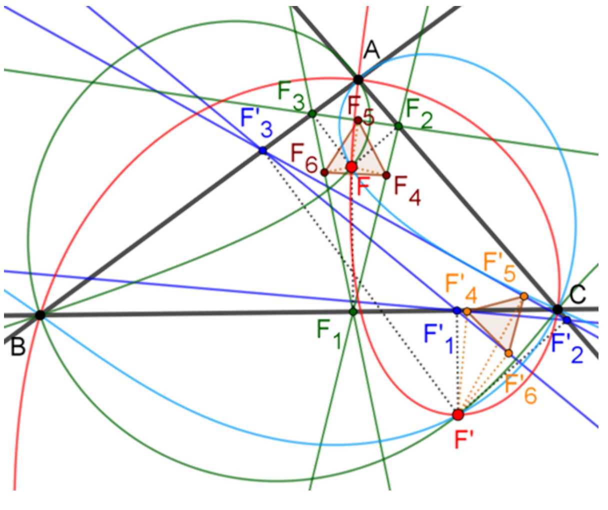
二、第二垂足(反射)三角形$\triangle H_2(P)$為特殊三角形的起始點

表 4：$\triangle ABC$ 中，$\angle A\neq\angle B\neq\angle C$ 情況下$\triangle H_2(P)$為特殊三角形時，內部與外部起始點位置

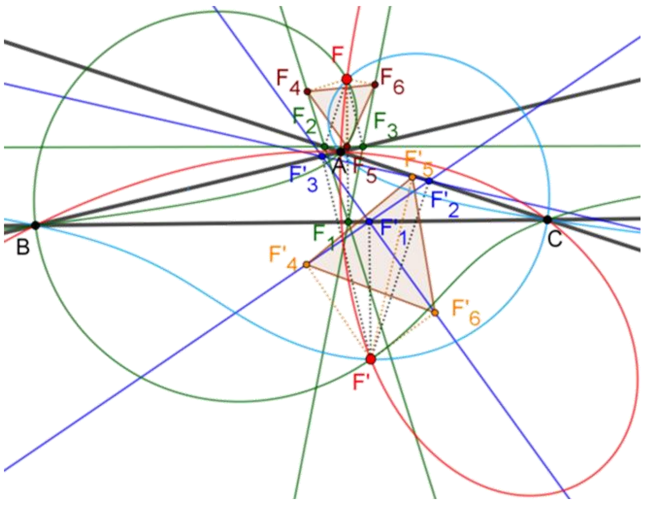
$\triangle H_2(P)$	等腰三角形	正三角形	直角三角形	相似三角形
起始點位置	3 條二階等腰三角形反射自交曲線	F(費馬點或類費馬點) F'(第二費馬點)	3 個二階直角三角形反射圓	H(垂心)、Ω、Ω'(第 1、2 布洛卡點) N、N'、N''(二階第 1、2、3 相似三角點) K、K'(外部二階第 1、2 相似三角點)
●當起始點P的軌跡通過$\triangle ABC$ 外接圓與其三邊所在直線時，則無法投影(反射)兩次				



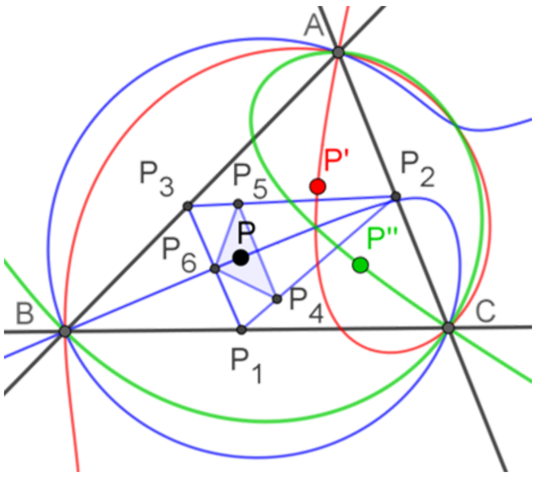
【圖 2.7】外部相似三角點的第一垂足△



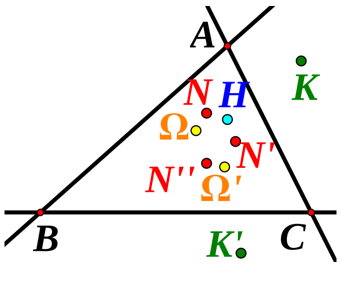
【圖 3.2】$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 均小於 120°且不等於 60°時，存在$\triangle H_2(F)$與$\triangle H_2(F')$均為正三角形



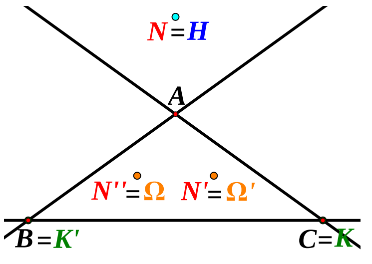
【圖 3.3】$\angle A>120°$存在$\triangle H_2(F)$與$\triangle H_2(F')$均為正三角形，此時F落在三角形的角外部，本文稱為類費馬點



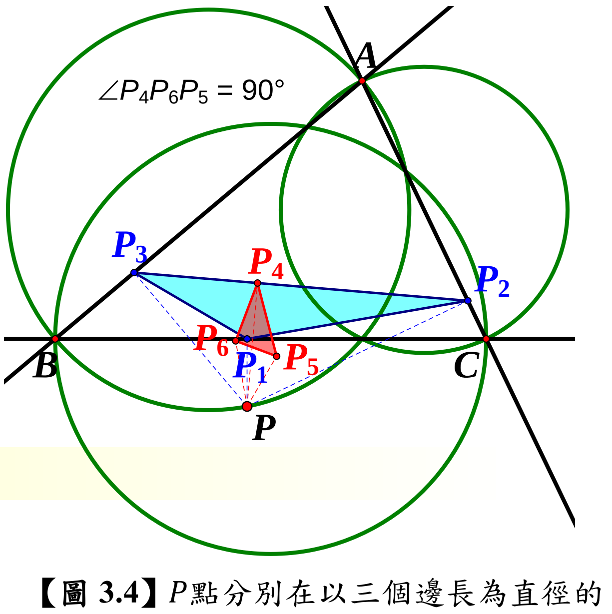
【圖 3.1】P點在三條二階等腰三角形反射自交曲線上



【圖 3.5】$\triangle ABC$ 為銳角三角形($\angle A\neq\angle B\neq\angle C$)$\triangle H_2(P)\sim\triangle ABC$的所有起始點



【圖 3.6】$\triangle ABC$ 為等腰鈍角三角形$\triangle H_2(P)\sim\triangle ABC$的所有起始點



【圖 3.4】P點分別在以三個邊長為直徑的二階直角三角形反射圓上

三、第 n 垂足(反射)三角形$\triangle H_n(P)$為特殊三角形的循環性

定理 1.5 ★重要定理，它是決定循環性、互換性與相似性的關鍵

若 P 為不在三角形的外接圓與三邊所在直線上的任一點，則第三垂足(反射)三角形必與原$\triangle ABC$相似，即$\triangle ABC\sim\triangle H_{3n}(P)$

性質 1.6 $\triangle ABC$的**第一布洛卡點Ω和第二布洛卡點Ω'**，無論投影(反射)幾次，均與原三角形相似。即$\triangle ABC \sim \triangle H_n(\Omega)$、$\triangle H_n(\Omega)$，且 $\triangle H_n(\Omega)$為$\triangle ABC$邊長放大$(\sin\Omega)^n$所得、$\triangle H_n(\Omega')$為$\triangle ABC$邊長放大$(\sin\Omega')^n$所得

性質 4.1 $\triangle ABC$的**相似三角點S、S'、S''**之循環性與相似性
$\triangle ABC \sim \triangle H_{3n-2}(S) \sim \triangle H_{3n}(S)$，其中$\triangle H_{3n-1}(S)$均為等腰△且$\triangle ABC$ 的 S 為$\triangle H_{3n-2}(S)$的 N 和$\triangle H_{3n}(S)$的 S

性質 4.2 $\triangle ABC$的**二階相似三角點N、N'、N''**之循環性與相似性
$\triangle ABC \sim \triangle H_{3n-1}(N) \sim \triangle H_{3n}(N)$，其中$\triangle H_{3n-2}(N)$均為等腰△，且$\triangle ABC$ 的 N 為$\triangle H_{3n-1}(N)$的 S 和$\triangle H_{3n}(N)$的 N

性質 4.3 $\triangle ABC$的**外部的相似三角點E、E'、E''、E'''、E''''**，其中E、E''、E''''在$\triangle ABC$三邊所在直線上，僅能投影(反射)1 次，即$\triangle ABC \sim \triangle H_1(E)$、$\triangle ABC \sim \triangle H_1(E'')$、$\triangle ABC \sim \triangle H_1(E'''')$

性質 4.4 $\triangle ABC$的**外部的第 2、第 4 相似三角點E'和E'''**，亦稱為**第 1 和第 2 類布洛卡點**，則
$\triangle ABC \sim \triangle H_{3n-2}(E') \sim \triangle H_{3n}(E')$、
$\triangle ABC \sim \triangle H_{3n-2}(E''') \sim \triangle H_{3n}(E''')$，且
$\triangle ABC$的E' 為$\triangle H_{3n-2}(E')$ 的**外部二階第 1 相似三角點K**
$\triangle ABC$的E'''為$\triangle H_{3n-2}(E''')$的**外部二階第 2 相似三角點K'**

性質 4.5 ①$\triangle ABC$**內部X_A**為$\triangle H_{3n-1}(X_A)$的**費馬點(類費馬點) F**
②$\triangle ABC$**外部X_B**為$\triangle H_{3n-1}(X_B)$的**第 2 費馬點 F'**

性質 4.6 $\triangle ABC$的三個**直角三角形反射圓**上的點P，必在$\triangle H_{3n-1}(P)$的其中 1 個**二階直角三角形反射圓**上

性質 4.7 $\triangle ABC$的三個**等腰三角形反射圓**上的點P，必在$\triangle H_{3n-1}(P)$的其中 1 條**二階等腰三角形反射自交曲線**上

表 5：三角形反射狀況循環表

△ABC	$\triangle H_1(S)$	$\triangle H_2(S)$	$\triangle H_3(S)$
P為△ABC的相似三角點 S、S′、S″	~△ABC	等腰三角形	~△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(S)$	$\triangle H_{3n-1}(S)$	$\triangle H_{3n}(S)$
	~△ABC	等腰三角形	~△ABC

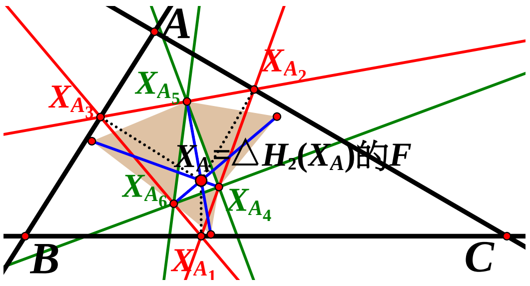
△ABC	$\triangle H_1(N)$	$\triangle H_2(N)$	$\triangle H_3(N)$
P為△ABC的二階相似三角點N、N′、N″	等腰三角形	~△ABC	~△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(N)$	$\triangle H_{3n-1}(N)$	$\triangle H_{3n}(N)$
	等腰三角形	~△ABC	~△ABC

△ABC	$\triangle H_1(E')$	$\triangle H_2(E')$	$\triangle H_3(E')$
P為△ABC的外部的第 2 與第 4 相似三角點E′和E‴	~△ABC		~△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(E')$	$\triangle H_{3n-1}(E')$	$\triangle H_{3n}(E')$
	~△ABC		~△ABC

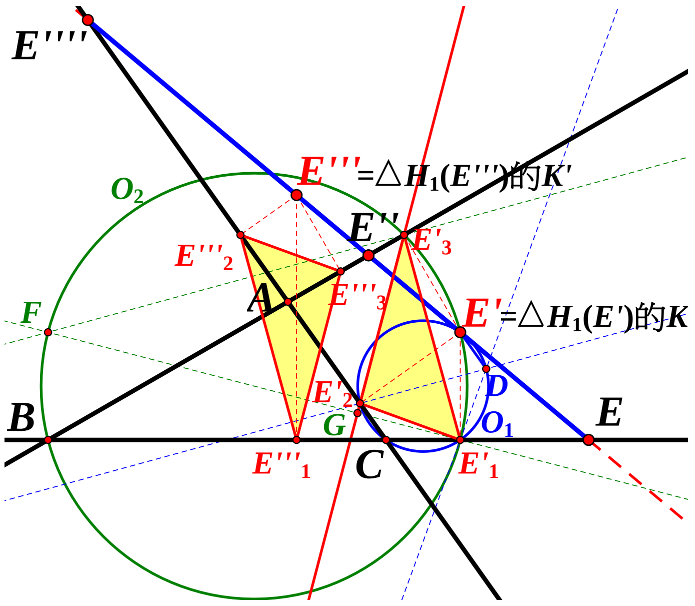
△ABC	$\triangle H_1(X_A)$	$\triangle H_2(X_A)$	$\triangle H_3(X_A)$
P為△ABC的等動力點X_A或X_B	正三角形		~△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(X_A)$	$\triangle H_{3n-1}(X_A)$	$\triangle H_{3n}(X_A)$
	正三角形		~△ABC

△ABC	$\triangle H_1(P)$	$\triangle H_2(P)$	$\triangle H_3(P)$
P在△ABC的直角三角形反射圓上	直角三角形		~△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(P)$	$\triangle H_{3n-1}(P)$	$\triangle H_{3n}(P)$
	直角三角形		~△ABC

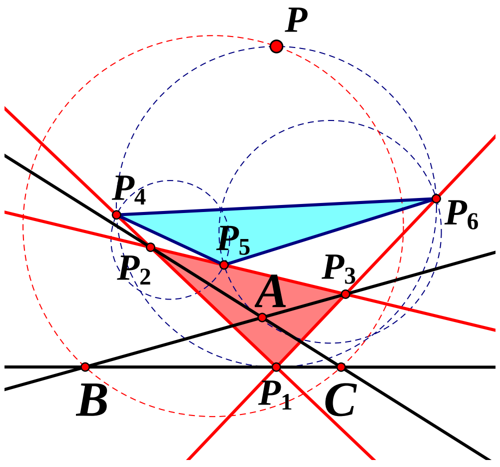
△ABC	$\triangle H_1(P)$	$\triangle H_2(P)$	$\triangle H_3(P)$
P在△ABC的等腰三角形反射圓上	等腰三角形		~△ABC
	↓	↓	↓
	$\triangle H_{3n-2}(P)$	$\triangle H_{3n-1}(P)$	$\triangle H_{3n}(P)$
	等腰三角形		~△ABC



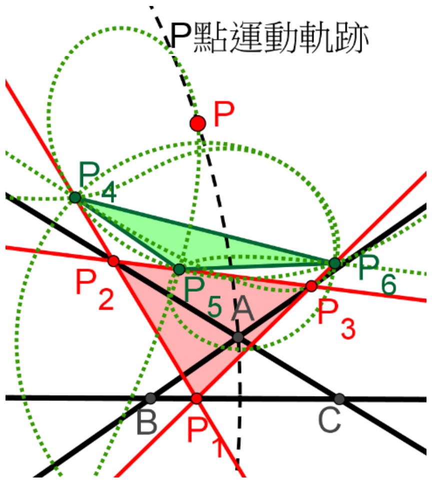
【圖 4.2】$\triangle ABC$三個角形均小於 120˚時，X_A為$\triangle H_2(X_A)$的**費馬點**



【圖 4.1】E'為$\triangle H_1(E')$的外部二階第 1 相似三角點 K，E'''為$\triangle H_1(E''')$的外部二階第 2 相似三角點K'



【圖 4.3】$\triangle ABC$為鈍角三角形且$\triangle H_1(P)$為直角△時，P點必在$\triangle H_2(P)$的**二階直角△反射圓**上



【圖 4.4】$\triangle H_1(P)$為等腰△時，P點必在$\triangle H_2(P)$的**二階等腰三角形反射自交曲線**上

肆、結論與未來展望

本研究順利找出所有經過 1 次、2 次、n次反射後所得的特殊三角形之所有的起始點和軌跡，並得到不錯的結果，讓我們瞭解平面上的點對三角形三邊所在直線作投影(反射)後所形成的垂足(反射)三角形之間的關係，並且透過幾何作圖找到它們，其中尚有許多可以發展的方向如尋找四邊形或立體圖形的起始點，期待未來可以發現更多有趣的結果。

參考資料

一、 林妮瑾、陳愷欣、江品萱(2018)。*三角形的心心相映*。新北市 106 學年度中小學科學展覽國中組數學科

二、 Georgi Ganchev, Gyulbeyaz Ahmed, Marinella Petkova(2012).*Points, whose pedal triangles are similar to the given triangle*. Retrieved May 20, 2020, from Cornell University, History and Overview (math.HO) Web site : https://arxiv.org/abs/1210.2929

三、 Clark Kimberling(2003), *Bicentric Pairs of Points and Related Triangle Centers*. Retrieved Dec 15, 2019, Web site : http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200303.pdf